ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ANDRÉ UNTERBERGER
JULIANNE UNTERBERGER

La série discrète de SL(2, R) et les opérateurs pseudo-différentiels sur une demi-droite

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 17, nº 1 (1984), p. 83-116
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1984_4_17_1_83_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 17, 1984, p. 83 à 116.

LA SÉRIE DISCRÈTE DE SL(2, $\mathbb{R}$) ET LES OPÉRATEURS PSEUDO-DIFFÉRENTIELS SUR UNE DEMI-DROITE

PAR ANDRÉ ET JULIANNE UNTERBERGER

PLAN DE L'ARTICLE

Introduction

Depuis son introduction par Calderon et Zygmund, le calcul symbolique des opérateurs, plus connu sous le nom de calcul des opérateurs pseudo-différentiels, rend les services que l'on sait à la théorie des équations aux dérivées partielles. On peut penser que le rôle qu'il y joue ne peut qu'augmenter, notamment grâce à la meilleure compréhension que l'on a de sa structure depuis que les travaux de Maslov et de Leray ont montré toute l'importance qu'y tient le groupe métaplectique. Néanmoins, les opérateurs pseudo-différentiels et les techniques de microlocalisation qui s'y rattachent ne semblent pas pouvoir être employés dans les problèmes où l'on souhaite une information sur le support d'une fonction avec autant d'aisance que dans les problèmes qui se ramènent à la description des singularités (ce qui ne signifie pas, tant s'en faut, qu'on ne peut les utiliser dans l'unicité du problème de Cauchy, puisqu'au contraire une de leurs toutes premières applications fut un succès décisif dans ce problème, obtenu par Calderon). C'est pourquoi il serait intéressant de disposer de théories analogues permettant de traiter des opérateurs sur des espaces de fonctions à support dans des cônes donnés et, pour commencer, à support dans la demi-droite. Bien entendu, le groupe métaplectique n'opère pas dans de tels espaces de fonctions, et il faut le remplacer par une version projective convenable.

Des calculs concernant les opérateurs sur une demi-droite ont été faits par Carroll [4] sans que, semble-t-il, l'invariance de groupe ait été évoquée. Des rapprochements plus substantiels, sinon dans les résultats du moins dans les motivations, pourraient être trouvés entre la théorie que nous développons ici et l'intérêt assez vif suscité récemment par l'analyse sur les groupes nilpotents (voir par exemple Greiner [6]) : encore convient-il de remarquer que le groupe non commutatif qui est au cœur des méthodes est ici lié à l'espace de phase (celui sur lequel vivent les symboles), non à l'espace de configuration.

Mais c'est avant tout la théorie de la quantification qui fournit l'impulsion naturelle à l'étude d'un calcul symbolique covariant à l'égard d'une représentation donnée. Des travaux de Berezin ([1], [2]) mettent l'accent sur quelques-uns des outils et structures qui nous paraissent essentiels dans cette théorie : espaces kählériens, résolutions de l'identité d'un type qui sera longuement décrit, emphase sur les correspondances entre symboles et opérateurs. Dans [13], l'un des auteurs a proposé une théorie de la quantification présentant de nombreux points communs avec celle, antérieure, de Berezin : toutefois, la définition des correspondances entre symboles et opérateurs y est essentiellement différente, celle de Berezin étant à notre avis proche du calcul de Wick et la nôtre proche de celui de Weyl; on sait que le calcul de Wick (dans le cas euclidien) peut être considéré comme dérivant du calcul de Weyl (par régularisation gaussienne convenable des symboles), alors qu'on ne peut remonter du calcul de Wick à celui de Weyl sans avoir à résoudre des équations de la chaleur rétrogrades. Le présent travail est un développement, dans le cas du groupe $SL(2, \mathbb{R})$, du programme de quantification proposé dans [13]. Pour en rendre les buts et les méthodes tout à fait clairs, nous allons, pour terminer cette introduction, donner une très brève description du calcul de Weyl des opérateurs pseudo-différentiels sur $\mathbb{R}^n$. Cette description est conçue comme une liste des propriétés du calcul de Weyl qu'il nous semble désirable de généraliser, et ne joue donc qu'un rôle de modèle. Voici rappelés les ingrédients essentiels du calcul de Weyl :

a) un espace de « configuration » $\mathbb{R}^n$, et un espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n)$

b) un espace de « phase » $\mathbb{R}^{2n}$, muni de la forme symplectique $[\,,\,]$ définie par

$$[(x, \xi), (y, \eta)] = -\langle x, \eta\rangle + \langle y, \xi\rangle,$$

et le groupe symplectique $Sp(n, \mathbb{R})$ des transformations linéaires de $\mathbb{R}^{2n}$ qui conservent cette forme

c) un groupe $Mp(n)$ de transformations unitaires de $L^2(\mathbb{R}^n)$, le groupe « métaplectique », et un homomorphisme $M \mapsto \tilde{M}$ de $Mp(n)$ sur $Sp(n, \mathbb{R})$

d) une correspondance Op entre l'espace $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^{2n})$ des distributions tempérées sur $\mathbb{R}^{2n}$ et l'espace des opérateurs linéaires de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Voici comment on peut introduire celle-ci : pour tout $Y = (y, \eta) \in \mathbb{R}^{2n}$, définissons la « symétrie de phase » σ_Y par la formule

$$(\sigma_Y u)(x) = u(2y - x)e^{4i\pi\langle x-y, \eta\rangle}.$$

C'est un opérateur unitaire, autoadjoint, involutif, et l'équation $A = Op(a)$ équivaut à la formule

$$A = 2^n \int a(Y)\sigma_Y dY \tag{1}$$

ou à la formule inverse

$$a(\mathrm{Y})=2^n\mathrm{Tr}(\sigma_{\mathrm{Y}}\mathrm{A})\,. \tag{2}$$

(On écrit habituellement

$$(\mathrm{Op}(a)u)(x)=\iint a\left(\frac{x+y}{2},\,\eta\right)e^{2i\pi\langle x-y,\eta\rangle}u(y)dyd\eta)\,.$$

Les propriétés que l'on peut juger les plus importantes de ce formalisme sont les suivantes :

1) la correspondance Op se restreint en une isométrie de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^{2n})$ sur l'espace de Hilbert des opérateurs de Hilbert-Schmidt sur $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$.

2) (formule de Segal) : pour tout $a\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^{2n})$, et tout $\mathrm{M}\in\mathrm{Mp}(n)$, on a

$$\mathrm{MOp}(a)\mathrm{M}^{-1}=\mathrm{Op}(a\circ\tilde{\mathrm{M}}^{-1})\,.$$

Les buts et méthodes du présent travail sont une généralisation de la description qui précède. On verra cependant apparaître deux différences. D'abord, il y aura bien deux formules analogues à (1) et (2), mais elles ne seront plus réciproques l'une de l'autre. Ensuite, on obtiendra tous les résultats souhaités dans le cadre des opérateurs de Hilbert-Schmidt, mais il ne sera pas trivial d'étendre la théorie à un espace de symboles conçu comme une généralisation de $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^{2n})$: cette extension nécessite d'importants développements, qui seront traités ailleurs. Signalons pour terminer que les résultats ont été présentés à la conférence [14]. Nous voulons remercier l'Université de Floride, où une partie de ce travail a été effectuée. Également, nous avons eu d'intéressantes discussions avec les mathématiciens de Nancy, principalement D. Barlet, J. Clerc, P. Eymard et D. Huet : nous les en remercions ici.

1. L'espace de Hilbert H_λ et son groupe de transformations unitaires ; l'espace de phase Π

On désigne par Π le demi-plan droit constitué des points $\mathrm{X} = x + i\xi$, avec $x>0$: cet espace a une structure kählérienne canonique, dont le ds^2 est $x^{-2}(dx^2+d\xi^2)$, et dont on notera $d\mu(\mathrm{X})$ la mesure $x^{-2}dxd\xi$ associée. Soient $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ le groupe des matrices $g=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ à coefficients réels, de déterminant 1, et $g\mapsto[g]$ l'application canonique de ce groupe sur son quotient $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})=\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\{\pm 1\}$. Le groupe $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ opère sur Π par

$$[g](\mathrm{X})=\frac{a\mathrm{X}-bi}{ic\mathrm{X}+d}.$$

Le lecteur a peut-être plus l'habitude du demi-plan supérieur, image de Π par l'application $\mathrm{X}\mapsto i\mathrm{X}$: il y a des raisons sérieuses de choisir ici Π. La plus importante est de rendre le choix fait ici compatible avec celui fait dans [12] : certains développements (voir [15]) nécessitent en effet une utilisation simultanée du formulaire développé dans le cours du présent article et de celui, relatif à la quantification de Weyl, développé dans [12].

Le sous-groupe K de SL(2, $\mathbb{R}$) constitué des g telles que $[g](1)=1$ est identique à celui des matrices

$$k_\theta=\begin{pmatrix}\cos\theta/2 & \sin\theta/2\\ -\sin\theta/2 & \cos\theta/2\end{pmatrix},\qquad -2\pi<\theta\leq 2\pi. \tag{1.2}$$

Comme SL(2, $\mathbb{R}$)$=$G opère transitivement dans Π, on peut donc identifier cet espace à l'espace homogène $G/K=\{gK, g\in G\}$ en attachant le point $[g](1)$ à la classe de g. La classique décomposition d'Iwasawa du groupe G fait intervenir, outre les matrices k_θ, les matrices

$$a_r=\begin{pmatrix}e^{r/2} & 0\\ 0 & e^{-r/2}\end{pmatrix},\qquad r\in\mathbb{R} \tag{1.3}$$

et

$$n_\xi=\begin{pmatrix}1 & -\xi\\ 0 & 1\end{pmatrix},\qquad \xi\in\mathbb{R} \tag{1.4}$$

(voir par exemple [5] ou [7]).

Revenons à l'espace de Riemann Π. On sait que ses géodésiques (« droites » de la géométrie hyperbolique) sont les cercles euclidiens dont un diamètre est l'axe $i\mathbb{R}$, ainsi que les droites euclidiennes parallèles à l'axe des x. Le point $Y=y+i\eta$ de Π situé à la distance hyperbolique r de 1 sur la demi-droite hyperbolique qui fait l'angle θ avec la demi-droite $[1, +\infty[$ s'obtient par la formule

$$Y=\frac{1+\omega^2}{e^{-r}+e^r\omega^2}+i\frac{2\omega\,\mathrm{sh}\,r}{e^{-r}+e^r\omega^2}\qquad\text{avec}\qquad \omega=\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}. \tag{1.5}$$

En particulier, la distance hyperbolique $d(1, Y)$ de 1 à Y est donnée par

$$\mathrm{ch}\,d(1,Y)=\frac{1+y^2+\eta^2}{2y}. \tag{1.6}$$

En utilisant (1.2) et (1.3), on vérifie aisément la formule $[k_\theta a_r](1)=Y$, d'où l'on déduit la « décomposition de Cartan » du groupe G : comme $\Pi=G/K$, cette formule permet en effet d'écrire n'importe quel élément de G sous la forme $k_\theta a_r k_\varphi(-\pi<\theta\leq\pi,\ r\geq 0,\ -2\pi<\varphi\leq 2\pi)$. Cette formule montre également que la rotation d'angle β autour du point 1 est donnée par $[g](1)\mapsto[k_\beta g](1)$, autrement dit est la transformation de Π attachée à la matrice k_β.

Soit λ un nombre >0. On désigne par H_λ l'espace de Hilbert des classes (pour l'égalité presque partout) de fonctions u mesurables sur $\mathbb{R}$, à support dans $\mathbb{R}^+=\{t\geq 0\}$, telles que

$$\|u\|_\lambda^2=\int_0^\infty|u(t)|^2t^{-\lambda}dt<\infty. \tag{1.7}$$

Pour tout $X\in\Pi$, on considère la fonction $\varphi_X\in H_\lambda$, qui jouera un rôle fondamental dans ce travail, et définie comme suit :

$$\varphi_X(t)=2^{\lambda+1}\pi^{\frac{\lambda+1}{2}}(\Gamma(\lambda+1))^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{\lambda+1}{2}}t^\lambda e^{-2\pi Xt}. \tag{1.8}$$

On peut vérifier que $\| \varphi_X \|_\lambda = 1$ et que $\varphi_X \in H_{\lambda-1} \cap H_{\lambda+1}$ pour tout X. Le lien entre les différentes fonctions φ_X est établi à l'aide des « translations de phase », qui sont par définition les transformations unitaires τ_X de l'espace H_λ telles que

$$(\tau_X u)(t) = x^{\frac{1-\lambda}{2}} u(xt) e^{-2i\pi\xi t}. \tag{1.9}$$

On a en effet, ainsi qu'on le vérifie immédiatement :

$$\varphi_X = \tau_X \varphi_1. \tag{1.10}$$

On désigne par $(,)$ le produit scalaire dans H_λ.

Signalons dès à présent que la transformation de Laplace $\mathscr{L}_\lambda$ définie en (1.25), sur laquelle nous reviendrons, permet d'identifier H_λ à un espace de Hilbert de fonctions antiholomorphes sur le demi-plan Ce dernier espace admet un noyau reproduisant, c'est-à-dire que, pour tout $X \in \Pi$, il existe une unique fonction $\psi_X \in H_\lambda$ telle que, pour tout $u \in H_\lambda$, on ait l'identité $(\mathscr{L}_\lambda u)(X) = (u, \psi_X)$: la fonction φ_X n'est autre que la fonction $\| \psi_X \|^{-1} \psi_X$, et le noyau reproduisant proprement dit est la fonction $(X, Y) \mapsto (\psi_Y, \psi_X)$ qui sera évaluée en (4.22). L'existence d'un noyau reproduisant sur l'espace de Hilbert image de $\mathscr{L}_\lambda$ explique pourquoi il est possible de développer divers opérateurs sur H_λ comme sommes continues de projecteurs orthogonaux sur les fonctions φ_X (le même phénomène se produit d'ailleurs dans la quantification de Weyl, la transformation de Laplace y étant remplacée par la transformation de Bargmann-Fock) : c'est ce que nous allons faire maintenant, en restant cependant dans le domaine réel autant qu'il est possible.

Pour toute fonction $v \in H_\lambda$, et tout $x > 0$, on a, avec $X = x + i\xi$, la relation

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} |(v, \varphi_X)|^2 d\xi &= \frac{(4\pi)^{\lambda+1}}{\Gamma(\lambda+1)} x^{\lambda+1} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \left| \int_0^\infty v(t) e^{-2\pi(x-i\xi)t} dt \right|^2 \\ &= \frac{(4\pi)^{\lambda+1}}{\Gamma(\lambda+1)} x^{\lambda+1} \int_0^\infty |v(t)|^2 e^{-4\pi x t} dt.\end{aligned}$$

Pour toute fonction γ mesurable ≥ 0 sur $[0, +\infty[$, on peut alors écrire

$$\int_\Pi \gamma(x) |(v, \varphi_X)|^2 d\mu(X) = \int_0^\infty \beta(t) |v(t)|^2 dt \tag{1.11}$$

si l'on définit β par

$$\beta(t) = \frac{(4\pi)^{\lambda+1}}{\Gamma(\lambda+1)} \int_0^\infty \gamma(x) x^{\lambda-1} e^{-4\pi x t} dx. \tag{1.12}$$

PROPOSITION 1.1. — Pour tout $\lambda > 0$, les fonctions φ_X constituent, lorsque X parcourt Π, un système total dans H_λ. En outre, pour toute fonction $u \in H_\lambda$, on a

$$\int_\Pi |(u, \varphi_X)|^2 d\mu(X) = \frac{4\pi}{\lambda} \| u \|_\lambda^2. \tag{1.13}$$

Preuve. — L'identité (1.13) est le cas particulier de (1.11) qui correspond au choix $\gamma=1$. On en déduit, par polarisation, l'identité

$$u=\frac{\lambda}{4\pi}\int_{\Pi}(u,\varphi_{\mathrm{X}})\varphi_{\mathrm{X}}d\mu(\mathrm{X}) \tag{1.14}$$

qui prouve la premiére partie de la proposition.

PROPOSITION 1.2. — Supposons $\lambda>1$. Alors les fonctions $\varphi_{\mathrm{X}}(\mathrm{X}\in\Pi)$ constituent un système total dans l'espace $\mathrm{H}_{\lambda-1}\cap\mathrm{H}_{\lambda+1}$ muni de la norme hilbertienne

$$u\mapsto\|u\|_{\lambda-1,\lambda+1}=(\|u\|^2_{\lambda-1}+\|u\|^2_{\lambda+1})^{\frac{1}{2}}.$$

Preuve. — On applique (1.11) en choisissant cette fois-ci pour γ la solution, sur $[0,\infty[$, du problème de Cauchy

$$\begin{cases}\left(1+(4\pi)^{-1}\dfrac{d}{dx}\right)^2(x^{\lambda-1}\gamma(x))=\dfrac{\lambda-1}{4\pi}x^{\lambda-2}\\ x^{\lambda-1}\gamma(x)\quad\text{et}\quad\dfrac{d}{dx}(x^{\lambda-1}\gamma(x))\ \text{sont nulles en } 0.\end{cases} \tag{1.15}$$

On peut l'expliciter :

$$\gamma(x)=(\lambda-1)x^{1-\lambda}e^{-4\pi x}\int_0^x y^{\lambda-2}e^{4\pi y}(x-y)dy. \tag{1.16}$$

Grâce à (1.15), on a

$$\int_0^{\infty}\gamma(x)x^{\lambda-1}e^{-4\pi xt}dx=(4\pi)^{-\lambda}\Gamma(\lambda)\frac{t^{-\lambda+1}}{(1+t)^2}, \tag{1.17}$$

d'où l'identité, valable pour $v\in\mathrm{H}_\lambda$:

$$\int_{\Pi}\gamma(x)\,|(v,\varphi_{\mathrm{X}})|^2d\mu(\mathrm{X})=\frac{4\pi}{\lambda}\int_0^{\infty}|v(t)|^2\frac{t^{-\lambda+1}}{(1+t)^2}dt. \tag{1.18}$$

Par ailleurs la norme $\|\ \|_{\lambda-1,\lambda+1}$ est équivalente à la norme $\|\ \|_{\lambda-1,\lambda,\lambda+1}$ définie par

$$\|u\|^2_{\lambda-1,\lambda,\lambda+1}=\int_0^{\infty}(t^{\frac{1}{2}}+t^{-\frac{1}{2}})^2|u(t)|^2t^{-\lambda}dt=\int_0^{\infty}\frac{(t+1)^2}{t}|u(t)|^2t^{-\lambda}dt. \tag{1.19}$$

Il en résulte aisément que les deux membres de l'identité (1.18) restent finis si $v\in\mathrm{H}_{\lambda+1}+\mathrm{H}_{\lambda-1}$ (espace dual de $\mathrm{H}_{\lambda-1}\cap\mathrm{H}_{\lambda+1}$ relativement au produit scalaire sur H_λ). En particulier, si $u\in\mathrm{H}_{\lambda-1}\cap\mathrm{H}_{\lambda+1}$, on peut appliquer (1.18) à la fonction v telle que

$$v(t)=t^{-1}(t+1)^2u(t). \tag{1.20}$$

On a, alors, d'après (1.19) :

$$(v,\varphi_{\mathrm{X}})=(u,\varphi_{\mathrm{X}})_{\lambda-1,\lambda,\lambda+1} \tag{1.21}$$

et

$$\int_0^\infty |v(t)|^2 \frac{t^{-\lambda+1}}{(1+t)^2} dt = \| u \|^2_{\lambda-1,\ \lambda,\lambda+1}. \tag{1.22}$$

Par suite, pour toute fonction $u \in H_{\lambda-1} \cap H_{\lambda+1}$, on a l'identité

$$\int_\Pi \gamma(x) | (u, \varphi_X)_{\lambda-1,\lambda,\lambda+1} |^2 d\mu(X) = \frac{4\pi}{\lambda} \| u \|^2_{\lambda-1,\lambda,\lambda+1}. \tag{1.23}$$

Cette identité prouve qu'il ne peut exister, dans l'espace de Hilbert $H_{\lambda-1} \cap H_{\lambda+1}$, d'élément non nul orthogonal à toutes les fonctions φ_X, et entraîne la proposition.

Considérons maintenant la transformation de Laplace $\mathscr{L}_\lambda$ évoquée plus haut qui à $u \in H_\lambda$ associe la fonction $\mathscr{L}_\lambda u$ sur Π définie par

$$(\mathscr{L}_\lambda u)(X) = 2^\lambda \pi^{\lambda/2} (\Gamma(\lambda))^{-\frac{1}{2}} \int_0^\infty u(t) e^{-2\pi \bar{X} t} dt. \tag{1.24}$$

Autrement dit, on a

$$(\mathscr{L}_\lambda u)(X) = \left(\frac{\lambda}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{\lambda+1}{2}} (u, \varphi_X). \tag{1.25}$$

Proposition 1.3. — Pour tout $\lambda > 0$, la transformation $\mathscr{L}_\lambda$ est une isométrie de H_λ sur l'espace de Hilbert Q_λ des fonctions $\bar{f}$ antiholomorphes sur Π telles que

$$\| \bar{f} \|^2_{Q_\lambda} = \int_\Pi | f(X) |^2 x^{\lambda+1} d\mu(X) < \infty. \tag{1.26}$$

Preuve. — Pour tout $u \in H_\lambda$, on a

$$\| \mathscr{L}_\lambda u \|^2_{Q_\lambda} = \frac{\lambda}{4\pi} \int_\Pi | (u, \varphi_X) |^2 d\mu(X) = \| u \|^2_\lambda$$

d'après (1.13). Le fait que $\mathscr{L}_\lambda$ est surjective requiert un peu plus de patience, mais est classique.

Définition 1.1. — Soit $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$. On définit la transformation $\mathscr{M}_g$ de l'espace Q_λ par les formules suivantes :

$$\text{si } c > 0, \quad (\mathscr{M}_g \bar{f})(X) = e^{i\pi\frac{\lambda+1}{2}} (c\bar{X} + di)^{-\lambda-1} \bar{f}\left(\frac{aX - bi}{icX + d}\right); \tag{1.27}$$

$$\text{si } c < 0, \quad \mathscr{M}_g = e^{-i\pi(\lambda+1)} \mathscr{M}_{-g}; \tag{1.28}$$

$$\text{si } c = 0 \text{ et } d > 0, \quad (\mathscr{M}_g \bar{f})(X) = d^{-\lambda-1} \bar{f}\left(\frac{aX - bi}{d}\right); \tag{1.29}$$

$$\text{enfin, si } c = 0 \text{ et } d < 0, \quad \mathscr{M}_g = e^{-i\pi(\lambda+1)} \mathscr{M}_{-g}. \tag{1.30}$$

Dans la première de ces formules, on a par définition

$$(c\overline{X}+di)^{-\lambda-1}=\exp -(\lambda+1)\log(c\overline{X}+di),$$

où l'argument de $c\overline{X}+di$ (la partie imaginaire du logarithme) est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$.

PROPOSITION 1.4. — Pour tout $\lambda>0$, et tout $g\in SL(2,\mathbb{R})$, la transformation $\mathscr{M}_g$ est une transformation unitaire de l'espace de Hilbert Q_λ. Pour tout couple (g, g') d'éléments de $SL(2,\mathbb{R})$, il existe un entier $k\in\mathbb{Z}$ tel que, si l'on pose $\rho=e^{2i\pi k(\lambda+1)}=e^{2i\pi k\lambda}$, on ait

$$\mathscr{M}_g.\mathscr{M}_{g'}=\rho.\mathscr{M}_{g'g}. \tag{1.31}$$

Remarque. — Dans le cas où λ est un entier ≥ 1, les formules (1.27) à (1.30) se résument sous la forme unique

$$(\mathscr{M}_g f)(X)=(-ic\overline{X}+d)^{-\lambda-1}\bar{f}\left(\frac{aX-bi}{icX+d}\right),$$

qui n'est autre que l'expression bien connue de la (moitié de la) série discrète de $SL(2,\mathbb{R})$, à ceci près que nous utilisons ici des fonctions antiholomorphes dans le demi-plan droit. Bien entendu, il convient ici d'être très soigneux en ce qui concerne les « facteurs de phase », nombres complexes de module 1 qui sont ici de la forme $e^{2i\pi k\lambda}$, mais en dehors de cela il n'y a pas de difficulté à relaxer l'hypothèse que λ est entier : aussi laissons-nous la preuve au lecteur. Le résultat suivant est quelquefois utile :

$$\text{si}\quad g=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix},\qquad g'=\begin{pmatrix} a' & b'\\ c' & d'\end{pmatrix}\qquad\text{et}\qquad g'g=\begin{pmatrix} a'' & b''\\ c'' & d''\end{pmatrix}$$

et si de plus $c>0$ et $c'>0$, alors $\rho=1$ si $c''>0$ et $\rho=e^{2i\pi\lambda}$ si $c''\leq 0$.

Signalons que l'emploi de représentations « à des facteurs de phase près » est naturel et courant en mécanique quantique (« ray representations », cf. par exemple [3], p. 140). On peut aussi, dans le présent cas, les considérer comme des représentations d'un revêtement convenable de $SL(2,\mathbb{R})$ (*cf.* [9]).

Nous allons maintenant remonter $\mathscr{M}_g$ en une transformation M_g de H_λ.

PROPOSITION 1.5. — Supposons $\lambda>0$. Soient $g=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in SL(2,\mathbb{R})$, et M_g la transformation unitaire de H_λ telle que $\mathscr{L}_\lambda M_g=\mathscr{M}_g\mathscr{L}_\lambda$.

Si $c>0$, M_g est donnée pour $u\in C_0^\infty(]0,\infty[)$ par la formule

$$(M_g u)(s)=e^{i\pi\frac{\lambda+1}{2}}\frac{2\pi}{c}\int_0^\infty u(t)\left(\frac{s}{t}\right)^{\lambda/2}\left(\exp -2i\pi\frac{at+ds}{c}\right)J_\lambda\left(\frac{4\pi}{c}(st)^{\frac{1}{2}}\right)dt, \tag{1.32}$$

où J_λ est la fonction de Bessel habituelle.

Si $c=0$ et $d>0$, M_g est la translation de phase (*cf.* (1.9)) définie par

$$(M_g u)(s)=a^{\lambda-1}\left(\exp -2i\pi\frac{b}{a}s\right)u(a^{-2}s). \tag{1.33}$$

Preuve. — Grâce à la formule d'inversion de la transformation de Laplace, on peut écrire (dans le cas où $c>0$) :

$$(1.34)\qquad (\mathrm{M}_g u)(s)=\int_0^\infty k(s,t)u(t)\,dt,$$

avec, pour tout $\varepsilon>0$,

$$(1.35)\qquad k(s,t)=-i\int_{\frac{\varepsilon}{c}-i\infty}^{\frac{\varepsilon}{c}+i\infty} e^{i\pi\frac{\lambda+1}{2}}(c\mathrm{X}+di)^{-\lambda-1}e^{2\pi s\mathrm{X}}\exp\left(-2\pi t\,\frac{a\mathrm{X}+bi}{-ic\mathrm{X}+d}\right)d\mathrm{X}.$$

En posant $z=c\mathrm{X}+di$, on a aussi

$$(1.36)\qquad k(s,t)=-\frac{i}{c}e^{i\pi\frac{\lambda+1}{2}}\exp -2i\pi\frac{at+ds}{c}\int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} z^{-\lambda-1}e^{2\pi\frac{s}{c}z}e^{-\frac{2\pi t}{cz}}dz.$$

A l'aide de la formule (valable pour $\lambda>0$, *cf.* [8], p. 83) :

$$(1.37)\qquad \mathrm{J}_\lambda(z)=\frac{1}{2i\pi}\left(\frac{z}{2}\right)^\lambda\int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} e^{t-\frac{z^2}{4t}}t^{-\lambda-1}dt,$$

on obtient finalement

$$(1.38)\qquad k(s,t)=\frac{2\pi}{c}e^{i\pi\frac{\lambda+1}{2}}\left(\exp -2i\pi\frac{at+ds}{c}\right)\left(\frac{s}{t}\right)^{\lambda/2}\mathrm{J}_\lambda\left(\frac{4\pi}{c}(st)^{\frac{1}{2}}\right).$$

Le cas facile où $c=0$ est laissé au lecteur.

2. Le groupe des rotations autour d'un point ; l'opérateur de Laguerre ; symétries de phase ; un calcul de trace

Ainsi qu'on l'a indiqué dans le paragraphe qui suit la formule (1.6), la rotation d'angle β autour du point $1\in\Pi$ est la transformation $[k_\beta]$ pour la matrice k_β définie en (1.2). Pour tout $\beta\in\,]0,2\pi[$, soit R_β la transformation unitaire $\mathrm{M}_{k_{-\beta}}$ de H_λ attachée par la proposition 1.5 à la matrice $k_{-\beta}$, et soit $\mathscr{R}_\beta$ la transformation unitaire $\mathscr{M}_{k_{-\beta}}$ de Q_λ au sens de la définition 1.1. Si l'on précise le facteur de phase ρ de la proposition 1.4, on vérifie que l'on a

$$(2.1)\qquad \mathrm{R}_\beta\mathrm{R}_{\beta'}=\mathrm{R}_{\beta+\beta'}$$

si β, β' et $\beta+\beta'$ appartiennent tous trois à $]0,2\pi[$: le germe de groupe à un paramètre ainsi défini s'étend en un groupe à condition de poser $\mathrm{R}_{2k\pi}=e^{i\pi k(\lambda+1)}$ $(k\in\mathbb{Z})$. Le théorème de Stone permet d'écrire

$$(2.2)\qquad \mathrm{R}_\beta=\exp i\beta\mathrm{L},$$

où L est un opérateur autoadjoint que l'on va maintenant expliciter.

Proposition 2.1. — Pour tout $\lambda>0$, L coïncide avec l'opérateur

$$\mathrm{L}=-\frac{1}{4\pi}t\frac{d^2}{dt^2}+\frac{\lambda-1}{4\pi}\frac{d}{dt}+\pi t \tag{2.3}$$

sur le sous-espace dense de H_λ constitué des fonctions $u\in\mathrm{H}_\lambda$ qui sont en outre de classe C^2 sur $]0,\infty[$ et telles que $u(t)$ et $tu'(t)$ soient nulles en 0.

Preuve. — D'après (1.2) et (1.27), on a, pour $0<\beta<2\pi$:

$$(\mathscr{R}_\beta\bar{f})(\mathrm{X})=e^{i\pi\frac{\lambda+1}{2}}\left(\left(\sin\frac{\beta}{2}\right)\overline{\mathrm{X}}+i\cos\frac{\beta}{2}\right)^{-\lambda-1}\bar{f}\left(\frac{\left(\cos\frac{\beta}{2}\right)\mathrm{X}+i\sin\frac{\beta}{2}}{i\left(\sin\frac{\beta}{2}\right)\mathrm{X}+\cos\frac{\beta}{2}}\right) \tag{2.4}$$

pour toute fonction $\bar{f}\in\mathrm{Q}_\lambda$.

On en déduit

$$\left\{\frac{d}{d\beta}(\mathscr{R}_\beta\bar{f})(\mathrm{X})\right\}(\beta=0)=-\frac{\lambda+1}{2i}\overline{\mathrm{X}}\,\bar{f}(\mathrm{X})-\frac{i}{2}(1-\overline{\mathrm{X}}^2)\bar{f}'(\mathrm{X}). \tag{2.5}$$

L'identité (2.3) en résulte, compte tenu de (1.24).

La décomposition spectrale de l'opérateur de Laguerre L est connue : en effet, si l'on pose

$$u(t)=e^{-2\pi t}t^\lambda v(4\pi t), \tag{2.6}$$

on obtient

$$(\mathrm{L}u)(t)=e^{-2\pi t}t^\lambda\left\{-sv''(s)+(s-\lambda-1)v'(s)+\frac{\lambda+1}{2}v(s)\right\}(s=4\pi t). \tag{2.7}$$

D'après [8], p. 242, les valeurs propres de L sont donc les nombres $\frac{\lambda+1}{2}+k$, où k est un entier ≥ 0, et les fonctions propres sont proportionnelles aux fonctions

$$u_k(t)=e^{-2\pi t}t^\lambda\mathrm{L}_k^{(\lambda)}(4\pi t), \tag{2.8}$$

où les $\mathrm{L}_k^{(\lambda)}$ sont les polynômes de Laguerre généralisés, avec les notations de [8], p. 239. Les relations d'orthogonalité entre ces polynômes ([8], p. 241) fournissent la normalisation : il convient de poser

$$\psi_k(t)=(4\pi)^{\frac{\lambda+1}{2}}\left(\frac{k!}{\Gamma(\lambda+k+1)}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-2\pi t}t^\lambda\mathrm{L}_k^{(\lambda)}(4\pi t) \tag{2.9}$$

et l'on a alors $\|\psi_k\|_\lambda=1$ et les formules

$$u=\sum_{k\geq 0}(u,\psi_k)\psi_k \tag{2.10}$$

et

$$\mathrm{L}u=\sum_{k\geq 0}\left(\frac{\lambda+1}{2}+k\right)(u,\psi_k)\psi_k\qquad(u\in\mathrm{H}_\lambda). \tag{2.11}$$

Constatons que la première fonction propre ψ_0 n'est autre que la fonction φ_1 définie en (1.8).

Remarque. — L'opérateur de Laguerre joue, dans la présente théorie des opérateurs sur la demi-droite, un rôle tout à fait analogue à celui joué, dans la théorie des opérateurs pseudo-différentiels sur $\mathbb{R}^n$, par l'oscillateur harmonique (*cf.* [12]). En particulier, un des avantages de l'opérateur L est de donner naissance au semi-groupe $e^{-\varepsilon L}$ dont les éléments sont, pour $\varepsilon > 0$, des opérateurs à trace, ainsi que le montre la formule (2.11) : ce fait sera exploité plus loin.

Bien entendu, on peut, dans la discussion qui précède, remplacer le groupe des rotations autour du point 1 par le groupe des rotations autour de n'importe quel autre point $Y = y + i\eta \in \Pi$. Les fonctions propres normalisées du nouvel opérateur de Laguerre L_Y obtenu sont les fonctions $\psi_{Y,k}$:

$$\psi_{Y,k}(t) = (4\pi)^{\frac{\lambda+1}{2}} \left(\frac{k!}{\Gamma(\lambda+k+1)}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-2\pi Y t} t^{\lambda} L_k^{(\lambda)}(4\pi y t) y^{\frac{\lambda+1}{2}}. \tag{2.12}$$

En outre, il résulte facilement de la proposition 1.4 (la structure de groupe à un paramètre éliminant l'ambiguïté éventuelle sur le facteur de phase ρ) que pour toute matrice $g \in SL(2, \mathbb{R})$, on a (voir proposition 1.5 pour la définition de M_g) :

$$M_g^{-1} L_Y M_g = L_{[g](Y)}. \tag{2.13}$$

La proposition suivante nous sera très utile plus loin :

PROPOSITION 2.2. — *Soient* $r > 0$, *et* $g = a_r = \begin{pmatrix} e^{r/2} & 0 \\ 0 & e^{-r/2} \end{pmatrix}$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, *la trace de l'opérateur* $M_g e^{-\varepsilon L}$ *vérifie l'inégalité*

$$0 < \operatorname{Tr}(M_g e^{-\varepsilon L}) \leq \frac{e^{-\frac{\lambda r}{2}}}{2 \operatorname{sh} \frac{r}{2}}. \tag{2.14}$$

De plus, $\operatorname{Tr}(M_g e^{-\varepsilon L})$ *tend vers* $\dfrac{e^{-\frac{\lambda r}{2}}}{2 \operatorname{sh} \frac{r}{2}}$ *quand* ε *tend vers zéro.*

Preuve. — D'après (2.10) et (2.11), on a

$$\operatorname{Tr}(M_g e^{-\varepsilon L}) = \sum_{k \geq 0} e^{-\varepsilon\left(\frac{\lambda+1}{2}+k\right)} (M_g \psi_k, \psi_k). \tag{2.15}$$

Posant $y = e^{-r}$, on obtient, d'après (1.33) et (2.9) :

$$(M_g \psi_k, \psi_k) = (4\pi)^{\lambda+1} \frac{k!}{\Gamma(\lambda+k+1)} y^{\frac{\lambda+1}{2}} \int_0^\infty e^{-2\pi(1+y)t} t^{\lambda} L_k^{(\lambda)}(4\pi t) L_k^{(\lambda)}(4\pi y t)\, dt. \tag{2.16}$$

Considérons, pour $0<x<1$, la série à termes positifs

$$\Sigma \frac{x^k k!}{\Gamma(\lambda+k+1)} e^{-4\pi y t}(L_k^{(\lambda)}(4\pi y t))^2 (4\pi t y)^\lambda.$$

D'après [8], p. 242, sa somme est

$$\frac{x^{-\lambda/2}}{1-x}\left(\exp -4\pi y \frac{1+x}{1-x} t\right) I_\lambda\left(\frac{8\pi t y x^{\frac{1}{2}}}{1-x}\right),$$

expression dont l'intégrale de 0 à ∞ par rapport à dt est convergente puisque

$$4\pi y \frac{1+x}{1-x} > 8\pi y \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1-x}$$

(*cf.* [8], p. 139). La série considérée peut donc être intégrée terme à terme sur $(0, \infty)$ par rapport à dt, et les mêmes considérations s'appliquent à la série analogue où l'on a remplacé y par 1. L'inégalité de Schwarz permet alors d'intégrer terme à terme la série.

$$f(x, t) = \sum_{k \geq 0} \frac{x^k k!}{\Gamma(\lambda+k+1)} e^{-2\pi(1+y)t} (4\pi t)^\lambda y^{\lambda/2} L_k^{(\lambda)}(4\pi t) L_k^{(\lambda)}(4\pi y t) \tag{2.17}$$

et l'on a, d'après [8], p. 242 :

$$f(x, t) = \frac{x^{-\lambda/2}}{1-x}\left(\exp -2\pi(1+y)\frac{1+x}{1-x} t\right) I_\lambda\left(\frac{8\pi t (xy)^{\frac{1}{2}}}{1-x}\right). \tag{2.18}$$

En posant $x = e^{-\varepsilon}$, on obtient, d'après (2.15) :

$$\operatorname{Tr}(M_g e^{-\varepsilon L}) = 4\pi \frac{(xy)^{\frac{1}{2}}}{1-x} \int_0^\infty e^{-\beta t} I_\lambda(\alpha t)\, dt \tag{2.19}$$

avec

$$\beta = 2\pi(1+y)\frac{1+x}{1-x} \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{8\pi (xy)^{\frac{1}{2}}}{1-x}. \tag{2.20}$$

Puisque $0<\alpha<\beta$, on a d'après [8], p. 91 :

$$\int_0^\infty e^{-\beta t} I_\lambda(\alpha t)\, dt = (\beta^2 - \alpha^2)^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{\beta - (\beta^2-\alpha^2)^{\frac{1}{2}}}{\beta + (\beta^2-\alpha^2)^{\frac{1}{2}}}\right]^{\lambda/2}. \tag{2.21}$$

Ici

$$\beta^2 - \alpha^2 = \frac{4\pi^2(1+y)^2}{(1-x)^2}\left[(1+x)^2 - \frac{16xy}{(1+y)^2}\right].$$

Puisque $y=e^{-r}$, on a $\frac{(1+y)^2}{4y}=\operatorname{ch}^2\frac{r}{2}$. Le trinôme

$$(1+z)^2-4z\left(\operatorname{ch}\frac{r}{2}\right)^{-2}=z^2+2\left[1-2\left(\operatorname{ch}\frac{r}{2}\right)^{-2}\right]z+1$$

a deux racines complexes conjuguées $e^{\pm i\delta}$ (on supposera $0<\delta<\pi$) données par

$$e^{i\delta}+2\left[1-2\left(\operatorname{ch}\frac{r}{2}\right)^{-2}\right]+e^{-i\delta}=0,$$

d'où

(2.22) $$\cos\delta=\frac{2}{\operatorname{ch}^2\frac{r}{2}}-1 \quad \text{et} \quad \cos\frac{\delta}{2}=\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{r}{2}}.$$

Par suite

(2.23) $$(\beta^2-\alpha^2)^{\frac{1}{2}}=\frac{2\pi(1+y)}{1-x}(x^2-2x\cos\delta+1)^{\frac{1}{2}}$$

et

(2.24) $$\frac{\beta-(\beta^2-\alpha^2)^{\frac{1}{2}}}{\beta+(\beta^2-\alpha^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1+x-(x^2-2x\cos\delta+1)^{\frac{1}{2}}}{1+x+(x^2-2x\cos\delta+1)^{\frac{1}{2}}}=\frac{2x(1+\cos\delta)}{[1+x+(x^2-2x\cos\delta+1)^{\frac{1}{2}}]^2}$$

Finalement, d'après (2.19) et (2.21), on a

(2.25)
$$\operatorname{Tr}(M_g e^{-\varepsilon L})=\frac{2(xy)^{\frac{1}{2}}}{1+y}(x^2-2x\cos\delta+1)^{-\frac{1}{2}}(2x(1+\cos\delta))^{\lambda/2}[1+x+(x^2-2x\cos\delta+1)^{\frac{1}{2}}]^{-\lambda}$$

et comme on peut aussi écrire

(2.26) $$x^2-2x\cos\delta+1=4e^{-\varepsilon}\left(\operatorname{ch}^2\frac{\varepsilon}{2}-\cos^2\frac{\delta}{2}\right),$$

on obtient

(2.27) $$\operatorname{Tr}(M_g e^{-\varepsilon L})=\frac{1}{2}\left(\operatorname{ch}\frac{r}{2}\right)^{-\lambda-1}\left(\operatorname{ch}^2\frac{\varepsilon}{2}-\frac{1}{\operatorname{ch}^2\frac{r}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}\left[\operatorname{ch}\frac{\varepsilon}{2}+\left(\operatorname{ch}^2\frac{\varepsilon}{2}-\frac{1}{\operatorname{ch}^2\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{-\lambda}.$$

La proposition 2.2 résulte de cette égalité.

DÉFINITION 2.1. — Pour tout $Y\in\Pi$ ($Y=y+i\eta$), soit $S_Y\in SL(2,\mathbb{R})$ la matrice

(2.28) $$S_Y=\begin{pmatrix}-\eta/y & -(y^2+\eta^2)/y\\ 1/y & \eta/y\end{pmatrix},$$

de sorte que la transformation $[S_Y]$ de Π, définie par

$$[S_Y](X)=\frac{y^2}{X-i\eta}+i\eta \tag{2.29}$$

est la symétrie autour de Y au sens de la structure d'espace riemannien symétrique de Π.

On désigne par σ_Y, et l'on appelle symétrie de phase autour de Y, la transformation unitaire de $H_\lambda (\lambda>0)$ définie par

$$\sigma_Y=e^{-i\pi\frac{\lambda+1}{2}}M_{S_Y}, \tag{2.30}$$

autrement dit par la formule (valable pour $u \in C_0^\infty(]0, \infty[)$)

$$(\sigma_Y u)(s)=2\pi y\int_0^\infty e^{-2i\pi(s-t)\eta}\left(\frac{s}{t}\right)^{\lambda/2} J_\lambda(4\pi y(st)^{\frac{1}{2}})u(t)\,dt. \tag{2.31}$$

Remarques. — La formule (2.31) est une conséquence de la proposition 1.5.

On a $S_Y^2=-I$, d'où $M_{S_Y}^2=e^{i\pi(\lambda+1)}I$, d'après une remarque faite à la suite de la proposition 1.5. Il en résulte l'importante formule

$$\sigma_Y=\sigma_Y^{-1}=\sigma_Y^*, \tag{2.32}$$

que l'on peut également déduire du caractère manifestement autoadjoint de l'opérateur défini par (2.31). Le lien de la symétrie de phase σ_Y avec l'opérateur de Laguerre en Y est donné, d'après (2.2), par

$$\sigma_Y=\exp i\pi\left(L_Y-\frac{\lambda+1}{2}\right). \tag{2.33}$$

Pour toute matrice $g \in SL(2, \mathbb{R})$, on a, d'après (2.13) :

$$M_g^{-1}\sigma_Y M_g=\sigma_{[g](Y)}. \tag{2.34}$$

Les opérateurs de symétrie de phase joueront le rôle-clé dans la définition des correspondances entre symboles et opérateurs.

3. Opérateurs à trace et opérateurs de Hilbert-Schmidt

Cette section, purement auxiliaire est imposée par la nécessité, qui se présentera dans la section suivante, de comparer les traces d'extensions d'un même opérateur dans des espaces H_λ correspondant à des valeurs différentes de λ. Notons d'emblée que la définition (1.7) permet d'introduire l'espace de Hilbert H_μ pour toute valeur *réelle* de μ (mais ni $\mathscr{L}_\mu$, ni le groupe de transformations unitaires, ne sont définis si $\mu \leq 0$).

DÉFINITION 3.1. — Pour tout $\mu \in \mathbb{R}$, on désignera par s^μ la transformation qui associe à la fonction u sur $(0, \infty)$ la fonction $s \mapsto s^\mu u(s)$: c'est, pour tout $\nu \in \mathbb{R}$, une isométrie de H_ν sur $H_{\nu+2\mu}$.

Pour tout couple (μ, ν) de nombres réels, on désigne par $S(H_\mu, H_\nu)$ l'espace de Hilbert des opérateurs de Hilbert-Schmidt de H_μ dans H_ν (*cf.* [10], p. 206 à 212 et p. 220, ex. 47); on désigne par $|||\,A\,|||_{\mu,\nu}$ la norme d'un opérateur A dans cet espace.

Convention. — Dans toute cette section, on fixe $\lambda > 0$, et la forme $(\,,)$ désignera toujours le produit scalaire dans H_λ ; de plus, l'application $A \mapsto A^*$ sera toujours comprise au sens des opérateurs (éventuellement non bornés) de H_λ dans H_λ : ainsi, si A est un opérateur continu de $H_{\lambda-1}$ dans H_λ, A^* sera l'opérateur de H_λ dans $H_{\lambda+1}$ défini par l'identité $(A^*u, v) = (u, Av)$, et non un opérateur de H_λ dans $H_{\lambda-1}$.

PROPOSITION 3.1. — Si $u \in H_{\lambda-m}$ et si $m < \lambda$, on a

$$\int_\Pi x^{-m}\,|(u, \varphi_X)|^2 d\mu(X) = (4\pi)^{m+1}\frac{\Gamma(\lambda-m)}{\Gamma(\lambda+1)}\,\|u\|^2_{\lambda-m}. \tag{3.1}$$

Preuve. — C'est une conséquence immédiate de (1.11).

PROPOSITION 3.2. — Si $A \in S(H_\lambda, H_\lambda)$, on a

$$|||\,A\,|||^2_{\lambda,\lambda} = \frac{\lambda}{4\pi}\int_\Pi \|A\varphi_X\|^2_\lambda d\mu(X). \tag{3.2}$$

Preuve. — Soit (ψ_j) une base orthonormale de H_λ. On a

$$|||\,A\,|||^2_{\lambda,\lambda} = |||\,A^*\,|||^2_{\lambda,\lambda} = \sum_j \|A^*\psi_j\|^2_\lambda = \frac{\lambda}{4\pi}\sum_j \int_\Pi |(A^*\psi_j, \varphi_X)|^2 d\mu(X)$$

d'après (1.13), et par ailleurs on a

$$\sum_j |(A^*\psi_j, \varphi_X)|^2 = \sum_j |(A\varphi_X, \psi_j)|^2 = \|A\varphi_X\|^2_\lambda.$$

PROPOSITION 3.3. —Si A est un opérateur à trace de H_λ dans H_λ, on a

$$\operatorname{Tr} A = \frac{\lambda}{4\pi}\int_\Pi (A\varphi_X, \varphi_X) d\mu(X). \tag{3.3}$$

Preuve. — Écrivons $A = B_1 B_2$, où B_1 et B_2 appartiennent à $S(H_\lambda, H_\lambda)$: la convergence de l'intégrale résulte alors de l'inégalité

$$|(A\varphi_X, \varphi_X)| \le \|B_2\varphi_X\|_\lambda \; \|B_1^*\varphi_X\|_\lambda,$$

de la proposition 3.2 et de l'inégalité de Schwarz.

Dans le cas où $B_1 = B_2^*$, l'identité (3.3) équivaut à l'identité (3.2) où l'on a remplacé A par B_2 ; le cas général s'en déduit par l'identité de polarisation des formes hermitiennes.

PROPOSITION 3.4. —Si $B \in S(H_{\lambda-1}, H_\lambda)$, on a

$$\int_\Pi x\,\|B\varphi_X\|^2_\lambda d\mu(X) < \infty. \tag{3.4}$$

Si $B \in S(H_{\lambda+1}, H_\lambda)$ et si $\lambda > 1$, on a

$$\int_\Pi x^{-1} \| B\varphi_X \|_\lambda^2 d\mu(X) < \infty . \tag{3.5}$$

Preuve. — Dans le premier cas, on écrit, avec la base (ψ_j) introduite plus haut

$$\||B\||^2_{\lambda-1,\lambda} = \||B^*\||^2_{\lambda,\lambda+1} = \sum_j \| B^*\psi_j \|^2_{\lambda+1} = \sum_j \int_\Pi x\,|(B^*\psi_j, \varphi_X)|^2 d\mu(X) = \int_\Pi x \sum_j |(B\varphi_X, \psi_j)|^2 d\mu(X)$$
$$= \int_\Pi x \| B\varphi_X \|^2 d\mu(X).$$

On s'est servi de l'identité (3.1); dans le deuxième cas, c'est le même calcul, mais il faut faire attention à la condition $m < \lambda$ de la proposition 3.1.

PROPOSITION 3.5. — Soient A et $B \in S(H_\lambda, H_\lambda)$. Si $\lambda > 1$, on a l'identité

$$\operatorname{Tr}(AB) = \frac{\lambda}{4\pi} \int_\Pi (B(s^{\frac{1}{2}}\varphi_X), A^*(s^{-\frac{1}{2}}\varphi_X)) d\mu(X). \tag{3.6}$$

Preuve. — L'application $s^{\frac{1}{2}}$ est une isométrie de $H_{\lambda-1}$ sur H_λ ou bien de H_λ sur $H_{\lambda+1}$. On a donc : $Bs^{\frac{1}{2}} \in S(H_{\lambda-1}, H_\lambda)$ et $A^*s^{-\frac{1}{2}} \in S(H_{\lambda+1}, H_\lambda)$ d'où, d'après la proposition 3.4 :

$$\int_\Pi x \| Bs^{\frac{1}{2}}\varphi_X \|_\lambda^2 d\mu(X) < \infty \qquad \text{et} \qquad \int_\Pi x^{-1} \| A^*s^{-\frac{1}{2}}\varphi_X \|_\lambda^2 d\mu(X) < \infty .$$

L'inégalité de Schwarz montre donc la convergence de l'intégrale au second membre de (3.6). Les deux membres de cette égalité sont des formes bilinéaires continues sur $S(H_\lambda, H_\lambda) \times S(H_\lambda, H_\lambda)$: il suffit donc de la démontrer dans le cas où A et B sont des opérateursde rang fini, ou même dans le cas où A est l'opérateur de rang un : $w \mapsto (w, v_1)u_1$ et où B est l'opérateur $w \mapsto (w, v_2)u_2$. Alors $ABw = (u_2, v_1)(w, v_2)u_1$, d'où $\operatorname{Tr} AB = (u_2, v_1)(u_1, v_2)$. Par ailleurs $A^*w = (w, u_1)v_1$, d'où

$$(B(s^{\frac{1}{2}}\varphi_X), A^*(s^{-\frac{1}{2}}\varphi_X)) = ((s^{\frac{1}{2}}\varphi_X, v_2)u_2, (s^{-\frac{1}{2}}\varphi_X, u_1)v_1) = (u_2, v_1)(s^{-\frac{1}{2}}u_1, \varphi_X)(\varphi_X, s^{\frac{1}{2}}v_2).$$

Il ne reste donc plus qu'à prouver (pour $u_1 \in H_\lambda$ et $v_2 \in H_\lambda$) l'identité

$$(u_1, v_2) = \frac{\lambda}{4\pi} \int_\Pi (s^{-\frac{1}{2}}u_1, \varphi_X)(\varphi_X, s^{\frac{1}{2}}v_2) d\mu(X). \tag{3.7}$$

Or l'intégrale de droite converge en vertu de l'inégalité de Schwarz et des inégalités

$$\int_\Pi x^{-1} |(s^{-\frac{1}{2}}u_1, \varphi_X)|^2 d\mu(X) < \infty \qquad \text{et} \qquad \int_\Pi x\,|(s^{\frac{1}{2}}v_2, \varphi_X)|^2 d\mu(X) < \infty$$

énoncées en (3.1), et les deux membres de (3.7) sont donc des formes hermitiennes continues sur $H_\lambda \times H_\lambda$: enfin, dans le cas où u_1 appartient à $H_{\lambda+1} \cap H_\lambda$ (sous-espace dense de H_λ) et où v_2 appartient à $H_{\lambda-1} \cap H_\lambda$, l'intégrale coïncide, d'après (1.14), avec $(s^{-\frac{1}{2}}u_1, s^{\frac{1}{2}}v_2) = (u_1, v_2)$.

PROPOSITION 3.6. — Soient $A \in S(H_\lambda, H_{\lambda-1})$ et $B_1 \in S(H_{\lambda-1}, H_\lambda)$, ce qui permet de définir la trace de $B_1A : H_\lambda \to H_\lambda$. On a, si $\lambda > 1$, l'identité

$$\mathrm{Tr}\,(B_1A) = \frac{\lambda}{4\pi}\int_\Pi (AB_1\varphi_X, \varphi_X)\,d\mu(X). \tag{3.8}$$

Preuve. — Posons $A' = s^{\frac{1}{2}}A \in S(H_\lambda, H_\lambda)$ et $B'_1 = B_1 s^{-\frac{1}{2}} \in S(H_\lambda, H_\lambda)$, d'où

$$\mathrm{Tr}\,(B_1A) = \mathrm{Tr}\,B'_1 s^{\frac{1}{2}} s^{-\frac{1}{2}} A' = \mathrm{Tr}\,B'_1A' = \mathrm{Tr}\,A'B'_1.$$

D'après la proposition 3.5, on a donc

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\,(B_1A) &= \frac{\lambda}{4\pi}\int_\Pi (B'_1(s^{\frac{1}{2}}\varphi_X), A'^*(s^{-\frac{1}{2}}\varphi_X))\,d\mu(X)\\ &= \frac{\lambda}{4\pi}\int_\Pi (B_1\varphi_X, A^*\varphi_X)\,d\mu(X) = \frac{\lambda}{4\pi}\int_\Pi (AB_1\varphi_X, \varphi_X)\,d\mu(X).\end{aligned}$$

Il importe, malgré la formule (3.3), de ne pas confondre (3.8) avec la formule

$$\mathrm{Tr}\,(B_1A) = \mathrm{Tr}\,(AB_1) :$$

en effet, dans cette dernière, la trace au second membre doit être interprétée comme celle d'un opérateur de $H_{\lambda-1}$ dans $H_{\lambda-1}$, ce qui ne conduit pas à la formule (3.8) directement.

PROPOSITION 3.7. — Soient $B_1 \in S(H_{\lambda-1}, H_\lambda)$ et $B_2 \in S(H_\lambda, H_{\lambda+1})$ et supposons que l'on ait $B_2u = -B_1u$ pour toute fonction u appartenant à $H_{\lambda-1} \cap H_\lambda$. Alors on a

$$\mathrm{Tr}\,B_1A + \mathrm{Tr}\,AB_2 = 0$$

pour tout opérateur $A \in S(H_\lambda, H_{\lambda-1}) \cap S(H_{\lambda+1}, H_\lambda)$.

Preuve. — Supposons d'abord $\lambda > 1$. Puisque $A \in S(H_{\lambda+1}, H_\lambda)$, AB_2 est un opérateur à trace dans H_λ : d'après (3.3), on a

$$\mathrm{Tr}\,(AB_2) = \frac{\lambda}{4\pi}\int_\Pi (AB_2\varphi_X, \varphi_X)\,d\mu(X).$$

D'après (3.8), on a

$$\mathrm{Tr}\,B_1A = \frac{\lambda}{4\pi}\int_\Pi (AB_1\varphi_X, \varphi_X)\,d\mu(X).$$

On obtient le résultat recherché en additionnant ces deux identités.

Si $0 < \lambda \leq 1$, on ne peut pas appliquer la deuxième de ces identités, mais la proposition reste valable : en effet, l'isomorphisme $s^{\frac{1}{2}}$ (de $H_{\lambda-1}$ sur H_λ, etc...) permet de se ramener à la situation précédente.

DÉFINITION 3.2. — Supposons $\lambda>0$. On désigne par E l'espace des opérateurs linéaires A de $H_\lambda \cap H_{\lambda+1}$ dans $H_{\lambda-1}\cap H_\lambda$ tels que A admette un prolongement en un opérateur de Hilbert-Schmidt de H_λ dans $H_{\lambda-1}$, et un prolongement en un opérateur de Hilbert-Schmidt de $H_{\lambda+1}$ dans H_λ. L'espace vectoriel E est un espace de Hilbert pour la norme

$$A \mapsto \| A \|_E = (|||\, A \,|||^2_{\lambda,\lambda-1} + |||\, A \,|||^2_{\lambda+1,\lambda})^{\frac{1}{2}}. \tag{3.9}$$

On désigne par E′ l'espace vectoriel des opérateurs linéaires B: $H_\lambda \cap H_{\lambda-1} \to H_{\lambda+1}+H_\lambda$ qui peuvent s'écrire $B=B_1+B_2$, où B_1 se prolonge en un élément de $S(H_{\lambda-1}, H_\lambda)$ et B_2 se prolonge en un élément de $S(H_\lambda, H_{\lambda+1})$. L'espace E′ est un espace de Hilbert pour la norme

$$B \mapsto \| B \|_{E'} = \inf_{B_1+B_2=B} (|||\, B_1 \,|||^2_{\lambda-1,\lambda} + |||\, B_2 \,|||^2_{\lambda,\lambda+1})^{\frac{1}{2}}.$$

PROPOSITION 3.8. — Avec les notations de la définition 3.2, nous posons

$$\langle A, B \rangle_{E\times E'} = \operatorname{Tr}(B_1 A) + \operatorname{Tr}(AB_2) \tag{3.10}$$

si $A\in E$ et $B=B_1+B_2\in E'$: la définition est légitime en vertu de la proposition 3.7. La forme bilinéaire ainsi définie établit un isomorphisme (d'espaces de Banach) de E′ sur le dual de E.

Preuve. — La forme $(A, B_1) \mapsto \operatorname{Tr}(B_1 A)$ identifie $S(H_{\lambda-1}, H_\lambda)$ au dual de $S(H_\lambda, H_{\lambda-1})$, la forme $(A, B_2) \mapsto \operatorname{Tr}(AB_2)$ identifie $S(H_\lambda, H_{\lambda+1})$ au dual de $S(H_{\lambda+1}, H_\lambda)$. Par ailleurs, E est un sous-espace de Hilbert du produit $S(H_\lambda, H_{\lambda-1}) \times S(H_{\lambda+1}, H_\lambda)$: la forme

$$(A, (B_1, B_2)) \mapsto \operatorname{Tr}(B_1 A) + \operatorname{Tr}(AB_2)$$

identifie donc le dual de E à l'espace quotient de $S(H_{\lambda-1}, H_\lambda) \times S(H_\lambda, H_{\lambda+1})$ par le sous-espace constitué des couples (B_1, B_2) tels que $\operatorname{Tr}(B_1A)+\operatorname{Tr}(AB_2)=0$ pour tout $A\in E$.

Le reste de la preuve est laissé au lecteur.

Remarque. — Insistons sur le fait qu'on a, pour tout $\lambda>0$,

$$\langle A, B \rangle_{E\times E'} = \operatorname{Tr} AB \quad \text{si} \quad B\in S(H_\lambda, H_{\lambda+1}) \tag{3.11}$$

et

$$\langle A, B \rangle_{E\times E'} = \operatorname{Tr} BA \quad \text{si} \quad B\in S(H_{\lambda-1}, H_\lambda). \tag{3.12}$$

Par ailleurs, si $\lambda>1$, on peut écrire dans tous les cas

$$\langle A, B \rangle_{E\times E'} = \frac{\lambda}{4\pi}\int_\Pi (AB\varphi_X, \varphi_X)\,d\mu(X) \tag{3.13}$$

comme le montre la preuve de la proposition 3.7. Dans les mêmes conditions, on peut écrire également

$$(3.14)\qquad \langle A, B \rangle_{E\times E'} = \frac{\lambda}{4\pi}\int_\Pi (BA\varphi_X, \varphi_X)\,d\mu(X) :$$

en effet, tout revient à prouver, sous les hypothèses de la proposition 3.7, l'égalité

$$\operatorname{Tr}(AB_2) = \frac{\lambda}{4\pi}\int_\Pi (B_2A\varphi_X, \varphi_X)\,d\mu(X),$$

ce à quoi l'on parvient en appliquant la proposition 3.6 au calcul de $\operatorname{Tr}(B_2^*A^*)$.

PROPOSITION 3.9. — Supposons $\lambda > 1$, et considérons l'espace de Hilbert $E\cap E'$, muni de la norme $A \mapsto \| A \|_{E\cap E'} = (\| A \|_E^2 + \| A \|_{E'}^2)^{\frac{1}{2}}$. Alors, lorsque X et Z parcourent Π, les opérateurs (de rang un) $w \mapsto (w, \varphi_Z)\varphi_X$ constituent un système total dans $E\cap E'$.

Preuve. — Soit C une forme linéaire continue sur $E\cap E'$: d'après la proposition 3.8, on peut trouver $C_1 \in E$ et $C_2 \in E'$ tels que, pour tout $A \in E\cap E'$, on ait

$$C(A) = \langle C_1, A \rangle_{E\times E'} + \langle A, C_2 \rangle_{E\times E'}.$$

Si nous posons $C_0 = C_1 + C_2$ (c'est un opérateur bien défini par exemple de $H_\lambda \cap H_{\lambda-1}$ dans $H_{\lambda-1} + H_{\lambda+1}$), les formules (3.13) et (3.14) permettent d'écrire

$$(3.15)\qquad C(A) = \frac{\lambda}{4\pi}\int_\Pi (C_0A\varphi_X, \varphi_X)\,d\mu(X).$$

Si A coïncide avec l'opérateur $A_{X,Z}$ défini par $A_{X,Z}w = (w, \varphi_X)\varphi_Z$, la formule (3.11) fournit $\langle C_1, A \rangle_{E\times E'} = \operatorname{Tr}(C_1A) = (C_1\varphi_X, \varphi_Z)$; par ailleurs, si $C_2 = B_1 + B_2$ avec les hypothèses de la définition 3.2, on a

$$\langle A, C_2 \rangle_{E\times E'} = \operatorname{Tr}(B_1A) + \operatorname{Tr}(AB_2) = (B_1\varphi_X, \varphi_Z) + (\varphi_X, B_2^*\varphi_Z) = (C_2\varphi_X, \varphi_Z),$$

d'où
$$C(A) = (C_0\varphi_X, \varphi_Z).$$

Supposons maintenant que la forme linéaire C s'annule sur le sous-espace vectoriel de $E\cap E'$ engendré par les opérateurs $A_{X,Z}$.

D'après la proposition 1.2, les fonctions φ_Z constituent, quand Z parcourt Π, un système total dans $H_{\lambda-1}\cap H_{\lambda+1}$: comme $C_0\varphi_X \in H_{\lambda+1} + H_{\lambda-1}$, il en résulte que $C_0\varphi_X = 0$ pour tout X ; appliquant à nouveau cette proposition, on voit que C_0 est nul sur $H_{\lambda-1} + H_{\lambda+1}$, d'où $C_0^*\varphi_X = 0$ pour tout X : l'identité (3.15) montre donc que la forme linéaire C est nulle, ce qui prouve la proposition.

4. Symboles actif et passif d'un opérateur ; fonctions de Wigner ; autres exemples

Renvoyons à la définition 2.1 des symétries de phase. On supposera toujours $\lambda > 0$ dans cette section.

DÉFINITION 4.1. — Soit $a \in L^1(\Pi, d\mu)$: on appelle l'opérateur sur H_λ de *symbole actif a* l'opérateur $Q(a)$ défini par

$$Q(a) = 2 \int_\Pi a(Y)\sigma_Y d\mu(Y), \tag{4.1}$$

autrement dit $Q(a)u = 2 \int_\Pi a(Y)(\sigma_Y u) d\mu(Y)$ pour toute $u \in H_\lambda$.

Si B est un opérateur à trace sur H_λ, on définit son *symbole passif b* par la formule

$$b(Y) = 2\,\mathrm{Tr}\,(\sigma_Y B).$$

Remarques. — En utilisant (2.34), on voit que les symboles actif et passif jouissent des propriétés de covariance suivantes, analogues de la formule de Segal pour le groupe métaplectique :

$$M_g^{-1} Q(a) M_g = Q(a \circ [g]^{-1}) \qquad \text{pour toute } g \in SL(2, \mathbb{R}) \tag{4.3}$$

et

$$2\,\mathrm{Tr}\,(\sigma_Y M_g^{-1} B M g) = 2\,\mathrm{Tr}\,(\sigma_{[g]^{-1}(Y)} B) : \tag{4.4}$$

cette deuxième formule exprime que, si b est le symbole passif de B, celui de $M_g^{-1} B M_g$ est $b \circ [g]^{-1}$.

Notons également que le symbole actif de A^* (resp. symbole passif de B^*) est $\bar{a}$ (resp. $\bar{b}$).

Enfin, les symboles actif et passif jouent des rôles duaux au sens suivant : avec les hypothèses de la définition 4.1, soient A l'opérateur de symbole actif a et b le symbole passif de l'opérateur B. On a alors

$$\mathrm{Tr}\,(AB) = \int_\Pi a(Y) b(Y) d\mu(Y). \tag{4.5}$$

Cette formule est une conséquence immédiate des définitions.

DÉFINITION 4.2. — Avec $\varepsilon \pm 1$, on désigne par $L^2(\Pi, y^\varepsilon d\mu)$ l'espace de Hilbert des classes (presque partout...) de fonctions mesurables a sur Π telles que $\int_\Pi |a(Y)|^2 y^\varepsilon d\mu(Y) < \infty$, muni de la norme

$$a \mapsto (2^{-\varepsilon} \int_\Pi |a(Y)|^2 y^\varepsilon d\mu(Y))^{\frac{1}{2}}. \tag{4.6}$$

THÉORÈME 4.1. — Soit $a \in L^1(\Pi, d\mu) \cap L^2(\Pi, y^{-1} d\mu)$. Alors $Q(a)$ appartient à l'espace E introduit dans la définition 3.2, et l'on a l'égalité

$$\| a \|_{L^2(\Pi, y^{-1} d\mu)} = \| Q(a) \|_E. \tag{4.7}$$

Soit k le noyau de l'opérateur $A = Q(a)$ dans l'espace H_λ, défini par l'identité (valable pour $u \in C_0^\infty(]0, \infty[)$) :

$$(Au)(s) = \int_0^\infty k(s, t) u(t) t^{-\lambda} dt. \tag{4.8}$$

Alors a peut être reconstruit à partir de k par la formule

$$a(y,\eta)=2\pi y^2 \iint e^{2i\pi(s-t)\eta}(st)^{-\lambda/2}J_\lambda(4\pi y(st)^{\frac{1}{2}})(s+t)k(s,t)dsdt. \tag{4.9}$$

Preuve. — D'après (4.1) et (2.31), le noyau de $Q(a)$ est donné par

$$k(s,t)=4\pi(st)^{\lambda/2}\int_\Pi \frac{a(y,\eta)}{y}e^{-2i\pi(s-t)\eta}J_\lambda(4\pi y(st)^{\frac{1}{2}})dyd\eta \tag{4.10}$$

ou encore

$$k(s,t)=2\pi(st)^{\lambda/2}\int_\Pi e^{-2i\pi(s-t)\eta}J_\lambda(4\pi y(st)^{\frac{1}{2}})\frac{a(y^{\frac{1}{2}},\eta)}{y}dyd\eta. \tag{4.11}$$

Considérons la transformation σ_1, cas particulier de (2.31) avec $y+i\eta=1$: on a l'identité

$$(\sigma_1 u)(s)=2\pi\int_0^\infty \left(\frac{s}{t}\right)^{\lambda/2} J_\lambda(4\pi(st)^{\frac{1}{2}})u(t)dt. \tag{4.12}$$

En particulier, on a

$$\begin{aligned}[\sigma_1(y\mapsto y^{\lambda/2-1}a(y^{\frac{1}{2}},\eta))](st)&=2\pi\int_0^\infty\left(\frac{st}{y}\right)^{\lambda/2}J_\lambda(4\pi(sty)^{\frac{1}{2}})a(y^{\frac{1}{2}},\eta)y^{\lambda/2-1}dy\\&=2\pi(st)^{\lambda/2}\int_0^\infty J_\lambda(4\pi(sty)^{\frac{1}{2}})\frac{a(y^{\frac{1}{2}},\eta)}{y}dy.\end{aligned} \tag{4.13}$$

On peut donc écrire (4.11) sous la forme

$$k(s,t)=[(\sigma_1\otimes\mathscr{F})(y^{\lambda/2-1}a(y^{\frac{1}{2}},\eta))](st,s-t), \tag{4.14}$$

où l'opérateur $\sigma_1\otimes\mathscr{F}$ est l'opérateur (sur les fonctions sur Π) défini par

$$[(\sigma_1\otimes\mathscr{F})b](x,z)=2\pi\int_0^\infty\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{x}{y}\right)^{\lambda/2}J_\lambda(4\pi(xy)^{\frac{1}{2}})e^{-2i\pi z\eta}b(y,\eta)dyd\eta. \tag{4.15}$$

Il est clair que si $(\sigma_1\otimes\mathscr{F})b=r$, on a

$$\int_\Pi |r(x,z)|^2x^{-\lambda}dxdz=\int_\Pi |b(y,\eta)|^2y^{-\lambda}dyd\eta \tag{4.16}$$

puisque σ_1 est une isométrie de H_λ et $\mathscr{F}$ une isométrie de $L^2(\mathbb{R})$.

Posant $b(y,\eta)=y^{\lambda/2-1}a(y^{\frac{1}{2}},\eta)$ et $(\sigma_1\otimes\mathscr{F})b=r$, on a donc $k(s,t)=r(st,s-t)$. D'un côté, on a

$$\int_\Pi |b(y,\eta)|^2y^{-\lambda}dyd\eta=\int_\Pi |a(y^{\frac{1}{2}},\eta)|^2\frac{dyd\eta}{y^2}=2\int_\Pi |a(y,\eta)|^2\frac{dyd\eta}{y^3}. \tag{4.17}$$

De l'autre, en posant $x=st$, $z=s-t$, d'où $dxdz=(s+t)dsdt$, on obtient

$$\int_\Pi |r(x,z)|^2x^{-\lambda}dxdz=\int_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+}|k(s,t)|^2(st)^{-\lambda}(s+t)dsdt. \tag{4.18}$$

Puisque $k(s, t)$ est le noyau de A, $s^{\frac{1}{2}}k(s, t)$ et $t^{\frac{1}{2}}k(s, t)$ sont les noyaux des opérateurs $s^{\frac{1}{2}}\mathrm{A}$ et $\mathrm{A}s^{\frac{1}{2}}$ (*cf.* définition 3.1). Comme la norme de Hilbert-Schmidt d'un opérateur de H_λ dans H_λ de noyau k_1 est $\left(\iint |k_1(s, t)|^2(st)^{-\lambda}dsdt\right)^{\frac{1}{2}}$, l'égalité (4.7) est une conséquence des égalités (4.16), (4.17) et (4.18).

Il reste pour terminer la preuve du théorème 4.1 en établissant (4.9) à inverser la formule (4.14) : or σ_1 est involutive (*cf.* (2.32)), ce qui, soit dit en passant, équivaut à la formule d'inversion de Hankel (*cf.* [8], p. 397), et la formule d'inversion de Fourier est bien connue ! Il résulte donc de (4.14) que l'on a

$$y^{\lambda/2-1}a(y^{\frac{1}{2}}, \eta)=2\pi\int_\Pi e^{2i\pi z\eta}\left(\frac{y}{x}\right)^{\lambda/2}\mathrm{J}_\lambda(4\pi(xy)^{\frac{1}{2}})r(x, z)dxdz. \tag{4.19}$$

En utilisant à nouveau le changement de variables $x=st$, $z=s-t$, on en déduit (4.9).

COROLLAIRE 4.1. — L'application $a\mapsto \mathrm{Q}(a)$ se prolonge en une isométrie (encore notée Q), de $\mathrm{L}^2(\Pi, y^{-1}d\mu)$ sur E.

THÉORÈME 4.2.— L'application $\mathrm{B}\mapsto b$ définie par (4.2) se prolonge (de façon unique) en une isométrie de E′ (voir définition 3.2) sur $\mathrm{L}^2(\Pi, yd\mu)$, telle que l'on ait, pour tout $\mathrm{B}\in\mathrm{E}'$ et tout $a\in\mathrm{L}^2(\Pi, y^{-1}d\mu)$, l'identité

$$\langle \mathrm{Q}(a), \mathrm{B}\rangle_{\mathrm{E}\times\mathrm{E}'}=\int_\Pi a(\mathrm{Y})b(\mathrm{Y})d\mu(\mathrm{Y}). \tag{4.20}$$

Preuve. — Grâce à la proposition 3.8, il suffit de transposer l'opérateur Q et d'utiliser (4.5), en notant le fait suivant :

soient $\mathrm{A}\in\mathrm{E}$ et $\mathrm{B}\in\mathrm{E}'$, et supposons en outre que A soit un opérateur borné dans H_λ, et B un opérateur à trace : alors $\langle \mathrm{A}, \mathrm{B}\rangle_{\mathrm{E}\times\mathrm{E}'}=\mathrm{Tr}\,(\mathrm{AB})$.

Pour le démontrer, introduisons, pour tout $\varepsilon>0$, l'opérateur K_ε de multiplication par la fonction $(1+\varepsilon s^{-\frac{1}{2}})^{-1}$: l'opérateur K_ε converge vers l'opérateur identique de H_λ, et est en outre de norme ≤ 1. On peut alors écrire

$$\mathrm{Tr}\,(\mathrm{AB})=\lim_{\varepsilon\to 0}\mathrm{Tr}\,(\mathrm{K}_\varepsilon\mathrm{BA})=\lim_{\varepsilon\to 0}\mathrm{Tr}\,(\mathrm{AK}_\varepsilon\mathrm{B}).$$

Pour $\varepsilon>0$ fixé, K_ε est un opérateur borné de H_λ dans $\mathrm{H}_{\lambda+1}$, et $\mathrm{K}_\varepsilon\mathrm{B}\in\mathrm{S}(\mathrm{H}_\lambda, \mathrm{H}_{\lambda+1})$ puisque $\mathrm{B}\in\mathrm{S}(\mathrm{H}_\lambda, \mathrm{H}_\lambda)$: on peut alors employer (3.11) et écrire $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{AK}_\varepsilon\mathrm{B})=\langle \mathrm{A}, \mathrm{K}_\varepsilon\mathrm{B}\rangle_{\mathrm{E}\times\mathrm{E}'}$: enfin, il ne reste plus qu'à montrer que $\mathrm{K}_\varepsilon\mathrm{B}\to\mathrm{B}$ dans E′, ce qu'on fait en écrivant $\mathrm{B}=\mathrm{B}_1+\mathrm{B}_2$ et en examinant la convergence de chaque terme (employer le théorème de la convergence dominée sur une série ou bien une intégrale du type (3.2)).

DÉFINITION 4.3. — Si $u\in\mathrm{H}_\lambda\cap\mathrm{H}_{\lambda-1}$ et $v\in\mathrm{H}_\lambda\cap\mathrm{H}_{\lambda-1}$, nous appellerons fonction de Wigner active de u et v et noterons $\mathrm{W}^\#(u, v)$ le symbole actif (au sens du corollaire 4.1) de l'opérateur $w\mapsto(w, v)u$. Si $u\in\mathrm{H}_\lambda$ et $v\in\mathrm{H}_{\lambda+1}$ ou bien si $u\in\mathrm{H}_{\lambda+1}$ et $v\in\mathrm{H}_\lambda$, nous appellerons fonction de Wigner passive de u et v et noterons $W(u, v)$ le symbole passif (au sens du théorème 4.2) de l'opérateur $w \mapsto (w, v)u$.

PROPOSITION 4.1. — Soient u et v appartenant toutes deux à $H_\lambda \cap H_{\lambda-1}$, de sorte que su et sv appartiennent à $H_{\lambda+1}$. On a l'identité

$$W^\#(u, v)(Y) = \frac{y}{2}\,[W(u, sv)(Y) + W(su, v)(Y)] \tag{4.21}$$

pour tout $Y = y + i\eta \in \Pi$.

Preuve. — Le noyau de l'opérateur A: $w \mapsto (w, v)u$ est la fonction $k(s, t) = u(s)\bar{v}(t)$. La formule (4.9) et la formule

$$\left(\frac{1}{2}W(u, v)\right)(Y) = (\sigma_Y u, v) = 2\pi y \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-2i\pi(t-s)\eta}\left(\frac{t}{s}\right)^{\lambda/2} J_\lambda(4\pi y (st)^{\frac{1}{2}}) u(s)\bar{v}(t) t^{-\lambda} ds dt,$$

appliquée au calcul de $W(u, sv)$ et de $W(su, v)$, permettent de conclure.

Nous allons maintenant effectuer le calcul, fondamental pour la suite, des fonctions de Wigner $W(\varphi_X, \varphi_Z)$ et $W^\#(\varphi_X, \varphi_Z)$, où φ_X a été définie en (1.8).

PROPOSITION 4.2. — Quels que soient X et $Z \in \Pi$, on a

$$(\varphi_X, \varphi_Z) = \left(\frac{2(xz)^{\frac{1}{2}}}{X + \bar{Z}}\right)^{\lambda+1} \tag{4.22}$$

et

$$(\varphi_X, s\varphi_Z) = \frac{\lambda+1}{2\pi(X+\bar{Z})}(\varphi_X, \varphi_Z) \tag{4.23}$$

avec $x = \operatorname{Re} X$ et $z = \operatorname{Re} Z$.

Preuve. — Rappelons que

$$\varphi_X(t) = c_{\lambda+1} x^{\frac{\lambda+1}{2}} t^\lambda e^{-2\pi X t}$$

avec

$$c_{\lambda+1} = 2^{\lambda+1}\pi^{\frac{1}{2}(\lambda+1)}(\Gamma(\lambda+1))^{-\frac{1}{2}},$$

d'où

$$(\varphi_X, \varphi_Z) = c_{\lambda+1}^2 (xz)^{\frac{1}{2}(\lambda+1)} \int_0^\infty e^{-2\pi(X+\bar{Z})t} t^\lambda dt = (2(xz)^{\frac{1}{2}})^{\lambda+1}(X+\bar{Z})^{-\lambda-1}.$$

Il est entendu ici que la détermination principale de $(X+\bar{Z})^{-\lambda-1}$ $(X+\bar{Z} \in \Pi)$ est choisie. Par ailleurs

$$(\varphi_X, s\varphi_Z) = c_{\lambda+1}^2 (xz)^{\frac{1}{2}(\lambda+1)} \int_0^\infty e^{-2\pi(X+\bar{Z})t} t^{\lambda+1} dt = \frac{\lambda+1}{2\pi(X+\bar{Z})}(\varphi_X, \varphi_Z).$$

PROPOSITION 4.3. — Soient $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$, $X \in \Pi$, et $X' = [g^{-1}](X) = \dfrac{dX + bi}{-icX + a}$. Si $c > 0$, on a

$$M_g \varphi_X = \left(\frac{cX + ia}{|cX + ia|}\right)^{-\lambda-1} e^{i\pi\frac{\lambda+1}{2}} \varphi_{X'}. \tag{4.24}$$

Preuve. — La seule difficulté est l'évaluation du facteur de phase : le plus simple est peut-être de passer par la transformation de Laplace. D'après (1.25) et (4.22), on a

$$(4.25)\qquad (\mathscr{L}_\lambda \varphi_X)(Y)=\left(\frac{\lambda}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{\lambda+1}{2}}(\varphi_X,\varphi_Y)=\frac{2^\lambda \lambda^{\frac{1}{2}}}{\pi^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{X+\overline{Y}}\right)^{\lambda+1}.$$

En utilisant la proposition 1.5 et (1.27), on en déduit

$$(4.26)\qquad (\mathscr{L}_\lambda(M_g\varphi_X))(Y)=2^\lambda\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i\pi\frac{\lambda+1}{2}}(c\overline{Y}+di)^{-\lambda-1}\left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{X+\dfrac{a\overline{Y}+bi}{-ic\overline{Y}+d}}\right]^{\lambda+1}.$$

Rappelons que $X'=\dfrac{dX+bi}{-icX+a}$ et considérons l'identité suivante, immédiate à vérifier :

$$(4.27)\qquad (cX+ia)(X'+\overline{Y})=(c\overline{Y}+di)\left(X+\frac{a\overline{Y}+bi}{-ic\overline{Y}+d}\right).$$

Les quatre facteurs de cette égalité ont tous leurs arguments compris strictement entre $-\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{\pi}{2}$: pour la détermination principale du logarithme, on a donc

$$(4.28)\qquad (cX+ia)^{-\lambda-1}(X'+\overline{Y})^{-\lambda-1}=(c\overline{Y}+di)^{-\lambda-1}\left(X+\frac{a\overline{Y}+bi}{-ic\overline{Y}+d}\right)^{-\lambda-1},$$

d'où

$$(4.29)\qquad (\mathscr{L}_\lambda(M_g\varphi_X))(Y)=2^\lambda\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i\pi\frac{\lambda+1}{2}}(cX+ia)^{-\lambda-1}\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{X'+\overline{Y}}\right)^{\lambda+1}.$$

On a également $x'=x\,|\,cX+ia\,|^{-2}$ (avec $x'=\mathrm{Re}\,X'$), d'où l'on déduit (4.24) par comparaison de (4.25) et (4.29).

THÉORÈME 4.3. — Soient X et $Z\in\Pi$. Notons $\delta_{X,Z}$ la fonction sur Π définie par

$$(4.30)\qquad \delta_{X,Z}(Y)=\frac{y^2+(X-i\eta)(\overline{Z}+i\eta)}{y(X+\overline{Z})},\qquad Y=y+i\eta.$$

On a alors

$$(4.31)\qquad W(\varphi_X,\varphi_Z)=2(\varphi_X,\varphi_Z)(\delta_{X,Z})^{-\lambda-1}$$

et

$$(4.32)\qquad W^\#(\varphi_X,\varphi_Z)=\frac{\lambda+1}{2\pi}(\varphi_X,\varphi_Z)(\delta_{X,Z})^{-\lambda-2}.$$

Par ailleurs $\delta_{X,X}(Y)=\mathrm{ch}\ d(X,Y)$.

Preuve. — D'après (2.28), (2.30) et (4.24), on a

$$\sigma_Y \varphi_X = \left(\frac{X-i\eta}{|X-i\eta|}\right)^{-\lambda-1} \varphi_{[S_Y](X)} \tag{4.33}$$

avec $[S_Y](X)=y^2(X-i\eta)^{-1}+i\eta$, d'où $\operatorname{Re}[S_Y](X)=xy^2\,|X-i\eta|^{-2}$ et

$$[S_Y](X)+\overline{Z}=\frac{y^2+(X-i\eta)(\overline{Z}+i\eta)}{X-i\eta}. \tag{4.34}$$

D'après (4.33) et (4.22), on a donc

$$\begin{aligned} W(\varphi_X, \varphi_Z)(Y) &= 2(\sigma_Y \varphi_X, \varphi_Z) = 2\left(\frac{X-i\eta}{|X-i\eta|}\right)^{-\lambda-1} (\varphi_{[S_Y](X)}, \varphi_Z) \\ &= 2\left(\frac{X-i\eta}{|X-i\eta|}\right)^{-\lambda-1} \left(\frac{2y(xz)^{\frac{1}{2}}}{|X-i\eta|}\right)^{\lambda+1} \left[\frac{y^2+(X-i\eta)(\overline{Z}+i\eta)}{X-i\eta}\right]^{-\lambda-1} \\ &= 2(2(xz)^{\frac{1}{2}})^{\lambda+1} \left[\frac{y^2+(X-i\eta)(\overline{Z}+i\eta)}{y}\right]^{-\lambda-1}, \end{aligned}$$

ce qui peut aussi s'écrire sous la forme (4.31), en utilisant à nouveau (4.22).

A l'aide de la proposition 4.1, on obtient aussi

$$W^{\#}(\varphi_X, \varphi_Z)(Y)=\frac{y}{2}\,[W(\varphi_X, s\varphi_Z)(Y)+W(s\varphi_X, \varphi_Z)(Y)]=y[(\sigma_Y\varphi_X, s\varphi_Z)+\overline{(\sigma_Y\varphi_Z, s\varphi_X)}]. \tag{4.35}$$

D'après (4.23), on a donc

$$\begin{aligned} \frac{W^{\#}(\varphi_X, \varphi_Z)(Y)}{W(\varphi_X, \varphi_Z)(Y)} &= \frac{\lambda+1}{4\pi}\, y\,[([S_Y](X)+\overline{Z})^{-1}+(\overline{[S_Y](Z)}+X)^{-1}] \\ &= \frac{\lambda+1}{4\pi}\, y\, \frac{(X-i\eta)+(\overline{Z}+i\eta)}{y^2+(X-i\eta)(\overline{Z}+i\eta)} = \frac{\lambda+1}{4\pi}\, \delta_{X,Z}^{-1}(Y), \end{aligned} \tag{4.36}$$

ce qui prouve (4.32).

Enfin, compte tenu de l'invariance de la distance d par le groupe $PSL(2, \mathbb{R})$, on peut écrire $\operatorname{ch} d(X, Y)=\operatorname{ch} d\left(1, \dfrac{Y-i\xi}{x}\right)$ et utiliser (1.6) pour vérifier la formule $\delta_{X,X}(Y)=\operatorname{ch} d(X, Y)$.

Nous allons, pour terminer cette section, effectuer quelques calculs de symboles qui sortent du cadre du corollaire 4.1 et du théorème 4.2 : au présent stade de la théorie, ces calculs sont formels et ont avant tout une valeur heuristique.

En utilisant (3.1) et en notant que $\|u\|^2_{\lambda-m}=(s^m u, u)$, on est conduit à attribuer à l'opérateur s^m, si $m<\lambda$, le symbole actif a et le symbole passif b définis par

$$a(Y)=(4\pi)^{-m-1}\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-m)}\int_\Pi x^{-m} W^{\#}(\varphi_X, \varphi_X)(Y)\,d\mu(X), \tag{4.37}$$

la même formule étant valable pour b avec une fonction de Wigner sans dièze. La formule (4.32) se réduit à

$$(4.38)\qquad W^{\#}(\varphi_X, \varphi_X)(Y) = \frac{\lambda+1}{2\pi}(\operatorname{ch} d(X, Y))^{-\lambda-2} = \frac{\lambda+1}{2\pi}\left[\frac{x^2+y^2+(\xi-\eta)^2}{2xy}\right]^{-\lambda-2},$$

d'où l'on déduit (passer en coordonnées polaires pour x, $\xi-\eta$) la formule

$$(4.39)\qquad a(Y) = (2\pi)^{-m-1} y^{-m} \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+m}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{\lambda-m}{2}\right)} \quad \text{si} \quad -\lambda-2 < m < \lambda.$$

On trouve de même

$$(4.40)\qquad b(Y) = (2\pi)^{-m} y^{-m} \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\lambda-m+1}{2}\right)} \quad \text{si} \quad -\lambda-1 < m < \lambda.$$

En particulier, les symboles actif et passif de l'opérateur identique sont respectivement $\frac{\lambda}{4\pi}$ et 1.

On constatera que si l'on parvenait à étendre d'une façon substantielle et raisonnable (respectant au moins dans le cas particulier que nous venons d'étudier le prolongement analytique en m) les domaines de validité des correspondances entre opérateurs et symboles, on ne saurait éviter le problème suivant : certains symboles actifs (par exemple $y^{\lambda+2}$) fournissent l'opérateur nul, alors que d'autres (par exemple $y^{-\lambda}$) sont incapables de définir un opérateur en quelque sens que ce soit ; le même phénomène se produit à propos des symboles passifs. Ceci est bien entendu en contraste avec la situation euclidienne, où la correspondance entre symboles et opérateurs reste bien définie et injective sur l'espace de symboles $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^{2n})$. Par ailleurs, signalons dès à présent que l'emploi de la correspondance Op suggérée dans la prochaine section ne suffit pas à régler ce problème, qui nécessite encore d'importants développements et sera traité dans un autre article par l'un des auteurs.

En revanche, le présent article donne des résultats satisfaisants dans le cadre des opérateurs de Hilbert-Schmidt.

Indiquons, à titre d'exemple, que le symbole actif de l'opérateur (symétrique sur H_λ) qui à u associe $i\left(s^m u' + \frac{m-\lambda}{2} s^{m-1} u\right)$ est la fonction

$$Y \mapsto \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+m}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{\lambda-m}{2}\right)} (2\pi y)^{-m} \eta.$$

Le symbole actif de l'opérateur de Laguerre L est (si $\lambda > 1$) la fonction $Y \mapsto \frac{\lambda^2-1}{8\pi} \operatorname{ch} d(1, Y)$; son symbole passif est $\frac{\lambda}{2} \operatorname{ch} d(1, Y)$.

5. Description de l'opérateur F_λ de passage du symbole actif au symbole passif d'un opérateur ; liens entre F_λ et l'opérateur de Laplace-Beltrami sur Π

DÉFINITION 5.1. — Pour tout $\lambda > 0$, on notera F_λ l'opérateur sur $L^2(\Pi, d\mu)$ dont le noyau est

$$k(Y, Y') = \frac{2e^{-\lambda d(Y,Y')}}{\operatorname{sh} d(Y, Y')}, \tag{5.1}$$

où d désigne la distance hyperbolique sur Π.

PROPOSITION 5.1. — Pour tout $\lambda > 0$, F_λ est un opérateur continu de $L^2(\Pi, d\mu)$ dans $L^2(\Pi, d\mu)$. Si $\lambda > \frac{1}{2}$, il se prolonge de plus en un opérateur continu de $L^2(\Pi, y^{-1}d\mu)$ dans $L^2(\Pi, y^{-1}d\mu)$.

Preuve. — Rappelons pour commencer qu'en termes des coordonnées normales (r, θ) sur Π rappelées en (1.5), la mesure $d\mu$ est donnée par

$$d\mu(Y) = \operatorname{sh} r dr d\theta. \tag{5.2}$$

En vertu d'un critère bien connu, il suffit pour établir le premier point de montrer que

$$\sup_Y \int_\Pi \frac{2e^{-\lambda d(Y,Y')}}{\operatorname{sh} d(Y, Y')} d\mu(Y') < \infty. \tag{5.3}$$

Or l'intégrale ne dépend pas de Y, et en utilisant les coordonnées normales pour Y′, on voit qu'elle s'écrit

$$2\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda r}}{\operatorname{sh} r} \operatorname{sh} r dr = \frac{4\pi}{\lambda}. \tag{5.4}$$

Pour la deuxième partie de la proposition, il s'agit d'établir que

$$\sup_Y \int_\Pi l(Y, Y') d\mu(Y') < \infty \tag{5.5}$$

avec

$$l(Y, Y') = 2\left(\frac{y'}{y}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-\lambda d(Y,Y')}}{\operatorname{sh} d(Y,Y')}. \tag{5.6}$$

En utilisant la décomposition d'Iwasawa du groupe $SL(2, \mathbb{R})$ (voir (1.2), (1.3), (1.4)), on peut trouver ξ et r tels que $Y = [n_\xi a_r](1)$: on pose alors $Y' = [n_\xi a_r](Z)$ dans l'intégrale. Le groupe des transformations $[n_\xi]$ ne perturbe pas les parties réelles : on a donc

$$l(Y, Y') = l([a_r](1), [a_r](Z)) = l(e^r, e^r Z) = 2z^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-\lambda d(1,Z)}}{\operatorname{sh} d(1, Z)}. \tag{5.7}$$

D'après (1.6), on a $z \leq e^{d(1,Z)}$, ce qui entraîne (5.4).

PROPOSITION 5.2. — Soit $\lambda>0$. Pour tout couple (X, Z) de points de Π, les fonctions de Wigner active et passive $W^{\#}(\varphi_X, \varphi_Z)$ et $W(\varphi_X, \varphi_Z)$ sont liées par la relation

$$W(\varphi_X, \varphi_Z)=F_\lambda(W^{\#}(\varphi_X, \varphi_Z)). \tag{5.8}$$

Preuve. — Quels que soient X, Y et $Z\in\Pi$, et quelle que soit $g\in SL(2, \mathbb{R})$, on a (voir (4.30)) :

$$\delta_{[g](X),[g](Z)}([g](Y))=\delta_{X,Z}(Y) : \tag{5.9}$$

en effet, cette formule est triviale si g est de la forme n_ξ ou a_r, et se vérifie sans peine quand $[g]$ est la symétrie $Y\mapsto Y^{-1}$. Soit M le milieu de X et Z. On a alors la formule

$$\delta_{X,Z}(Y)=\left(\operatorname{ch}\frac{d(X,Z)}{2}\right)^{-1}\left[\operatorname{ch} d(M,Y)+i\operatorname{sh} d(M,Y)\operatorname{sh}\frac{d(X,Z)}{2}\sin(\overrightarrow{MX}, \overrightarrow{MY})\right] \tag{5.10}$$

où bien entendu l'angle $(\overrightarrow{MX}, \overrightarrow{MY})$ est celui des demi-droites hyperboliques ainsi désignées. En effet, (5.9) permet de se ramener au cas où X est réel ≥ 1 et où $Z=X^{-1}$. On a alors, d'après (4.30) :

$$\delta_{x,x^{-1}}(Y)=\frac{y^2+1+\eta^2}{y(x+x^{-1})}+i\frac{\eta}{y}\frac{x-x^{-1}}{x+x^{-1}} \tag{5.11}$$

et il suffit, pour terminer, de remarquer que dans ce cas on a

$$\operatorname{ch}\frac{d(X,Z)}{2}=\frac{x+x^{-1}}{2}\qquad\text{et}\qquad\operatorname{sh}\frac{d(X,Z)}{2}=\frac{x-x^{-1}}{2},$$

et enfin $\frac{\eta}{y}=\operatorname{sh} d(1, Y)\sin(\overrightarrow{1X}, \overrightarrow{1Y})$ d'après (1.5).

Les formules (4.32), (5.9) et (5.2) montrent que $W^{\#}(\varphi_X, \varphi_Z)\in L^1(\Pi, d\mu)$, ce qui permet, en désignant par A l'opérateur tel que $Aw=(w, \varphi_Z)\varphi_X$, d'écrire

$$A=2\int_\Pi W^{\#}(\varphi_X, \varphi_Z)(Y')\sigma_{Y'}d\mu(Y') \tag{5.12}$$

et pour tout $\varepsilon>0$ et tout $Y\in\Pi$,

$$2\operatorname{Tr}(e^{-\varepsilon L_Y}\sigma_Y A)=4\int W^{\#}(\varphi_X, \varphi_Z)(Y')\operatorname{Tr}(e^{-\varepsilon L_Y}\sigma_Y\sigma_{Y'})d\mu(Y'), \tag{5.13}$$

où L_Y est l'opérateur de Laguerre en Y.

D'après les formules (2.13) et (2.33), $\operatorname{Tr}(e^{-\varepsilon L_Y}\sigma_Y\sigma_{Y'})$ ne dépend que de $d(Y, Y')$. Pour le calcul de cette expression, on se ramène au cas où $Y=1$ et $Y'=e^{r/2}$ $(r>0)$: d'après (2.28), on a alors $S_{Y'}S_Y=-a_r$ d'où, en utilisant (2.30) et en faisant attention au facteur de phase comme il a été dit à la suite de la proposition 1.4, la relation

$$\operatorname{Tr}(e^{-\varepsilon L_Y}\sigma_Y\sigma_{Y'})=\operatorname{Tr}(e^{-\varepsilon L}M_{a_r}) \tag{5.14}$$

avec

$$\frac{r}{2} = d(\mathrm{Y}, \mathrm{Y}').$$

D'après la proposition 2.2, on a donc

$$(5.15) \qquad 0 < \mathrm{Tr}\,(e^{-\varepsilon \mathrm{L_Y}} \sigma_{\mathrm{Y}} \sigma_{\mathrm{Y}'}) \leq \frac{e^{-\lambda d(\mathrm{Y},\mathrm{Y}')}}{2 \operatorname{sh} d(\mathrm{Y}, \mathrm{Y}')}$$

et de plus $\mathrm{Tr}\,(e^{-\varepsilon \mathrm{L_Y}} \sigma_{\mathrm{Y}} \sigma_{\mathrm{Y}'})$ tend vers $\dfrac{e^{-\lambda d(\mathrm{Y},\mathrm{Y}')}}{2 \operatorname{sh} d(\mathrm{Y}, \mathrm{Y}')}$ quand $\varepsilon \to 0$.

Vu l'inégalité (5.3) et le fait que $\mathrm{W}^\#(\varphi_{\mathrm{X}}, \varphi_{\mathrm{Z}})$ est une fonction bornée sur Π, le théorème de la convergence dominée montre que l'intégrale au second membre de (5.13) tend, quand $\varepsilon \to 0$, vers

$$\int_\Pi k(\mathrm{Y}, \mathrm{Y}') \mathrm{W}^\#(\varphi_{\mathrm{X}}, \varphi_{\mathrm{Z}})(\mathrm{Y}') d\mu(\mathrm{Y}'),$$

où k a été défini en (5.1). Par ailleurs, puisque A est un opérateur à trace, le membre de gauche de (5.13) tend vers $2\,\mathrm{Tr}\,(\sigma_{\mathrm{Y}} \mathrm{A})$, ce qui, d'après (4.2), entraîne la proposition.

THÉORÈME 5.1. — Avec les notations de la définition 3.2, soit $\mathrm{A} \in \mathrm{E} \cap \mathrm{E}'$, de sorte que A admet à la fois un symbole actif a et un symbole passif b. Si $\lambda > 1$, on a $\mathrm{F}_\lambda a = b$.

Preuve. — D'après le corollaire 4.1, le théorème 4.2 et la proposition 5.1, les deux membres de l'égalité $\mathrm{F}_\lambda a = b$, considérés dans l'espace $\mathrm{L}^2(\Pi, y^{-1} d\mu) + \mathrm{L}^2(\Pi, y d\mu)$, dépendent continûment de $\mathrm{A} \in \mathrm{E} \cap \mathrm{E}'$ si $\lambda > \frac{1}{2}$. D'après la proposition (5.2), ils coïncident si A est un opérateur de la forme $w \mapsto (w, \varphi_{\mathrm{Z}}) \varphi_{\mathrm{X}}$; enfin, si $\lambda > 1$, les opérateurs de cette forme constituent un système total dans $\mathrm{E} \cap \mathrm{E}'$ d'après la proposition 3.9.

PROPOSITION 5.3. — Soient X et $\mathrm{Z} \in \Pi$ et $\delta_{\mathrm{X,Z}}$ la fonction définie en (4.30). L'image $\mathrm{E_{X,Z}}$ de Π par $\delta_{\mathrm{X,Z}}$ est l'enveloppe convexe de la branche d'hyperbole de sommet $\left(\operatorname{ch} \dfrac{d(\mathrm{X}, \mathrm{Z})}{2}\right)^{-1}$ dont les foyers sont 1 et -1 : dans le cas où $\mathrm{X} = \mathrm{Z}$, cet ensemble se réduit à $[1, \infty[$. Soit ψ une fonction de classe C^2 sur $\mathrm{E_{X,Z}}$, holomorphe à l'intérieur de $\mathrm{E_{X,Z}}$ dans le cas où $\mathrm{X} \neq \mathrm{Z}$, et considérons la fonction $u = \psi \circ \delta_{\mathrm{X,Z}}$ sur Π. Soit $-y^2 \Delta = -y^2 \left(\dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right)$ l'opérateur de Laplace-Beltrami sur Π. On a alors

$$(5.16) \qquad -y^2 \Delta u = \chi \circ \delta_{\mathrm{X,Z}},$$

avec

$$(5.17) \qquad \chi(\delta) = (1 - \delta^2) \psi''(\delta) - 2\delta \psi'(\delta).$$

Preuve. — La première partie est une conséquence élémentaire de la formule (5.10). Partant de (4.30), on écrit par ailleurs (en notant δ au lieu de $\delta_{X,Z}$) :

$$\frac{\partial\delta}{\partial y}=\frac{y^2-(X-i\eta)(\overline{Z}+i\eta)}{y^2(X+\overline{Z})} \quad \text{et} \quad \frac{\partial\delta}{\partial\eta}=\frac{2\eta+i(X-\overline{Z})}{y(X+\overline{Z})}, \tag{5.18}$$

$$\frac{\partial^2\delta}{\partial y^2}=\frac{2}{y^3}\cdot\frac{(X-i\eta)(\overline{Z}+i\eta)}{X+\overline{Z}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2\delta}{\partial\eta^2}=\frac{2}{y(X+\overline{Z})}, \tag{5.19}$$

d'où

$$y^2\left(\frac{\partial^2\delta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\delta}{\partial\eta^2}\right)=2\delta \tag{5.20}$$

et

$$y^2\left[\left(\frac{\partial\delta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\delta}{\partial\eta}\right)^2\right]=(y(X+\overline{Z}))^{-2}\,[(y^2-(X-i\eta)(\overline{Z}+i\eta))^2+y^2(2\eta+i(X-\overline{Z}))^2]. \tag{5.21}$$

Également

$$\delta^2-1=(y(X+\overline{Z}))^2\,[(y^2+(X-i\eta)(\overline{Z}+i\eta))^2-y^2(X+\overline{Z})^2] \tag{5.22}$$

et, en soustrayant (5.22) de (5.21), on obtient

$$y^2\left[\left(\frac{\partial\delta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\delta}{\partial\eta}\right)^2\right]+1-\delta^2=0. \tag{5.23}$$

Enfin, puisque δ est à valeurs réelles dans le cas où $X=Z$, et holomorphe à l'intérieur de $E_{X,Z}$ dans les autres cas, on a

$$-y^2\Delta(\psi\circ\delta)=-y^2(\psi''\circ\delta)\left[\left(\frac{\partial\delta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\delta}{\partial\eta}\right)^2\right]-y^2(\psi'\circ\delta)\left(\frac{\partial^2\delta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\delta}{\partial\eta^2}\right), \tag{5.24}$$

ce qui prouve (5.17) grâce à (5.20) et (5.23).

Dans le cas où $X=Z=1$, on a $\delta(Y)=\operatorname{ch} d(1, Y)$: l'opérateur défini par (5.17) n'est donc autre que l'opérateur de Laplace-Beltrami sur les fonctions sur $SL(2, \mathbb{R})$ bi-invariantes par K, dont la forme est bien connue (opérateur de Legendre).

PROPOSITION 5.4. — Soient X et $Z\in\Pi$, et $\lambda>0$.
On a l'identité

$$\delta_{X,Z}^{-\lambda-3}=(4\pi)^{-2}(-y^2\Delta+\lambda(\lambda+1))F_\lambda F_{\lambda+1}(\delta_{X,Z}^{-\lambda-3}). \tag{5.25}$$

Preuve. — D'après (4.31), (4.32) et (5.8), on a

$$F_\lambda(\delta_{X,Z}^{-\lambda-2})=\frac{4\pi}{\lambda+1}\delta_{X,Z}^{-\lambda-1} \tag{5.26}$$

et de même

$$F_{\lambda+1}(\delta_{X,Z}^{-\lambda-3})=\frac{4\pi}{\lambda+2}\delta_{X,Z}^{-\lambda-2}, \tag{5.27}$$

d'où

$$F_\lambda F_{\lambda+1}(\delta_{X,Z}^{-\lambda-3}) = \frac{(4\pi)^2}{(\lambda+1)(\lambda+2)} \delta_{X,Z}^{-\lambda-1}. \tag{5.28}$$

Par ailleurs, d'après la proposition 5.3, on a

$$-y^2\Delta(\delta_{X,Z}^{-\lambda-1}) = (\lambda+1)(\lambda+2)(1-\delta_{X,Z}^2)\delta_{X,Z}^{-\lambda-3} + 2(\lambda+1)\delta_{X,Z}^{-\lambda-1}. \tag{5.29}$$

La proposition en résulte.

THÉORÈME 5.2. — Pour tout $\lambda > 0$, on a

$$(4\pi)^{-2}(-y^2\Delta + \lambda(\lambda+1))F_\lambda F_{\lambda+1} = I. \tag{5.30}$$

Preuve. — Soit $\lambda > 1$. L'espace d'opérateurs $E \cap E'$ (*cf.* définition 3.2) est dense dans E : la preuve de ce fait est immédiate, par exemple si l'on regarde les noyaux des opérateurs. D'après la proposition 3.9, les opérateurs $w \mapsto (w, \varphi_Z)\varphi_X$ constituent donc un système total dans E, et leurs symboles $W^\#(\varphi_X, \varphi_Z)$ un système total dans $L^2(\Pi, y^{-1}d\mu)$ d'après le théorème 4.1. Compte tenu de (4.32), les fonctions $\delta_{X,Z}^{-\lambda-2}$ forment, pour $\lambda > 1$, un système total dans cet espace : il revient au même de dire que, pour $\lambda > 0$, il en est ainsi du système des fonctions $\delta_{X,Z}^{-\lambda-3}$, et le théorème 5.2 se déduit donc de la proposition 5.4.

On a ainsi une expression peut-être nouvelle de la résolvante de l'opérateur de Laplace-Beltrami sur Π comme produit de deux opérateurs dont les noyaux sont particulièrement simples : on trouve généralement dans la littérature (voir par exemple [7]) une résolvante dont le noyau s'exprime à l'aide d'une fonction hypergéométrique. Remarquons par ailleurs que F_λ et $F_{\lambda+1}$ commutent entre eux, puisqu'ils sont autoadjoints (voir leurs noyaux) et que leur produit l'est également.

PROPOSITION 5.5. — Soit $a \in C_0^\infty(\Pi)$. L'opérateur $Q(a)$ appartient à $E \cap E'$.

Preuve. — Renvoyons à la formule (4.12) qui définit la symétrie de phase σ_1 : le noyau $\left(\frac{s}{t}\right)^{\lambda/2} J_\lambda(4\pi(st)^{\frac{1}{2}})$ de cet opérateur est majoré par $Cs^\lambda(1+st)^{-\lambda/2}$, et ce résultat serait valable même si λ était un nombre réel quelconque. Cette inégalité montre que si u est, par exemple, continue à support compact dans $]0, \infty[$, la fonction $\sigma_1 u$ vérifie $|(\sigma_1 u)(s)| \leq Cs^\lambda(1+s)^{-\lambda/2}$.

En se servant de la relation

$$J_\lambda(z) = \frac{\lambda-1}{z} J_{\lambda-1}(z) - J'_{\lambda-1}(z) \tag{5.31}$$

(*cf.* [8], p. 67) et de l'intégration par parties qui correspond à la relation

$$J'_{\lambda-1}(4\pi(st)^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{s}{t}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{dt}[J_{\lambda-1}(4\pi(st)^{\frac{1}{2}})], \tag{5.32}$$

on peut vérifier que si $u \in C_0^\infty(]0, \infty[)$, alors $\sigma_1 u$ vérifie, pour tout N, l'inégalité

$$|(\sigma_1 u)(s)| \leq C_N s^\lambda (1+s)^{-N}$$

pour C_N bien choisie.

Il résulte alors de (4.14) que si $a \in C_0^\infty(\Pi)$, alors le noyau k de $Q(a)$ vérifie

$$(5.33) \qquad |k(s,t)| \leq C_N (st)^\lambda (1+st)^{-N}(1+|s-t|^2)^{-N} \leq C_N (st)^\lambda (1+s^2+t^2)^{-N/2}.$$

d'où

$$(5.34) \qquad \int_0^\infty \int_0^\infty |k(s,t)|^2 (st)^{-\lambda} \frac{ds dt}{s+t} < \infty .$$

Or (voir la discussion qui suit (4.18)), cette inégalité montre que $Q(a) \in E'$ et nous savions déjà que $Q(a) \in E$ (théorème 4.1).

THÉORÈME 5.3. — Supposons $\lambda > 1$. Alors :

1) l'opérateur autoadjoint F_λ est défini positif

2) soit $F_\lambda^{\frac{1}{2}}$ sa racine carrée : l'image de $C_0^\infty(\Pi)$ par $F_\lambda^{\frac{1}{2}}$ est une partie dense de $L^2(\Pi, d\mu)$

3) il existe un (unique) opérateur linéaire Op défini sur cette image tel que l'on ait $\mathrm{Op}(F_\lambda^{\frac{1}{2}} a) = Q(a)$ pour tout $a \in C_0^\infty(\Pi)$

4) cet opérateur se prolonge en une isométrie (encore notée Op) de $L^2(\Pi, d\mu)$ sur l'espace $S(H_\lambda, H_\lambda)$ des opérateurs de Hilbert-Schmidt sur H_λ

5) pour tout $a \in L^2(\Pi, d\mu)$, $\mathrm{Op}(a)^* = \mathrm{Op}(\bar{a})$

6) pour tout $a \in L^2(\Pi, d\mu)$ et toute matrice $g \in SL(2, \mathbb{R})$, on a

$$(5.35) \qquad M_g^{-1} \mathrm{Op}(a) M_g = \mathrm{Op}(a \circ [g]^{-1}).$$

Preuve. — Soit V le sous-espace vectoriel de $L^2(\Pi, y^{-1} d\mu)$ constitué des symboles a tels que $Q(a) \in E \cap E'$: d'après la proposition 5.3, on a l'inclusion $C_0^\infty(\Pi) \subset V$. Par ailleurs, il résulte facilement de la discussion (effectuée dans la preuve du théorème 4.1, après la formule (4.18)) sur les noyaux des éléments de E, que $E \cap E'$ est une partie dense de $S(H_\lambda, H_\lambda)$. Pour tout $a \in V$, le symbole passif de $Q(a)$ est $b = F_\lambda a$; comme F_λ est un opérateur réel (i. e. F_λ commute avec la conjugaison complexe), le symbole passif de $Q(a)^*$ est $\bar{b}$. Le théorème 4.2 et les formules (3.14) et (3.2) montrent que l'on a

$$(5.36) \qquad \int_\Pi a(Y)\bar{b}(Y) d\mu(Y) = \langle Q(a), Q(a)^* \rangle_{E \times E'}$$
$$= \frac{\lambda}{4\pi} \int_\Pi (Q(a)^* Q(a) \varphi_X, \varphi_X) d\mu(X) = |||\, Q(a) \,|||_{\lambda,\lambda}^2 .$$

Par suite F_λ est un opérateur semi-défini positif, et le théorème 5.2 montre qu'il est injectif sur $L^2(\Pi, d\mu)$, ce qui prouve (1). Soit $b \in L^2(\Pi, d\mu)$ telle que $(F_\lambda^{\frac{1}{2}} a, b) = 0$ pour tout $a \in C_0^\infty(\Pi)$: alors $F_\lambda^{\frac{1}{2}} b = 0$ et *a fortiori* $F_{\lambda+1} F_\lambda b = 0$, d'où $(F_\lambda F_{\lambda+1} a, b) = 0$ pour tout $a \in C_0^\infty(\Pi)$: comme le théorème 5.2 montre que l'image de $C_0^\infty(\Pi)$ par $F_\lambda F_{\lambda+1}$ contient $C_0^\infty(\Pi)$, il en résulte que $b = 0$, ce qui prouve (2). Les assertions (3) et (4) sont une conséquence de (5.36) et de la densité de $E \cap E'$ dans $S(H_\lambda, H_\lambda)$, et (5) vient de ce que l'opérateur $F_\lambda^{\frac{1}{2}}$, comme F_λ, est réel, ainsi qu'on le vérifie sans peine. Enfin, les formules de covariance (4.3) et (4.4) et le théorème 5.1 montrent que l'opérateur F_λ est invariant par le groupe PSL(2, $\mathbb{R}$) : il en est donc de même pour $F_\lambda^{\frac{1}{2}}$, ce qui prouve (6).

THÉORÈME 5.4. — Soit $\lambda > 0$. Considérons la fonction méromorphe f_λ définie par

$$f_\lambda(z) = 2\pi \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\lambda+1-z}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\lambda+z+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\lambda-z}{2}+1\right)} \tag{5.37}$$

et la fonction g_λ définie par

$$g_\lambda(\zeta) = f_\lambda\left(\frac{1}{2} + i\zeta^{\frac{1}{2}}\right) \tag{5.38}$$

qui est aussi méromorphe dans le plan complexe vu l'invariance de f_λ par la symétrie $z \mapsto 1-z$. Pour tout $\lambda > 0$, on a $F_\lambda = g_\lambda\left(-y^2\Delta - \frac{1}{4}\right)$.

Preuve. — On sait que le spectre de $-y^2\Delta - \frac{1}{4}$ est contenu dans $[0, \infty[$, et comme g_λ n'a pas de pôle sur cette demi-droite, on peut définir l'opérateur $G_\lambda = g_\lambda\left(-y^2\Delta - \frac{1}{4}\right)$, par exemple par la formule intégrale de Dunford : c'est un opérateur borné pour $\lambda > 0$. Si nous posons $Z = \frac{1}{2} + i\left(-y^2\Delta - \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$, l'équation fonctionnelle de la fonction gamma et la relation

$$(\lambda + Z)(\lambda + 1 - Z) = \lambda(\lambda+1) - y^2\Delta \tag{5.39}$$

permettent d'obtenir

$$G_\lambda = G_{\lambda+2}\left\{1 + (2\lambda+2)[\lambda(\lambda+1) - y^2\Delta]^{-1}\right\}. \tag{5.40}$$

Par ailleurs, le théorème 5.2 et une formule élémentaire sur les résolvantes fournissent

$$\begin{aligned} F_{\lambda+1}F_\lambda - F_{\lambda+1}F_{\lambda+2} &= (4\pi)^2(2\lambda+2)[-y^2\Delta + \lambda(\lambda+1)]^{-1}[-y^2\Delta + (\lambda+1)(\lambda+2)]^{-1} \\ &= (2\lambda+2)[-y^2\Delta + \lambda(\lambda+1)]^{-1}F_{\lambda+1}F_{\lambda+2}, \end{aligned}$$

d'où

$$F_\lambda = F_{\lambda+2}\left\{1 + (2\lambda+2)[\lambda(\lambda+1) - y^2\Delta]^{-1}\right\}. \tag{5.41}$$

Ensuite, puisque $\dfrac{\Gamma(\mu)}{\Gamma\left(\mu + \frac{1}{2}\right)} \sim \mu^{-\frac{1}{2}}$ quand $\operatorname{Re}\mu \to +\infty$, on voit que $\dfrac{\lambda}{4\pi} G_\lambda$ converge vers l'opérateur identique quand $\lambda \to +\infty$. Enfin, l'examen du noyau $\dfrac{2e^{-\lambda d(Y,Y')}}{\operatorname{sh} d(Y,Y')}$ montre également, compte tenu de (5.4), que $\frac{\lambda}{4\pi} F_\lambda$ tend vers l'identité quand $\lambda \to \infty$. Ces deux derniers faits, joints à (5.40) et (5.41), montrent que $F_\lambda = G_\lambda$, ce qui achève la preuve du théorème 5.5.

BIBLIOGRAPHIE

[1] F. A. BEREZIN, *Quantization* (*Izv. Akad. Nauk S.S.S.R.*, vol. 38, nº 5, 1974 ; *Math. U.S.S.R. Izvestija*, vol. 8, nº 5, 1974, p. 1109-1165).

[2] F. A. BEREZIN, *Quantization in Complex Symmetric spaces* (*Izv. Akad. Nauk S.S.S.R.*, vol. 39, nº 2, 1975 ; *Math. U.S.S.R. Izvestija*, vol. 9, nº 2, 1975, p. 341-379).

[3] N. N. BOGOLIUBOV, A. A. LOGUNOV, I. T. TODOROV, *Introduction to axiomatic quantum field theory*, *Benjamin inc.*, 1975, Reading (Mass, U.S.A.).

[4] R. CARROLL, *Some remarks on singular pseudo-differential operators* (*Comm. in P.D.E.*, vol. 6, nº 12, 1981, p. 1407-1428).

[5] P. EYMARD, *Le noyau de Poisson et l'analyse harmonique non euclidoenne*. Conférences à l'Istituto Matematico Politecnico de Turin (Italie), 1982.

[6] P. C. GREINER, *On the Laguerre calculus of left-invariant convolution pseudo-differential operators on the Heisenberg group*, Séminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz, 1980-1981, exposé 11, École Polytechnique.

[7] S. LANG, SL(2, ℝ), Addison-Wesley, 1975.

[8] W. MAGNUS, F. OBERHETTINGER, R. P. SONI, *Formulas and theorems for the special functions of Mathematical physics*, 3e édition, Springer-Verlag, 1966.

[9] L. PUKANSZKY, *The Plancherel formula for the universal covering group of* SL(ℝ, 2) (*Math. Ann.*, vol. 156, 1964, p. 96-143).

[10] M. REED, B. SIMON, *Methods of modern mathematical physics*, vol. 1, Ac. Press, 1972, New York.

[11] R. TAKAHASHI, SL(2, ℝ), *École d'Été « Analyse harmonique »*, Université de Nancy I, 1980.

[12] A. UNTERBERGER, *Les opérateurs métadifférentiels* (*Lecture Notes in Physics*, vol. 126, 1980, p. 205-241).

[13] A. UNTERBERGER, *Quantification de certains espaces hermitiens symétriques*, Séminaire Goulaouic-Schwartz, 1979-1980, exposé 16, École Polytechnique ; également : *A quantization of hermitian symmetric spaces*, Prépublications mathématiques de l'Université de Reims, 1980.

[14] A. et J. UNTERBERGER, *Le calcul pseudo-différentiel attaché au groupe des transformations du demi-plan de Poincaré*, Journées E.D.P., Saint-Jean-de-Monts, juin 1982, conférence nº 13, Soc. Math. France, Univ. de Rennes, Nantes *et al.*

[15] A. UNTERBERGER, *L'opérateur de Laplace-Beltrami du demi-plan et les quantifications linéraire et projective de* SL(2, ℝ) *(à paraître)*.

(Manuscrit reçu le 19 janvier 1983,
révisé le 27 juin 1983).

A. et J. UNTERBERGER
Département de Mathématiques,
Faculté des Sciences de Reims,
Moulin de la Housse, BP 347,
F 51062 Reims Cedex.