CH. MÉRAY

Observations sur deux points du calcul des variations

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série, tome 6 (1877), p. 187-192
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1877_2_6__187_0>

OBSERVATIONS

SUR

DEUX POINTS DU CALCUL DES VARIATIONS,

PAR M. CH. MÉRAY,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE DIJON.

I. — SUR LE CALCUL DE LA VARIATION D'UNE INTÉGRALE DÉFINIE.

Le développement de la variation d'une intégrale définie, qui conduit immédiatement aux conditions du maximum ou du minimum de cette intégrale, s'obtient habituellement de deux manières différentes, selon que les limites de l'intégrale sont données ou indéterminées. Les calculs sont simples et directs dans le premier cas, mais non dans le second, soit qu'on le ramène au premier en changeant la variable d'intégration, soit que l'on introduise dans le raisonnement la quantité auxiliaire, désignée ordinairement par la lettre ω. Ces procédés ont tous deux quelques inconvénients pour l'enseignement : ils compliquent sensiblement les calculs et rompent l'uniformité de la théorie; le dernier même, qui est le plus usité, me semble comporter une obscurité réelle par la nécessité qu'il impose d'introduire cette quantité ω, qui n'est pas une variation, et surtout de considérer la variable d'intégration comme dépendant d'autre chose que d'elle-même. La méthode que je vais indiquer s'applique indistinctement aux deux cas et n'est sujette à aucune de ces critiques.

Pour fixer les idées, je considérerai simplement l'intégrale définie,

$$S = \int_{x_0}^{x_1} F[x, y, y^{(m)}]\, dx,$$

où y représente une fonction indéterminée de x, $y^{(m)}$ sa dérivée $m^{\text{ième}}$, et x_0, x_1 des quantités indéterminées; y_0, $y_0^{(i)}$ d'une part, y_1, $y_1^{(i)}$ d'autre part, désigneront les valeurs que prennent les fonctions y, $\dfrac{d^i y}{dx^i}$ pour $x = x_0$ et pour $x = x_1$. Enfin, après avoir remplacé, dans l'intégrale S, x_0 et x_1 par des fonctions indéterminées d'une nouvelle variable α, y par une fonction indéterminée des variables indépendantes x, α, j'appellerai *variations* des quantités x_0, x_1, y, $y^{(i)}$, et je représenterai par la caractéristique δ leurs différentielles partielles par rapport à α. On aura ainsi

$$\delta x_0 = \frac{dx_0}{d\alpha}\,d\alpha,\quad \delta x_1 = \frac{dx_1}{d\alpha}\,d\alpha;\quad \delta y = \frac{dy}{d\alpha}\,d\alpha,\quad \delta y^{(i)} = \frac{dy^{(i)}}{d\alpha}\,d\alpha.$$

Cela posé, l'intégrale S est devenue aussi une fonction de α, et le calcul de sa variation, c'est-à-dire de sa différentielle par rapport à α, s'opère par l'application des quatre principes suivants :

1° *La variation* δS *de l'intégrale proposée est égale à*

$$\mathrm{F}[x_1, y_1, y_1^{(m)}]\delta x_1 - \mathrm{F}[x_0, y_0, y_0^{(m)}]\delta x_0 + \int_{x_0}^{x_1} dx.\delta\mathrm{F}[x, y, y^{(m)}].$$

2° *La variation* δF *d'une fonction composée de* y *et de ses dérivées, telle que* F$[x, y, y^{(m)}]$, *est égale à*

$$\frac{d\mathrm{F}}{dy}\delta y + \frac{d\mathrm{F}}{dy^{(m)}}\delta y^{(m)}.$$

3° *La variation* $\delta y^{(i)}$ *d'une dérivée d'ordre quelconque de* y *par rapport à* x *est égale à*

$$\frac{d^i}{dx^i}\delta y.$$

4° *La valeur* $[\delta y^{(i)}]_0$ *que prend, quand on attribue à* x *une valeur égale à l'une des limites de l'intégrale,* x_0 *par exemple, la variation* $\delta y^{(i)}$, *est égale à l'excès de la variation de* $y_0^{(i)}$, *valeur de* $y^{(i)}$ *pour* $x = x_0$, *sur le produit de* $y_0^{(i+1)}$ *par* δx_0.

Les deux premiers principes reposent sur les règles de la différentiation par rapport au paramètre α, soit d'une intégrale définie le contenant tant dans ses limites que dans la fonction placée sous le signe $\int$, soit d'une fonction composée de x et de fonctions simples des variables indépendantes x, α. Le troisième résulte de l'indifférence de l'ordre de différentiations quelconques exécutées par rapport à x et à α sur une même fonction de ces deux variables indépendantes; et il est inutile d'insister autrement sur leur démonstration.

Le quatrième s'établit en remarquant que $y_0^{(i)}$ est une fonction *composée* de α; car, y étant, par hypothèse, une fonction des variables indépendantes x, α, $y^{(i)} = \frac{d^i y}{dx^i}$ est aussi une certaine fonction $\varphi(x, \alpha)$ des mêmes variables, et $y_0^{(i)} = \varphi(x_0, \alpha)$ est une fonction de α seulement, où ce paramètre entre de deux manières, savoir : immédiatement et, en outre, par l'intermédiaire de x_0, qui est fonction de α. Il en résulte, par la théorie des fonctions composées,

$$\frac{d\varphi(x_0, \alpha)}{d\alpha} d\alpha = \left(\frac{d\varphi}{d\alpha}\right) d\alpha + \left(\frac{d\varphi}{dx_0}\right) \frac{dx_0}{d\alpha} d\alpha,$$

formules où les parenthèses indiquent des dérivées partielles; mais on a évidemment

$$\frac{d\varphi(x_0, \alpha)}{d\alpha} d\alpha = \delta y_0^{(i)}, \quad \left(\frac{d\varphi}{d\alpha}\right) d\alpha = [\delta y^{(i)}]_0, \quad \left(\frac{d\varphi}{dx_0}\right) = y_0^{(i+1)}, \quad \frac{dx_0}{d\alpha} d\alpha = \delta x_0,$$

et la formule précédente devient ainsi

$$\delta y_0^{(i)} = [\delta y^{(i)}]_0 + y_0^{(i+1)} \delta x_0;$$

d'où l'on tire bien

$$(1) \qquad [\delta y^{(i)}]_0 = \delta y_0^{(i)} - y_0^{(i+1)} \delta x_0.$$

On a de même, à l'autre limite,

$$(2) \qquad [\delta y^{(i)}]_1 = \delta y_1^{(i)} - y_1^{(i+1)} \delta x_1.$$

Cela posé, l'application des trois premiers principes donne, comme on le sait,

$$\delta S = F[x_1, y_1, y_1^{(m)}]\delta x_1 - F[x_0, y_0, y_0^{(m)}]\delta x_0 + \int_{x_0}^{x_1} dx \left[\frac{dF}{dy}\delta y + \frac{dF}{dy^{(m)}} \frac{d^m \delta y}{dx^m}\right];$$

l'intégration réitérée par parties du second terme de la fonction placée sous le signe $\int$ transforme l'intégrale en

$$\int_{x_0}^{x_1} dx \left[\frac{dF}{dy} + (-1)^m \frac{d^m}{dx^m}\frac{dF}{dy^{(m)}}\right]\delta y,$$

et ajoute à la quantité extérieure au signe $\int$ la différence

$$\left\{\sum_{i=1}^{i=m}(-1)^{i+1}\left[\frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}}\frac{dF}{dy^{(m)}}\right]\frac{d^{m-i}\delta y}{dx^{m-i}}\right\}_{x=x_1} - \left\{\sum_{i=1}^{i=m}(-1)^{i+1}\left[\frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}}\frac{dF}{dy^{(m)}}\right]\frac{d^{m-i}\delta y}{dx^{m-i}}\right\}_{x=x_0}.$$

L'application du troisième principe aux facteurs $\left(\frac{d^{m-i}\delta y}{dx^{m-i}}\right)_1$, $\left(\frac{d^{m-i}\delta y}{dx^{m-i}}\right)_0$ des termes généraux de ces sommes les change en $[\delta y^{(m-i)}]_1$, $[\delta y^{(m-i)}]_0$, quantités que les relations (1) et (2) permettent d'écrire

$$\delta y_1^{(m-i)} - y_1^{(m-i+1)}\delta x_1, \quad \delta y_0^{(m-i)} - y_0^{(m-i+1)}\delta x_0,$$

moyennant quoi δS revêt définitivement la forme d'une fonction linéaire et homogène des variations de $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(m-1)}, x_1, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m-1)}$, augmentée d'une intégrale définie portant sur le produit par δy, d'une certaine fonction composée de $x, y, y', \ldots, y^{(2m)}$.

Si quelque limite de l'intégrale S est donnée, il faut remplacer partout sa variation par zéro, et par suite la valeur correspondante de $\delta y^{(m-i)}$ par la simple variation de la valeur correspondante de $y^{(m-i)}$. Dans tous les cas, et sauf la transformation finale des valeurs des variations aux limites de l'intégrale, notre méthode n'exige ainsi que les considérations avec lesquelles on traite habituellement le cas des limites fixes.

II. — SUR L'ÉTABLISSEMENT DES CONDITIONS DE MAXIMUM OU DE MINIMUM D'UNE INTÉGRALE DÉFINIE.

Considérons, pour fixer les idées, une intégrale définie où la fonction sous le signe $\int$ dépend d'une seule fonction indéterminée y de la variable d'intégration x. Après avoir mis la variation de cette intégrale sous la forme

$$\text{(1)} \qquad A + \int_{x_0}^{x_1} dx . B\,\delta y,$$

où A est une fonction linéaire et homogène de δx_0, δy_0, $\delta y'_0$, ..., δx_1, δy_1, $\delta y'_1$, ..., et B une fonction composée de x, y, y', ..., on dit que la nullité indéfinie de cette variation entraîne les conditions séparées

$$A = 0, \quad B = 0, \tag{2}$$

parce que la détermination préalable, en fonction du paramètre α, des valeurs aux limites de x, y, y', ..., qui entrent dans A par elles-mêmes ou par leurs variations, n'en laisse pas moins y fonction indéterminée de x et de α dans l'intervalle $x_0\, x_1$. Ce raisonnement laisse à désirer; car, après la détermination partielle dont il s'agit, y n'est plus fonction arbitraire de x et de α entre x_0 et x_1, cette fonction ne pouvant évidemment être égalée à aucune de celles qui, pour $x = x_0$ et $x = x_1$, ne se réduisent pas, elles et leurs dérivées, aux fonctions de α, antérieurement choisies pour les valeurs initiales et finales de y, y', y'', ... Mais voici une manière très-simple de procéder en toute rigueur.

En désignant par $y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(k_0-1)}$; $y_1, y'_1, \ldots, y_1^{(k_1-1)}$ les valeurs aux limites de y et de ses dérivées qui figurent dans A, soit par elles-mêmes, soit par leurs variations, toute fonction y de x et de α, *olotrope* [1] dans l'intervalle $x_0\, x_1$, qui se réduit à $y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(k_0-1)}$, elle et ses $k_0 - 1$ premières dérivées par rapport à x, pour $x = x_0$, et à $y_1, y'_1, \ldots, y_1^{(k_1-1)}$, elle et ses $k_1 - 1$ premières dérivées par rapport à x, pour $x = x_1$, est de la forme

$$y = \mathrm{H} + (x - x_0)^{k_0}(x - x_1)^{k_1}\eta, \tag{3}$$

où H désigne une fonction olotrope de x et de $x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(k_0-1)}$, $x_1, y_1, y'_1, \ldots, y_1^{(k_1-1)}$, choisie au hasard parmi celles qui satisfont à ces deux séries de conditions extrêmes, et η une fonction de x (et de α) tout à fait arbitraire. Effectivement la différence $y - \mathrm{H}$ s'annule évidemment avec ses $k_0 - 1$ premières dérivées pour $x = x_0$, et avec ses $k_1 - 1$ premières dérivées pour $x = x_1$, et par suite, en vertu de la théorie des fonctions d'une seule variable, se réduit au produit de $(x - x_0)^{k_0}(x - x_1)^{k_1}$ par une certaine fonction olotrope dans l'inter-

---

[1] J'ai désigné ainsi, dans une autre occasion, les fonctions développables par la série de Taylor, en faisant remarquer qu'à elles seules on est en droit d'appliquer les propositions générales du Calcul différentiel et intégral.

valle $x_0 x_1$. D'ailleurs toutes les fonctions fournies par la formule (3) satisfont évidemment aux conditions auxquelles H et, par suite, y sont assujetties en x_0 et x_1.

Cela posé, comme la différentiation de la relation (3) par rapport à α donne

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta y = \delta H - [(x-x_0)^{k_0-1}(x-x_1)^{k_1-1}\eta][k_0(x-x_1)\delta x_0 + k_1(x-x_0)\delta x_1] \\ + (x-x_0)^{k_0}(x-x_1)^{k_1}\delta\eta, \end{aligned} \right.$$

où δH est évidemment une fonction linéaire et homogène des variations de $x_0, y_0, \ldots, y_0^{k_0-1}, x_1, y_1, \ldots, y_1^{k_1-1}$, la variation (1) prend la forme

$$(5) \qquad A' + \int_{x_0}^{x_1} dx (x-x_0)^{k_0}(x-x_1)^{k_1} B' \delta\eta,$$

A' représentant ici l'ensemble des termes de A et de ceux de même nature fournis par les deux premières parties du second membre de la formule (4), et B' étant ce que devient l'expression différentielle B, après la substitution à y, du second membre de la relation (3).

A présent, $\delta\eta$ étant *tout à fait* arbitraire entre x_0 et x_1, le raisonnement habituel permet d'établir rigoureusement que la nullité indéfinie de la variation (5) entraîne l'identité

$$(x-x_0)^{k_0}(x-x_1)^{k_1} B' = 0,$$

puis

$$(6) \qquad B' = 0$$

entre x_0 et x_1, et finalement de x_0 à x_1 *inclusivement;* car B'_0, B'_1 sont les limites vers lesquelles tend B quand x tend successivement vers x_0 et vers x_1. Il suffit actuellement d'exécuter dans l'identité (6) la substitution inverse de celle qu'exprime la relation (3) pour retrouver successivement la seconde et la première des conditions (2).