Annales scientifiques de l'É.N.S.

Micheline Vigué-Poirrier

Homotopie rationnelle et croissance du nombre de géodésiques fermées

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 17, nº 3 (1984), p. 413-431

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1984_4_17_3_413_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 17, 1984, p. 413-431.

HOMOTOPIE RATIONNELLE ET CROISSANCE DU NOMBRE DE GÉODÉSIQUES FERMÉES

PAR MICHELINE VIGUÉ-POIRRIER (*)

RÉSUMÉ. — Soit X un espace topologique 1-connexe ayant le type d'homotopie rationnelle d'un C.W. complexe et tel que $\dim H^*(X, \mathbb{Q}) < \infty$. On étudie la croissance de la suite des nombres de Betti $\beta_i = \dim H^i(X^{S^1}, \mathbb{Q})$. Si $\dim \Pi_*(X) \otimes \mathbb{Q} < \infty$, soit :

$$p = \dim \bigoplus_n \Pi_{2n+1}(X) \otimes \mathbb{Q},$$

on montre que si X possède un modèle minimal de Sullivan $(\Lambda Z, d)$ où $dZ \subset Z^{\text{pair}}.\Lambda Z$, alors on a, pour n assez grand,

$$A_2 n^p \leqq \sum_{i=0}^{n} \beta_i \leqq A_1 n^p$$

où A_1 et A_2 sont des constantes >0; et que sinon, on peut avoir $\Sigma \beta_i \leqq A_1 n^{p-h}$ où h est un entier >0 donné d'avance. Si $\dim \Pi_*(X) \otimes \mathbb{Q} = \infty$, on montre que la suite (β_i) est à croissance exponentielle pour les classes d'espaces suivants : bouquets de sphères, variétés compactes 1-connexes coformelles X telles que l'algèbre de cohomologie réelle $H = H^*(X, \mathbb{R})$ ait un système de générateurs de même degré, et $(H^+)^4 = 0$. Si X est une variété riemannienne compacte 1-connexe munie d'une métrique générique, on sait que le nombre de géodésiques fermées de longueur $<n$ est minoré par $(c/n) \sum_{i=1}^{n} \beta_i$ où C est une constante >0; alors les résultats précédents se transposent immédiatement en géométrie.

Classification AMS (MOS) : 55 P 62, 55 P 35, 53 C 22.

Mots clés : espaces des lacets libres, modèle minimal de Sullivan, série de Poincaré.

1. Introduction

Dans [18], il a été prouvé, par des méthodes d'homotopie rationnelle, l'existence d'une infinité de géodésique fermées géométriquement distinctes sur toute variété riemannienne compacte 1-connexe dont l'algèbre de cohomologie réelle ne peut pas être engendrée par un élément. Des méthodes analogues ont été utilisées dans [11], pour étudier l'existence

(*) E.R.A. au C.N.R.S. 07 590.

d'infinité de géodésiques invariantes par une isométrie d'ordre fini. Les développements récents de la théorie de l'homotopie rationnelle ([6], [7], [8]), ont permis de montrer dans [10], que, sur une variété riemannienne compacte 1-connexe dont l'homotopie rationnelle n'est pas de dimension finie, toute isométrie a une infinité de géodésiques invariantes.

Un problème plus fin, étudié depuis de nombreuses années, est de connaître la croissance du nombre de géodésiques fermées géométriquement distinctes de longueur $< n$ ($n \in \mathbb{N}$ fixé) sur une variété riemannienne compacte 1-connexe M. Dans cet article, nous résolvons ce problème pour de larges classes d'espaces. On sait, [9], que ce nombre est minoré par $C/n \sum_{i=1}^{n} \dim H^i(M^{S^1}, \mathbb{R})$ où C est une constante >0 et M^{S^1} est l'espace des lacets libres sur M (i. e. des applications continues de S^1 dans M), pourvu que la métrique de M soit « bumpy », condition qui est générique. (L'ensemble des métriques « bumpy » est dense dans l'espace de Fréchet des métriques riemanniennes C^∞ sur M) (*voir* [0]).

On va donc s'intéresser à la suite $\left(\sum_{i=0}^{n} \dim H^i(M^{S^1}, \mathbb{R})\right)_{n \in \mathbb{N}}$.

Plus généralement, nous considérerons, dans toute la suite, des espaces topologiques X 1-connexes, ayant le type d'homotopie d'un C.W. complexe et dont la cohomologie rationnelle est de dimension finie en chaque degré; pour de tels espaces, $\pi_p(X) \otimes \mathbb{Q}$ est de dimension finie pour tout p. Le produit de Whitehead dans $\pi_*(X) \otimes \mathbb{Q}$, transféré à $\pi_*(\Omega X) \otimes \mathbb{Q}$ par l'isomorphisme canonique, induit une structure d'algèbre de Lie graduée sur $\pi_*(\Omega X) \otimes \mathbb{Q}$. Nous distinguerons deux classes de tels espaces : X est dit *rationnellement elliptique* si $\dim \pi_*(X) \otimes \mathbb{Q} < \infty$, sinon X est dit *rationnellement hyperbolique*. On appelle i-ième nombre de Betti de ΩX (resp. X^{S^1}), l'entier $b_i = \dim H^i(\Omega X, \mathbb{Q})$ (resp. $\beta_i = \dim H^i(X^{S^1}, \mathbb{Q})$). On considérera les séries de Poincaré :

$$S_{H^*(X)}(T) = \sum_n \dim H^n(X)\, T^n, \qquad S_{H^*(\Omega X)}(T) = \sum_n b_n T^n, \qquad S_{H^*(X^{S^1})}(T) = \sum_n \beta_n T^n.$$

Rappelons que la catégorie de Lusternik-Schnirelmann d'un espace X est le plus petit entier m tel que X peut être recouvert par $(m+1)$ ouverts, chacun contractile dans X, ([6], [14]). La *L.S. catégorie rationnelle*, notée $\operatorname{cat}_0(X)$, est la catégorie du localisé $X_{\mathbb{Q}}$, et on a :

$$\operatorname{cat}_0(X) \leqq \sup\{ n \mid H^n(X, \mathbb{Q}) \neq 0 \}.$$

Définition. — Une suite de réels positifs $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite à *croissance exponentielle* s'il existe $N \in \mathbb{N}$ et des constantes C_1 et C_2, $C_1 \geqq C_2 > 1$, tels que, pour tout $n \geqq N$, on a :

$$C_2^n \leqq \sum_{i=0}^{n} a_i \leqq C_1^n.$$

Le terme « hyperbolique » se justifie par le théorème suivant :

THÉORÈME [7]. — *Si* X *est rationnellement hyperbolique et de L.S. catégorie finie, alors la suite* $(\dim \pi_i(X) \otimes \mathbb{Q})_{i \geq 2}$, *et la suite des nombres de Betti de* ΩX *sont à croissance exponentielle.*

D'autre part, on a :

THÉORÈME [6], [12]. — *Si* X *est rationnellement elliptique et de* L.S. *catégorie finie, alors* $\dim H^*(X, \mathbb{Q}) < \infty$;

$$\dim \pi_{\text{pair}}(X) \otimes \mathbb{Q} \leqq \dim \pi_{\text{impair}}(X) \otimes \mathbb{Q} \leqq \text{cat}_0(X).$$

Le but de ce papier est d'étudier la conjecture suivante (qui résoudrait le problème de la croissance du nombre de géodésiques fermées) :

Conjecture. — La croissance des nombres de Betti de X^{S^1} est exponentielle si et seulement si elle l'est pour ΩX.

Dans cet article, nous démontrons que si X est un espace tel que $\dim H^*(X, \mathbb{Q}) < \infty$ et $\dim \pi_*(X) \otimes \mathbb{Q} < \infty$, alors les nombres de Betti de X^{S^1} croissent polynomialement, avec le même degré que ceux de ΩX si X admet un modèle pur (théorème 2.2). Un exemple montrant que le degré de la croissance polynomiale des nombres de Betti de X^{S^1} peut être strictement plus petit que celui pour ΩX est donné au paragraphe 2 (théorème 2.6).

Dans le paragraphe 3, nous nous intéressons aux espaces formels. Un espace est *formel* si son type d'homotopie rationnelle est entièrement déterminé par son algèbre de cohomologie rationnelle, [13]; des définitions équivalentes sont données, par exemple dans [14]. Un espace X est *coformel* si son type d'homotopie rationnelle est entièrement déterminé par son algèbre de Lie d'homotopie rationnelle $\pi_*(\Omega X) \otimes \mathbb{Q}$ ([14, [16]).

Nous donnerons des exemples aux paragraphes 3 et 4. Dans le paragraphe 3, plusieurs théorèmes sont démontrés, donnant des minorations des nombres de Betti de X^{S^1} en fonction des dimensions des groupes d'homotopie rationnelle de X.

Au paragraphe 4, nous utilisons les théorèmes précédents pour démontrer la croissance exponentielle des nombres de Betti de l'espace des lacets libres sur divers espaces rationnellement hyperboliques formels et coformels : bouquets de sphères (théorème 4.1), variétés compactes 1-connexes coformelles dont l'algèbre de cohomologie H possède un système minimal de générateurs de même degré et en nombre assez grand et telle que $(H^+)^4 = 0$ (théorèmes 4.2 et 4.3).

L'outil principal utilisé dans ce papier est la théorie du modèle minimal de Sullivan ([18], [6]). Nous rappellerons brièvement, au cours des démonstrations, les résultats de cette théorie, nécessaires à la compréhension des théorèmes. Nous notons $(\Lambda Z, d)$ le modèle minimal d'un espace X, c'est une algèbre différentielle graduée commutative sur $\mathbb{Q}$, en abrégé A.D.G.C., on a $Z = \sum_{p \geq 2} Z^p$, $Z^p \simeq \text{Hom}(\pi_p(X) \otimes \mathbb{Q}, \mathbb{Q})$, $\Lambda Z =$ algèbre extérieure $(Z^{\text{impair}}) \otimes$ algèbre symétrique (Z^{pair}), d est homogène de degré $+1$ et $d(Z) \subset \Lambda^+ Z . \Lambda^+ Z$, $H^*(\Lambda Z, d) \simeq H^*(X, \mathbb{Q})$.

2. Cas des espaces rationnellement elliptiques

Il est démontré dans [12] que si un espace X est rationnellement elliptique, alors sa cohomologie et son homotopie satisfont à des conditions très restrictives : par exemple, $H^*(X, \mathbb{Q})$ vérifie la dualité de Poincaré, les entiers $\dim \pi_p(X) \otimes \mathbb{Q}$ déterminent le degré de la classe fondamentale, la caractéristique d'Euler-Poincaré est positive.

PROPOSITION 2.1. — *Soit* X *un espace tel que* $\dim H^*(X, \mathbb{Q}) < \infty$ *et* $\dim \pi_*(X) \otimes \mathbb{Q} < \infty$. *Alors il existe un entier* N *et une constante* $A_1 > 0$ *tels que, pour tout* $n \geqq N$, *on a* :

$$\sum_{i=0}^{n} \dim H^i(X^{S^1}, \mathbb{Q}) \leqq A_1 n^p \qquad \text{où} \quad p = \dim \pi_{\text{impair}}(X) \otimes \mathbb{Q} = \dim \bigoplus_{n \geqq 1} \pi_{2n+1}(X) \otimes \mathbb{Q}.$$

Démonstration. — Cela résulte, d'une part de la formule :

$$S_{H^*(X^{S^1})}(T) \leqq S_{H^*(X)}(T) \,.\, S_{H^*(\Omega X)}(T)$$

qui se démontre aisément en regardant la suite spectrale de Serre du fibré : $\Omega X \to X^{S^1} \to X$, [20]; et d'autre part, du théorème de Poincaré-Birkoff-Witt qui implique que :

$$S_{H^*(\Omega X)}(T) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(1+T^{2k-1})^{\alpha_{2k-1}}}{(1-T^{2k})^{\alpha_{2k}}} \qquad \text{où} \quad \alpha_i = \dim (\pi_{i+1}(X) \otimes \mathbb{Q}).$$

THÉORÈME 2.2. — *Soit* X *un espace tel que* $\dim H^*(X, \mathbb{Q}) < \infty$ *et* $\dim \pi_*(X) \otimes \mathbb{Q} < \infty$. *Supposons que* X *possède un modèle minimal de Sullivan* $(\Lambda Z, d)$ *tel que* $dZ \subset Z^{\text{pair}} . \Lambda Z$, *alors il existe des constantes* $A_1 > 0$, $A_2 > 0$ *et un entier* $N \in \mathbb{N}$ *tels que* : *si* $n \geqq N$, *on a* :

$$A_2 n^p \leqq \sum_{i=0}^{n} \dim H^i(X^{S^1}, \mathbb{Q}) \leqq A_1 n^p,$$

où $p = \dim \pi_{\text{impair}}(X) \otimes \mathbb{Q}$.

Avant de démontrer le théorème, décrivons des familles d'espaces rationnellement elliptiques satisfaisant à l'hypothèse supplémentaire du théorème 2.2.

DÉFINITION [12]. — Un espace est dit *pur* s'il possède un modèle minimal de Sullivan $(\Lambda Z, d)$ tel que si $P = \bigoplus_{n>0} Z^{2n+1}$, $Q = \bigoplus_{n>0} Z^{2n}$, alors $d_{|Q} = 0$ et $dP \subset \Lambda Q$.

Exemples 2.3. — S^k, $k \geqq 2$; $P^n(\mathbb{C})$, $n \geqq 1$; G/H où G est un groupe de Lie compact et H un sous-groupe fermé, sont des espaces purs tels que $\dim H^*(., \mathbb{Q}) < \infty$ et $\dim \pi_*(.) \otimes \mathbb{Q} < \infty$. Tout produit d'espaces purs est pur.

COROLLAIRE 2.4. — *Soit* X *un espace tel que* $\dim H^*(X, \mathbb{Q}) < \infty$, $\dim \pi_*(X) \otimes \mathbb{Q} < \infty$ *et* $\sum_{n \geqq 1} \dim \pi_{2n}(X) \otimes \mathbb{Q} = \sum_{n \geqq 1} \dim \pi_{2n+1}(X) \otimes \mathbb{Q} = p$, *alors il existe* $A_1 > 0$, $A_2 > 0$ *et un* *entier* N *tels que, pour tout* $n \geqq N$, *on a* :

$$A_2 n^p \leqq \sum_{i=0}^{n} \dim H^i(X^{S^1}, \mathbb{Q}) \leqq A_1 n^p.$$

Preuve. — Ce corollaire se déduit du théorème 2.2 et du théorème de [12] disant qu'un tel espace est pur.

Démonstration du théorème 2.2. — Dans [19], le calcul du modèle minimal de X^{S^1} à partir de celui de X est donné, pour un espace X 1-connexe quelconque. Soit $(\Lambda Z, d)$ le modèle minimal de X; posons $\bar{Z}^p = Z^{p+1}$, $p \geqq 1$, et considérons la dérivation $i : \Lambda Z \otimes \Lambda \bar{Z} \to \Lambda Z \otimes \Lambda \bar{Z}$ de degré -1 prolongeant l'application identique $Z^{p+1} \to \bar{Z}^p$, et égale à 0 sur $\bar{Z}$. On définit une différentielle $\bar{d}$ sur $\Lambda Z \otimes \Lambda \bar{Z}$, prolongeant d, par la formule $\bar{d}i + i\bar{d} = 0$. Alors $(\Lambda Z \otimes \Lambda \bar{Z}, \bar{d})$ est le modèle minimal de X^{S^1}.

Soient $(y_1, \ldots, y_p)$ (resp. $(x_1, \ldots, x_q)$) les générateurs de $P = \bigoplus_{n \geqq 1} Z^{2n+1}$ (*resp.* $Q = \bigoplus_{n \geqq 1} Z^{2n}$), numérotés par ordre croissant des degrés. Par hypothèse, on a, pour tout $k \in [1, \ldots, p]$:

$$dy_k = \sum_{h \geqq 0} \sum_{j=1}^{q} x_j \, \alpha_j^{2h} \qquad \text{où} \quad \alpha_j^{2h} \in \Lambda^{2h} P \otimes \Lambda Q,$$

et pour tout $l \in [1, \ldots, q]$, $dx_l = \sum_{j=1}^{q} x_j \, \beta_j$ où $\beta_j \in \Lambda^+ Z$.

Par définition de $\bar{d}$, on a :

$$-\bar{d}\bar{y}_k = \sum_{h \geqq 0} \sum_{j=1}^{q} \bar{x}_j \, \alpha_j^{2h} + \sum_{h \geqq 0} \sum_{j=1}^{q} x_j \, i(\alpha_j^{2h}),$$
$$-\bar{d}\bar{x}_l = \sum \bar{x}_j \, \beta_j + \sum x_j \, i(\beta_j).$$

L'idéal $(x_1, \ldots, x_q)$ étant stable par d, on définit, par passage au quotient, une différentielle $\bar{d}'$ sur $(\Lambda Z \otimes \Lambda \bar{Z})/(x_1, \ldots, x_q)$ par :

$$-\bar{d}'\bar{y}_k = \sum_{h \geqq 0} \sum_{j} \bar{x}_j \, \psi(\alpha_j^{2h}),$$
$$-\bar{d}' \bar{x}_l = \sum_{j} \bar{x}_j \, \psi(\beta_j),$$

où ψ est l'homomorphisme de projection de $\Lambda Z \otimes \Lambda \bar{Z}$ sur $(\Lambda Z \otimes \Lambda \bar{Z})/(x_1, \ldots, x_q)$.

Pour tout p-uplet $(k_1, \ldots, k_p) \in \mathbb{N}^p$, les éléments du type :

$$\left(\prod_{j=1}^{q} \bar{x}_j \right) . \bar{y}_1^{k_1} . \bar{y}_2^{k_2} \ldots \bar{y}_p^{k_p}$$

sont donc des cocycles de $((\Lambda Z\otimes\Lambda\bar{Z})/(x_1,\ldots,x_q),\ \bar{d}')$. De plus, comme $\operatorname{Im}\bar{d}\subset Z.(\Lambda Z\otimes\Lambda\bar{Z})$, l'application $\mathbb{N}^p\to H^*((\Lambda Z\otimes\Lambda\bar{Z})/(x_1,\ldots,x_q),\bar{d}')$ qui, à $(k_1,\ldots,k_p)$ associe la classe de $\left(\prod_{j=1}^{q}\bar{x}_j\right).\prod_{i=1}^{p}\bar{y}_i^{k_i}$ est injective.

Il est facile de montrer qu'il existe une constante $B>0$, un entier N et une suite croissante (n_i) où :

$$n_{i+1}-n_i=\text{p.p.c.m.}\ ((\deg y_j)_{1\leqq j\leqq p})$$

tels que, si $n_i\geqq N$, alors :

$$\dim H^{n_i}((\Lambda Z\otimes\Lambda\bar{Z})/(x_1,\ldots,x_q),\bar{d}')\geqq B\,n_i^{p-1}.$$

Dans [19], on démontre que :

$$S_{H^*((\Lambda Z\otimes\Lambda\bar{Z})/(x_1,\ldots,x_q),\bar{d}')}(T)\leqq\prod_{i=1}^{q}(1+T^{\deg x_i-1}).\,S_{H^*(\Lambda Z\otimes\Lambda\bar{Z},\bar{d})}(T).$$

On en déduit qu'il existe une constante $C>0$, un entier N et une suite croissante (n'_i) où :

$$0<n'_{i+1}-n'_i\leqq\text{p.p.c.m.}\ (\deg y_j)+\sum_{i=1}^{q}(\deg x_i-1),$$

tels que si $n'_i\geqq N$, alors $\dim H^{n'_i}(\Lambda Z\otimes\Lambda\bar{Z},\bar{d})\geqq C\,n_i'^{p-1}$.

Ceci implique qu'il existe $A_2>0$ et un entier N tels que si $n\geqq N$, on a :

$$\sum_{i=1}^{n}\dim H^i(\Lambda Z\otimes\Lambda\bar{Z},\bar{d})\geqq A_2\,n^p.$$

L'exemple suivant montre qu'on ne peut pas affaiblir l'hypothèse technique du théorème 2.2.

Exemple 2.5. — Soit $X=T_1(S^3\times S^3)$ l'espace total du fibré tangent unitaire de base $S^3\times S^3$ et de fibre S^5. Le modèle minimal de X est :

$$(\Lambda Z,d)=(\Lambda(x,y,z),\ d)$$

où

$$\deg y=\deg z=3,\qquad \deg x=5,\qquad dx=yz,\qquad dy=0,\qquad dz=0.$$

Le calcul suivant montre que $\beta_n=\dim H^n(X^{S^1},\mathbb{Q})$ vérifie $\beta_n\leqq n$, pour tout n, alors que $\dim\pi_{\text{impair}}(X)\otimes\mathbb{Q}=3$.

D'après [19], le modèle minimal de X^{S^1} est :

$$(\bar{\Lambda},\bar{d})=[\Lambda(x,y,z,\bar{x},\bar{y},\bar{z}),\bar{d}]$$

où

$$\deg \bar{y} = \deg \bar{z} = 2, \qquad \deg \bar{x} = 4, \qquad \bar{d}\bar{y} = \bar{d}\bar{z} = 0, \qquad \bar{d}\bar{x} = \bar{y}z - y\bar{z}.$$

Comme $\bar{d}\bar{y} = 0$, $\bar{\Lambda}/y\bar{\Lambda}$ a une structure d'A.D.G.C. si on la munit de la différentielle déduite de $\bar{d}$ par passage au quotient. On a alors une suite exacte d'A.D.G.C. :

$$0 \to (\bar{\Lambda}, \bar{d}) \xrightarrow{\mu} (\bar{\Lambda}, \bar{d}) \xrightarrow{\psi} (\bar{\Lambda}/\bar{y}\bar{\Lambda}) \to 0,$$

où ψ est l'homomorphisme de passage au quotient et μ est la multiplication par $\bar{y}$.

On en déduit une suite exacte longue de cohomologie :

$$\ldots \to H^{n-1}(\bar{\Lambda}/\bar{y}\,\bar{\Lambda}) \to H^{n-2}(\bar{\Lambda}) \xrightarrow{H^{n-2}(\mu)} H^n(\bar{\Lambda}) \xrightarrow{H^n(\psi)} H^n(\bar{\Lambda}/\bar{y}\,\bar{\Lambda}) \to H^{n-1}(\bar{\Lambda}) \to \ldots$$

Soit $K^{n-2} = \operatorname{Ker} H^{n-2}(\mu)$ et $K = \bigoplus_n K^n$. On a :

$$0 \to K^{n-2} \to H^{n-2}(\bar{\Lambda}) \to H^n(\bar{\Lambda}) \to H^n(\bar{\Lambda}/\bar{y}\,\bar{\Lambda}) \to K^{n-1} \to 0,$$

d'où :

$$\dim K^{n-2} - \dim H^{n-2}(\bar{\Lambda}) + \dim H^n(\bar{\Lambda}) - \dim H^n(\bar{\Lambda}/\bar{y}\,\bar{\Lambda}) + \dim K^{n-1} = 0.$$

En sommant sur n, on a la relation suivante entre séries de Poincaré :

$$T(1+T)\,S_K - T^2\,S_{H^*(\bar{\Lambda})} + S_{H^*(\bar{\Lambda})} - S_{H^*(\bar{\Lambda}/\bar{y}\,\bar{\Lambda})} = 0,$$

$$S_{H^*(\bar{\Lambda})} = [1/(1-T^2)]\,.\,S_{H^*(\bar{\Lambda}/\bar{y}\bar{\Lambda})} - [T(1+T)/(1-T^2)]\,S_K.$$

On peut faire le même calcul avec le quotient de $\bar{\Lambda}/\bar{y}\,\bar{\Lambda}$ par l'idéal engendré par $\bar{z}$, on obtient l'A.D.G.C. $\Lambda(x, y, z, \bar{x})$ munie de la différentielle $dx = yz$, $dy = 0$, $dz = 0$, $d\bar{x} = 0$. Soit $L = \operatorname{Ker} H^{n-2}(\nu)$ où ν est la multiplication par $\bar{z}$ dans $\bar{\Lambda} \,|\, \bar{y}\,\bar{\Lambda}$. On obtient :

$$S_{H^*(\bar{\Lambda}/\bar{y}\bar{\Lambda})} = (1/(1-T^2))\,.\,S_{H^*(\Lambda(x,y,z,\bar{x}),d)} - [T(1+T)/(1-T^2)]\,.\,S_L.$$

On a $H^*(\Lambda(x, y, z, \bar{x}), d) = H^*(\Lambda(x, y, z), d) \otimes \Lambda(\bar{x})$. On calcule facilement $S_{H^*(\Lambda(x,y,z),d)} = 1 + 2T^3 + 2T^8 + T^{11}$ d'où :

$$S_{H^*(\bar{\Lambda},\bar{d})} = \frac{1+2T^3+2T^8+T^{11}}{(1-T^2)^2(1-T^4)} - \frac{T(1+T)}{(1-T^2)^2}\,S_L - \frac{T(1+T)}{1-T^2}\,S_K.$$

Un calcul précis donne : $S_L = (T^3 + T^{10} + T^{11})/(1-T^4)$, et $S_K = (T^{10} + T^{11})/(1-T^4)$. D'où :

$$S_{H^*(\bar{\Lambda},\bar{d})} = \frac{P(T)}{(1-T^2)^2(1-T^4)} - \frac{T^{11}(1+T)^2}{(1-T^2)(1-T^4)}$$

avec :

$$P(T) = 1 + 2T^3 - T^4 - T^5 + 2T^8 - 2T^{12} - T^{13},$$

$$P(T) = (1-T)(1+T+T^2+3T^3+2T^4+T^5+T^6+T^7+3T^8+3T^9+3T^{10}+3T^{11}+T^{12}).$$

Ceci prouve que $\beta_n = \dim H^n(\bar{\Lambda}, \bar{d})$ est un polynôme en n de degré $\leqq 1$. Le calcul donne que, pour $n \geqq 2$, on a :

$$\beta_{4n} = 4n - 1, \qquad \beta_{4n+1} = 4n, \qquad \beta_{4n+2} = 4n+2, \qquad \beta_{4n+3} = 4n+3.$$

Cet exemple permet de montrer :

THÉORÈME 2.6. — *Pour tout entier* $h \geqq 1$, *il existe des espaces* Y_h *tels que* $\dim H^*(Y_h, \mathbb{Q}) < \infty$, $\dim \pi_*(Y_h) \otimes \mathbb{Q} < \infty$ *et pour* n *assez grand*, $\dim H^n(Y_h^{S^1})$ *est un polynôme en* n *de degré* d_h, *avec :*

$$\dim \pi_{\text{impair}}(Y_h) \otimes \mathbb{Q} - d_h \geqq h.$$

Démonstration. — Posons $k = E[h/2] + 1$ (où E signifie partie entière). Si $X = T_1(S^3 \times S^3)$ est l'espace décrit dans l'exemple 2.5 de modèle minimal $(\Lambda Z, d)$, notons :

$$Y_h = X \times X \times \ldots \times X \quad (k \text{ fois});$$

le modèle minimal de Y_h est :

$$(\underbrace{\Lambda Z \otimes \ldots \otimes \Lambda Z}_{k \text{ fois}}, \underbrace{d \otimes \ldots \otimes d}_{k \text{ fois}}).$$

Celui de $Y_h^{S^1}$ est :

$$[\underbrace{(\Lambda Z \otimes \Lambda \bar{Z}) \otimes \ldots \otimes (\Lambda Z \otimes \Lambda \bar{Z})}_{k \text{ fois}}, \underbrace{\bar{d} \otimes \ldots \otimes \bar{d}}_{k \text{ fois}}],$$

donc $\dim H^n(Y_h^{S^1})$ est un polynôme en n de degré $d_h = k$, d'où on déduit que :

$$\dim \pi_{\text{impair}}(Y_h) \otimes \mathbb{Q} - d_h = k \dim \pi_{\text{imp}}(X) \otimes \mathbb{Q} - k = 2k \geqq h.$$

3. Minoration des nombres de Betti de X^{S^1} à l'aide des dimensions des groupes d'homotopie lorsque X est formel

Les formules démontrées seront intéressantes pour des espaces rationnellement hyperboliques (*voir* § 4).

Les espaces formels sont étudiés dans ([18], [13], [14], [16]). Voici des exemples d'espaces formels : les variétés kählériennes compactes 1-connexes [4], les espaces riemanniens symétriques compacts orientables [18], les variétés compactes p-connexes de dimension $\leqq 4p+1$ [16], les variétés compactes 1-connexes de dimension $\leqq 6$ [6], les espaces $K(\mathbb{Z}, n)$; tout produit, bouquet et somme connexe d'espaces formels.

Nous nous bornerons à étudier des espaces formels X dont l'espace vectoriel de cohomologie $H = H^*(X, \mathbb{Q})$ est de dimension finie. Dans ce cas, $m = \text{cat}_0 X$ est le plus petit entier tel que $\underbrace{H^+ \times H^+ \times \ldots \times H^+}_{m+1 \text{ fois}} = 0$.

Si on définit une graduation sur $H^*(X)$ par la longueur des mots, on a $H = \bigoplus_{\beta=0}^{m} H_\beta$ (par convention, $H_0 = H^0 = \mathbb{Q}$).

Dans [13], il est démontré que $H = H^*(X, \mathbb{Q})$ a un modèle minimal bigradué $\rho : (\Lambda Z, d) \to H$ où Z possède une bigraduation :

$$\bigoplus_{\substack{n \geq 0 \\ p \geq 1}} Z_n^p, \qquad d(Z_n^p) \subset (\Lambda Z)_{n-1}^{p+1},$$

de plus $\rho(Z_n) = 0$ si $n \geq 1$, $\rho : \Lambda Z_0 \to H$ est surjective et $\rho^* : H_0(\Lambda Z, d) \to H$ est un isomorphisme. Si X est formel, $(\Lambda Z, d)$ est aussi le modèle minimal de X, et on a :

$$\dim_{\mathbb{Q}} Z^p = \bigoplus_n \dim Z_n^p = \dim \pi_p(X) \otimes \mathbb{Q}.$$

Au paragraphe 2, on a décrit le modèle minimal $(\Lambda Z \otimes \Lambda \bar{Z}, \bar{d})$ de X^{S^1}. On peut définir une bigraduation sur $\bar{Z}$ par $\bar{Z}_q^p = Z_{q-1}^{p+1}$ si $q \geq 1$, $p \geq 1$.

Définissons sur $H \otimes \Lambda \bar{Z}$ une différentielle d' par $d'_{|H} = 0$, $d' \bar{z} = (\rho \otimes \mathrm{id})(\bar{d} \bar{z})$ si $\bar{z} \in \bar{Z}$; alors :

$$\rho \otimes \mathrm{id} : \quad (\Lambda Z \otimes \Lambda \bar{Z}, \bar{d}) \to (H \otimes \Lambda \bar{Z}, d')$$

est un morphisme de A.D.G.C. qui induit un isomorphisme en cohomologie, donc :

$$H^*(X^{S^1}, \mathbb{Q}) = H^*(\Lambda Z \otimes \Lambda \bar{Z}, \bar{d}) = H^*(H \otimes \Lambda \bar{Z}, d').$$

LEMME 3.1. — $d'(\bar{Z}_{q+1}^{n-1}) \subset (H^+ \otimes \bar{Z}_q)^n$ si $n \geq 2$, $q \geq 1$.

Démonstration. — Ce lemme se déduit facilement du fait que $d : Z_q^n \to (\Lambda^+ Z . \Lambda^+ Z)_{q-1}^{n+1}$ et que $\rho(Z_k) = 0$ si $k \geq 1$.

THÉORÈME 3.2. — *Soit* X *un espace formel tel que* $\dim(H = H^*(X, \mathbb{Q})) < \infty$. *Soient* $(d_i)_{1 \leq i \leq p}$ *les degrés d'une base du* $\mathbb{Q}$*-espace vectoriel* $H^+/(H^+)^2 = H_1$ (i.e. *d'un système minimal de générateurs de l'algèbre commutative graduée* H), *soient* $(\delta_j)_{1 \leq j \leq q}$ *les degrés d'une base du* $\mathbb{Q}$*-espace vectoriel* $H^{+2} = \bigoplus_{\beta \geq 2} H_\beta$, *alors :*

$$\dim H^n(X^{S^1}) \geq \sum_{i=1}^{p} \dim \pi_{n-d_i+1}(X) \otimes \mathbb{Q} - \dim \pi_n(X) \otimes \mathbb{Q} - \sum_{j=1}^{q} \dim \pi_{n-\delta_j+2}(X) \otimes \mathbb{Q}.$$

Démonstration :

$$H^n(H \otimes \Lambda \bar{Z}, d') \supset \mathrm{Ker}\, d' \cap (H_1 \otimes \bar{Z})^n / \mathrm{Im}\, d' \cap (H_1 \otimes \bar{Z})^n.$$

Or :

$$\mathrm{Im}\, d' \cap (H_1 \otimes \bar{Z})^n \subset d'(\bar{Z}^{n-1}),$$

donc :

$$\dim(\mathrm{Im}\, d' \cap (H_1 \otimes \bar{Z})^n) \leq \dim \bar{Z}^{n-1} = \dim Z^n.$$

D'autre part, on a :

$$\dim(\operatorname{Ker} d' \cap (H_1 \otimes \bar{Z})^n) = \dim(H_1 \otimes \bar{Z})^n - \dim d'(H_1 \otimes \bar{Z})^n.$$

Comme :

$$d'[(H_1 \otimes \bar{Z})^n] \subset (H^{+2} \otimes \bar{Z})^{n+1} \quad \text{(lemme 3.1)},$$

on a :

$$\dim[\operatorname{Ker} d' \cap (H_1 \otimes \bar{Z})^n] \geqq \sum_p \dim H_1^p . \dim Z^{n+1-p} - \sum_q \dim (H^{+2})^q . \dim Z^{n+2-q}.$$

La minoration du théorème 3.2 sera intéressante lorsqu'on connaîtra avec précision la croissance des groupes d'homotopie de l'espace X. Dans [2], Babenko donne une formule reliant, lorsque $S_{H^*(\Omega X)}(T)$ est une fraction rationnelle $A(T)/B(T)$, les dimensions des groupes d'homotopie de X aux polynômes de Newton des polynômes réciproques de $A(T)$ et $B(T)$. Malheureusement, $S_{H(\Omega X)}$ n'est pas toujours une fraction rationnelle, même pour un espace formel, comme le montre le contre-exemple de Anick [1]. Par contre, si X est un espace formel et coformel d'espace vectoriel de cohomologie de dimension finie, il est démontré dans [5] que $S_{H^*(\Omega X)}(T)$ est une fraction rationnelle qui s'exprime simplement en fonction de H, on a :

$$S_{H^*(\Omega X)}(T) = [1 + \sum_{\substack{\beta \geqq 1 \\ n \geqq 1}} (-1)^\beta \dim H_\beta^n \, T^{n-\beta}]^{-1}.$$

Plus généralement, il découle de la proposition V.5 de [8] que cette formule est vraie pour tout espace coformel à condition de prendre, comme degré en bas, le degré induit par le nombre de « barres » dans la bar construction sur $H_*(SX)$.

Plusieurs définitions équivalentes des espaces coformels sont données dans [14] et [16], nous utiliserons la caractérisation suivante : X est coformel si et seulement si X a un modèle minimal de Sullivan $(\Lambda Z, d)$ avec $dZ \subset \Lambda^2 Z$. Voici des exemples d'espaces coformels : les sphères, les espaces $K(\mathbb{Z}, n)$, les variétés V n-connexes de dimension $\leqq 3n+1$ et tels que $\dim H^*(V, \mathbb{R}) > 3$ [16], tout bouquet et produit d'espaces coformels, tout espace dont l'homotopie est une algèbre de Lie de dimension globale $\leqq 2$, [22].

Un espace X dont l'algèbre de cohomologie est le quotient d'une algèbre symétrique ΛZ (graduée en degrés pairs) par un idéal engendré par une suite régulière d'éléments de $\Lambda^2 Z$ est formel et coformel [16].

On déduit du lemme 3.1 et de la caractérisation des espaces coformels, le lemme suivant :

LEMME 3.3. — *Si* X *est un espace formel et coformel de cohomologie finie et de L.S. catégorie m. La différentielle d' définie plus haut sur* $H \otimes \Lambda \bar{Z}$ *est telle que :*

$$d'(H_\beta \otimes \bar{Z})^n \subset (H_{\beta+1} \otimes \bar{Z})^{n+1}, \qquad \beta = 0, \ldots, m \qquad \textit{où} \quad H = \bigoplus_{\beta=0}^{m} H_\beta,$$

est la graduation en longueur des mots.

On en déduit que, pour tout $k \geqq 1$,

$$d'(H_\beta \otimes \Lambda^k \bar{Z})^n \subset (H_{\beta+1} \otimes \Lambda^k \bar{Z})^{n+1},$$

ce qui implique que l'algèbre de cohomologie $H^*(H \otimes \Lambda \bar{Z}, d')$ est bigraduée,

$$H^*(H \otimes \Lambda \bar{Z}, d') = \bigoplus_{\beta=0}^{m} \bigoplus_{n} H^n(H_\beta \otimes \Lambda \bar{Z}, d').$$

THÉORÈME 3.4. — *Soit* X *un espace formel, coformel tel que* $\dim(H = H^*(X, \mathbb{Q})) < \infty$. *Soient* $(d_i)_{1 \leqq i \leqq p}$ *les degrés d'une base du* $\mathbb{Q}$*-espace vectoriel* $H^+/H^{+2} = H_1$, *et* $(\Delta_j)_{1 \leqq j \leqq r}$ *les degrés d'une base du* $\mathbb{Q}$*-espace vectoriel* $H^{+2}/H^{+3} = H_2$, *alors :*

$$\dim H^n(X^{S^1}) \geqq \sum_{i=1}^{p} \dim \pi_{n-d_i+1}(X) \otimes \mathbb{Q} - \dim \pi_n(X) \otimes \mathbb{Q} - \sum_{j=1}^{r} \dim \pi_{n-\Delta_j+2}(X) \otimes \mathbb{Q}.$$

Démonstration. — Elle est la même que celle du théorème 3.2, compte-tenu du fait que $d'(H_1 \otimes \bar{Z}) \subset H_2 \otimes \bar{Z}$.

PROPOSITION 3.5. — *Soit* X *un espace formel, coformel de cohomologie finie et de L.S. catégorie m, on a, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *pour tout* $k \geqq 1$:

$$\sum_{\beta=0}^{m} (-1)^{\beta+1} \dim H^{n+\beta}(H_\beta \otimes \Lambda^k \bar{Z}, d') = \sum_{\beta=0}^{m} (-1)^{\beta+1} \sum_{p} \dim H_\beta^p \dim (\Lambda^k Z)^{n+\beta+k-p}.$$

Démonstration. — D'après le lemme 3.3, on a le complexe :

$$0 \to (\Lambda^k \bar{Z})^q \xrightarrow{d'} (H_1 \otimes \Lambda^k \bar{Z})^{q+1} \to \ldots \xrightarrow{d'} (H_\beta \otimes \Lambda^k \bar{Z})^{q+\beta} \to \ldots \to (H_m \otimes \Lambda^k \bar{Z})^{q+m} \to 0$$

ce qui implique l'égalité des sommes alternées des espaces et de la cohomologie correspondante.

COROLLAIRE 3.6. — *Soit* X *un espace formel, coformel de cohomologie finie et de L.S. catégorie m, on a, pour tout* $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{\beta=1}^{m} \dim H^{n+\beta}(X^{S^1}) \geqq \sum_{\beta=0}^{m} (-1)^{\beta+1} \sum_{p} \dim H_\beta^p . \dim \pi_{n+1+\beta-p}(X) \otimes \mathbb{Q}.$$

Démonstration. — On applique la formule démontrée dans la proposition 3.5 avec $k=1$; le second membre s'écrit :

$$\sum_{\beta=0}^{m} (-1)^{\beta+1} \sum_{p} \dim H_\beta^p . \dim Z^{n+1+\beta-p},$$

et le premier membre est majoré par :

$$\sum_{\beta=1}^{m} \dim H^{n+\beta}(H \otimes \Lambda \bar{Z}, d') \qquad \text{car} \quad H^+(H_0 \otimes \bar{Z}, d') = 0.$$

4. Croissance exponentielle de la suite des nombres de Betti de l'espace des lacets libres sur un espace rationnellement hyperbolique

Nous utiliserons la caractérisation suivante des espaces hyperboliques démontrée dans [8], et non le théorème fondamental de [7] rappelé dans l'introduction.

THÉORÈME [8]. — *Si* $\dim H^*(X, \mathbb{Q}) < \infty$, *alors* X *est rationnellement hyperbolique si et seulement si le rayon de convergence de* $S_{H^*(\Omega X)}(T)$ *est* < 1.

THÉORÈME 4.1. — *Soit* X *un espace topologique* 1-*connexe ayant le type d'homotopie rationnelle d'un bouquet d'un nombre fini de sphères* $\bigvee_{i=1}^{p} S^{k_i+1}$ ($p \geqq 2$, $k_i \geqq 1$, *pour tout* i), *alors la suite des nombres de Betti de* X^{S^1} *croît de manière exponentielle.*

Démonstration. — Le théorème 3.2, appliqué à $X = \bigvee_{i=1}^{p} S^{k_i+1}$ $(1 \leqq k_1 \leqq k_2 \leqq \ldots \leqq k_p)$, donne :

$$(*) \qquad \dim H^{n+1}(X^{S^1}, \mathbb{Q}) \geqq \sum_{i=1}^{p} \alpha_{n-k_i} - \alpha_n \qquad \text{où} \quad \alpha_n = \dim \pi_{n+1}(X) \otimes \mathbb{Q}.$$

D'après [2], théorème 2, on a :

$$\alpha_n = \frac{(-1)^n}{n} \sum_{d \mid n} (-1)^d \mu\left(\frac{n}{d}\right) S_d,$$

où $\mu(j)$ est la fonction de Moebius et S_d est le d-ième polynôme de Newton des zéros du polynôme réciproque de :

$$[S_{H^*(\Omega X)}(T)]^{-1} = 1 - \sum_{i=1}^{p} T^{k_i}.$$

On a donc, pour $n > k_p$, la relation :

$$S_n - S_{n-k_1} - S_{n-k_2} - \ldots - S_{n-k_p} = 0.$$

L'inégalité (*) s'écrit, compte-tenu de la formule de Babenko, et de la relation ci-dessus :

$$\dim H^{n+1}(X^{S^1}) \geqq \sum_{i=1}^{p} \frac{(-1)^{n-k_i}}{n-k_i} \sum_{d_i \mid n-k_i} (-1)^{d_i} \mu\left(\frac{n-k_i}{d_i}\right) S_{d_i}$$
$$- \frac{(-1)^n}{n} \sum_{d \mid n} (-1)^d \mu\left(\frac{n}{d}\right) S_d,$$

$$\dim \mathrm{H}^{n+1}(\mathrm{X}^{\mathrm{S}^1}) \geqq \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{n-k_i} \mathrm{S}_{n-k_i} - \frac{1}{n} \mathrm{S}_n$$

$$+ \sum_{i=1}^{p} \frac{(-1)^{n-k_i}}{n-k_i} \sum_{\substack{d_i \mid n-k_i \\ d_i < n-k_i}} (-1)^{d_i} \mu\left(\frac{n-k_i}{d_i}\right) \mathrm{S}_{d_i} - \frac{(-1)^n}{n} \sum_{\substack{d \mid n \\ d < n}} (-1)^d \mu\left(\frac{n}{d}\right) \mathrm{S}_d.$$

Mais :

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{n-k_i} \mathrm{S}_{n-k_i} - \frac{1}{n} \mathrm{S}_n = \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{n-k_i} \mathrm{S}_{n-k_i} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{p} \mathrm{S}_{n-k_i} = \sum_{i=1}^{p} \frac{k_i}{n(n-k_i)} \mathrm{S}_{n-k_i},$$

d'où :

$$(**) \qquad \dim \mathrm{H}^{n+1}(\mathrm{X}^{\mathrm{S}^1}) \geqq \sum_{i=1} \frac{k_i}{n(n-k_i)} \mathrm{S}_{n-k_i}$$

$$+ \left[\sum_{i=1} \frac{(-1)^{n-k_i}}{n-k_i} \sum_{\substack{d_i \mid n-k_i \\ d_i < n-k_i}} (-1)^{d_i} \mu\left(\frac{n-k_i}{d_i}\right) \mathrm{S}_{d_i} - \frac{(-1)^n}{n} \sum_{\substack{d \mid n \\ d < n}} (-1)^d \mu\left(\frac{n}{d}\right) \mathrm{S}_d \right].$$

Par définition, $\mathrm{S}_d = \sum_{j=1}^{k_p} \xi_j^d$ où (ξ_j) sont les racines du polynôme réciproque de $[\mathrm{S}_{\mathrm{H}^*(\Omega \mathrm{X})}(\mathrm{T})]^{-1}$. D'après le théorème de [8] cité plus haut, le rayon de convergence de $\mathrm{S}_{\mathrm{H}^*(\Omega \mathrm{X})}(\mathrm{T})$ est <1, ce qui équivaut à dire que $\rho = \sup_j |\xi_j| > 1$. D'autre part, on remarque que si $d \mid n$ et $d < n$, alors on a $d \leqq (n/2)$, et le nombre de tels diviseurs d est $<n$. L'idée intuitive pour achever la démonstration est de montrer qu'il existe une suite croissante d'entiers n_j, telle que dans la minoration $(**)$, le terme $\sum_{i=1}^{p} k_i/n(n-k_i) \mathrm{S}_{n-k_i}$ va croître comme C^{n_j} pour $n = n_j$ où C est une constante dépendant de ρ et $\mathrm{C} > 1$, et le terme entre $[\ldots]$ croîtra au plus comme $\mathrm{C}^{n_j/2}$. Donnons les détails de cette démonstration :

On peut minorer grossièrement $\dim \mathrm{H}^{n+1}(\mathrm{X}^{\mathrm{S}^1}, \mathbb{Q})$ par :

$$\varphi(n) = \sum_{i=1}^{p} \frac{k_i}{n(n-k_i)} \mathrm{S}_{n-k_i} - \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{n-k_i} \sum_{\substack{d_i \mid n-k_i \\ d_i \leqq (n-k_i)/2}} \mathrm{S}_{d_i} - \frac{1}{n} \sum_{\substack{d \mid n \\ d \leqq (n/2)}} \mathrm{S}_d,$$

$$\varphi(n) = \sum_{j=1}^{k_p} \left(\sum_{i=1}^{p} \frac{k_i}{n(n-k_i)} \xi_j^{n-k_i} - \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{n-k_i} \sum_{\substack{d_i \mid n-k_i \\ d_i \leqq (n-k_i)/2}} \xi_j^{d_i} - \frac{1}{n} \sum_{\substack{d \mid n \\ d \leqq (n/2)}} \xi_j^d \right).$$

Il est facile de voir alors, que pour n assez grand, on a :

$$\varphi(n) \geqq \sum_{j=1}^{k_p} \frac{k_1 . A_j}{n(n-k_1)} \xi_j^{n-k_1}(1-\psi_j(n)),$$

où $\psi_j(n) \to 0$ quand $n \to +\infty$, et A_j est une constante >0. Notons $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_l$ les racines de plus grand module ρ, on a :

$$\varphi(n) \geqq \frac{k_1}{n(n-k_1)} \sum_{j=1}^{l} A_j \xi_j^{n-k_1}(1-\psi'_j(n)),$$

où $\psi'_j(n) \to 0$ quand $n \to \infty$.

Si $l=1$, alors on en déduit qu'il existe une constante $C>1$ tel que $\dim H^{n+1}(X^{S^1}) \geqq C^{n+1}$ pour n grand, et le théorème est démontré. Si $l \geqq 2$, la démonstration est plus délicate :

$$\varphi(n) \geqq \frac{1}{n(n-k_1)} \times \frac{A_1}{\xi_1^{k_1}} \times \xi_1^n \left[1-\psi'_1(n) + \sum_{j=2}^{l} \frac{A_j}{A_1}\left(\frac{\xi_j}{\xi_1}\right)^{n-k_1}(1-\psi'_j(n))\right].$$

Il nous reste à montrer qu'il existe un entier N et une constante $C>1$ tels que si $n \geqq N$, $\sum_{p=0}^{n} \varphi(p) \geqq C^n$.

Fixons n_0 tel que $(n_0-1)^{-(1/l-1)} < (1/8)$; si $n > n_0$, on a $n = kn_0 + r$, $0 \leqq r < n_0$ et on écrit, pour $j \in [2, \ldots, l]$:

$$\left(\frac{\xi_j}{\xi_1}\right)^k = e^{2i\Pi\beta_j}, \qquad \text{où} \quad \beta_j \in [0, 1[.$$

On peut montrer qu'il existe $q \in [1, \ldots, n_0]$, des entiers $p_j \in \mathbb{N}$, et des réels γ_j, $0 \leqq \gamma_j \leqq 1$, pour tout $j \in [2, \ldots, l]$, tels que :

$$\beta_j q = p_j + \frac{\gamma_j}{(n_0-1)^{1/(l-1)}},$$

d'où :

$$\left(\frac{\xi_j}{\xi_1}\right)^{kq} = e^{2\Pi i\beta_j q} = e^{2\Pi i\gamma_j . (n_0-1)^{-[1/(l-1)]}}.$$

Comme $0 \leqq \gamma_j/(n_0-1)^{1/l-1} < (1/8)$, $(\xi_j/\xi_1)^{kq}$ est un nombre complexe de module 1 et d'argument dans l'intervalle $]-(\Pi/4), +(\Pi/4)[$. D'autre part, on a :

$$|\xi_1|^{kq} \geqq |\xi_1|^k = \frac{|\xi_1|^{n/n_0}}{|\xi_1|^r},$$

soit :

$$|\xi_1|^{kq} \geqq \frac{1}{\rho^{n_0-1}} \cdot [\rho^{1/n_0}]^n.$$

On a donc :

$$\sum_{p=0}^{n} \varphi(p) \geqq \varphi(kq) \geqq \frac{A_1}{n(n-k_1)} \times \frac{1}{\rho^{n_0-1}} \times [\rho^{1/n_0}]^n$$

$$\times \left[1 + \sum_{j=2}^{l} \frac{A_j}{A_1} e^{2i\Pi\gamma_j/(n_0-1)^{1/l-1}} (1-\psi'_j(n)) - \psi'_1(n)) \right].$$

On peut choisir n assez grand de manière que $1-\psi'_j(n)$ soit un nombre complexe d'argument dans l'intervalle $]-(\Pi/4), +(\Pi/4)[$, alors :

$$\frac{A_j}{A_1} e^{2i\Pi\gamma_j/(n_0-1)^{1/l-1}} (1-\psi'_j(n)),$$

est d'argument dans l'intervalle $]-(\Pi/2), +(\Pi/2)[$; dans ces conditions, pour n assez grand, le nombre :

$$\left[1 + \sum_{j=2}^{l} \frac{A_j}{A_1} e^{2i\Pi\gamma_j/(n_0-1)^{1/l-1}} (1-\psi'_j(n)) - \psi'_1(n) \right],$$

est de module $\geqq (1/2)$ et on en déduit le théorème 4.1.

Problème. — Peut-on démontrer la croissance exponentielle des nombres de Betti de l'espace des lacets libres sur un espace rationnellement hyperbolique de catégorie $m>1$, à partir du théorème 4.1 ?

Nous nous intéressons maintenant aux variétés compactes X, 1-connexes telles que l'algèbre de cohomologie $H=H^*(X, \mathbb{R})$ possède un système minimal de générateurs de même degré $d \geqq 2$, on a alors $H=\mathbb{Q} \oplus \bigoplus_{i=1}^{m} H^{id}$, où md est la dimension de la variété. Si $m \leqq 3$, ces variétés sont formelles [15]; de plus, elles sont coformelles si $m \leqq 2$ [16]; donc si $m \leqq 3$, m est la L.S. catégorie rationnelle de la variété. Soit l le nombre minimal de générateurs du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $H^+/H^{+2}=H_1^d$. Si $m=2$, on a :

$$[S_{H^*(\Omega X)}(T)]^{-1} = 1 - l\,T^{d-1} + T^{2d-2}.$$

D'après le théorème II.6 de [8], X est rationnellement hyperbolique si et seulement si $l \geqq 3$. Si $m=3$, et X coformel, on a :

$$[S_{H^*(\Omega X)}(T)]^{-1} = (1-T^{d-1})(1-(l-1)T^{d-1}+T^{2d-2});$$

donc X est rationnellement hyperbolique si et seulement si $l \geqq 4$.

Soit H une $\mathbb{Q}$-algèbre graduée 1-connexe de dimension finie à dualité de Poincaré possédant un système minimal de générateurs de même degré et de cardinal l. Si $(H^+)^2 \neq 0$ et $H^{+3}=0$, les variétés compactes X de cohomologie H sont du type suivant :

(i) si d est impair, alors l est pair et X a le type d'homotopie rationnelle de la somme connexe de $g=(l/2)$ copies de $S^d \times S^d$;

(ii) si d est pair, alors X a le type d'homotopie rationnelle d'un complexe de la forme $\left(\bigvee_{i=1}^{l} S_i^d\right) \cup_f e^{2d}$ (*cf.* [17]).

On a alors :

THÉORÈME 4.2. — *Soit* X *une variété compacte* 1-*connexe telle que l'algèbre* $H=H^*(X, \mathbb{R})$ *possède un système minimal de générateurs de même degré* d, $\dim H^+/(H^+)^2 = l \geqq 3$, $(H^+)^2 \neq 0$, $(H^+)^3=0$. *Alors la suite des nombres de Betti de l'espace des lacets libres est à croissance exponentielle.*

Démonstration. — La minoration du théorème 3.4 nous donne pour tout $p \geqq 2$:

$$(*) \quad \dim H^{p(d-1)+d}(X^{S^1}) \geqq l \dim \Pi_{p(d-1)+1}(X)\otimes\mathbb{Q} - \dim \Pi_{(p+1)(d-1)+1}(X)\otimes\mathbb{Q} - \dim \Pi_{(p-1)(d-1)+1}(X)\otimes\mathbb{Q}.$$

D'après le théorème 2 de [2], on a :

$$\dim \Pi_{k+1}(X)\otimes\mathbb{Q} = \frac{(-1)^k}{k} \sum_{q|k} (-1)^q \mu\left(\frac{k}{q}\right) S_q,$$

où S_q le q-ième polynôme de Newton des zéros du polynôme $T^{2d-2} - l\,T^{d-1} + 1 = 0$.

Il est clair que $S_q = 0$ si $q \not\equiv 0\,(d-1)$ et :

$$S_{p(d-1)} = (d-1)\left[\left(\frac{l+\sqrt{l^2-4}}{2}\right)^p + \left(\frac{l-\sqrt{l^2-4}}{2}\right)^p\right] = (d-1)\left(\frac{l+\sqrt{l^2-4}}{2}\right)^p (1+\psi(p)),$$

où $\psi(p) \to 0$ quand $p \to \infty$.

On peut remplacer l'inégalité $(*)$ par :

$$(**) \quad (d-1)\, H^{p(d-1)+d}(X^{S^1}) \geqq \frac{l}{p} S_{p(d-1)} - \frac{1}{p+1} S_{(p+1)(d-1)} - \frac{1}{p-1} S_{(p-1)(d-1)} - \frac{l}{p} \sum_{\substack{q|p \\ q \leqq (p/2)}} S_{q(d-1)} - \frac{1}{p+1} \sum_{\substack{q|p+1 \\ q \leqq (p+1)/2}} S_{q(d-1)} - \frac{1}{p-1} \sum_{\substack{q|p-1 \\ q \leqq (p-1)/2}} S_{q(d-1)}.$$

En appliquant le fait que $S_{(p+1)(d-1)}=l\,S_{p(d-1)}-S_{(p-1)(d-1)}$, l'inégalité $(**)$ devient :

$$\dim H^{p(d-1)+d}(X^{S^1})\geqq \frac{l}{p(p+1)}\left(\frac{l+\sqrt{l^2-4}}{2}\right)^p(1+\psi(p))$$

$$-\frac{2}{(p-1)(p+1)}\left(\frac{l+\sqrt{l^2-4}}{2}\right)^{p-1}(1+\psi(p-1))$$

$$-\frac{l}{p}\sum_{\substack{q\mid p\\ q\leqq (p/2)}}\left(\frac{l+\sqrt{l^2-4}}{2}\right)^q(1+\psi(q))$$

$$-\frac{1}{p+1}\sum_{\substack{q\mid p+1\\ q\leqq (p+1)/2}}\left(\frac{l+\sqrt{l^2-4}}{2}\right)^q(1+\psi(q))$$

$$-\frac{1}{p-1}\sum_{\substack{q\leqq (p-1)/2\\ q\mid p-1}}\left(\frac{l+\sqrt{l^2-4}}{2}\right)^q(1+\psi(q)),$$

d'où :

$$\dim H^{p(d-1)+d}(X^{S^1})\geqq\left[\frac{l+\sqrt{l^2-4}}{2}\right]^{p-1}\times\frac{A}{p^2}(1+\varphi(p)),$$

avec $A>0$ et $\varphi(p)\to 0$ quand $p\to\infty$.

Ceci implique la croissance exponentielle de la suite $(\dim H^i(X^{S^1}))$.

THÉORÈME 4.3. — *Soit* X *une variété compacte* 1-*connexe coformelle telle que l'algèbre* $H=H^*(X,\mathbb{R})$ *possède un système minimal de générateurs de même degré* $d\geqq 2$, $\dim H^+/(H^+)^2=l\geqq 4$, $(H^+)^3\neq 0$, $(H^+)^4=0$. *Alors la suite des nombres de Betti de l'espace des lacets libres est à croissance exponentielle.*

Démonstration. — Le corollaire 3.6 implique que, pour tout $p\geqq 3$, on a :

$$(*)\quad h_p=\dim H^{p(d-1)+d}(X^{S^1})+\dim H^{p(d-1)+d+1}(X^{S^1})$$
$$+\dim H^{p(d-1)+d+2}(X^{S^1})\geqq l\dim \Pi_{p(d-1)+1}-\dim\Pi_{(p+1)(d-1)+1}$$
$$-l\dim\Pi_{(p-1)(d-1)+1}+\dim\Pi_{(p-2)(d-1)+1},$$

où $\dim\Pi_i=\dim\Pi_i(X)\otimes\mathbb{Q}$, pour $i\geqq 2$. Posons $k=l-1\geqq 3$, on a :

$$\dim\Pi_{i+1}=\frac{1}{i}\sum_{q\mid i}(-1)^{i+q}\mu\left(\frac{i}{q}\right)S_q,$$

et

$$S_{(p+1)(d-1)}=k\,S_{p(d-1)}-S_{(p-1)(d-1)},\qquad \text{si}\quad p>2,$$

d'où :

$$(d-1)\,h_p \geqq \frac{k^2(p-1)-k(p+1)-2p}{(p-1)\,p\,(p+1)}\,S_{(p-1)(d-1)} - \frac{k(p-2)-2(p+1)}{(p-2)\,p\,(p+1)}\,S_{(p-2)(d-1)}$$
$$-\frac{k+1}{p}\sum_{\substack{q\mid p\\ q\leqq (p/2)}} S_{q(d-1)} - \frac{1}{p+1}\sum_{\substack{q\mid p+1\\ q\leqq (p+1)/2}} S_{q(d-1)}$$
$$-\frac{k+1}{p-1}\sum_{q\leqq (p-1)/2} S_{q(d-1)} - \frac{1}{p-2}\sum_{q\leqq (p-2)/2} S_{q(d-1)}.$$

L'inégalité (*) s'écrit alors :

$$h_p \geqq \left(\frac{k+\sqrt{k^2-4}}{2}\right)^{p-2} \times \frac{1}{p\,(p+1)}$$
$$\times \left\{\frac{k+\sqrt{k^2-4}}{2}\left(k^2-\frac{k(p+1)}{p-1}-\frac{2p}{p-1}-\frac{2}{\sqrt{k^2-4}+k}\right)+2\times\frac{p+1}{p-2}\{1+\psi(p)\},\right.$$

où $\psi(p) \to 0$ quand $p \to \infty$. Comme $k \geqq 3$, il existe $A>0$ telle que pour tout p assez grand, on a :

$$h_p = \dim H^{p(d-1)+d}(X^{S^1}) + \dim H^{p(d-1)+d+1}(X^{S^1})$$
$$+\dim H^{p(d-1)d+2}(X^{S^1}) \geqq A\left(\frac{k+\sqrt{k^2-4}}{2}\right)^{p-2}.$$

Ceci implique qu'il existe une constante $C>1$ telle que, pour tout n assez grand, on a :

$$\sum_{i=0}^{n} \dim H^i(X^{S^1}) \geqq C^n.$$

BIBLIOGRAPHIE

[0] R. ABRAHAM, *Bumpy metrics* (*Lectures notes, Amer. Math. Soc. Summer.*, Institute on global analysis, University of California, Berkeley, 1968).

[1] D. ANICK, *A Counter Example to a Conjecture of Serre* (*Ann. of Math.*, vol. 115, 1982, p. 1-33).

[2] K. BABENKO, *Analytical Properties of Poincare Series of a Loop Space* (*Math. Zametski*, 27, n° 5, p. 751-765. English translation in *Math. Notes*, vol. 27, 1980).

[3] K. BABENKO, *On Real Homotopy Properties of Complete Intersections* (*Math. U.S.S.R.*, Izvestija, vol. 15, 1980).

[4] P. DELIGNE, P. GRIFFITHS, J. MORGAN et D. SULLIVAN, *The Real Homotopy of Kähler Manifolds* (*Invent. Math.*, vol. 29, 1975, p. 245-274).

[5] Y. FÉLIX, *Propriété des espaces biformels* (*Institut de Math.*, Université Catholique de Louvain, Rapport n° 85, septembre 1979).

[6] Y. FÉLIX et S. HALPERIN, *Rational L.S. Category and its Applications* (*Trans. A.M.S.*, vol. 273, 1982, p. 1-37).

[7] Y. FÉLIX, S. HALPERIN et J. C. THOMAS, *Homotopy Lie Algebra of Finite Complexes* (*Publ. I.H.E.S.*, vol. 56, 1982, p. 387-410).

[8] Y. FÉLIX et J. C. THOMAS, *The Radius of Convergence of Poincaré Series of Loop Spaces* (*Invent. Math.*, vol. 68, 1982, p. 257-274).

[9] M. GROMOV, *Homotopical Effects of Dilatation* (*J. Diff. Geom.*, vol. 13, 1978, p. 303-310).

[10] K. GROVE et S. HALPERIN, *Contributions of Rational Homotopy Theory to Global Problems in Geometry* (*Publ. I.H.E.S.*, vol. 56, 1982, p. 379-385).

[11] K. GROVE, S. HALPERIN et M. VIGUÉ-POIRRIER, *The Rational Homotopy Theory of Certain Path Spaces with Applications to Geodesics* (*Acta Math.*, vol. 140, 1978, p. 277-303).

[12] S. HALPERIN, *Finiteness in the Minimal Models of Sullivan* (*Trans. A.M.S.*, vol. 230, 1977, p. 173-199).

[13] S. HALPERIN et J. STASHEFF, *Obstructions to Homotopy Equivalences* (*Advances in Math.*, vol. 32, 1979, p. 233-279).

[14] J. M. LEMAIRE et F. SIGRIST, *Sur les invariants d'homotopie rationnelle liés à la L.S. catégorie* (*Comm. Math. Helv.*, vol. 56, 1981, p. 103-122).

[15] J. NEISENDORFER, *The Rational Homotopy Groups of Complete Intersections* (*Illinois J. Math.*, vol. 23, n° 2, 1979, p. 175-182).

[16] J. NEISENDORFER et T. MILLER, *Formal and Coformal Spaces* (*Illinois J. Math.*, vol. 22, n° 4, 1978, p. 565-580).

[17] S. PAPADIMA, *Poincare Duality Algebras and the Rational Classification of Differentiable Manifolds* [Exposé au Colloque de Topologie du C.I.R.M., Marseille, 1982 (à paraître dans *Astérique*)].

[18] D. SULLIVAN, *Infinitesimal Computations in Topology* (*Publ. I.H.E.S.*, vol. 47, 1978, p. 269-331).

[19] D. SULLIVAN et M. VIGUÉ-POIRRIER, *The Homology Theory of the Closed Geodesic Problem* (*J. Diff. Geom.*, vol. 11, n° 4, 1976, p. 633-644).

[20] M. VIGUÉ-POIRRIER, *Dans le fibré de l'espace des lacets libres, la fibre n'est pas, en général, totalement non cohomologue à zéro* (*Math. Zeitschrift*, vol. 181, 1982, p. 537-542).

[21] M. VIGUÉ-POIRRIER, *Réalisation de morphismes données en cohomologie et suite spectrale de Eilenberg-Moore* (*Trans. A.M.S.*, vol. 265, 1981, p. 447-484).

[22] S. HALPERIN et J. M. LEMAIRE, *Suites inertes dans les algèbres de Lie* (en préparation).

(Manuscrit reçu le 19 janvier 1983,
révisé le 8 novembre 1983.)

Micheline VIGUÉ-POIRRIER,
37, parc d'Ardenay,
91120 Palaiseau.