JEAN-PIERRE DEMAILLY

**Estimations $L^2$ pour l'opérateur $\bar{\partial}$ d'un fibré vectoriel holomorphe semi-positif au-dessus d'une variété kählérienne complète**

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série*, tome 15, nº 3 (1982), p. 457-511

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1982_4_15_3_457_0>

*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*,
4e série, t, 15, 1982, p. 457 à 511.

# ESTIMATIONS L² POUR L'OPÉRATEUR $\bar{\partial}$ D'UN FIBRÉ VECTORIEL HOLOMORPHE SEMI-POSITIF AU-DESSUS D'UNE VARIÉTÉ KAHLÉRIENNE COMPLÈTE

PAR Jean-Pierre DEMAILLY

TABLE DES MATIÈRES



## 0. Introduction

L'objet de ce travail est d'étendre aux variétés kählériennes complètes les estimations L² de Bochner-Kodaira-Kohn-Hörmander-Nakano-Skoda pour l'opérateur $\bar{\partial}$. Nous étudierons de manière générale l'opérateur $\bar{\partial}$ d'un fibré vectoriel holomorphe hermitien, en nous inspirant de H. Skoda dont les articles [22] à [26] sont à l'origine de la plupart de nos résultats.

Dans ses travaux les plus récents sur la question ([24], [25] et [26]) H. Skoda se plaçait, comme S. Nakano [20], sur des variétés faiblement $C^2$-pseudoconvexes. Par définition, une variété X est faiblement ($C^k$)-pseudoconvexe s'il existe sur X une fonction plurisousharmonique exhaustive (de classe $C^k$). Les variétés compactes et les variétés de Stein sont des exemples de variétés faiblement $C^\infty$-pseudoconvexes. D'autre part, on a (*cf.* § 1) :

THÉORÈME 0.1. — *Toute variété kählérienne faiblement pseudoconvexe peut être munie d'une métrique kählérienne complète.*

On généralise ainsi le résultat analogue de S. Nakano [20] pour les variétés faiblement $C^2$-pseudoconvexes. Les variétés kählériennes complètes apparaissent en fait comme le cadre naturel de la méthode d'analyse fonctionnelle de L. Hörmander [14] pour la résolution de l'opérateur $\overline{\partial}$, et certaines simplifications techniques sont possibles dans ce cadre.

Un passage à la limite sur la métrique kählérienne permet notamment de s'affranchir de la technique des trois poids qui était utilisée antérieurement ([14], [24]). Une autre source d'intérêt des variétés kählériennes complètes, outre leur généralité plus grande, réside dans le résultat suivant (prop. 1.6).

THÉORÈME 0.2. — *Soit* X *une variété kählérienne compacte ou une variété de Stein, et* Z *un ensemble analytique dans* X. *Alors* $X\setminus Z$ *possède une métrique kählérienne complète.*

Pour obtenir des théorèmes d'annulation optimaux, nous avons été amenés à introduire de nouvelles notions de positivité pour les fibrés, qui généralisent à la fois les notions de positivité de Ph. Griffiths [12] et de S. Nakano [20]. On dira que le fibré E est $s$-positif (où $s$ est un entier $\geqq 1$) si la forme de courbure $c(E)$ est telle que $ic(E)(x, x)>0$ pour tout tenseur non nul $x\in TX\otimes E$ de rang $\leqq s$ (*voir* définitions 2.1 et 2.2). La positivité de Griffiths correspond à $s=1$, celle de Nakano à $s=n=\dim X$. On a dans ce contexte un théorème d'annulation (th. 7.1), qui généralise le résultat de S. Nakano [20] dans le cas particulier des $(n, q)$-formes.

THÉORÈME 0.3. — *Soit* E *un fibré s-positif au-dessus d'une variété* X *faiblement pseudoconvexe. Alors* $H^{n,q}(X, E)=0$ *pour* $q\geqq \sup(1, n-s+1)$.

Ce théorème s'accompagne d'estimations $L^2$ précises pour l'opérateur $\overline{\partial}$, qui seront étudiées au paragraphe 4.

Le paragraphe 2 contient une synthèse des résultats de [6] et [7] sur les relations entre les différentes notions de positivité (*cf.* th. 2.6), résultats que nous rappelons brièvement ici.

THÉORÈME 0.4. — *Soit* E *un fibré positif au sens de Griffiths, de rang* $r\geqq 2$. *Alors* :

$$E\otimes \det E \text{ est positif au sens de Nakano}; \tag{0.1}$$

$$E^*\otimes(\det E)^s \text{ est } s\text{-positif pour tout } s\geqq 1. \tag{0.2}$$

Les théorèmes 0.3 et 0.4 admettent la conséquence suivante (cor. 7.2 et 7.3).

COROLLAIRE 0.5. — *Soit* E *un fibré positif au sens de Griffiths, de rang* $\geqq 2$, *au-dessus d'une variété faiblement pseudoconvexe* X. *Alors* :

$$H^{n,q}(X;\ E\otimes \det E)=0 \qquad \text{pour} \quad q\geqq 1; \tag{0.3}$$

$$H^{n,q}(X;\ E^*\otimes(\det E)^s)=0 \tag{0.4}$$

*pour* $q\geqq \sup(1, n-s+1)$ *et pour tout* $q\geqq 1$ *si* $s\geqq r$.

La propriété (0.3), qui est un théorème de Ph. Griffiths [12], devient ainsi un corollaire du théorème d'annulation de Nakano.

Le résultat (0.4) est nouveau à notre connaissance lorsque $n-s+1\leqq q<r$.

Soit maintenant :

$$(0.5) \qquad 0 \to \mathrm{N} \to \mathrm{E} \xrightarrow{g} \mathrm{Q} \to 0$$

une suite exacte de fibrés vectoriels holomorphes hermitiens au-dessus de la variété faiblement pseudoconvexe X. Nous démontrons le résultat suivant (th. 7.4 et 7.5).

THÉORÈME 0.6. — *Soit* $r$ *le rang de* E, $k$ *le rang de* Q, $n$ *la dimension de* X *et* $q$ *un entier tel que* $0 \leqq q \leqq n$. *On pose* $s = \inf(n-q, r-k)$. *Soit* M *un fibré linéaire hermitien et* $\mathrm{L} = (\text{dét}\,\mathrm{Q})^s \otimes \mathrm{M}$.
(0.6) *Si* E *est s-semi-positif et si* M *est semi-positif* (*l'une des deux hypothèses de positivité étant stricte*) *alors le fibré* $\mathrm{N} \otimes \mathrm{L}$ *est* $(n-q)$*-positif, et on a* :

$$\mathrm{H}^{n,\,l+1}(\mathrm{X};\,\mathrm{N} \otimes \mathrm{L}) = 0 \qquad \textit{pour} \quad l \geqq q.$$

(0.7) *Si* E *est s-semi-positif et si* $ic(\mathrm{M}) \geqq \varepsilon\, ic\,(\text{dét}\,\mathrm{Q})$, $\varepsilon > 0$ *alors le morphisme cobord* :

$$\delta : \quad \mathrm{H}^{n,\,l}(\mathrm{X};\,\mathrm{Q} \otimes \mathrm{L}) \to \mathrm{H}^{n,\,l+1}(\mathrm{X};\,\mathrm{N} \otimes \mathrm{L})$$

*est nul pour* $l \geqq q$.

*Sous chacune des deux hypothèses* (0.6), (0.7), *le morphisme :*

$$g : \quad \mathrm{H}^{n,\,l}(\mathrm{X};\,\mathrm{E} \otimes \mathrm{L}) \to \mathrm{H}^{n,\,l}(\mathrm{X};\,\mathrm{Q} \otimes \mathrm{L})$$

*est surjectif.*

Le cas particulier du théorème 0.6 correspondant à $q=0$ est dû à H. Skoda [25]. Le cas $q=l=0$ est particulièrement intéressant, puisqu'il donne des conditions suffisantes assurant la surjectivité du morphisme :

$$g : \quad \mathrm{H}^{n,\,0}(\mathrm{X};\,\mathrm{E} \otimes \mathrm{L}) \to \mathrm{H}^{n,\,0}(\mathrm{X};\,\mathrm{Q} \otimes \mathrm{L}),$$

opérant sur les sections holomorphes globales. La méthode de démonstration est essentiellement la même que celle suivie par H. Skoda [25], et repose sur les liens qui existent entre les formes de courbure $c(\mathrm{E})$, $c(\mathrm{N})$ et l'obstruction au scindage holomorphe de la suite exacte (0.5). Le théorème 0.6 admet lui aussi une version plus précise, avec estimations $\mathrm{L}^2$ (th. 6.2 et cor. 6.10), permettant de traiter le cas où le morphisme $g$ dégénère en certains points. Si Z est l'ensemble des points où $g$ dégénère, on peut en effet appliquer le théorème d'existence à la variété $\mathrm{X} \setminus \mathrm{Z}$, car $\mathrm{X} \setminus \mathrm{Z}$ est réunion d'une suite croissante de variétés complètes. Les estimations $\mathrm{L}^2$ qui sont obtenues simultanément permettent de prolonger les solutions au travers de l'ensemble analytique Z (*cf.* lemme 6.9). Certaines hypothèses techniques superflues qui apparaissent dans [24], [25], [26], [5], [7] ont pu ainsi être éliminées.

La section 6 s'achève par l'énoncé d'un théorème d'extension pour les fonctions holomorphes. Ce théorème améliore les résultats de B. Jennane [16], et semble optimal. Soit $f$ une section holomorphe d'un fibré E au-dessus de X, définie au voisinage d'un sous-ensemble analytique $\mathrm{Y} \subset \mathrm{X}$. On donne une condition suffisante portant sur la courbure de E, qui assure l'existence d'un prolongement F de $f$ à X. Dans le cas où $\mathrm{X} = \mathbb{C}^n$, on obtient ainsi un théorème de prolongement avec contrôle précis de la croissance (*cf.* aussi [5]). Le lecteur trouvera certaines applications à l'analyse harmonique dans l'article de C. A. Berenstein et B. A. Taylor [1].

Les sections 8 et 9 sont consacrées à l'étude d'un certain nombre de résultats concernant l'approximation des fonctions plurisousharmoniques sur des variétés kählériennes quelconques. L'étape technique cruciale consiste en un procédé de régularisation par des noyaux « symétriques » vis-à-vis de la métrique kählérienne . R. Greene et H. Wu [11] ont déjà utilisé des techniques similaires dans le cadre des variétés riemanniennes. Leurs résultats et ceux antérieurs de R. Richberg [21], résolvent de manière satisfaisante le cas des fonctions plurisousharmoniques continues (sur une variété analytique quelconque). Lorsque la variété est supposée de plus kählérienne , nous obtenons un théorème général d'approximation (th. 9.1), qui semble nouveau dans le cas des fonctions plurisousharmoniques semi-continues. Ce dernier théorème permet l'introduction de poids singuliers dans les estimations $L^2$ pour l'opérateur $\overline{\partial}$ sur des variétés kählériennes complètes, non nécessairement de Stein (*cf.* § 5). Citons quelques-uns des résultats obtenus (*cf.* cor. 9.3 et th. 9.4).

THÉORÈME 0.7. — *Soit* $\varphi$ *une fonction plurisousharmonique sur une variété kählérienne* $(X, \omega)$. *Alors il existe une une suite décroissante* $(\varphi_\nu)$ *de fonctions de classe* $C^\infty$ *sur* X *et une suite* $(\lambda_\nu)$ *de fonctions continues* $\geqq 0$ *telles que :*

(0.8) $$\lim_{\nu \to +\infty} \downarrow \varphi_\nu = \varphi;$$

(0.9) $$id'\, d''\, \varphi_\nu \geqq -\lambda_\nu\, \omega;$$

(0.10) $\lambda_\nu$ *converge vers* 0 *uniformément sur tout compact de* X.

L'énoncé qui suit est l'une des étapes essentielles de la démonstration du théorème 0.1.

THÉORÈME 0.8. — *Soit* $(X, \omega)$ *une variété kählérienne faiblement pseudoconvexe. Alors il existe des fonctions continues* $m$, M **exhaustives** *sur* X, *telles que* $0 < m < M$ *et ayant la propriété suivante. Pour toute fonction continue* $\lambda > 0$ *sur* X, *il existe une fonction* $\psi$ *de classe* $C^\infty$ *sur* X *telle que* :

$$m \leqq \psi \leqq M \qquad et \qquad id'\, d''\, \psi \geqq -\lambda\, \omega.$$

J'adresse mes plus vifs remerciements à M. Henri Skoda, qui m'a suggéré de nombreuses améliorations dans la rédaction de ce travail.

## 1. Variétés kählériennes complètes et faiblement pseudoconvexes

Soit X une variété analytique complexe de dimension $n$.

Pour pouvoir résoudre l'opérateur $d''$, nous serons amenés à faire sur X certaines hypothèses de pseudoconvexité.

DÉFINITION 1.1. — *La variété* X *sera dite faiblement pseudoconvexe* (*resp.* $C^k$-*pseudoconvexe*) *s'il existe sur* X *une fonction* $\varphi$ *plurisousharmonique* (*resp. de classe* $C^k$) *et* **exhaustive**, *c'est-à-dire que pour tout réel c, l'ouvert* $X(c)=\{z\in X;\ \varphi(z)<c\}$ *est relativement compact dans* X.

Les variétés de Stein et les variétés compactes sont des exemples de variétés faiblement $C^\infty$-pseudoconvexes.

DÉFINITION 1.2. — *On dira que* X *est une variété kählérienne complète si* X *possède une métrique kählérienne* $\hat\omega$ *vérifiant l'une des propriétés équivalentes* (1.1), (1.2), (1.3) :

(1.1) *la distance géodésique* $\hat\delta$ *associée à* $\hat\omega$ *est complète*;

(1.2) *les boules fermées définies par* $\hat\delta$ *sont compactes*;

(1.3) *il existe une suite exhaustive* $(K_\nu)$, $\nu=1, 2, \ldots$, *de parties compactes de* X *et une suite* $(\chi_\nu)$ *de fonctions* $C^\infty$ *à support compact dans* X, *telles que* :

$$0\leqq\chi_\nu\leqq 1,\qquad \chi_\nu=1\ \textit{sur}\ K_\nu,\qquad |d\chi_\nu|\leqq\frac{1}{\nu}.$$

D'après S. Nakano [20], une variété kählérienne faiblement $C^2$-pseudoconvexe peut toujours être munie d'une métrique kählérienne complète. Nous énoncerons ici un résultat un peu plus général.

THÉOREME 1.3. — *Toute variété kählérienne faiblement pseudoconvexe possède une métrique kählérienne complète.*

*Démonstration.* — Soit X une variété faiblement pseudoconvexe, et $\omega$ une métrique kählérienne sur X. D'après le théorème 9.4 de l'appendice, il existe une fonction continue $M>0$ et une fonction exhaustive $\psi$ de classe $C^\infty$ sur X telles que :

$$0\leqq\psi\leqq M\qquad\text{et}\qquad id'\,d''\,\psi\geqq-\frac{1}{M}\omega.$$

Posons $\hat\omega=3\,\omega+id'\,d''(\psi^2)=3\,\omega+2\,i\,\psi\,d'\,d''\,\psi+2\,id'\,\psi\wedge d''\,\psi$.

On obtient :

$$\hat\omega\geqq\omega+2\,id'\,\psi\wedge d''\,\psi, \tag{1.4}$$

en particulier, $\hat\omega$ est une métrique kählérienne . Soient $\delta$ et $\hat\delta$ les distances géodésiques associées respectivement à $\omega$ et $\hat\omega$, et soit $(z_1, z_2)$ un couple de points de X. On a par définition :

$$\delta(z_1, z_2)=\inf\int_0^1\sqrt{\omega\left(\frac{du}{dt}, i\frac{du}{dt}\right)}\,dt,$$

où la borne inférieure est étendue à tous les chemins $u:[0, 1]\to X$ de classe $C^1$ et d'extrémités $z_1$ et $z_2$. D'après (1.4), il vient :

$$\hat\omega\left(\frac{du}{dt}, i\frac{du}{dt}\right)\geqq\omega\left(\frac{du}{dt}, i\frac{du}{dt}\right)+4\left|d'\,\psi\left(\frac{du}{dt}\right)\right|^2\geqq\omega\left(\frac{du}{dt}, i\,\frac{du}{dt}\right)+\left|\frac{d(\psi\circ u)}{dt}\right|^2,$$

puisque :

$$\frac{d(\psi \circ u)}{dt} = d\psi\left(\frac{du}{dt}\right) = 2\,\mathrm{Re}\, d'\psi\left(\frac{du}{dt}\right).$$

On en déduit aisément :

$$\hat{\delta}(z_1, z_2) \geqq \sup(\delta(z_1, z_2), |\psi(z_1) - \psi(z_2)|) \tag{1.5}$$

pour tout couple $(z_1, z_2)$ de points de X. Comme $\psi$ est exhaustive, il en résulte que l'hypothèse (1.2) est vérifiée par $\hat{\delta}$. □

Au paragraphe 6, nous serons amenés pour des raisons techniques à appliquer les estimations $L^2$ sur des variétés de la forme $X \setminus Z$, où Z est un ensemble analytique dans X. Lorsque X est une variété de Stein ou une variété projective, on résout la difficulté en choisissant une hypersurface H contenant Z et telle que $X \setminus H$ soit une variété de Stein. Dans le cas général, on a un théorème d'existence pour le $\bar{\partial}$ valable sur toute variété kählérienne complète. Il est donc intéressant de rechercher des conditions très générales assurant l'existence d'une métrique kählérienne complète sur $X \setminus Z$.

La première étape consiste à construire une fonction $\psi$ singulière sur Z, et qui soit « presque » plurisousharmonique sur X. La méthode standard, lorsque Z est un ensemble analytique de codimension pure $p$ dans $\mathbb{C}^n$, utilise une convolution du courant d'intégration [Z] avec le noyau $-|z-x|^{-2p}/p\,!\,((i/2)\,d'd''|z|^2)^p$ convenablement tronqué (*cf.* H. Skoda [28]).

Cette méthode peut s'adapter au cas où X est kählérienne, au prix de difficultés comparables à celles que nous rencontrerons au paragraphe 8. Néanmoins, comme aucune estimation précise n'est indispensable, on pourra se contenter ici d'une construction plus simple.

PROPOSITION 1.4. — *Soit* X *une variété analytique et* Z *un ensemble analytique dans* X. *Il existe une fonction* $\psi < -1$, *de classe* $C^\infty$ *sur* $X \setminus Z$, *convergeant vers* $-\infty$ *au voisinage de* Z *et localement sommable sur* X, *et une* (1, 1)*-forme réelle* $\gamma$ *continue sur* X *ayant les propriétés suivantes* :

(1.6) $id'd''\psi \geqq \gamma$;

(1.7) *si* $\alpha$ *est un réel* $>0$, $e^{-\alpha\psi}$ *est non sommable au voisinage de tout point* $z \in Z$ *en lequel la codimension du germe* $Z_z$ *est au plus égale à* $\alpha$.

*Démonstration.* — Soit $\mathscr{I}_Z$ le faisceau d'idéaux des germes de fonctions holomorphes qui s'annulent sur Z. Puisque $\mathscr{I}_Z$ est cohérent, il existe un recouvrement ouvert localement fini $(U_j)_{j \in J}$ de X par des ouverts $U_j$ relativement compacts, et pour tout $j$ des fonctions $f_{j,\nu}$, $1 \leqq \nu \leqq \nu(j)$, qui engendrent le faisceau $\mathscr{I}_Z$ au voisinage de $\overline{U}_j$. On pose $f_j = (f_{j,\nu})_{1 \leqq \nu \leqq \nu(j)}$,

$$|f_j|^2 = \sum_\nu |f_{j,\nu}|^2$$

. Comme les $f_{j,\nu}$ sont des générateurs, chaque quotient $|f_j|^2/|f_k|^2$ est borné sur $U_j \cap U_k \setminus Z$; seule cette propriété nous servira en fait par la suite.

Choisissons une famille $(\chi_j)$ de fonctions de classe $C^\infty$ sur X, à support $\operatorname{Supp}\chi_j \subset U_j$, telles que :

$$\sum_{j\in J}\chi_j^2>0, \qquad \sum_{j\in J}\chi_j^2\,|f_j|^2<\frac{1}{e} \quad \text{sur X.}$$

On définit :

$$\rho=\sum_j \chi_j^2\,|f_j|^2=\sum_{j,\,\nu}\chi_j^2\,|f_{j,\,\nu}|^2, \qquad \psi=\operatorname{Log}\rho.$$

En différentiant une première fois, on trouve :

$$d''\psi=\frac{d''\rho}{\rho}=\frac{1}{\rho}\sum_{j,\,\nu}\chi_j f_{j,\,\nu}\,\overline{u}_{j,\,\nu},$$

où $u_{j,\,\nu}$ est la (1, 0)-forme sur X :

$$u_{j,\,\nu}=2 f_{j,\,\nu}\,d'\chi_j+\chi_j\,df_{j,\,\nu}.$$

On a d'autre part $d'(\overline{u}_{j,\,\nu})=2\,\overline{f}_{j,\,\nu}\,d'd''\chi_j\wedge d^{o}_{\chi_j}\,\overline{df}_{j,\,\nu}$, d'où :

$$\begin{aligned}
d'd''\psi=&\ \frac{1}{\rho}\sum_{j,\,\nu}\chi_j f_{j,\,\nu}(2\,\overline{f}_{j,\,\nu}\,d'd''\chi_j+d'\chi_j\wedge \overline{df}_{j,\,\nu})\\
&+\frac{1}{\rho}\sum_{j,\,\nu}(f_{j,\,\nu}\,d'\chi_j+\chi_j\,df_{j,\,\nu})\wedge\overline{u}_j-\frac{d'\rho\wedge d''\rho}{\rho^2}\\
=&\ \frac{1}{\rho}\sum_{j,\,\nu}2\,|f_{j,\,\nu}|^2(\chi_j\,d'd''\chi_j-d'\chi_j\wedge d''\chi_j)+\frac{1}{\rho}\sum_{j,\,\nu}u_{j,\,\nu}\wedge\overline{u}_{j,\,\nu}-\frac{d'\rho\wedge d''\rho}{\rho^2}.
\end{aligned}$$

Dans cette dernière égalité, la première sommation a ses coefficients localement bornés sur X, à cause de l'hypothèse que les quotients $|f_j|^2/|f_k|^2$ sont bornés. Il existe donc une (1, 1)-forme réelle $\gamma$, continue sur X, telle que :

$$i d'd''\psi\geqq\gamma+\frac{1}{\rho}\sum_{j,\,\nu}i u_{j,\,\nu}\wedge\overline{u}_{j,\,\nu}-\frac{i d'\rho\wedge d''\rho}{\rho^2}.$$

La forme hermitienne correspondant à la somme des deux derniers termes, calculée sur le vecteur tangent $\xi\in T_z X$, est donnée par :

$$\frac{1}{\rho}\sum|u_{j,\,\nu}(\xi)|^2-\frac{|d'\rho(\xi)|^2}{\rho^2},$$

quantité $\geqq 0$ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à l'identité :

$$d'\rho(\xi)=\sum_{j,\,\nu}\chi_j\,\overline{f}_{j,\,\nu}\,u_{j,\,\nu}(\xi).$$

La minoration (1.6) est donc démontrée. L'affirmation (1.7) est facile à vérifier si $z$ est un point régulier de Z. Dans le cas général, il suffit d'observer qu'il y a toujours une suite $z_k$ de points réguliers convergeant vers $z$ et tels que la codimension de Z soit la même aux points $z$ et $z_k$. $\square$

Il est maintenant facile de prouver l'existence de métriques complètes sur des variétés de la forme $X \setminus Z$.

THÉORÈME 1.5. — *Soit* $(X, \omega)$ *une variété kählérienne*, Z *un ensemble analytique dans* X *et* $\hat{X}$ *un ouvert relativement compact de* X *possédant une métrique kählérienne complète* $\hat{\omega}$.

*Alors* $\hat{X} \setminus Z$ *est une variété kählérienne complète.*

*Remarque* 1.6. — Si de plus X est faiblement pseudoconvexe, avec fonction d'exhaustion p.s.h. $\varphi$, le théorème 1.5 s'applique en particulier aux ouverts $\hat{X} = X(c) = \{ z \in X;\ \varphi(z) < c \}$ en vertu du théorème 1.3.

*Démonstration.* — Soit $\psi$ la fonction construite dans la proposition 1.4.

On obtiendra une métrique kählérienne complète sur $\hat{X} \setminus Z$ en posant pour $C > 0$ assez grand :

$$\tilde{\omega} = \hat{\omega} + C\,\omega + id'd''(-\sqrt{-\psi}).$$

En effet, un calcul immédiat donne :

$$id'd''(-\sqrt{-\psi}) = \frac{id'd''\psi}{2\sqrt{-\psi}} + 4\,id'(-\psi)^{1/4} \wedge d''(-\psi)^{1/4}. \tag{1.8}$$

D'après (1.6) et l'inégalité $\psi < -1$, il existe $C > 0$ tel que :

$$C\,\omega + \frac{id'd''\psi}{2\sqrt{-\psi}} \geqq 0 \quad \text{sur } \hat{X},$$

donc $\tilde{\omega} \geqq \hat{\omega} + 4\,i\,d'(-\psi)^{1/4} \wedge d''(-\psi)^{1/4}$. Comme $\psi(z)$ tend vers $-\infty$ au voisinage de Z, le raisonnement utilisé en (1.4) et (1.5) montre que $\tilde{\omega}$ est complète sur $\hat{X} \setminus Z$. $\square$

Pour obtenir un résultat plus global, il est nécessaire de faire une hypothèse plus forte sur la variété X, en supposant par exemple X compacte ou X de Stein. Le cas où X est une variété de Stein avait déjà été étudié par H. Grauert [10].

On peut énoncer de manière générale :

PROPOSITION 1.6. — *Soit* $(X, \omega)$ *une variété kählérienne possédant une fonction d'exhaustion* $\varphi$ *p.s.h. sur* X *et strictement p.s.h. en dehors d'un compact de* X. *Alors pour tout ensemble analytique* Z *de* X, $X \setminus Z$ *est une variété kählérienne complète.*

*Démonstration.* — Rappelons qu'une fonction semi-continue supérieurement est dite strictement p.s.h. si elle est localement somme d'une fonction p.s.h. et d'une fonction strictement p.s.h. de classe $C^2$. Grâce au corollaire 9.5, on peut supposer $\varphi$ de classe $C^\infty$. On pose :

$$\hat{\omega} = C\,\omega + id'd''(\chi \circ \varphi - \sqrt{-\psi}),$$

où C est une constante $>0$, $\chi$ une fonction convexe croissante de classe $C^\infty$ et $\psi$ la fonction de la proposition 1.4. On choisit C et $\chi$ de sorte que :

$$(C-1)\,\omega+\chi'\circ\varphi.id'd''\varphi+\frac{id'd''\psi}{2\sqrt{-\psi}}\geqq 0 \qquad \text{et} \qquad \chi''\circ\varphi\geqq 1.$$

Il vient alors d'après (1.8) :

$$\hat{\omega}\geqq\omega+id'\varphi\wedge d''\varphi+4\,i\,d'(-\psi)^{1/4}\wedge d''(-\psi)^{1/4};$$

$\hat{\omega}$ est donc complète sur $X\setminus Z$. □

## 2. Rappels sur les notions de courbure et de positivité

Soient X une variété analytique complexe de dimension $n$, et E un fibré vectoriel holomorphe hermitien de rang $r$ au-dessus de X, dont la métrique est de classe $C^2$. On désigne par $D=D'+D''$ la connexion holomorphe hermitienne du fibré E (*cf.* A. Douady et J.-L. Verdier [9], exposé III), et par $c(E)$ la forme de courbure de E, qui est définie par :

$$c(E).u=D^2u=(D'D''+D''D')u$$

pour toute section $u$ de $C^\infty(X;\,E)$; $ic(E)$ est donc une (1,1)-forme réelle à valeurs dans le fibré Herm(E, E) des endomorphismes hermitiens de E. $ic(E)$ sera identifiée à la forme sesquilinéaire hermitienne sur $TX\otimes E$ qui lui correspond canoniquement par la formule :

$$ic(E)(t\otimes e,\ t\otimes e)=(ic(E)(t,\ it).e\,|\,e)$$

en tout point $z\in X$ et avec $t\in T_zX$, $e\in E_z$. Relativement à un couple de bases $(dz_1, dz_2, \ldots, dz_n)$ de $T_z^*X$ et $(e_1, e_2, \ldots, e_r)$ de $E_z$ (cette dernière étant orthonormée) on peut écrire :

$$ic(E)=\frac{i}{2}\sum c_{jklm}\,dz_j\wedge d\bar{z}_k\otimes e_l^*\otimes e_m,$$
$$ic(E)(x,\ x)=\sum c_{jklm}\,x_{jl}\,\bar{x}_{km},$$

avec :

$$c_{jklm}=\bar{c}_{kjml},\qquad 1\leqq j,\ k\leqq n,\qquad 1\leqq l,\ m\leqq r,$$
$$x\in T_zX\otimes E_z,\qquad x_{jl}=(dz_j\otimes e_l^*)(x),$$

$(e_1^*, e_2^*, \ldots, e_r^*)$ étant la base duale de $(e_1, e_2, \ldots, e_r)$.

DÉFINITION 12.1. — *Soient* T *et* E *deux espaces vectoriels complexes de dimensions respectives n et r.*

*Un tenseur $x\in T\otimes E$ sera dit de rang s si s est le plus petit entier $\geqq 0$ tel qu'on puisse écrire :*

$$x=\sum_{j=1}^{s}t_j\otimes e_j,\qquad t_j\in T,\quad e_j\in E.$$

*On dira qu'une forme hermitienne* $\theta$ *sur* $T\otimes E$ *est s-semi-positive* (*où s est un entier* $\geqq 1$), *et on écrira* $\theta \geqq_s 0$, *si* $\theta(x, x)\geqq 0$ *pour tout tenseur* $x\in T\otimes E$ *de rang* $\leqq s$.

*La forme* $\theta$ *sera s-positive* ($\theta >_s 0$) *si* $\theta(x, x)>0$ *pour tout tenseur* $x\neq 0$ *de rang* $\leqq s$.

DÉFINITION 2.2. — *On dira que le fibré hermitien* E *est s-(semi-) positif si sa forme de courbure* $\theta = ic(E)$ *est s-(semi) positive sur* $T_z X\otimes E_z$ *en tout point* $z\in X$.

Pour $s=1$, on retrouve la notion de positivité de Ph. Griffiths [12] :

$$\theta \geqq_1 0 \quad \text{si} \quad \theta(t\otimes e,\ t\otimes e)\geqq 0 \quad \text{pour tout } (t, e)\in TX\otimes E,$$

tandis que pour $s\geqq \operatorname{Inf}(n, r)$ on obtient la positivité de S. Nakano [20] :

$$\theta \geqq_s 0 \quad \text{si} \quad \theta(x, x)\geqq 0 \quad \text{pour tout } x\in TX\otimes E$$

[tout élément de $TX\otimes E$ est de rang $\leqq \operatorname{Inf}(n, r)$]. Toutes ces notions coïncident par ailleurs si $r=1$ ou si $n=1$, et nous omettrons alors l'indice $s$.

Les questions que nous allons maintenant aborder ne seront pas utilisées avant le paragraphe 7. Nous nous proposons d'étudier (comme dans [7] et [6]) différentes relations existant entre les notions de positivité introduites plus haut.

Étant donné une forme hermitienne $\theta$ sur $T\otimes E$, on désignera par $\operatorname{Tr}_E\theta$ la trace de $\theta$ par rapport à E, c'est-à-dire la forme hermitienne définie sur T par :

$$(\operatorname{Tr}_E\theta)(t, t)=\sum_{l=1}^{r}\theta(t\otimes e_l,\ t\otimes e_l)$$

pour tout $t\in T$ et toute base orthonormée $(e_l)_{1\leqq l\leqq r}$ de E.

PROPOSITION 2.3. — *Soit* $\theta \geqq_1 0$ *une forme hermitienne semi-positive au sens de Griffiths. Alors la forme* $\theta + \operatorname{Tr}_E\theta\otimes \mathrm{Id}_E$ *est semi-positive au sens de Nakano, c'est-à-dire* $\theta+\operatorname{Tr}_E\theta\otimes\mathrm{Id}_E \geqq_r 0$.

Dans cet énoncé, on identifie la métrique hermitienne de E à l'endomorphisme $\mathrm{Id}_E$ qui lui correspond. Le lecteur est invité à se reporter à [7] ou à [6] pour une démonstration.

COROLLAIRE 2.4. — *Supposons* $\theta \geqq_1 0$. *Alors* $s\operatorname{Tr}_E\theta\otimes\mathrm{Id}_E-\theta \geqq_s 0$.

*Démonstration.* — Nous établirons d'abord le cas $s=1$, le cas général résultant de la proposition 2.3.

(*a*) $s=1$.

Soit $x\in T\otimes E$ un tenseur de rang $\leqq 1$. On peut écrire $x=t\otimes e$ avec $t\in T$ et $e\in E$, $|e|=1$. Complétons $[e]$ en une base orthonormée $(e_1, e_2, \ldots, e_r)$ de E telle que $e_1=e$.

Il vient :

$$\theta(x, x)=\theta(t\otimes e_1,\ t\otimes e_1),$$

$$(\operatorname{Tr}_E\theta\otimes\mathrm{Id}_E)(x, x)=\operatorname{Tr}_E\theta(t, t)=\sum_{l=1}^{r}\theta(t\otimes e_l,\ t\otimes e_l)\geqq\theta(x, x)$$

car par hypothèse $\theta(t\otimes e_l,\ t\otimes e_l)\geqq 0$.

(*b*) *Cas général.*

Tout tenseur $x \in T \otimes E$ de rang $\leqq s$ peut s'écrire :

$$x = \sum_{l=1}^{q} t_j \otimes e_j$$

avec $q = \inf(n, r, s)$, $t_j \in T$, et où $(e_j)_{1 \leqq j \leqq r}$ est une base orthonormée de E. Notons F le sous-espace de dimension $q$ de E engendré par $e_1, e_2, \ldots, e_q$ et $\theta_F$ la restriction de $\theta$ à $T \otimes F$ (de sorte que $\theta_F \geqq_1 0$). La partie (*a*) montre que :

$$\Theta = \mathrm{Tr}_F\, \theta_F \otimes \mathrm{Id}_F - \theta_F \geqq_1 0.$$

D'après la proposition 2.3, on obtient :

$$\Theta + \mathrm{Tr}_F\, \Theta \otimes \mathrm{Id}_F = q\, \mathrm{Tr}_F\, \theta_F \otimes \mathrm{Id}_F - \theta_F \geqq_q 0,$$

$$\theta(x, x) = \theta_F(x, x) \leqq q (\mathrm{Tr}_F\, \theta_F \otimes \mathrm{Id}_F)(x, x) = q \sum_{1 \leqq j, l \leqq q} \theta(t_j \otimes e_l, t_j \otimes e_l)$$

$$\leqq s \sum_{\substack{1 \leqq j \leqq q \\ 1 \leqq l \leqq r}} \theta(t_j \otimes e_l, t_j \otimes e_l) = s (\mathrm{Tr}_E\, \theta \otimes \mathrm{Id}_E)(x, x). \quad \square$$

Les principales conséquences de la proposition 2.3 seront obtenues en choisissant pour $\theta$ la forme de courbure $ic(E)$ d'un fibré hermitien. Nous aurons besoin du lemme classique suivant, qui relie la courbure des fibrés dét E et $E^*$ à celle de E.

LEMME 2.5. — *Soient* E, F *des fibrés hermitiens au-dessus de* X. *On note* dét $E = \Lambda^r E$ *où r est le rang de* E. *Alors les formes de courbure des fibrés* dét E, $E^*$ (*dual de* E) *et* $E \otimes F$ *sont données par :*

$$c(\text{dét } E) = \mathrm{Tr}_E\, c(E),$$

$$c(E^*) = -{}^t c(E),$$

$$c(E \otimes F) = c(E) \otimes \mathrm{Id}_F + \mathrm{Id}_E \otimes c(F),$$

*où la trace* $\mathrm{Tr}_E$ *est celle de* Hom (E, E) *et* ${}^t$ ? *l'opérateur de transposition* $\mathrm{Hom}(E, E) \to \mathrm{Hom}(E^*, E^*)$.

THÉORÈME 2.6. — *Soit* E *un fibré semi-positif* (*resp. positif*) *au sens de Griffiths. Alors :*

(2.1) $E \otimes$ dét E *est semi-positif* (*resp. positif*) *au sens de Nakano.*

(2.2) *Pour tout entier* $s \geqq 1$, *le fibré* $E^* \otimes (\text{dét } E)^s$ *est s-semi-positif.*

(2.3) $E^* \otimes (\text{dét } E)^s$ *est s-positif si* $E >_1 0$ *et si* $rs > 1$ (*r désignant le rang de* E).

*Démonstration.* — (2.1) résulte aisément de la proposition 2.3 et du lemme 2.5. Lorsque E est semi-positif au sens de Griffiths, il est classique que $E^*$ est semi-négatif en ce sens (i.e. $E^* \leqq_1 0$). La conclusion (2.2) résulte donc du corollaire 2.4 appliqué à $\theta = -ic(E^*)$, compte tenu de l'égalité :

$$ic(E^* \otimes (\text{dét } E)^s) = ic(E^*) - s\, \mathrm{Tr}_{E^*}\, ic(E^*).$$

Si de plus $E >_1 0$, il existe une formé hermitienne positive $\omega$ sur TX telle que $ic(E) \geqq_1 \omega \otimes \mathrm{Id}_E$, d'où :

$$\theta = -ic(E^*) - \omega \otimes \mathrm{Id}_{E^*} \geqq_1 0.$$

Le corollaire 2.4 entraîne que :

$$-s \operatorname{Tr} ic(E^*) + ic(E^*) + (1 - rs)\,\omega \otimes \mathrm{Id}_{E^*} \geqq_s 0,$$

soit $ic(E^* \otimes (\text{dét } E)^s) \geqq_s (rs - 1)\,\omega \otimes \mathrm{Id}_{E^*} >_s 0$. □

## 3. Étude du terme de courbure dans l'identité de Kodaira

Soit X une variété analytique complexe de dimension $n$, munie d'une métrique hermitienne $\omega$. On rappelle que l'algèbre $\Lambda \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(TX, \mathbb{C})$ des formes différentielles sur X admet la décomposition en somme directe orthogonale :

$$\Lambda \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(TX, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q \leqq n} \Lambda^{p,q} T^* X,$$

où l'espace $\Lambda^{p,q} T^* X$ des formes de bidegré $(p, q)$ est muni de la métrique naturelle déduite de celle de TX (conventions de A. Weil [29]).

On note $dV = \omega^n / n!$ l'élément de volume euclidien de X, $\Lambda$ l'adjoint de l'opérateur L de multiplication extérieure par $\omega$, de sorte que :

$$L\alpha = \omega \wedge \alpha, \qquad (\Lambda \alpha \mid \beta) = (\alpha \mid \omega \wedge \beta)$$

pour toutes formes $\alpha, \beta \in \Lambda \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(TX, \mathbb{C})$.

Soit maintenant E un fibré vectoriel holomorphe hermitien de rang $r$ au-dessus de X, dont la métrique est de classe $C^2$. Les opérateurs L et $\Lambda$ sont étendus aux espaces de formes $\Lambda^{p,q} T^* X \otimes E$ à valeurs dans E en tensorisant par $\mathrm{Id}_E$. L'inégalité de Kodaira-Nakano (*cf.* lemme 4.4) fera intervenir un terme de courbure du type $(ic(E) \Lambda \alpha \mid \alpha)$. C'est l'étude de ce terme que nous allons entreprendre.

Si $\theta$ est une (1, 1)-forme réelle à valeurs dans Herm(E, E), on définit pour tout entier $q = 1, 2, \ldots, n$ une forme sesquilinéaire $\theta_q$ sur les fibres de $\Lambda^{n,q} T^* X \otimes E$ en posant en chaque point $z \in X$ :

$$\theta_q(\alpha, \beta) = (\theta\ \Lambda \alpha \mid \beta)$$

pour toutes les formes $\alpha, \beta \in \Lambda^{n,q} T_z^* X \otimes E_z$. Les deux lemmes suivants, que nous démontrons simultanément, seront utiles par la suite.

LEMME 3.1. — *Les formes $\theta_q$ sont hermitiennes. Si la forme $\theta$ est $(n - q + 1)$-(semi-) positive, alors $\theta_q$ est (semi-) positive.*

On suppose désormais que $\theta \geqq_{n-q+1} 0$. Si $\alpha \in \Lambda^{n,q} T^* X \otimes E$, on note $|\alpha|_\theta$ le plus petit nombre $\geqq 0$, éventuellement infini, tel que :

$$|(\alpha \mid \beta)|^2 \leqq |\alpha|_\theta^2 (\theta\ \Lambda \beta \mid \beta) \tag{3.1}$$

pour tout $\beta \in \Lambda^{n,q} T^* X \otimes E$.

LEMME 3.2. — *La $(n, n)$-forme* $|\alpha|_\theta^2 dV$ :

(3.2) *est indépendante de* $\omega$ *si* $q=1$,

(3.3) *décroît lorsque* $\omega$ *croît si* $q \geqq 1$.

*D'autre part, pour tout nombre réel* $\lambda \geqq 0$ *tel que* $\theta \geqq_{n-q+1} \lambda\omega \otimes \mathrm{Id}_E$ *et tout* $\alpha \in \Lambda^{n,q} T^* X \otimes E$ *on a :*

$$|\alpha|_\theta^2 \leqq \frac{1}{q\lambda} |\alpha|^2. \tag{3.4}$$

*Enfin, soit* $\eta$ *une* $(0, 1)$*-forme sur* X. *On a alors :*

$$|\eta \wedge \alpha|_\theta \leqq |\eta| . |\alpha|_\theta. \tag{3.5}$$

*Démonstration du lemme* 3.1. — Relativement à un couple de bases orthonormées $(dz_1, dz_2, \ldots, dz_n)$ de $T_z^* X$ et $(e_1, e_2, \ldots, e_r)$ de $E_z$, on peut écrire :

$$\omega = \frac{i}{2} \sum_{j=1}^{n} dz_j \wedge d\bar{z}_j,$$

$$\theta = \frac{i}{2} \sum_{\substack{1 \leqq j, k \leqq n \\ 1 \leqq l, m \leqq r}} c_{jklm} dz_j \wedge d\bar{z}_k \otimes e_l^* \otimes e_m$$

avec $\bar{c}_{jklm} = c_{kjml}$ et pour $\beta \in \Lambda^{n,q} T^* X \otimes E$ :

$$\beta = \sum_{|J|=q}' \sum_{l=1}^{r} \beta_{J,l} dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_J \otimes e_l,$$

où la notation $\sum'$ signifie que la sommation est étendue à tous les multi-indices J *croissants*. On vérifie que :

$$\Lambda \beta = 2 \sum_{|J|=q-1} \sum_{\substack{1 \leqq j \leqq n \\ 1 \leqq l \leqq r}} (-1)^{n-j} \beta_{jJ,l} dz_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dz_j} \wedge \ldots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_J \otimes e_l$$

(la notation $\widehat{dz_j}$ rappelant que le terme $dz_j$ est omis), et que :

$$\theta_q(\beta, \beta) = (\theta \Lambda \beta \mid \beta) = 2^{n+q} \sum_{|J|=q-1}' \sum_{\substack{1 \leqq j, k \leqq n \\ 1 \leqq l, m \leqq r}} c_{jklm} \beta_{jJ,l} \overline{\beta_{kJ,m}}. \tag{3.6}$$

Le multi-indice J étant fixé, $|J| = q-1$, la matrice $(\beta_{jJ,l})_{j,l}$ est de rang $n$-$(q-1)$ au plus, puisque $\beta_{jJ,l} = 0$ si $j \in J$.

Si $\theta \geqq_{n-q+1} 0$, on a donc pour tout J :

$$\sum c_{jklm} \beta_{jJ,l} \bar{\beta}_{kJ,m} \geqq 0. \quad \square$$

*Démonstration du lemme* 3.2. — Soit $\omega'$ une deuxième métrique hermitienne sur $T_z X$. On choisit une base $(dz_1, \ldots, dz_n)$ de $T_z^* X$, orthonormée relativement à $\omega$ et orthogonale relativement à $\omega'$. On peut donc écrire :

$$\omega' = \frac{i}{2} \sum_{j=1}^{n} a_j dz_j \wedge d\bar{z}_j \qquad \text{où} \quad a_j > 0.$$

L'isométrie $a^{1/2} : (T_z X, \omega') \to (T_z X, \omega)$ qui à tout $(t_j)_{1 \leqq j \leqq n}$ associe $(a_j^{1/2} t_j)_{1 \leqq j \leqq n}$ induit un isomorphisme métrique :

$$(\Lambda\, T_z^* X, \omega) \to (\Lambda\, T_z^* X, \omega').$$

Si $(\ |\ )'$, $|\ \ |'$, $\Lambda'$, $dV'$ sont respectivement associés à $\omega'$, on a donc :

$$\Lambda' = a^{1/2}\, \Lambda\, a^{-1/2},$$

$$(\alpha \mid \beta)' = (a^{-1/2} \alpha \mid a^{-1/2} \beta) = (\alpha \mid a^{-1} \beta)$$

pour toutes formes $\alpha, \beta \in \Lambda^{n, q} T_z^* X \otimes E_z$. Par conséquent :

$$|\alpha|_\theta'^2 = \sup_\beta \frac{|(\alpha \mid \beta)'|^2}{(\theta \Lambda' \beta \mid \beta)'} = \sup_\beta \frac{|(\alpha \mid a^{-1} \beta)|^2}{(\theta a^{1/2} \Lambda\, a^{-1/2} \beta \mid a^{-1} \beta)} = \sup_\beta \frac{|(\alpha \mid \beta)|^2}{(\theta a^{1/2} \Lambda\, a^{1/2} \beta \mid \beta)}.$$

Il est facile de vérifier que :

$$(\theta a^{1/2} \Lambda\, a^{1/2} \beta \mid \beta) = 2^{n+q} a_1 \ldots a_n \sum_{|J|=q-1}' a_J \sum_{\substack{1 \leqq j, k \leqq n \\ 1 \leqq l, m \leqq r}} c_{jklm} \beta_{jJ, l} \overline{\beta_{kJ, m}},$$

où $a_J = \prod_{j \in J} a_j$, et où la somme qui suit $a_J$ est $\geqq 0$ quel que soit J. Si $\omega' \geqq \omega$ (c'est-à-dire si $a_j \geqq 1$, $1 \leqq j \leqq n$) on obtient donc :

$$(\theta a^{1/2} \wedge a^{1/2} \beta \mid \beta) \geqq a_1 \ldots a_n (\theta \wedge \beta \mid \beta),$$

$$|\alpha|_\theta'^2 \leqq \frac{|\alpha|_\theta^2}{a_1 \ldots a_n},$$

$$|\alpha|_\theta'^2 \frac{\omega'^n}{n\,!} \leqq |\alpha|_\theta^2 \frac{\omega^n}{n\,!},$$

avec égalité si $q=1$. Les conclusions (3.2) et (3.3) sont donc bien vraies. Si $\theta \geqq_{n-q+1} \lambda\omega \otimes \mathrm{Id}_E$, le lemme 3.1 et l'égalité 3.6 montrent que :

$$(\theta \Lambda \beta \mid \beta) \geqq 2^{n+q} \sum_{|J|=q-1} \sum_{j, l} \lambda |\beta_{jJ, l}|^2 = q \lambda |\beta|^2,$$

d'où par dualité :

$$|\alpha|_\theta^2 \leqq \frac{1}{q\lambda} |\alpha|^2.$$

D'autre part, comme $\theta \geqq_{n-q+1} 0$, et *a fortiori* $\theta \geqq_{n-q} 0$, les formes hermitiennes $\theta_q$ et $\theta_{q+1}$ sont semi-positives. Pour tout $\eta \in \Lambda^{0,1} T^* X$, $\alpha \in \Lambda^{n,q} T^* X$, $\beta \in \Lambda^{n,q+1} T^* X$ on a :

$$|(\eta \wedge \alpha \mid \beta)|^2 = |(\alpha \mid \bar{\eta} \lrcorner \beta)|^2 \leqq |\alpha|_\theta^2 \theta_q(\bar{\eta} \lrcorner \beta, \bar{\eta} \lrcorner \beta),$$

où $\bar{\eta} \lrcorner \beta$ désigne le produit intérieur de $\beta$ par $\bar{\eta}$. Pour démontrer (3.5), il suffit donc de vérifier :

$$\theta_q(\bar{\eta} \lrcorner \beta, \bar{\eta} \lrcorner \beta) \leqq |\eta|^2 \theta_{q+1}(\beta, \beta), \tag{3.7}$$

et pour cela, on peut supposer que $\eta = d\bar{z}_s$. Il vient $|\eta|^2 = 2$ :

$$\bar{\eta} \lrcorner \beta = 2 \sum_{|J|=q}' \sum_{l=1} \beta_{sJ,l}\, dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_J \otimes e_l,$$

$$\theta_q(\bar{\eta} \lrcorner \beta, \bar{\eta} \lrcorner \beta) = 2^{n+q+2} \sum_{|J|=q-1}' \sum_{\substack{1 \leqq j,\, k \leqq n \\ 1 \leqq l,\, m \leqq r}} c_{jklm}\, \beta_{sjJ,l} \overline{\beta_{skJ,m}}.$$

Si l'on compare cette inégalité à l'égalité (3.6) où $q+1$ est substitué à $q$, la ligne (3.7) devient évidente. □

Nous aurons besoin aussi du résultat simple qui suit.

LEMME 3.3. — *Soit* $\omega$ *et* $\omega'$ *deux formes hermitiennes sur* TX *telles que* $\omega \leqq \omega'$. *Pour tout* $\alpha \in \Lambda^{n,q} T^* X \otimes E$, $q = 0, 1, \ldots, n$, *on a* $|\alpha|'^2 dV' \leqq |\alpha|^2 dV$.

*Démonstration.* — Posons $\alpha = \sum_{|J|=q}' \sum_{l=1}^{r} \alpha_{J,l}\, dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_J \otimes e_l$, avec les mêmes notations que dans le lemme 3.2. Il vient :

$$dV' = a_1 a_2 \ldots a_n\, dV \qquad \text{avec} \quad a_j \geqq 1,$$

$$|\alpha|^2 = 2^{n+q} \sum_{J,l} |\alpha_{J,l}|^2,$$

$$|\alpha|'^2 dV' = 2^{n+q} \sum_{J,l} \frac{|\alpha_{J,l}|^2}{a_J} dV. \quad \square$$

## 4. Estimations $L^2$ pour l'opérateur D″

Dans ce paragraphe, nous étendrons les estimations de L. Hörmander [13] et [14] au cas des $(n, q)$-formes à valeurs dans un fibré vectoriel holomorphe semi-positif. Il s'agit en fait d'une généralisation immédiate des estimations de H. Skoda [24], qui étaient relatives au cas des variétés faiblement $C^2$-pseudoconvexes.

Nous obtiendrons un théorème d'existence valable pour toute variété kählérienne complète, avec des hypothèses de positivité plus faibles.

Un passage à la limite sur la métrique kählérienne nous permettra de court-circuiter la « méthode des trois poids » utilisée antérieurement par L. Hörmander [14] et H. Skoda [24].

THÉORÈME 4.1. — *Soit* X *une variété* **kählérienne complète** *de dimension n, munie d'une métrique kählérienne* ω **non nécessairement complète.** *Soit* E *un fibré vectoriel hermitien de classe* $C^2$ *sur* X. *On suppose que* E *est* $(n-q+1)$*-semi-positif. On se donne une* $(n, q)$*-forme g à coefficients* $L^2_{loc}$ *et à valeurs dans* E, *telle que* $D''g=0$ :

$$\int_X |g|^2\,dV < +\infty \qquad \text{et} \qquad \int_X |g|^2_{c(E)}\,dV < +\infty$$

[cf. (3.1); *pour simplifier l'écriture, on a noté* $|g|_{c(E)} = |g|_{ic(E)}$]. *Alors il existe une* $(n, q-1)$-forme $f$ *à coefficients* $L^2_{loc}$ *à valeurs dans* E, *telle que :*

$$D''f=g,$$

et :

$$\int_X |f|^2\,dV \leqq \int_X |g|^2_{c(E)}\,dV.$$

*Remarque* 4.2. — D'après le lemme 3.2 (3.4), si on dispose d'une minoration de la forme de courbure du type :

$$ic(E) \geqq_{n-q+1} \lambda\omega \otimes \mathrm{Id}_E,$$

où λ est une fonction mesurable $\geqq 0$ sur X, et si la forme $g$ est telle que :

$$\int_X |g|^2\,dV < +\infty, \qquad \int_{X,\,g\neq 0} \lambda^{-1}|g|^2\,dV < +\infty,$$

alors il existe une $(n, q-1)$-forme $f$ vérifiant $D''f=g$ et :

$$\int_X |f|^2\,dV \leqq \int_X \frac{1}{q\lambda}|g|^2\,dV. \quad \square$$

Le théorème 4.1 sera une conséquence simple de l'inégalité de Kodaira-Nakano, moyennant l'utilisation de la méthode d'analyse fonctionnelle de L. Hörmander [14].

On désigne par $\mathscr{D}_{p,q}(X;\,E)$ l'espace des $(p, q)$-formes de classe $C^\infty$ à support compact dans X et à valeurs dans E, et par $L^2_{p,q}(X;\,E)$ l'espace de Hilbert des $(p, q)$-formes à coefficients $L^2_{loc}$, muni de la norme :

$$\|u\|^2 = \int_X |u|^2\,dV.$$

On définit deux opérateurs non bornés :

$$L^2_{p,q-1} \xrightarrow{T} L^2_{p,q} \xrightarrow{S} L^2_{p,q+1}$$

à domaines denses Dom T, Dom S, en considérant l'opérateur D'' calculé au sens des distributions. Soient $T^* : L^2_{p,q} \to L^2_{p,q-1}$ et $S^* : L^2_{p,q+1} \to L^2_{p,q}$ les adjoints respectifs de T et S.

D'après L. Hörmander [14], lemme 5.2.1, on a le résultat suivant :

LEMME 4.3. — *Si la métrique* $\omega$ *est complète* [*hypothèse* (1.3) *vérifiée*] $\mathscr{D}_{p,q}(X; E)$ *est dense dans* Dom T* $\cap$ Dom S *pour la norme du graphe* :

$$u \to \| u \| + \| T^* u \| + \| S u \|.$$

Soit maintenant $\delta''$ l'adjoint formel de l'opérateur D'', défini par :

$$\int_X (\delta'' u \mid v)\, dV = \int_X (u \mid d'' v)\, dV$$

pour toutes formes $u \in \mathscr{D}_{p,q}(X; E)$, $v \in \mathscr{D}_{p,q-1}(X; E)$.

Le lemme 4.3 montre que T* coïncide avec l'opérateur $\delta''$ calculé au sens des distributions.

Les opérateurs D'' et $\delta''$ vérifient par ailleurs l'inégalité fondamentale suivante (*cf.* A, Douady et J.-L. Verdier [9], exposé III, th. 3).

LEMME 4.4 (Inégalité de Kodaira-Nakano). — *Pour toute forme* $u \in \mathscr{D}_{n,q}(X; E)$, *on a* :

$$\| D'' u \|^2 + \| \delta' u \|^2 \geqq \int_X (ic(E)\, \Lambda\, u \mid u)\, dV.$$

*Démonstration du théorème* 4.1. — Nous supposerons provisoirement que la métrique $\omega$ est complète. Considérons les deux opérateurs D'' décrits plus haut, avec $p=n$ :

$$L^2_{n,q-1} \xrightarrow{T} L^2_{n,q} \xrightarrow{S} L^2_{n,q+1}.$$

Les lemmes 4.3 et 4.4 montrent que :

$$\| T^* u \|^2 + \| S u \|^2 \geqq \int_X (ic(E)\, \Lambda\, u \mid u)\, dV$$

pour toute forme $u \in$ Dom S $\cap$ Dom T* [on notera que $(ic(E)\ \Lambda\ u \mid u) \geqq 0$ d'après le lemme 3.1 et l'hypothèse $ic(E) \geqq_{n-q+1} 0$].

L'inégalité (3.1) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz impliquent :

$$|(g \mid u)|^2 \leqq \int_X |g|^2_{c(E)}\, dV . \int_X (ic(E)\ \Lambda\ u \mid u)\, dV \leqq \int_X |g|^2_{c(E)}\, dV . (\| T^* u \|^2 + \| S u \|^2).$$

Par décomposition orthogonale de toute forme $u \in$ Dom T* en $u = u_1 + u_2$ avec $u_1 \in$ Ker S, $u_2 \in (\text{Ker S})^\perp \subset (\text{Im T})^\perp = \text{Ker T}^*$, on en déduit comme dans [14], lemme 4.4.1 :

$$|(g \mid u)|^2 = |(g \mid u_1)|^2 \leqq \int_X |g|^2_{c(E)}\, dV . \| T^* u_1 \|^2 \leqq \int_X |g|^2_{c(E)}\, dV . \| T^* u \|^2,$$

car $g \in \operatorname{Ker} S$. Le théorème de Hahn-Banach implique l'existence d'une forme $f \in L^2_{n,\,q-1}$ telle que :

$$\| f \|^2 \leqq \int_X | g |^2_{c(E)}\, dV,$$

et $(g \mid u) = (f \mid T^* u)$ pour tout $u \in \operatorname{Dom} T^*$, ce qui signifie précisément que $g = Tf = D''f$.

Il ne nous reste plus qu'à éliminer l'hypothèse de complétude de la métrique $\omega$. Il existe par hypothèse une métrique kählérienne complète $\hat{\omega}$ sur X. On définit de nouvelles métriques complètes en posant :

$$\omega_\nu = \omega + \frac{1}{\nu}\hat{\omega}, \qquad \nu = 1, 2, \ldots$$

Si $|\ \ |_\nu$ et $|\ \ |_{\nu,\,c(E)}$ désignent les normes associées à $\omega_\nu$, et si $dV_\nu = \omega_\nu^n / n\,!$, on obtient d'après les lemmes 3.2 (3.3) et 3.3 :

$$\int_X | g |^2_{\nu,\,c(E)}\, dV_\nu \leqq \int_X | g |^2_{c(E)}\, dV < +\infty,$$

$$\int_X | g |^2_\nu\, dV_\nu \leqq \int_X | g |^2\, dV < +\infty.$$

Les résultats déjà établis montrent qu'il existe des formes $f_\nu \in L^2_{n,\,q-1}$ telles que $D'' f_\nu = g$ et :

$$\| f_\nu \|^2_\nu \leqq \int_X | g |^2_{\nu,\,c(E)}\, dV_\nu \leqq \int_X | g |^2_{c(E)}\, dV.$$

Soit $\mu$ un entier fixé et K une partie compacte de X. Pour tout $\nu \geqq \mu$ on a :

$$\int_K | f_\nu |^2_\mu\, dV_\mu \leqq \| f_\nu \|^2_\mu \leqq \| f_\nu \|^2_\nu \leqq \int_X | g |^2_{c(E)}\, dV$$

d'après le lemme 3.3. On peut donc extraire de la suite $(f_\nu)$ une sous-suite faiblement convergente dans $L^2_{n,\,q-1}(X; E; \mathrm{loc})$.

La limite faible $f$ est telle que :

$$D'' f = g \qquad \text{et} \qquad \int_K | f |^2_\mu\, dV_\mu \leqq \int_X | g |^2_{c(E)}\, dV$$

pour tout compact K de X et tout entier $\mu$. L'estimation du théorème 4.1 s'obtient par convergence monotone en faisant tendre $\mu$ vers $+\infty$. □

Remarque 4.5. — Pour toute $(n, 0)$-forme $f$, on vérifie aisément que :

$$| f |^2\, dV = i^{n^2} f \wedge \bar{f},$$

le produit extérieur étant combiné avec la forme bilinéaire $E \otimes \overline{E} \to \mathbb{C}$ définie par le produit scalaire. Cette observation, jointe au lemme 3.2 (3.2), montre que l'estimation du théorème 4.1 est indépendante de la métrique kählérienne si $q=1$ [ceci n'est plus vrai pour l'estimation de la remarque 4.2].

*Remarque* 4.6. — La condition $\int_X |g|^2 dV < +\infty$ est en fait superflue, et sera levée au paragraphe suivant. Si la variété X est faiblement pseudoconvexe, on peut se débarrasser de cette hypothèse en appliquant le théorème 4.1 à chaque ouvert faiblement pseudoconvexe $X(c)$, et en faisant tendre $c$ vers $+\infty$.

## 5. Estimations avec métriques et poids plurisousharmoniques singuliers

On considère comme précédemment une variété *kählérienne complète* X, un fibré vectoriel holomorphe hermitien E de rang $r$ et de classe $C^2$ au-dessus de X. Soit $\varphi$ une fonction semi-continue supérieurement sur X, telle que $\varphi$ soit localement somme d'une fonction de classe $C^2$ et d'une fonction plurisousharmonique. La décomposition de Lebesgue du courant d'ordre 0 $id'd''\varphi$ est donc de la forme :

$$id'd''\varphi = i(d'd''\varphi)_c + i(d'd''\varphi)_s,$$

où la partie singulière $i(d'd''\varphi)_s$ est un courant $\geqq 0$ de bidegré (1, 1), et où la partie absolument continue $i(d'd''\varphi)_c$ est une (1, 1)-forme localement minorée à coefficients $L^1_{loc}$. On multiplie la métrique de E par le poids $e^{-\varphi}$. Il sera commode de poser :

$$c(E, \varphi) = c(E) + (d'd''\varphi)_c.$$

Nous nous proposons de démontrer dans ce paragraphe le résultat suivant, qui est seulement une amélioration technique du théorème 4.1.

THÉORÈME 5.1. — *On suppose* $ic(E, \varphi) \geqq_{n-q+1} 0$. *Alors pour toute forme* $g \in L^2_{n,q}(X; E; \text{loc})$ *telle que :*

$$D''g = 0 \qquad et \qquad \int_X |g|^2_{c(E,\varphi)} e^{-\varphi} dV < +\infty,$$

*il existe une* $(n, q-1)$*-forme* $f \in L^2_{n,q-1}(X; E; \text{loc})$ *telle que :*

$$D''f = g \qquad et \qquad \int_X |f|^2 e^{-\varphi} dV \leqq \int_X |g|^2_{c(E,\varphi)} e^{-\varphi} dV.$$

Si $\varphi$ est de classe $C^2$, le théorème 5.1 se réduit au théorème 4.1. Lorsque $\varphi$ n'est plus de classe $C^2$, la démonstration est techniquement plus délicate, et repose sur un théorème d'approximation des fonctions plurisousharmoniques exposé dans les deux dernières sections. Pour simplifier les notations, nous nous placerons sous des hypothèses un peu plus générales.

HYPOTHÈSES. — On suppose que E est muni d'une métrique hermitienne $|\ \ |$ positive, non nécessairement continue. On dira que cette métrique est « $s$-approximable » s'il existe une suite $|\ \ |_\mu$ de structures hermitiennes de classe $C^2$ sur E et une (1, 1)-forme réelle $ic(E) \geqq_s 0$ à valeurs dans Herm (E, E), à coefficients mesurables, telles que les propriétés (5.1) à (5.6) ci-dessous soient vérifiées.

(5.1) pour tout indice $\mu = 1, 2, \ldots$ et tout élément $e \in E$, $|e|_\mu \leqq |e|_{\mu+1}$;

(5.2) en presque tout point $z \in X$, la métrique $|\ \ |_\mu$ tend vers $|\ \ |$ sur la fibre $E_z$;

(5.3) $ic(E)_\mu \geqq_s \theta_\mu - \lambda_\mu \omega \otimes \mathrm{Id}_E$, où $c(E)_\mu$ est la forme de courbure du fibré hermitien (E, $|\ \ |_\mu$); $\theta_\mu$ une (1, 1)-forme hermitienne $\geqq_s 0$ et continue; $\lambda_\mu$ une fonction continue telles que :

(5.4) $\theta_\mu$ tend vers $ic(E)$ presque partout sur X;

(5.5) $\lambda_\mu$ tend vers zéro presque partout sur X;

(5.6) il existe une fonction continue $\lambda$ sur X telle que $0 \leqq \lambda_\mu \leqq \lambda$ pour tout $\mu$. □

Le théorème 9.1 et la remarque 9.2 montrent que si la métrique $|\ \ |$ est de classe $C^2$ et si $ic(E, \varphi) \geqq_{n-q+1} 0$, alors la métrique $|\ \ | e^{-\varphi/2}$ est $(n-q+1)$-approximable [avec précisément $ic(E, \varphi)$ comme forme de courbure].

*Démonstration.* — Nous supposons donc $\varphi = 0$ et E muni d'une métrique $|\ \ |$ $(n-q+1)$-approximable par des métriques $|\ \ |_\mu$ de classe $C^2$. On se ramène d'abord au cas où la métrique kählérienne $\omega$ est *complète* par un passage à la limite analogue à celui du paragraphe 4. Nous indexerons par $\mu$ tous les opérateurs et toutes les normes associées à la métrique $|\ \ |_\mu$. On notera ainsi $\|u\|_\mu^2 = \int_X |u|_\mu^2 \, dV$, et $L^2_{n,q}(X; E)_\mu$ [resp. $L^2_{n,q}(X; E)$] l'espace de Hilbert des $(n, q)$-formes $u$ telles que $\|u\|_\mu < +\infty$ (resp. $\|u\| < +\infty$); on désigne par $T_\mu$, $S_\mu$ les extensions fermées de l'opérateur D'', calculées au sens des distributions :

$$L^2_{n,q-1}(X; E)_\mu \xrightarrow{T_\mu} L^2_{n,q}(X; E)_\mu \xrightarrow{S_\mu} L^2_{n,q+1}(X; E)_\mu.$$

Si $(\chi_\nu)$ est la famille de fonctions tronquantes de la définition 1.2 (1.3) et si $u \in L^2_{n,q}(X; E; \mathrm{loc})$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$|(\chi_\nu g \,|\, u)_\mu|^2 \leqq \int_{\operatorname{Supp}\chi_\nu} |g|^2_{\mu,\Theta} \, dV \,.\, (\Theta \Lambda \chi_\nu u \,|\, \chi_\nu u)_\mu,$$

où l'on pose :

$$\Theta = \Theta_{\mu,\nu} = \Theta_\mu + \frac{1}{q\nu} \omega \otimes \mathrm{Id}_E. \tag{5.7}$$

D'autre part, pour tout $u \in \operatorname{Dom} T_\mu^* \cap \operatorname{Dom} S_\mu$, les lemmes 4.3 et 4.4 montrent que :

$$\|T_\mu^*(\chi_\nu u)\|_\mu^2 + \|S_\mu^*(\chi_\nu u)\|_\mu^2 \geqq (ic(E)_\mu \Lambda \chi_\nu u \,|\, \chi_\nu u)_\mu.$$

D'après (4.3), (4.7) et le lemme 3.2, il vient :

$$(\Theta\Lambda\,\chi_\nu u \mid \chi_\nu u)_\mu \leqq (ic(\mathrm{E})_\mu\,\Lambda\chi_\nu u \mid \chi_\nu u)_\mu + \left(\left(\lambda_\mu + \frac{1}{q\nu}\right)\omega\,\Lambda\chi_\nu u \mid \chi_\nu u\right)_\mu$$

$$\leqq \|\,\mathrm{T}^*_\mu(\chi_\nu u)\,\|^2_\mu + \|\,\mathrm{S}_\mu(\chi_\nu u)\,\|^2_\mu + q\,\|\,\lambda_\mu^{1/2}\,\chi_\nu u\,\|^2_\mu + \frac{1}{\nu}\|\,u\,\|^2_\mu.$$

Comme $\mathrm{T}^*_\mu(\chi_\nu u) = \chi_\nu\,\mathrm{T}^*_\mu u - d'\chi_\nu \lrcorner\, u$ et $\mathrm{S}_\mu(\chi_\nu, u) = \chi_\nu\,\mathrm{S}_\mu u + d''\chi_\nu \wedge u$, on voit aisément en utilisant (1.3) que :

$$\|\,\mathrm{T}^*_\mu(\chi_\nu u)\,\|^2_\mu + \|\,\mathrm{S}_\mu(\chi_\nu u)\,\|^2_\mu$$

$$\leqq \left(1+\frac{1}{\nu}\right)(\|\,\mathrm{T}^*_\mu u\,\|^2_\mu + \|\,\mathrm{S}_\mu u\,\|^2_\mu) + (1+\nu)(\|\,d'\chi_\nu \lrcorner\, u\,\|^2_\mu + \|\,d''\chi_\nu \wedge u\,\|^2_\mu)$$

$$\leqq \left(1+\frac{1}{\nu}\right)\left(\|\,\mathrm{T}^*_\mu u\,\|^2_\mu + \|\,\mathrm{S}_\mu u\,\|^2_\mu + \frac{1}{\nu}\|\,u\,\|^2_\mu\right).$$

Pour tout $u \in \mathrm{Dom}\ \mathrm{T}^*_\mu \cap \mathrm{Dom}\ \mathrm{S}_\mu$, on obtient finalement l'estimation :

$$(5.8)\qquad |(\chi_\nu g \mid u)_\mu|^2 \leqq \mathrm{A}\left(\|\,\mathrm{T}^*_\mu u\,\|^2_\mu + \|\,\mathrm{S}_\mu u\,\|^2_\mu + q\,\|\,\lambda_\mu^{1/2}\,\chi_\nu u\,\|^2_\mu + \frac{2}{\nu}\|\,u\,\|^2_\mu\right),$$

avec :

$$\mathrm{A} = \mathrm{A}_{\mu,\,\nu} = \left(1+\frac{1}{\nu}\right)\int_{\mathrm{Supp}\,\chi_\nu} |\,g\,|^2_{\mu,\,\Theta}\,d\mathrm{V}.$$

Cette estimation va nous permettre de démontrer le théorème 5.1 par *récurrence sur* $n-q$.

(*a*) Le cas $q=n$ est particulièrement simple; (5.8) s'écrit en effet dans ce cas :

$$|(\chi_\nu g \mid u)_\mu|^2 \leqq \mathrm{A}\left(\|\,\mathrm{T}^*_\mu u\,\|^2_\mu + q\,\|\,\lambda_\mu^{1/2}\,\chi_\nu u\,\|^2_\mu + \frac{2}{\nu}\|\,u\,\|^2_\mu\right),$$

pour tout $u \in \mathrm{Dom}\ \mathrm{T}^*_\mu$. D'après le théorème de Hahn-Banach appliqué pour chaque $\mu$ et chaque $\nu$ fixés, il existe $f_\mu$, $v_\mu$, $w_\mu$ dans $\mathrm{L}^2_{n,\,n-1}(\mathrm{X};\,\mathrm{E})_\mu$ tels que :

$$(5.9)\qquad \int_{\mathrm{X}} (|f_\mu|^2_\mu + |v_\mu|^2_\mu + |w_\mu|^2_\mu)\,d\mathrm{V} \leqq \mathrm{A},$$

et :

$$(\chi_\nu g \mid u)_\mu = (f_\mu \mid \mathrm{T}^*_\mu u)_\mu + (v_\mu \mid q^{1/2}\,\lambda_\mu^{1/2}\,\chi_\nu u)_\mu + \left(w_\mu \,\middle|\, \left(\frac{2}{\nu}\right)^{1/2} u\right)_\mu$$

pour tout $u \in \mathrm{Dom}\,\mathrm{T}^*_\mu$; ceci entraîne que :

$$\chi_\nu g = \mathrm{D}'' f_\mu + q^{1/2}\,\lambda_\mu^{1/2}\,\chi_\nu v_\mu + \left(\frac{2}{\nu}\right)^{1/2} w_\mu.$$

Faisons tendre $\mu$ vers $+\infty$, $\nu$ étant fixé. On peut extraire de $(f_\mu)$ et $(w_\mu)$ des sous-suites qui convergent faiblement vers des limites $f^\nu$ et $w^\nu$ dans $L^2_{loc}$. Comme $q^{1/2}\lambda_\mu^{1/2}\chi_\nu v_\mu$ tend vers zéro dans $L^1_{loc}$ (pour la topologie forte) d'après (5.5), (5.6) et (5.9), on obtient :

$$\chi_\nu g = D'' f^\nu + \left(\frac{2}{\nu}\right)^{1/2} w^\nu,$$

où :

$$\int_X (|f^\nu|^2 + |w^\nu|^2)\, dV \leqq \limsup_{\mu\to+\infty} A.$$

(5.3) et (5.7) montrent que $\Theta \geqq_{n-q+1} (1/q\nu)\,\omega\otimes \mathrm{Id}_E$; le lemme 3.2 (3.4) fournit donc $|g|^2_{\mu,\Theta} \leqq \nu |g|^2_\mu \leqq \nu |g|^2$. Le théorème de convergence dominée implique d'après (5.4) :

$$\limsup_{\mu\to\infty} A \leqq \left(1+\frac{1}{\nu}\right)\int_{\operatorname{Supp}\chi_\nu} |g|^2_{ic(E)+(1/q\nu)\omega\otimes \mathrm{Id}_E}\, dV \leqq \left(1+\frac{1}{\nu}\right)\int_X |g|^2_{c(E)}\, dV.$$

Un nouveau passage à la limite $\nu\to+\infty$ permet de conclure.

(*b*) On suppose maintenant que le théorème 5.1 a été démontré pour toutes les formes $g$ de bidegré $(n, q+1)$ avec $1\leqq q\leqq n$ [on notera que $ic(E)\geqq_{n-q+1} 0$ implique $ic(E)\geqq_{n-q} 0$].

Il existe donc une forme $g_\nu \in L^2_{n,q}(X; E)$ telle que :

$$D'' g_\nu = D''(\chi_\nu g) = d''\chi_\nu \wedge g,$$

avec [*cf.* lemme 3.2 (3.5)] :

$$\int_X |g_\nu|^2\, dV \leqq \frac{1}{\nu^2}\int_X |g|^2_{c(E)}\, e^{-\varphi}\, dV < +\infty.$$

Moralement, $\chi_\nu g$ est « proche » de Ker S, ce qui se traduit par le fait que la norme $\|g_\nu\|$ est « petite ». Toute forme $u\in \operatorname{Dom} T^*_\mu$ peut s'écrire $u=u_1+u_2$, avec $u_1\in \operatorname{Ker} S_\mu$, $u_2\in(\operatorname{Ker} S_\mu)^\perp \subset (\operatorname{Im} T_\mu)^\perp = \operatorname{Ker} T^*_\mu$.

On observe que $g_\nu \in L^2_{n,q}(X; E)_\mu$ et que $\chi_\nu g - g_\nu \in \operatorname{Ker} S_\mu$, d'où :

$$(\chi_\nu g - g_\nu \mid u)_\mu = (\chi_\nu g - g_\nu \mid u_1)_\mu,$$

$$(\chi_\nu g \mid u)_\mu = (\chi_\nu g \mid u_1)_\mu + (g_\nu \mid u_2)_\mu,$$

$$|(\chi_\nu g\mid u)_\mu|^2 \leqq \left(1+\frac{1}{\nu}\right)[|(\chi_\nu g\mid u_1)_\mu|^2 + \nu\|g_\nu\|^2_\mu \|u_2\|^2_\mu]$$

$$\leqq \left(1+\frac{1}{\nu}\right)\left[|(\chi_\nu g\mid u_1)_\mu|^2 + \frac{1}{\nu}\|u\|^2_\mu \int_X |g|^2_{c(E)}\, dV\right].$$

En combinant cette estimation avec l'inégalité (5.8) appliquée à $u_1\in \operatorname{Dom} T^*_\mu \cap \operatorname{Ker} S_\mu$ on obtient :

$$|(\chi_\nu g\mid u)_\mu|^2 \leqq \left(1+\frac{1}{\nu}\right) A(\|T^*_\mu u\|^2_\mu + q\|\lambda_\mu^{1/2}\chi_\nu u_1\|^2_\mu) + \frac{B}{\nu}\|u\|^2_\mu,$$

avec :

$$B=\left(1+\frac{1}{\nu}\right)\left(2A+\int_X |g|^2_{c(E)}\,dV\right).$$

Notons $P_\mu : L^2_{n,q}(X; E)_\mu \to \operatorname{Ker} S_\mu$ la projection orthogonale sur $\operatorname{Ker} S_\mu$. D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe des formes $f_\mu$, $v_\mu$, $w_\mu$ dans $L^2_{n,q}(X; E)_\mu$ telles que :

$$(5.10)\qquad \left\{\begin{aligned} &\|f_\mu\|^2_\mu+\|v_\mu\|^2_\mu \leqq \left(1+\frac{1}{\nu}\right)A, \qquad \|w_\mu\|^2_\mu \leqq \frac{B}{\nu},\\ &(\chi_\nu g\,|\,u)_\mu=(f_\mu\,|\,T^*_\mu u)_\mu+(v\,|\,q^{1/2}\lambda^{1/2}_\mu\chi_\nu P_\mu u)_\mu+(w_\mu\,|\,u)_\mu\end{aligned}\right.$$

pour tout $u\in\operatorname{Dom} T^*_\mu$, c'est-à-dire :

$$\chi_\nu g=D''f_\mu+q^{1/2}P_\mu(\lambda^{1/2}_\mu\chi_\nu v_\mu)+w_\mu.$$

(*c*) La seule difficulté nouvelle par rapport à la partie (*a*) du raisonnement est de montrer que le terme $a_\mu=P_\mu(\lambda^{1/2}_\mu\chi_\nu v_\mu)$ tend faiblement vers zéro dans $L^2_{\mathrm{loc}}$ quand $\mu\to+\infty$. D'après (5.6), (5.10) et la définition de $P_\mu$ on voit que :

$$(5.11)\qquad \int_X |a_\mu|^2_\mu\,dV \leqq \int_X \lambda_\mu|\chi_\nu v_\mu|^2_\mu\,dV \leqq \sup(\lambda\chi^2_\nu)\,.\,\|v_\mu\|^2_\mu \leqq C_\nu,$$

où $C_\nu$ est une constante. Notons $H_\mu$ (resp. H) l'unique opérateur hermitien positif sur les fibres de $(E, |\ \ |_1)$ tel que pour tout $e\in E$ on ait :

$$|e|_\mu=|H_\mu e|_1 \quad (\text{resp. } |e|=|He|_1).$$

On a donc pour tout $\mu$ : $\mathrm{Id}_E\leqq H_\mu\leqq H_{\mu+1}$, et $H_\mu$ tend vers H presque partout sur X.

Comme la boule unité de $L^2_{n,q}(X; E)_1$ est compacte et métrisable pour la topologie faible, il suffit de vérifier que la limite faible de toute suite extraite de la suite $H_\mu a_\mu$ est nulle. Si la sous-suite $b_\mu=H_\mu a_\mu$ tend faiblement vers $b\in L^2_{n,q}(X; E)_1$, alors pour toute forme $u\in L^2_{n,q}(X; E)_1$ à support compact, il vient :

$$\lim_{\mu\to+\infty}\int_X (a_\mu\,|\,u)_1\,dV=\lim_{\mu\to+\infty}\int_X (b_\mu\,|\,H^{-1}_\mu u)_1\,dV=\int_X (b\,|\,H^{-1}u)_1\,dV,$$

car d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left|\int_X (b_\mu\,|\,(H^{-1}-H^{-1}_\mu)u)_1\,dV\right| \leqq \|b_\mu\|_1\ \|(H^{-1}-H^{-1}_\mu)u\|_1$$

où $\|b_\mu\|^2_1=\|a_\mu\|^2_\mu\leqq C_\nu$ [*cf.* (5.11)], et où $\|(H^{-1}-H^{-1}_\mu)u\|_1\to 0$ par convergence dominée. La suite $a_\mu$ correspondante converge donc faiblement dans $L^2_{\mathrm{loc}}$ vers $a=H^{-1}b\in L^2_{n,q}(X; E)$.

Puisque $D'' a_\mu = 0$, on a aussi $D'' a = 0$. Il s'ensuit que :

$$\int_X |a|^2 dV = \int_X |b|_1^2 dV = \lim_{\mu \to +\infty} \int_X (Ha \mid H_\mu a_\mu)_1 dV = \lim_{\mu \to +\infty} \int_X (H_\mu a \mid H_\mu a_\mu)_1 dV,$$

car d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left| \int_X ((H - H_\mu) a \mid H_\mu a_\mu)_1 dV \right| \leqq \|(H - H_\mu) a\|_1 \cdot \|a_\mu\|_\mu,$$

où $\|(H - H_\mu) a\|_1 \to 0$ par convergence dominée. On obtient donc :

$$\int_X |a|^2 dV = \lim_{\mu \to +\infty} \int_X (a \mid a_\mu)_\mu dV.$$

On remarque que $(a \mid a_\mu)_\mu = (a \mid \lambda_\mu^{1/2} \chi_\nu v_\mu)_\mu$, puisque $a \in \operatorname{Ker} S_\mu$ et $a_\mu = P_\mu(\lambda_\mu^{1/2} \chi_\nu v_\mu)$. De plus :

$$\left| \int_X (a \mid \lambda_\mu^{1/2} \chi_\nu v_\mu)_\mu dV \right| \leqq \|v_\mu\|_\mu \|\lambda_\mu^{1/2} \chi_\nu a\|_\mu \leqq \|v_\mu\|_\mu \|\lambda_\mu^{1/2} \chi_\nu a\|;$$

$\chi_\nu$ est à support compact, et d'après les hypothèses (5.5), (5.6) $\lambda_\mu$ tend vers 0 presque partout sur X, avec $0 \leqq \lambda_\mu \leqq \lambda$.

Grâce au théorème de convergence dominée, on voit que $\|\lambda_\mu^{1/2} \chi_\nu a\| \to 0$. On a donc $\int_X |a|^2 dV = 0$, de sorte que $a = 0$ presque partout sur X. □

## 6. Théorème de relèvement des sections globales d'un fibré semi-positif par un morphisme surjectif. Théorème d'extension

Le théorème 5.1 va nous permettre de retrouver directement les résultats de H. Skoda [25] sous des hypothèses un peu plus générales. Soit $g : E \to Q$ un morphisme de fibrés vectoriels holomorphes hermitiens de classe $C^2$ au-dessus d'une variété kählérienne $(X, \omega)$ de dimension $n$. On suppose que le morphisme $g$ est surjectif en dehors d'un ensemble analytique Z rare dans X.

On cherche des conditions géométriques simples portant sur les courbures des fibrés E, Q pour obtenir un théorème de relèvement des sections globales de Q. Pour pouvoir donner un énoncé intrinsèque, nous serons amenés à introduire la définition suivante.

DÉFINITION 6.1. — *Soient $\gamma$ et $\gamma'$ des $(1, 1)$-formes réelles semi-positives sur l'espace tangent $T_z X$. On note $[\gamma' : \gamma]$ le plus petit réel $\lambda \geqq 0$ tel que $\lambda\gamma - \gamma' \geqq 0$ si ce réel existe, et $[\gamma' : \gamma] = +\infty$ sinon.*

Lorsque $\gamma$ est définie positive, $[\gamma' : \gamma]$ est la plus grande des valeurs propres de la forme $\gamma'$, calculées dans une base $\gamma$-orthonormée. En particulier on voit que $[\gamma' : \gamma] \leqq \operatorname{Tr}_\gamma \gamma'$, où $\operatorname{Tr}_\gamma \gamma'$

est la trace de $\gamma'$ dans une base $\gamma$-orthonormée. On a alors le résultat suivant dans lequel $g^* : \mathrm{Q} \to \mathrm{E}$ désigne l'adjoint de $g$, $\widetilde{gg}^*$ l'endomorphisme cotransposé de $gg^*$,

$$ic'(\text{dét}\,\mathrm{Q}) = ic(\text{dét}\,\mathrm{Q}) + id'\,d''\,\mathrm{Log}(\text{dét}\,gg^*) \geqq 0$$

la forme de courbure du fibré dét Q lorsque Q est muni de la métrique quotient [*cf.* ligne (6.13)].

THÉORÈME 6.2. — *Soient $r$ le rang de* E, *$k$ le rang de* Q, *$q$* un entier tel que $0 \leqq q \leqq n$ *et* $s = \inf(n-q, r-k)$. *Si* $s \geqq 1$, *on suppose que le fibré* E *est* $s$-**semi-positif** *et que la variété* X *est* **kählérienne complète.** *Si le morphisme g n'est pas surjectif, on suppose de plus* X **faiblement pseudoconvexe**. *On se donne sur* X *une fonction* $\varphi$ *localement plurisousharmonique modulo* $\mathscr{C}^2(\mathrm{X})$, *une* $(1, 1)$*-forme réelle* $\gamma \geqq 0$ *à coefficients* $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}$, *un fibré linéaire* M *tels que (au sens des courants) :*

$$ic(\mathrm{M}) + id'\,d''\,\varphi - s\,ic(\text{dét}\,\mathrm{Q}) \geqq \gamma. \tag{6.1}$$

*Alors pour toute* $(n, q)$*-forme* D''*-fermée f à valeurs dans* $\mathrm{Q} \otimes \mathrm{M}$, *telle que l'intégrale :*

$$\mathrm{A} = \int_{\mathrm{X} \setminus \mathrm{Z}} (1 + s[ic'(\text{dét}\,\mathrm{Q}) : \gamma])\,(\widetilde{gg}^* f \,|\, f)\,(\text{dét}\,gg^*)^{-s}\, e^{-\varphi}\, d\mathrm{V}$$

*soit finie, il existe une* $(n, q)$*-forme* D''*-fermée h à valeurs dans* $\mathrm{E} \otimes \mathrm{M}$, *telle que* $f = g \,.\, h$, *vérifiant la majoration :*

$$\int_{\mathrm{X} \setminus \mathrm{Z}} |h|^2 (\text{dét}\,gg^*)^{-s}\, e^{-\varphi}\, d\mathrm{V} \leqq \mathrm{A}.$$

*Remarque* 6.3. — Le théorème 6.2 est vrai sous l'hypothèse de positivité suivante, plus générale mais moins manipulable :

$$ic(\mathrm{E}) + (ic(\mathrm{M}) + id'\,d''\,\varphi - isc(\text{dét}\,\mathrm{Q}) - \gamma) \otimes \mathrm{Id}_{\mathrm{E}} \geqq_s 0. \tag{6.2}$$

*Remarque* 6.4. — Si Q est de rang 1, on a simplement $\widetilde{gg}^* = \mathrm{Id}_{\mathrm{Q}}$ et dét $gg^* = |g|^2$ est le rapport de l'homothétie définie par $gg^*$.

*Remarque* 6.5. — Comme dans la remarque 4.5, on vérifie que :

$$|h|^2\, d\mathrm{V} = i^{n^2}\, h \wedge \overline{h},$$
$$(\widetilde{gg}^* f \,|\, f)\, d\mathrm{V} = i^{n^2}\, \widetilde{gg}^* f \wedge \overline{f}$$

pour toute $(n, 0)$-forme $h$ (resp. $f$) à valeurs dans E (resp. Q).

Lorsque $q = 0$, les estimations du théorème 6.2 ne dépendent donc pas de la métrique kählérienne $\omega$, mais seulement des métriques hermitiennes sur E et Q.

*Démonstration.* — Nous renvoyons à H. Skoda [25] pour un exposé détaillé des idées et des calculs qui vont suivre.

On suppose d'abord que $g : E \to Q$ est *surjectif*, et on considère la suite exacte de fibrés holomorphes au-dessus de X :

$$0 \to N \to E \xrightarrow{g} Q \to 0, \tag{6.3}$$

où N est le fibré noyau de $g$. Les fibrés N, Q seront provisoirement munis des métriques induites par celle de E.

La connexion hermitienne canonique $D_E$ de E se décompose suivant le scindage orthogonal $E = N \oplus Q$ de la manière suivante :

$$D_E = \begin{pmatrix} D_N & -\beta^* \\ \beta & D_Q \end{pmatrix},$$

où $D_N$ et $D_Q$ sont les connexions hermitiennes sur N et Q, où $\beta \in \mathscr{C}^\infty_{1,0}(X, \mathrm{Hom}(N, Q))$, et où $\beta^* \in \mathscr{C}^\infty_{0,1}(X, \mathrm{Hom}(Q, N))$ est l'adjoint de $\beta$. Il est classique que la forme $D''$-fermée $-\beta^*$ représente l'obstruction au scindage holomorphe de la suite exacte (6.3). Considérons la suite exacte (6.3) tensorisée par M :

$$0 \to N \otimes M \to E \otimes M \xrightarrow{g} Q \otimes M \to 0. \tag{6.4}$$

Le théorème 6.2 est trivial si $s=0$. Si $s \geqq 1$, on cherche un relèvement $h$ de la section $f \in L^2_{n,q}(X; Q \otimes M; \varphi)$ en écrivant :

$$h = f + u$$

où $u$ est une $(n, q)$-forme à valeurs dans le fibré noyau $N \otimes M$. $h$ sera une forme $D''$-fermée si et seulement si :

$$D''_N u = -D''_E f = \beta^* f. \tag{6.5}$$

On est donc ramené à résoudre un $D''$ à valeurs dans $N \otimes M$.

La résolution est possible grâce au théorème 5.1 et grâce au fait que la forme de courbure $c(N)$ du fibré noyau s'exprime à l'aide de $\beta^*$. Un calcul classique montre que :

$$c(E) = D_E^2 = \begin{pmatrix} D_N^2 - \beta^* \wedge \beta & -D\beta^* \\ D\beta & D_Q^2 - \beta \wedge \beta^* \end{pmatrix}.$$

On en déduit les courbures de N et Q :

$$c(N) = c(E)_{|N} + \beta^* \wedge \beta, \tag{6.6}$$

$$c(Q) = c(E)_{|Q} + \beta \wedge \beta^*. \tag{6.7}$$

L'idée du lemme 6.6 ci-dessous est déjà essentiellement contenue dans [22]. Le corollaire 2.4 nous permettra d'obtenir un énoncé plus général et une démonstration plus courte.

LEMME 6.6. — *On a les inégalités de semi-positivité :*

$$(6.8)\qquad i\beta\wedge\beta^*\geqq_1 0,\qquad i\beta^*\wedge\beta\leqq_1 0;$$

$$(6.9)\qquad -i\beta^*\wedge\beta\leqq_s s\,\mathrm{Tr}_Q(i\beta\wedge\beta^*)\otimes\mathrm{Id}_N;$$

*et sous l'hypothèse* $E\geqq_s 0$ :

$$(6.10)\qquad ic(\text{dét}\,Q)\geqq\mathrm{Tr}_Q(i\beta\wedge\beta^*);$$

$$(6.11)\qquad ic(N)\geqq_s ic(E)_{|N}-s\,ic(\text{dét}\,Q)\otimes\mathrm{Id}_N\geqq_s -s\,ic\,(\text{dét}\,Q)\otimes\mathrm{Id}_N.$$

*Démonstration.* — Pour obtenir (6.8), il suffit d'observer que quels que soient les éléments $t\in TX$, $e\in Q$ (resp. $e\in N$) on a :

$$(i\beta\wedge\beta^*(t,it).e\,|\,e)=(\beta(t)\beta(t)^*.e\,|\,e)=|\beta(t)^*.e|^2$$

[resp. $(i\beta^*\wedge\beta(t,it).e\,|\,e)=(-\beta(t)^*\beta(t).e\,|\,e)=-|\beta(t).e|^2$].

(6.9) résulte de (6.8) et de l'égalité $\mathrm{Tr}_N(-i\beta^*\wedge\beta)=\mathrm{Tr}_Q(i\beta\wedge\beta^*)$, en appliquant le corollaire 2.4 à la forme $\theta=-i\beta^*\wedge\beta$.

Lorsque $E\geqq_s 0$, on a en particulier $E\geqq_1 0$, et (6.7) implique :

$$ic(\text{dét}\,Q)=\mathrm{Tr}_Q(ic(E)_{|Q})+\mathrm{Tr}_Q(i\beta\wedge\beta^*)\geqq\mathrm{Tr}_Q(i\beta\wedge\beta^*),$$

d'où (6.10). Enfin (6.11) est conséquence immédiate de (6.6), (6.9) et (6.10). □

Nous admettrons d'autre part le résultat élémentaire suivant :

LEMME 6.7 (*cf.* H. Skoda [25], lemmes (3.2) et (3.4)). — *Pour toute* $(n, q+1)$*-forme* $v$ *à valeurs dans* $M\otimes N$, *on a :*

$$(i\beta^*\wedge\beta\Lambda v\,|\,v)=-|\beta\lrcorner v|^2.$$

Conformément aux notations introduites au début du paragraphe 5, posons :

$$c(N\otimes M,\varphi)=c(N\otimes M)+(d'd''\varphi)_c.$$

LEMME 6.8. — *Sous les hypothèses de semi-positivité* (6.1) *ou* (6.2) *la* $(n, q+1)$*-forme* $\beta^*f$ *vérifie la majoration :*

$$|\beta^*f|^2_{c(N\otimes M,\,\varphi)}\leqq s\,[ic(\text{dét}\,Q):\gamma]\;|f|^2.$$

*Démonstration.* — Pour toute $(n, q+1)$-forme $v$ à valeurs dans les fibres de $N\otimes M$, on a :

$$|(\beta^*f\,|\,v)|^2=|(f\,|\,\beta\lrcorner v)|^2\leqq|f|^2\,|\beta\lrcorner v|^2.$$

Les hypothèses (6.1) ou (6.2) et les lemmes 2.5, 6.6 (6.11) impliquent :

$$ic(N\otimes M,\varphi)\geqq_s\gamma\otimes\mathrm{Id}_{N\otimes M}.$$

D'autre part le lemme 6.6 (6.9), (6.10) et la définition 6.1 montrent que :

$$-i\beta^* \wedge \beta \leqq_s s\, ic(\text{dét}\, Q) \otimes \mathrm{Id}_N \leqq_s s\,[ic(\text{dét}\, Q) : \gamma]\, \gamma \otimes \mathrm{Id}_N.$$

Puisque $s = \inf(n-q, r-k)$ et que $N \otimes M$ est de rang $r-k$, on en conclut :

$$(-i\beta^* \wedge \beta) \otimes \mathrm{Id}_M \leqq_{n-q} s\,[ic(\text{dét}\, Q) : \gamma]\, ic(N \otimes M, \varphi).$$

En combinant les lemmes 6.7 et 2.1 on voit que :

$$|\beta \lrcorner v|^2 = (-i\beta^* \wedge \beta\, \Lambda v \mid v) \leqq s\,[ic(\text{dét}\, Q) : \gamma]\, (ic(N \otimes M, \varphi)\, \Lambda v \mid v).$$

Le lemme 6.8 résulte par définition de l'inégalité :

$$|(\beta^* f \mid v)|^2 \leqq s\,[ic(\text{dét}\, Q) : \gamma]\, (ic(N \otimes M, \varphi) \Lambda v \mid v)\, |f|^2. \quad \square$$

Revenons maintenant à la démonstration du théorème principal 6.2.

Grâce au théorème 5.1, l'équation (6.5) admet une solution $u \in L^2_{n,q}(X; N \otimes M; \varphi)$ telle que :

$$\int_X |u|^2 e^{-\varphi} dV \leqq \int_X s\,[ic(\text{dét}\, Q) : \gamma]\, |f|^2 e^{-\varphi} dV,$$

pourvu que le second membre soit fini. Puisque $h$ est somme orthogonale de $f$ et $u$, on a bien $f = g.h$ et :

$$\int_X |h|^2 e^{-\varphi} dV \leqq \int_X (1 + s\,[ic(\text{dét}\, Q) : \gamma])\, |f|^2 e^{-\varphi} dV. \tag{6.12}$$

Pour pouvoir traiter le cas où le morphisme $g$ dégénère, nous allons maintenant démontrer des estimations faisant intervenir la métrique donnée *a priori* sur Q, plutôt que la métrique quotient.

On raisonne comme dans [25]. Le morphisme $g^*(gg^*)^{-1} : Q \to E$ réalise le scindage orthogonal de la suite exacte (6.3). La métrique quotient $|\ \ |'$ sur Q s'exprime donc en fonction de la métrique initiale $|\ \ |$ par :

$$|f|'^2 = |g^*(gg^*)^{-1} f|^2 = ((gg^*)^{-1} f \mid f) = \frac{(\widetilde{gg}^* f \mid f)}{\text{dét}\,(gg^*)},$$

où $\widetilde{gg}^*$ est l'endomorphisme cotransposé de $gg^*$. Les métriques correspondantes sur dét Q sont reliées par :

$$|v|'^2 = \frac{|v|^2}{\text{dét}\,(gg^*)}, \qquad v \in \text{dét}\, Q;$$

si $c'(\text{dét}\, Q)$ désigne la forme de courbure de dét Q relativement à la métrique quotient, on a donc :

$$c'(\text{dét}\, Q) = c(\text{dét}\, Q) + d'd'' \operatorname{Log} \text{dét}\,(gg^*). \tag{6.13}$$

La condition (6.1) imposée à la métrique de M devient donc :

$$ic(\mathrm{M})+id'd''\varphi-s\,ic(\mathrm{d\acute{e}t}\,\mathrm{Q})-s\,id'd''\,\mathrm{Log\,d\acute{e}t}(gg^*)\geqq\gamma. \tag{6.14}$$

En remplaçant $\varphi$ par $\varphi+s$ Log dét $(gg^*)$, (6.14) se réduit à la condition (6.1), tandis que l'estimation (6.12) devient :

$$\int_{\mathrm{X}}|h|^2(\mathrm{d\acute{e}t}\,gg^*)^{-s}e^{-\varphi}d\mathrm{V}\leqq\int_{\mathrm{X}}(1+s[ic'(\mathrm{d\acute{e}t}\,\widetilde{\mathrm{Q}}):\gamma])\,|f|'^2(\mathrm{d\acute{e}t}\,gg^*)^{-s}e^{-\varphi}d\mathrm{V}$$

$$=\int_{\mathrm{X}}(1+s[ic'(\mathrm{d\acute{e}t}\,\mathrm{Q}):\gamma])\,(\widetilde{gg}^*f|f)(\mathrm{d\acute{e}g}\,gg^*)^{-s-1}e^{-\varphi}d\mathrm{V}.$$

On suppose maintenant que l'ensemble Z des points $z\in\mathrm{X}$ en lesquels $g$ est non surjectif n'est pas vide. Soit $\varphi$ une fonction d'exhaustion p.s.h. sur X et pour tout $c$, $\mathrm{X}(c)=\{z\in\mathrm{X};\ \varphi(z)<c\}$.

D'après le théorème 1.5, $\mathrm{X}(c)\setminus\mathrm{Z}$ possède une métrique kählérienne complète. Pour chaque réel $c$, on a donc une section $h_c$ de E au-dessus de $\mathrm{X}(c)\setminus\mathrm{Z}$, telle que $f=g.h_c$ et $\mathrm{D}''h_c=0$, vérifiant une estimation analogue à (6.12). Par passage à la limite faible quand $c$ tend vers $+\infty$, on obtient une section $h$ au-dessus de $\mathrm{X}\setminus\mathrm{Z}$, telle que $f=g.h$ et $\mathrm{D}''h=0$ sur $\mathrm{X}\setminus\mathrm{Z}$. La section $h$ est en fait fermée sur X tout entier en vertu du lemme suivant, qui permet de prolonger les solutions de l'opérateur $d''$ au travers d'un ensemble analytique. Ce résultat est une généralisation naturelle du lemme 2 de H. Skoda [22], p. 560, relatif au prolongement des fonctions holomorphes.

LEMME 6.9. — *Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{C}^n$, et soit* Y *un ensemble analytique dans $\Omega$. On se donne une $(p, q)$-forme $w$ à coefficients $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}$ dans $\Omega$ et une $(p, q-1)$-forme $v$ à coefficients $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}$ dans $\Omega$ telles que $d''v=w$ sur $\Omega\setminus\mathrm{Y}$ (au sens des distributions). Alors $d''v=w$ sur $\Omega$.*

*Démonstration.* — En raisonnant par récurrence sur la dimension de Y, il suffit de se placer dans un voisinage U d'un point régulier $a\in\mathrm{Y}$. Grâce à un isomorphisme analytique local, on se ramène à la situation où Y est contenu dans l'hyperplan $z_1=0$, avec $a=0$. Soit $\chi$ une fonction de classe $\mathrm{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, telle que $\chi(t)=0$ pour $t\leqq 1/2$, $\chi(t)=1$ pour $t\geqq 1$.

Nous devons montrer que :

$$\int_{\mathrm{U}}w\wedge h=(-1)^{p+q}\int_{\mathrm{U}}v\wedge d''h$$

pour tout élément $h\in\mathscr{D}_{n-p,\,n-q}(\mathrm{U})$. A cet effet posons $\chi_\varepsilon(z)=\chi(|z_1|/\varepsilon)$ et remplaçons $h$ par $\chi_\varepsilon h$; $\chi_\varepsilon h$ appartient à $\mathscr{D}_{n-p,\,n-q}(\mathrm{U}\setminus\mathrm{Y})$ et les hypothèses montrent que :

$$0=\int_{\mathrm{U}\setminus\mathrm{Y}}d(v\wedge\chi_\varepsilon h)=\int_{\mathrm{U}\setminus\mathrm{Y}}d''(v\wedge\chi_\varepsilon h)$$

$$=\int_{\mathrm{U}}w\wedge\chi_\varepsilon h+(-1)^{p+q-1}\left[\int_{\mathrm{U}}v\wedge\chi_\varepsilon\wedge d''h+\int_{\mathrm{U}}v\wedge d''\chi_\varepsilon\wedge h\right].$$

Comme $v \in L^2_{loc}(\Omega)$, $w \in L^1_{loc}(\Omega)$, les deux premières intégrales de la dernière ligne tendent respectivement vers :

$$\int_U w \wedge h \qquad \text{et} \qquad \int_U v \wedge d''h, \quad \text{quand } \varepsilon \to 0.$$

Le troisième terme sera estimé au moyen de l'inégalité de Cauchy-Schwarz ($d\lambda$ désignant la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{C}^n$) :

$$\left| \int_U v \wedge d''\chi_\varepsilon \wedge h \right|^2 \leqq \int_{|z_1| \leqq \varepsilon} |v \wedge h|^2 \, d\lambda . \int_{\mathrm{Supp}\, h} |d''\chi_\varepsilon|^2 \, d\lambda;$$

puisque $v \in L^2_{loc}(\Omega)$ l'intégrale $\int_{|z_1| \leqq \varepsilon} |v \wedge h|^2 \, d\lambda$ tend vers zéro quand $\varepsilon \to 0$, tandis que :

$$\int_{\mathrm{supp}\, h} |d''\chi_\varepsilon|^2 \, d\lambda \leqq \frac{\mathrm{Cte}}{\varepsilon^2} \times \mathrm{Volume}\,(\mathrm{Supp}\, h \cap \{ |z_1| \leqq \varepsilon \}) \leqq \mathrm{Cte}. \quad \square$$

*Remarque* 6.10. — Le théorème 6.2 est vrai plus généralement si on remplace l'hypothèse de faible pseudoconvexité de X par l'hypothèse que X est réunion d'une suite croissante X de variétés kählériennes complètes, ouvertes et relativement compactes dans X. □

Un cas particulier important du théorème 6.2 sera obtenu en choisissant $\gamma = \varepsilon \, ic'(\text{dét Q})$ et en remplaçant $\varphi$ par $\varphi + \varepsilon \,\mathrm{Log}\, \text{dét}(gg^*)$ [compte tenu de (6.13)]. On en déduit des estimations particulièrement simples et satisfaisantes, qui généralisent aux $(n, q)$-formes les résultats de H. Skoda relatifs au relèvement des sections holomorphes globales ([25], th. 2).

COROLLAIRE 6.11. — *On suppose que la variété kählérienne* $(X, \omega)$ *est complète* (*resp. faiblement pseudoconvexe si g n'est pas surjectif*), *et que* E *est s-semi-positif* [*avec* $s = \inf(n-q, r-k)$]. *On se donne un réel* $\varepsilon > 0$, *une fonction* $\varphi$ *localement plurisousharmonique modulo* $\mathscr{C}^2(X)$, *un fibré linéaire* M *sur* X *tels que :*

$$ic(\mathrm{M}) + id'd''\varphi - (s+\varepsilon)\, ic(\text{dét Q}) \geqq 0.$$

*Alors pour toute* $(n, q)$*-forme* D''*-fermée* $f$ *à valeurs dans* $\mathrm{Q} \otimes \mathrm{M}$, *telle que l'intégrale :*

$$\mathrm{A} = \int_{X \setminus Z} (\widetilde{gg^*}\, g \mid f)\, (\text{dét}\, gg^*)^{-s-1-\varepsilon} e^{-\varphi} \, d\mathrm{V}$$

*soit finie, il existe une* $(n, q)$*-forme* D'' *fermée* $h$ *à valeurs dans* $\mathrm{E} \otimes \mathrm{M}$, *telle que* $f = g.h$, *vérifiant l'estimation :*

$$\int_{X \setminus Z} |h|^2 (\text{dét}\, gg^*)^{-s-\varepsilon} e^{-\varphi} \, d\mathrm{V} \leqq \left(1 + \frac{s}{\varepsilon}\right) \mathrm{A}.$$

Chronologiquement, le théorème 6.2 et le corollaire 6.11 ont trouvé leur origine dans l'étude des idéaux des algèbres de fonctions holomorphes avec poids. Les articles initiaux de L. Hörmander [15] et de J. J. Kelleher-B. A. Taylor [17] utilisaient le double complexe de

Koszul. H. Skoda [22], [23] a montré ensuite comment on pouvait obtenir des résultats optimaux en adaptant convenablement la méthode d'analyse fonctionnelle de L. Hörmander. Les théorèmes énoncés alors correspondaient au cas très particulier où E, Q sont des fibrés triviaux au-dessus d'un ouvert pseudoconvexe de $\mathbb{C}^n$ (et au cas $q=0$ des $n$-formes holomorphes, i. e. des fonctions holomorphes). J. Briançon et H. Skoda [3], [4] ont déduit de ces résultats certaines propriétés fines d'algèbre locale, prouvant ainsi que les théorèmes en question sont déjà localement non triviaux.

Enfin, H. Skoda [24], [25] et [26] a étudié les morphismes surjectifs de fibrés semi-positifs dans une situation générale qui a été essentiellement reproduite ici.

K. Diederich et P. Pflug [8] ont récemment démontré le corollaire 6.11 dans le cas particulier où $g$ est un morphisme surjectif de fibrés triviaux au-dessus d'un domaine kählérien complet $\Omega\subset\mathbb{C}^n$. Ce résultat est un outil très utile pour étudier la structure de tels domaines (*cf.* [8], [10]).

COROLLAIRE 6.12. — *Soit $\Omega$ un ouvert kählérien complet de $\mathbb{C}^n$ tel que $\mathring{\overline{\Omega}}=\Omega$. Alors $\Omega$ est un ouvert d'holomorphie.*

On notera que le corollaire 6.12 est faux si on retire l'hypothèse $\mathring{\overline{\Omega}}=\Omega$, comme le montre la proposition 1.6.

*Démonstration.* — Soit $a=(a_1, a_2, \ldots, a_n)\notin\overline{\Omega}$. On considère le morphisme surjectif $g : \Omega\times\mathbb{C}^n\to\Omega\times\mathbb{C}$ de fibrés triviaux défini par $g_z(\zeta)=\sum_{j=1}^{n}(z_j-a_j)\zeta_j$, $(z, \zeta)\in\Omega\times\mathbb{C}^n$.

Le corollaire 6.11, avec $\varphi(z)=(n+1)\operatorname{Log}(1+|z|^2)$, implique l'existence de fonctions holomorphes $h_1, h_2, \ldots, h_n$ sur $\Omega$ telles que :

$$\sum_{j=1}^{n}(z_j-a_j)h_j(z)=1.$$

L'une des fonctions $h_j$ ne se prolonge donc à aucun voisinage du point $a$. L'hypothèse $\mathring{\overline{\Omega}}=\Omega$ équivaut à dire que les frontières des ensembles $\Omega$ et $\overline{\Omega}$ coïncident. Il en résulte par définition que $\Omega$ est un ouvert d'holomorphie. □

On considère maintenant le problème de l'extension des fonctions holomorphes définies sur une sous-variété fermée. Comme dans notre article précédent [5], nous envisageons aussi le prolongement de sections à valeurs dans un fibré holomorphe (avec hypothèse de semi-positivité), généralisant ainsi les résultats de B. Jennane [16]. Le point de vue adopté a permis d'obtenir un énoncé plus géométrique et plus précis. Le lecteur trouvera des résultats connexes, avec application à l'analyse harmonique, dans l'article de C. A. Berenstein et B. A. Taylor [1].

Soit Y une sous-variété fermée de X. On suppose que Y est le lieu des zéros d'une section $\sigma$ d'un fibré hermitien S de rang $s$ et de classe $C^2$ au-dessus de X.

Soit d'autre part E un fibré hermitien de classe $C^2$ et $f$ une section holomorphe de E au-dessus de Y. Alors, si l'extension est possible sur un voisinage convenable de Y et si E vérifie certaines hypothèses de positivité, il existe une section holomorphe F de E au-dessus de X qui prolonge $f$. On supposera ici que X est une variété *kählérienne complète.*

THÉORÈME 6.13. — *On se donne des réels* $\varepsilon>0$, $k>0$ *tels que la fonction* $|\sigma|^{-2k}$ *soit non sommable au voisinage de tout point de* Y. *On fait l'hypothèse de semi-positivité suivante :*

$$ic(\mathrm{E}) \geqq_n \left(\varepsilon \frac{(ic(\mathrm{S})\sigma|\sigma)}{1+|\sigma|^2} + k \frac{(ic(\mathrm{S})\sigma|\sigma)}{|\sigma|^2}\right) \otimes \mathrm{Id}_\mathrm{E} \tag{6.15}$$

(*au sens de Nakano*). *Soient* $\varphi$, $\psi$ *deux fonctions plurisousharmoniques sur* X *et* $f$ *une section holomorphe de* E *au-dessus de l'ouvert* $\mathrm{U}=\{z\in \mathrm{X};\, |\sigma|^2<e^{-\psi}\}$, *telle que :*

$$\int_\mathrm{U} |f|^2 e^{-\varphi+k\psi}\, d\mathrm{V} < +\infty.$$

*Alors il existe une section* F *de* E *au-dessus de* X, *qui coïncide avec* $f$ *sur* Y, *et telle que :*

$$\int_\mathrm{X} \frac{|\mathrm{F}|^2 e^{-\varphi+k\psi}\, d\mathrm{V}}{(1+|\sigma|^2 e^{\psi})^{k+\varepsilon}} \leqq \mathrm{C}(k,\varepsilon) \int_\mathrm{U} |f|^2 e^{-\varphi+k\psi}\, d\mathrm{V}, \tag{6.16}$$

*avec:*

$$\mathrm{C}(k,\varepsilon) = 1 + \frac{(k+1)^2}{\varepsilon} \qquad si \quad k \geqq 1,$$

$$\mathrm{C}(k,\varepsilon) = \frac{1}{2^k-1} + \frac{(k+1)^2}{\varepsilon} \qquad si \quad k<1.$$

*Remarque* 6.14. — En pratique, $k$ sera un entier $\geqq 1$; on peut prendre par exemple $k=\mathrm{Inf}(n, s)$ ou $k=\sup_{z\in \mathrm{Y}} \operatorname{codim} \underline{\mathrm{Y}}_z$.

*Remarque* 6.15. — Le théorème 6.13 est vrai sous l'hypothèse de semi-positivité (6.17) ci-dessous, qui ne suppose pas nécessairement $\varphi$, $\psi$ plurisousharmoniques :

$$ic(\mathrm{E}) + \left(id'd''\varphi + \varepsilon \frac{|\sigma|^2}{1+|\sigma|^2}\, id'd''\psi\right) \otimes \mathrm{Id}_\mathrm{E} \geqq_n \left(\varepsilon \frac{(ic(\mathrm{S})\sigma|\sigma)}{1+|\sigma|^2} + k \frac{(ic(\mathrm{S})\sigma|\sigma)}{|\sigma|^2}\right) \otimes \mathrm{Id}_\mathrm{E} \tag{6.17}$$

où $\varphi$, $\psi$ sont localement somme de fonctions de classe $\mathrm{C}^2$ et de fonctions plurisousharmoniques.

*Démonstration du théorème* 6.13. — En utilisant le théorème d'approximation 9.1 et les méthodes du paragraphe 5, on se ramène au cas où $\varphi$, $\psi$ sont de classe $\mathrm{C}^\infty$. Multiplions la métrique de S par $e^{\psi}$ et celle de E par $e^{-\varphi+k\psi}$. La condition (6.17) devient :

$$ic(\mathrm{E}) \geqq_n \left(\varepsilon \frac{(ic(\mathrm{S})\sigma|\sigma)}{1+|\sigma|^2} + k \frac{(ic(\mathrm{S})\sigma|\sigma)}{|\sigma|^2}\right) \otimes \mathrm{Id}_\mathrm{E} \tag{6.15}$$

tandis que l'estimation (6.16) s'écrit :

$$\int_X \frac{|F|^2}{(1+|\sigma|^2)^{k+\varepsilon}} dV \leqq C(k, \varepsilon) \int_X |f|^2 dV,$$

avec $U = \{ z \in X;\, |\sigma|^2 < 1 \}$. On peut alors appliquer textuellement la preuve donnée dans [5], en remplaçant la référence à [24] par le théorème 5.1. □

Le théorème 6.12 contient, sous une forme optimale, un résultat dû à Hörmander, Bombieri et Skoda, qui s'est avéré particulièrement utile en théorie des nombres (*cf.* E. Bombieri [2], H. Skoda [27]). Choisissons pour X un ouvert de $\mathbb{C}^n$, pour E un fibré trivial de rang 1, et $S = E^n$, $\sigma(z) = z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$, $k = n$, $\psi = \mathrm{Cte}$, $f \equiv 1$. On obtient le :

COROLLAIRE 6.16. — *Soit $\varphi$ une fonction plurisousharmonique dans un ouvert pseudoconvexe $\Omega \subset \mathbb{C}^n$. On suppose que $e^{-\varphi}$ est localement sommable au voisinage d'un point $z_0 \in \Omega$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction holomorphe* F *sur* $\Omega$ *telle que* $F(z_0) = 1$ *et :*

$$\int_\Omega \frac{|F|^2 e^{-\varphi}}{(1+|z|^2)^{n+\varepsilon}} dV < +\infty.$$

## 7. Théorème d'annulation pour la cohomologie à valeur dans un fibré positif de rang quelconque

Nous allons traduire les théorèmes d'existence obtenus dans les paragraphes précédents en des théorèmes d'annulation de la cohomologie. On suppose désormais que X est une variété (kählérienne) *faiblement pseudoconvexe*, c'est-à-dire qu'il existe une fonction plurisousharmonique et exhaustive sur X. E désignera un fibré hermitien de classe $C^2$ et $K = \Lambda^n T^* X$ le fibré canonique des *n*-formes holomorphes sur X. Le théorème suivant généralise un résultat classique de S. Nakano [20].

THÉORÈME 7.1. — *Soit* $E >_s 0$ *un fibré s-positif au-dessus de* X. *Alors* $H^q(X;\, K \otimes E) = 0$ *pour* $q \geqq \mathrm{Sup}\,(1, n-s+1)$.

*Démonstration.* — D'après l'isomorphisme de Dolbeault, le groupe $H^q(X;\, K \otimes E)$ est isomorphe au groupe de D″-cohomologie des $(n, q)$-formes à valeurs dans E. Soit $g$ une $(n, q)$-forme fermée à valeurs dans E et à coefficients $L^2_{\mathrm{loc}}$, avec $n - q + 1 \leqq s$. L'existence d'une solution $L^2_{\mathrm{loc}}$ à l'équation $D'' f = g$ résulte du théorème 5.1 (on remplace $\varphi$ par $\rho \circ \varphi$ où $\rho$ est une fonction convexe croissante choisie de telle manière que l'intégrale $\int_X |g|^2_{c(E)} e^{-\rho \circ \varphi} dV$ converge). □

Le théorème 2.6 (2.1) permet d'en déduire :

COROLLAIRE 7.2 (P. Griffiths [12]). — *Si* $E >_1 0$ *est un fibré positif au sens de Griffiths, on a :*

$$H^q(X;\, K \otimes E \otimes \text{dét}\, E) = 0 \quad \textit{pour tout } q \geqq 1.$$

*Si* E *est seulement semi-positif au sens de Griffiths, on a :*

$$H^q(X;\ K\otimes E\otimes \text{dét}\, E\otimes M)=0$$

*pour tout* $q\geqq 1$ *et tout fibré en droites* $M>0$.

Le théorème 2.6 (2.2) et (2.3) entraîne d'autre part le :

COROLLAIRE 7.3. — *Soit* $E>_1 0$ *un fibré hermitien de rang* $r$, *positif au sens de Griffiths. Si* $rs>1$, *on a alors :*

$$H^q(X;\ K\otimes E^*\otimes (\text{dét}\ E)^s)=0$$

*dans les deux cas suivants :*

(7.1) $$q\geqq \sup(1,\ n-s+1);$$

(7.2) $$q\geqq 1 \qquad \text{et} \qquad s\geqq r.$$

*Si* E *est seulement semi-positif au sens de Griffiths, chacune des hypothèses* (7.1) *ou* (7.2) *entraîne :*

$$H^q(X;\ K\otimes E^*\otimes (\text{dét}\ E)^s\otimes M)=0$$

*pour tout fibré en droites* $M>0$.

Le résultat (7.1) est nouveau à notre connaissance. La partie (7.2) résulte aussi du théorème de Griffiths appliqué au fibré $\Lambda^{r-1}E\simeq E^*\otimes \text{dét}\, E$.

Examinons maintenant dans ce contexte les résultats du paragraphe 6. Soit :

(7.3) $$0\to N\to E\xrightarrow{g} Q\to 0$$

une suite exacte de fibrés vectoriels holomorphes au-dessus de X. E étant supposé hermitien, on munit N et Q des métriques hermitiennes induites par celle de E.

Le théorème 6.2 peut se traduire en un théorème d'annulation, avec hypothèse de positivité stricte. Soient $r$ le rang de E, $k$ le rang de Q, $q$ un entier tel que $0\leqq q\leqq n$, et $s=\inf(n-q,\ r-k)$. On se donne d'autre part un fibré linéaire hermitien M sur X, et on désigne par L le fibré en droites $K\otimes (\text{dét}\ Q)^s\otimes M$. Considérons la suite exacte longue de cohomologie associée à la suite exacte (7.3), après tensorisation par L :

$$\dots H^l(X;\ N\otimes L)\to H^l(X;\ E\otimes L)\xrightarrow{g} H^l(X;\ Q\otimes L)\xrightarrow{\delta} H^{l+1}(X;\ N\otimes L)\dots$$

Nous démontrons le théorème suivant :

THÉORÈME 7.4. — *Supposons* $E\geqq_s 0$, $M\geqq 0$, *l'une de ces inégalités étant stricte. Alors pour tout entier* $l\geqq q$, *on a* $H^{l+1}(X;\ N\otimes L)=0$, *donc le morphisme :*

$$g:\quad H^l(X;\ E\otimes L)\to H^l(X;\ Q\otimes L)$$

*est surjectif.*

*Démonstration.* — Le lemme 6.6 (6.11) implique $N \otimes (\text{dét}\, Q)^s \otimes M >_{n-q} 0$ (car le rang de $N \otimes (\text{dét}\, Q)^s \otimes M$ est $r-k$). Le théorème 7.4 est donc conséquence du théorème 7.1. □

On a d'autre part un théorème d'annulation partielle pour l'image du morphisme cobord $\delta$, moyennant une hypothèse de semi-positivité convenable sur M.

THÉORÈME 7.5. — *On suppose qu'il existe une fonction* $\varepsilon > 0$ *continue sur* X *telle que* $ic(M) \geqq \varepsilon\, ic(\text{dét}\, Q)$, E *étant toujours s-semi-positif.*

*Alors le morphisme cobord* $\delta : H^l(X; Q \otimes L) \to H^{l+1}(X; N \otimes L)$ *est nul pour* $l \geqq q$, *c'est-à-dire que le morphisme :*

$$g: \quad H^l(X; E \otimes L) \to H^l(X; Q \otimes L)$$

*est surjectif.*

*Démonstration.* — Conséquence immédiate du théorème 6.2, en choisissant $\varphi$ pour faire converger les intégrales. □

Pour $q=0$, les théorèmes 7.4 et 7.5 sont dus à H. Skoda [25].

Le cas $q=l=0$ est particulièrement intéressant puisqu'on obtient alors un théorème de relèvement pour les sections holomorphes du fibré $Q \otimes L$.

Ces résultats sont à rapprocher du théorème de Le Potier [19] : si E est un fibré de rang $r$ au-dessus d'une variété compacte X, et si E est positif au sens de Griffiths, alors :

$$H^{p,q}(X; E) = H^q(X; \Lambda^p T^* X \otimes E) = 0 \qquad \text{pour} \quad p+q \geqq n+r.$$

Ce théorème semble toutefois malaisé à démontrer par un usage direct de l'identité de Kodaira lorsque $r > 1$.

## 8. Régularisation des fonctions plurisousharmoniques sur une variété kählérienne

Soit $(X, \omega)$ une variété kählérienne, $\varphi$ une fonction mesurable sur X. On suppose que $\varphi$ est, au voisinage de tout point $z \in X$, somme d'une fonction de classe $C^2$ et d'une fonction plurisousharmonique. La décomposition de Lebesgue de $id'd''\varphi$ est donc de la forme :

$$id'd''\varphi = (id'd''\varphi)_s + (id'd''\varphi)_c,$$

où la partie singulière $(id'd''\varphi)_s$ est un courant positif, et où la partie absolument continue $(id'd''\varphi)_c$ est minorée par une (1, 1)-forme réelle *continue*.

Le premier procédé de régularisation qui vient à l'esprit est le suivant : on se ramène dans une carte locale en tronquant $\varphi$ à l'aide d'une partition de l'unité, puis on approxime par convolution avec les noyaux standards. Cette méthode ne donne pas de bons résultats, car elle ne respecte pas les symétries du problème. C'est pourquoi nous serons amenés à travailler plutôt avec un noyau « symétrique » vis-à-vis de la métrique kählérienne $\omega$. R. Greene et H. Wu [11] ont déjà utilisé des techniques semblables pour démontrer des théorèmes d'approximation de fonctions convexes, de fonctions plurisousharmoniques *continues*, etc., sur les variétés riemanniennes. La non-continuité de la fonction $\varphi$ va entraîner ici quelques difficultés techniques supplémentaires.

Notons exp : $TX \rightarrow X$ l'application exponentielle, qui envoie le vecteur tangent $\zeta \in T_z X$, $z \in X$, sur le point correspondant $\exp_z(\zeta)$ de la géodésique issue de $z$ et de vecteur tangent initial $\zeta$. Si la variété $(X, \omega)$ n'est pas complète, exp est définie seulement sur un voisinage de la section nulle du fibré tangent TX.

Soit $\chi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction de classe $C^\infty$ définie par :

$$(8.1) \qquad \begin{cases} \chi(t) = -\exp\left(\dfrac{1}{t-1}\right) & \text{si} \quad t<1, \\ \chi(t)=0 & \text{si} \quad t \geqq 1, \end{cases}$$

de sorte que :

$$\chi'(t) = \frac{1}{(t-1)^2} \exp\left(\frac{1}{t-1}\right) \qquad \text{si} \quad t<1.$$

Pour tout réel $\varepsilon \in ]0, 1]$, on pose :

$$(8.2) \qquad \varphi_\varepsilon(z) = \frac{1}{C\varepsilon^{2n}} \int_{\zeta \in T_z X} \varphi(\exp_z(\zeta))\, \chi'\left(\frac{|\zeta|^2}{\varepsilon^2}\right) d\lambda(\zeta),$$

*où* $C = \displaystyle\int_{\zeta \in \mathbb{C}^n} \chi'(|\zeta|^2)\, d\lambda(\zeta)$, et où $d\lambda$ désigne la mesure de Lebesgue sur l'espace hermitien $T_z X$ (resp. $\mathbb{C}^n$).

La fonction $\varphi_\varepsilon$ est définie sur tout compact $K \subset X$ dès que $\varepsilon$ est assez petit.

Notre objectif est de montrer la convergence de $\varphi_\varepsilon$ vers $\varphi$, et d'étudier le comportement local du Hessien $id'\,d''\,\varphi_\varepsilon$. Nous aurons besoin pour cela d'un développement limité à l'ordre 3 de $\exp_z(\zeta)$. Désignons par $n$ la dimension de X. Au voisinage d'un point fixé $0 \in X$, on pose :

$$\omega = \frac{i}{2} \sum_{1 \leqq j, k \leqq n} \omega_{jk}\, dz_j \wedge d\bar{z}_k,$$

relativement à un système de coordonnées locales $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ en 0; désormais, tous les indices notés $j, k, l, m, p, q$... seront supposés implicitement compris entre 1 et $n$. Comme la métrique $\omega$ est kählérienne par hypothèse, l'équation différentielle des géodésiques va se simplifier.

LEMME 8.1. — *La géodésique* $t \rightarrow u(t) = \exp_z(t\zeta)$ *est la solution du système différentiel du second ordre :*

$$\sum_j \omega_{jk}(u) \frac{d^2 u_j}{dt^2} + \sum_{j,l} \frac{\partial \omega_{jk}}{\partial u_l} \frac{du_j}{dt} \frac{du_l}{dt} = 0, \qquad 1 \leqq k \leqq n,$$

*avec conditions initiales :*

$$u_k(0) = z_k, \qquad \frac{du_k}{dt}(0) = \zeta_k.$$

Bien que le lemme 8.1 soit tout à fait classique, nous expliciteront brièvement les calculs pour montrer où intervient le caractère kählérien de la métrique.

*Démonstration.* — Comme le problème est local, on peut supposer $X \subset \mathbb{C}^n$. Soit $u : [0, 1] \to X$ un chemin de classe $C^1$. On définit l'énergie de $u$ par :

$$E(u) = \int_0^1 \left| \frac{du}{dt} \right|^2 dt = \int_0^1 \sum_{j,k} \omega_{jk}(u(t)) \frac{du_j}{dt} \frac{d\bar{u}_k}{dt} dt.$$

Dans l'ensemble $P(z_1, z_2)$ des chemins de classe $C^1$ ayant pour origine $z_1$ et pour extrémité $z_2$, les géodésiques sont les chemins qui réalisent un minimum local de l'énergie. On va donc utiliser le calcul des variations pour déterminer l'équation des géodésiques.

Soit $u \in P(z_1, z_2)$ et $s : [0, 1] \to TX$ une section de classe $C^1$ de TX au-dessus de $u$, tangente à $P(z_1, z_2)$, i. e. $s(0) = s(1) = 0$. La différentielle de l'énergie est donnée par :

$$D_u E . s = 2 \operatorname{Re} \int_0^1 \left( \sum_{j,k} \omega_{jk}(u) \frac{du_j}{dt} \frac{d\bar{s}_k}{dt} + \sum_{j,k,l} \frac{\partial \omega_{jk}}{\partial u_l} \frac{du_j}{dt} \frac{d\bar{u}_k}{dt} \overline{s_l(t)} \right) dt.$$

Intégrons la première sommation par parties et permutons les indices $k$ et $l$ dans la deuxième. Il vient :

$$D_u E . s = 2 \operatorname{Re} \int_0^1 \left[ - \sum_{j,k} \omega_{jk}(u) \frac{d^2 u_j}{dt^2} \overline{s_k(t)} - \sum_{j,k,l} \frac{\partial \omega_{jk}}{\partial u_l} \frac{du_j}{dt} \frac{du_l}{dt} \overline{s_k(t)} \right.$$
$$\left. - \sum_{j,k,l} \frac{\partial \omega_{jk}}{\partial \bar{u}_l} \frac{du_j}{dt} \frac{d\bar{u}_l}{dt} \overline{s_k(t)} + \sum_{j,k,l} \frac{\partial \omega_{jl}}{\partial \bar{u}_k} \frac{du_j}{dt} \frac{d\bar{u}_l}{dt} \overline{s_k(t)} \right] dt.$$

La métrique $\omega$ étant kählérienne par hypothèse, la condition $\bar{\partial}\omega = 0$ se traduit par les relations $\partial \omega_{jk} / \partial \bar{u}_l = \partial \omega_{jl} / \partial \bar{u}_k$. On obtient par conséquent :

$$D_u E . s = -2 \operatorname{Re} \int_0^1 \sum_k \left( \sum_j \omega_{jk}(u) \frac{d^2 u_j}{dt} + \sum_{j,l} \frac{\partial \omega_{jk}}{\partial u_l} \frac{du_j}{dt} \frac{du_l}{dt} \right) \overline{s_k(t)}\, dt.$$

La différentielle $D_u E$ est donc nulle si et seulement si $u$ vérifie le système différentiel du lemme 8.1. $\square$

Pour simplifier les calculs ultérieurs, on se placera dans un système de coordonnées géodésiques. L'existence de ces coordonnées est assurée par le lemme suivant :

LEMME 8.2. — *Soit* V *un voisinage assez petit du point* $a^0 \in X$. *Il existe une application* :

$$u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) : \quad V \times V \to \mathbb{C}^n$$

*de classe* $C^\infty$, *telle que pour tout point* $z^0 \in V$ *fixé, l'application* $u(?, z^0) : V \to \mathbb{C}^n$ *soit un système de coordonnées analytiques locales, vérifiant les propriétés* :

$$(8.3) \qquad \begin{cases} u_k(z^0, z^0) = 0; \\ \omega_{jk}(u) = \delta_{jk} - \sum_{l,m} c_{jklm} u_l \bar{u}_m + O(|u|^3), \end{cases}$$

*dans les coordonnées* $u_k(?, z^0)$, *où* $(c_{jklm})$ *est la matrice de courbure de Levi-Civita de* $(X, \omega)$, *représentant le tenseur* $ic(TX)$ *au point* $z^0$, *et où* $\delta_{jk}$ *est le symbole de Kronecker* ($\delta_{jj}=1$, $\delta_{jk}=0$ *si* $j \neq k$). *Les coefficients* $c_{jklm}$ *vérifient les relations :*

$$(8.4) \qquad c_{jklm}=\overline{c}_{kjml}=c_{lkjm}=c_{jmlk}.$$

*Les coordonnées géodésiques* $u_k=u_k(\exp_z(\zeta), z^0)$ *de* $\exp_z(\zeta)$ *admettent alors en fonction de* $z_k=u_k(z, z^0)$ *et* $\zeta_k=d_z u_k(z, z^0).\zeta$ *le développement limité :*

$$(8.5) \qquad u_k=z_k+\zeta_k+\frac{1}{2}\sum_{j, l, m} c_{jklm}\left(\overline{z}_m+\frac{\overline{\zeta}_m}{3}\right)\zeta_j\zeta_j+O(|z|^2+|\zeta|^2)|\zeta|^2.$$

*Les majorations* $O(?)$ *sont uniformes pour* $z^0 \in V$.

*Démonstration.* — Soit $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ une carte locale de X définie sur V. On commence par centrer cette carte en un point quelconque $z^0 \in V$ en posant :

$$v'_k(z, z^0)=v_k(z)-v_k(z^0).$$

Grâce au procédé d'orthogonalisation de Schmidt, on obtient un système de coordonnées $w(z, z^0)=(w_1, \ldots, w_n)$ tel que :

$$\omega=\frac{i}{2}\sum_k dw_k \wedge d\overline{w}_k$$

au point $z^0$. Les coefficients $\omega_{jk}$ de $\omega$ relativement à $(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ admettent un développement limité du type :

$$(8.6) \qquad \omega_{jk}=\delta_{jk}+\sum_l a_{jkl}w_l+\sum_l a'_{jkl}\overline{w}_l + \sum_{l, m} a_{jklm}w_l\overline{w}_m+\sum_{l, m} b_{jklm}w_l w_m+\sum_{l, m} b'_{jklm}\overline{w}_l\overline{w}_m+O(|w|^3),$$

où les coefficients $a_{jkl}$, $a'_{jkl}$, $a_{jklm}$, $b_{jklm}$, $b'_{jklm}$ sont des fonctions de classe $C^\infty$ de $z^0$. On peut imposer de plus :

$$(8.7) \qquad b_{jklm}=b_{jkml}, \qquad b'_{jklm}=b'_{jkml}.$$

La métrique $\omega$ étant hermitienne, les relations $\omega_{jk}=\overline{\omega}_{kj}$ impliquent :

$$(8.8) \qquad a'_{jkl}=\overline{a}_{kjl}, \qquad a_{jklm}=\overline{a}_{kjml}, \qquad b'_{jklm}=\overline{b}_{kjlm}.$$

Le caractère kählérien de $\omega$ se traduit par la condition $\partial\omega=0$ (soit $\partial\omega_{jk}/\partial w_l=\partial\omega_{lk}/\partial w_j$), qui entraîne les relations supplémentaires :

$$(8.9) \qquad a_{jkl}=a_{lkj}, \; a_{jklm}=a_{lkjm}, \qquad b_{jklm}=b_{lkjm}.$$

Posons :

$$u_k=w_k+\frac{1}{2}\sum_{j, l} a_{jkl}w_j w_l+\frac{1}{3}\sum_{j, l, m} b_{jklm}w_j w_l w_m;$$

si on utilise (8.7), (8.8) et (8.9), un calcul immédiat montre que :

$$du_k = dw_k + \sum_{j,\,l} a_{jkl}\, w_l\, dw_j + \sum_{j,\,l,\,m} b_{jklm}\, w_l\, w_m\, dw_j.$$

En comparant avec (8.6), on voit qu'il existe des nombres complexes $c_{jklm}$ tels que :

$$\frac{i}{2}\sum_k du_k \wedge d\bar{u}_k = \omega + \frac{i}{2}\sum_{j,\,k,\,l,\,m} c_{jklm}\, w_l\, \bar{w}_m\, dw_j \wedge d\bar{w}_k + \mathrm{O}(|w|^3)$$

$$= \omega + \frac{i}{2}\sum_{j,\,k,\,l,\,m} c_{jklm}\, u_l\, \bar{u}_m\, du_j \wedge d\bar{u}_k + \mathrm{O}(|u|^3).$$

L'écriture (8.3) en résulte. Les relations (8.4) sont des cas particuliers de (8.8), (8.9) avec $a_{jkl} = b_{jklm} = 0$, $a_{jklm} = -c_{jklm}$. L'interprétation de la matrice $(c_{jklm})$ comme tenseur de courbure ne sera pas utilisée de manière essentielle par la suite, et sera donc laissée au lecteur.

Soit maintenant $u_k(t)$ les coordonnées locales de $\exp_z(t\zeta)$.

Le développement limité à l'ordre 1 de $u_k(t)$ est donné par :

$$u_k(t) = z_k + t\zeta_k + \mathrm{O}(t^2) \qquad \text{pour} \quad |t| \leqq 1, \qquad |\zeta| \leqq 1,$$

d'où par homogénéité, en écrivant $\exp_z(t\zeta) = \exp_z(t'\zeta')$, $t' = t|\zeta|$, $|\zeta'| = 1$ :

$$u_k(t) = z_k + t\zeta_k + \mathrm{O}(t^2|\zeta|^2) \qquad \text{pour} \quad t|\zeta| \leqq 1,$$

et :

$$\frac{du_k}{dt} = \zeta_k + \mathrm{O}(|\zeta|^2) \qquad \text{pour} \quad t \leqq 1, \quad |\zeta| \leqq 1.$$

Après substitution dans le système différentiel du lemme 8.1, on obtient :

$$\frac{d^2 u_k}{dt^2} = \sum_{j,\,l,\,m} c_{jklm}\, \bar{u}_m \zeta_j \zeta_l + \mathrm{O}(|u|^2|\zeta|^2) = \sum_{j,l,\,m} c_{jklm}(\bar{z}_m + t\bar{\zeta}_m)\zeta_j\zeta_l + \mathrm{O}(|z|^2 + |\zeta|^2)|\zeta|^2,$$

les majorations étant uniformes pour $t \leqq 1$, $|\zeta| \leqq 1$; (8.5) s'en déduit après deux intégrations successives, en faisant $t = 1$. $\square$

Désormais, tous les calculs seront exprimés dans le système de coordonnées $(u_k)$ centré en un point $a \in \mathrm{V}$. Les majorations qui seront démontrées au point $a$ seront vraies uniformément sur V.

Effectuons le changement de variable $u = \exp_z(\zeta)$ dans l'intégrale (8.2) et posons $v_k = u_k - z_k$; (8.5) entraîne :

(8.10)
$$\zeta_k = v_k - \frac{1}{2}\sum_{j,\,l,\,m} c_{jklm}\left(\bar{z}_m + \frac{\bar{v}_m}{3}\right) v_j v_l + \mathrm{O}(|u| + |z|)^4.$$

D'après (8.3), on peut écrire de plus :

$$|\zeta|^2 = \omega(\zeta, i\zeta) = |\eta_1|^2 + \ldots + |\eta_n|^2,$$

où $\eta=(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ est un système de coordonnées orthonormées sur les fibres de TX, linéaire en $\zeta$, de classe $C^\infty$ en $z$, tel que :

$$(8.11) \qquad \eta_k=\zeta_k-\frac{1}{2}\sum_{j,l,m} c_{jklm} z_l \bar{z}_m \zeta_j+O(|z|^3).\zeta.$$

Substituons dans (8.11) l'expression de $\zeta_k$ donnée par (8.10) :

$$(8.12) \qquad \eta_k=v_k-\frac{1}{2}\sum_{j,l,m} c_{jklm}\left(\bar{z}_m v_j u_l+\frac{1}{3}\bar{v}_m v_j v_l\right)+O(|u|+|z|)^4.$$

Comme l'application $\zeta \to \eta$ est (à $z$ fixé) une isométrie de $(T_z X, \omega)$ sur $\mathbb{C}^n$, il vient :

$$(8.13) \qquad \varphi_\varepsilon(z)=\frac{1}{C\,\varepsilon^{2n}}\int_{u=(u_k)\in\mathbb{C}^n}\varphi(u)\,\chi'\left(\frac{|\eta(z,u)|^2}{\varepsilon^2}\right)d\lambda(\eta).$$

$|\eta|^2=|\eta(z,u)|^2$ étant de classe $C^\infty$ par rapport à $(z, u)$, on voit que $\varphi_\varepsilon$ est de classe $C^\infty$ sur tout compact, dès que $\varepsilon$ est assez petit. Nous aurons besoin de l'estimation suivante des valeurs moyennes de $\varphi$.

LEMME 8.3. — *Il existe une constante* $C_1$ *telle que pour tout* $z$ *voisin de* 0 *et tout* $\varepsilon$ *assez petit, on ait* :

$$\varepsilon^{-2n}\int_{|u-z|<\varepsilon}|\varphi(u)|\,d\lambda(u)\leqq C_1\,\mathrm{Log}\frac{1}{\varepsilon}.$$

*Démonstration.* — Soit B une boule $\{|u|\leqq 2\alpha\}$ contenue dans V (*cf.* lemme 8.2). Quitte à ajouter une fonction de classe $C^2$ convenable à $\varphi$, on peut supposer $\varphi$ plurisousharmonique $\leqq 0$ sur B. La valeur moyenne :

$$\mu(\varepsilon)=\varepsilon^{-2n}\int_{|u-z|<\varepsilon}\varphi(u)\,d\lambda(u)$$

est alors pour $\varepsilon\leqq\alpha$, $|z|\leqq\alpha$ fonction convexe croissante et négative de $\mathrm{Log}\,\varepsilon$ (*voir* P. Lelong [18]). On obtient donc pour $\varepsilon\leqq\alpha/e$ :

$$(8.14) \qquad \frac{\mu(\alpha)-\mu(\varepsilon)}{\mathrm{Log}\,\alpha-\mathrm{Log}\,\varepsilon}\leqq\mu(\alpha)-\mu\left(\frac{\alpha}{e}\right)\leqq-\mu\left(\frac{\alpha}{e}\right),$$

avec :

$$-\mu\left(\frac{\alpha}{e}\right)=\left(\frac{e}{\alpha}\right)^{2n}\int_{|u-z|<\alpha/e}-\varphi(u)\,d\lambda(u)\leqq\left(\frac{e}{\alpha}\right)^{2n}\int_B-\varphi(u)\,d\lambda(u)=C_1'.$$

(8.14) implique pour $\varepsilon\leqq\alpha/e$, $|z|\leqq\alpha$ :

$$\varepsilon^{-2n}\int_{|u-z|<\varepsilon}|\varphi(u)|\,d\lambda(u)=-\mu(\varepsilon)\leqq-\mu\left(\frac{\alpha}{e}\right)\mathrm{Log}\frac{\alpha}{\varepsilon}-\mu(\alpha)\leqq C_1'\,\mathrm{Log}\frac{e\,\alpha}{\varepsilon},$$

ce qui achève la preuve du lemme 8.3. □

LEMME 8.4 (minoration de $\varphi_\varepsilon(z)$ et de $d/d\varepsilon[\varphi_\varepsilon(z)]$). — *Il existe des constantes* $C_2 \geqq 0$, $C_3 \geqq 0$ *telles que* :

$$\varphi_\varepsilon(z) \geqq \varphi(z) - C_2\,\varepsilon^2 \operatorname{Log}\frac{1}{\varepsilon}, \tag{8.15}$$

$$\frac{d}{d\varepsilon}[\varphi_\varepsilon(z)] \geqq -C_3\,\varepsilon \operatorname{Log}\frac{1}{\varepsilon} \tag{8.16}$$

*pour tout* $z$ *voisin de* 0 *et tout* $\varepsilon$ *assez petit.*

*Démonstration.* — Le développement limité (8.12) fournit :

$$|\eta(z, u)|^2 = |z-u|^2 + O(|u|+|z|)^4,$$

et :

$$d\lambda(\eta) = (1 + O(|u|+|z|)^2)\, d\lambda(u)$$

[$u$ étant la variable; *cf.* (8.19)]. Fixons $z=0$. Comme $|\eta(0, u)|^2 \geqq (|u|/2)^2$ pour $u$ assez petit, et comme $\chi'(t)=0$ pour $t \geqq 1$, on obtient :

$$\begin{aligned}\chi'\left(\frac{|\eta(0, u)|^2}{\varepsilon^2}\right) d\lambda(\eta) &= \left(\chi'\left(\frac{|u|^2}{\varepsilon^2}\right) + O\left(\frac{|u|^4}{\varepsilon^2}\right) + O(|u|^2)\right) d\lambda(u)\\ &= \left(\chi'\left(\frac{|u|^2}{\varepsilon^2}\right) + O(\varepsilon^2)\right) d\lambda(u),\end{aligned}$$

$$\frac{d}{d\varepsilon}\left[\chi'\left(\frac{|\eta(0, u)|^2}{\varepsilon^2}\right)\right] d\lambda(\eta) = \left\{\frac{d}{d\varepsilon}\left[\chi'\left(\frac{|u|^2}{\varepsilon^2}\right)\right] + O(\varepsilon)\right\} d\lambda(u).$$

Substituons ces estimations dans l'intégrale (8.13). Il vient :

$$\varphi_\varepsilon(0) = \frac{1}{C\varepsilon^{2n}} \int_{u \in \mathbb{C}^n} \varphi(u)\, \chi'\left(\frac{|u|^2}{\varepsilon^2}\right) d\lambda(u) + O\left[\varepsilon^{2-2n} \int_{|u|<2\varepsilon} |\varphi(u)|\, d\lambda(u)\right],$$

$$\frac{d}{d\varepsilon}[\varphi_\varepsilon(0)] = \frac{d}{d\varepsilon}\left[\frac{1}{C\varepsilon^{2n}} \int_{u \in \mathbb{C}^n} \varphi(u)\, \chi'\left(\frac{|u|^2}{\varepsilon^2}\right) d\lambda(u)\right] + O\left[\varepsilon^{1-2n} \int_{|u|<2\varepsilon} |\varphi(u)|\, d\lambda(u)\right].$$

Compte tenu du lemme 8.3 et de l'uniformité des estimations O (?) (*cf.* lemme 8.2), il suffira de prouver les inégalités :

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{C\varepsilon^{2n}} \int \varphi(u)\, \chi'\left(\frac{|u|^2}{\varepsilon^2}\right) d\lambda(u) \geqq \varphi(0) - C_2'\,\varepsilon^2,\\ &\frac{d}{d\varepsilon}\left[\frac{1}{C\varepsilon^{2n}} \int \varphi(u)\, \chi'\left(\frac{|u|^2}{\varepsilon^2}\right) d\lambda(u)\right] \geqq -C_3'\,\varepsilon.\end{aligned}\right. \tag{8.17}$$

On observe qu'il existe une constante $C_2''$ telle que la fonction $\psi(u)=\varphi(u)+C_2''|u|^2$ soit plurisousharmonique ($C_2''$ pouvant être choisie indépendante de $a\in V$). On a donc :

$$\frac{1}{C\varepsilon^{2n}}\int\varphi(u)\chi'\left(\frac{|u|^2}{\varepsilon^2}\right)d\lambda(u)=\frac{1}{C\varepsilon^{2n}}\int\psi(u)\chi'\left(\frac{|u|^2}{\varepsilon^2}\right)d\lambda(u)-C_2'\varepsilon^2,$$

avec :

$$C_2'=\frac{C_2''}{C}\int|u|^2\chi'(|u|^2)\,d\lambda(u).$$

D'après P. Lelong [18], la valeur moyenne :

$$\psi_\varepsilon(0)=\frac{1}{C\varepsilon^{2n}}\int\psi(u)\chi'\left(\frac{|u|^2}{\varepsilon^2}\right)d\lambda(u)=\frac{1}{C}\int\psi(\varepsilon u)\chi'(|u|^2)\,d\lambda(u),$$

de la fonction p.s.h. $\psi$ est fonction croissante de $\varepsilon$, et on a $\psi_\varepsilon(0)\geqq\psi(0)=\varphi(0)$. Les deux inégalités (8.17) en découlent (avec $C_3'=2C_2'$). Le lemme 8.4 est démontré. □

Nous arrivons maintenant à l'étape essentielle du raisonnement, qui est d'estimer le Hessien de $\varphi_\varepsilon$. Le problème revient à commuter les dérivations par rapport à $z$ et $u$ dans l'intégrale (8.13), en faisant apparaître les termes correctifs dus à la courbure.

PROPOSITION 8.5 (calcul de $id'd''\varphi_\varepsilon$). — *Soit $s=(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ un vecteur de $\mathbb{C}^n$. Le Hessien de $\varphi_\varepsilon$ au point $a\in V$ est donné par :*

$$\sum_{l,m}\frac{\partial^2\varphi_\varepsilon}{\partial z_l\partial\bar z_m}(0)s_l\bar s_m=\frac{1}{C\varepsilon^{2n}}\int\sum_{l,m}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_l\partial\bar u_m}(u)s_l'\bar s_m'\chi'\left(\frac{|\eta(0,u)|^2}{\varepsilon^2}\right)d\lambda(u)$$

$$-\frac{1}{C\varepsilon^{2n-2}}\int\sum_{j,k,l,m}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\bar u_j\partial u_k}c_{jklm}s_l\bar s_m\chi\left(\frac{|u|^2}{\varepsilon^2}\right)d\lambda(u)+O\left(\varepsilon\operatorname{Log}\frac{1}{\varepsilon}\right).|s|^2$$

*avec :*

$$\text{(8.18)}\qquad s_l'(u)=s_l+\frac{1}{2}\sum_{j,k,p}c_{jkpl}u_j\bar u_k s_p-\frac{\varepsilon^2}{2}\left(1-\frac{|u|^2}{\varepsilon^2}\right)^2\sum_{k,p}c_{kkpl}s_p,$$

*la majoration $O(?)$ étant uniforme localement par rapport à $a\in V$.*

*Démonstration.* — Nous raisonnerons en trois étapes.

*Étape* 1. — *Évaluation de la mesure $d\lambda(\eta)$.*

Différentions par rapport à $u$ l'expression de $\eta_k$ donnée par (8.12) ($z$ étant fixé). En se rappelant que $v_k=u_k-z_k$ et en faisant usage des relations (8.4), on obtient :

$$d\eta_k=du_k-\frac{1}{2}\sum_{j,l,m}c_{jklm}\left(\bar z_m v_j\,du_l+\bar z_m u_l\,du_j+\frac{1}{3}\bar v_m v_j\,du_l+\frac{1}{3}\bar v_m v_l\,du_j\right)$$

$$-\frac{1}{6}\sum_{j,l,m}c_{jklm}v_j v_l\,d\bar u_m+O(|u|+|z|)^3$$

$$= du_k - \frac{1}{2} \sum_{j,\,l,\,m} c_{jklm} \left( \bar{z}_m v_l + \bar{z}_m u_l + \frac{2}{3} \bar{v}_m v_l \right) du_j$$

$$- \frac{1}{6} \sum_{j,\,l,\,m} c_{jklm} v_j v_l \, d\bar{u}_m + \mathrm{O}(|u|+|z|)^3$$

$$= du_k - \frac{1}{2} \sum_{j,\,l,\,m} c_{jklm} \left( u_l \bar{u}_m - \frac{1}{3} v_l \bar{v}_m \right) du_j$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{j,\,l,\,m} c_{jklm} (v_l \bar{u}_m - u_l \bar{v}_m)\, du_j$$

$$- \frac{1}{6} \sum_{j,\,l,\,m} c_{jklm} v_j v_l \, d\bar{u}_m + \mathrm{O}(|u|+|z|)^3.$$

Dans le développement limité à l'ordre 2 de la $(n, n)$-forme :

$$d\lambda(\eta) = \left(\frac{i}{2}\right)^n d\eta_1 \wedge d\bar{\eta}_1 \wedge \ldots \wedge d\eta_n \wedge d\bar{\eta}_n,$$

les deux dernières sommations apportent une contribution nulle.

On trouve donc :

$$(8.19) \qquad d\lambda(\eta) = d\lambda(u) \left[ 1 - \sum_{k,\,l,\,m} c_{kklm} \left( u_l \bar{u}_m - \frac{1}{3} v_l \bar{v}_m \right) + \mathrm{O}(|u|+|z|)^3 \right].$$

*Étape* 2. — *Dérivation sous le signe* $\int$ *et commutation des dérivées.*

Calculons sur le vecteur $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n) \in \mathbb{C}^n$ le Hessien de $\varphi_\varepsilon$ au point $a$. En dérivant (8.13) sous le signe $\int$, il vient :

$$\sum_{l,\,m} \frac{\partial^2 \varphi_\varepsilon}{\partial z_l \partial \bar{z}_m}(0)\, s_l \bar{s}_m = \frac{1}{\mathrm{C}\,\varepsilon^{2n}} \int_{u \in \mathbb{C}^n} \varphi(u) \sum_{l,\,m} \frac{\partial^2}{\partial z_l \partial \bar{z}_m} \left[ \chi'\left( \frac{|\eta|^2}{\varepsilon^2} \right) d\lambda(\eta) \right] s_l \bar{s}_m.$$

Pour simplifier, on écrira désormais $\chi$ au lieu de $\chi\,(|\eta(z, u)|^2/\varepsilon^2)$, et de même les notations $\chi', \chi'', \chi'''$ désigneront les valeurs de ces fonctions au point $|\eta(z, u)|^2/\varepsilon^2$. Comme la $(n, n)$-forme $\chi'\, d\lambda(\eta)$ est réelle, on a :

$$(8.20) \quad \sum_{l,\,m} \left( \frac{\partial^2}{\partial z_l \partial \bar{z}_m} - \frac{\partial^2}{\partial u_l \partial \bar{u}_m} \right) (\chi'\, d\lambda(\eta))\, s_l \bar{s}_m$$

$$= \mathrm{Re} \sum_{l,\,m} \left( \frac{\partial}{\partial \bar{z}_m} - \frac{\partial}{\partial \bar{u}_m} \right) \left( \frac{\partial}{\partial z_l} + \frac{\partial}{\partial u_l} \right) (\chi'\, d\lambda(\eta))\, s_l \bar{s}_m.$$

Après permutation des indices, l'égalité (8.12) s'écrit [*cf.* (8.4)] :

$$\begin{cases} \eta_k = v_k - \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{j,\,l,\,p} c_{jklp} \left( v_j u_l \bar{z}_p + \frac{1}{3} v_j v_l \bar{v}_p \right) + \mathrm{O}(|u|+|z|)^4 \\ \bar{\eta}_j = \bar{v}_j - \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{k,\,l,\,p} c_{jklp} \left( \bar{v}_k \bar{u}_p z_l + \frac{1}{3} \bar{v}_k \bar{v}_p v_l \right) + \mathrm{O}(|u|+|z|)^4. \end{cases}$$

L'opérateur $\nabla_l=(\partial/\partial z_l)+(\partial/\partial u_l)$ annule les coordonnées $v_k=u_k-z_k$ et $\bar{v}_k$ : $\nabla_l v_k=\nabla_l \bar{v}_k=0$. On obtient donc :

$$\nabla_l \eta_k=-\frac{1}{2}\sum_{j,\,p} c_{jklp} v_j \bar{z}_p+\mathrm{O}(|u|+|z|)^3,$$

$$\nabla_l \bar{\eta}_j=-\frac{1}{2}\sum_{k,\,p} c_{jklp} \bar{v}_k \bar{u}_p+\mathrm{O}(|u|+|z|)^3,$$

$$\begin{aligned}\nabla_l\left[\chi'\left(\frac{|\eta|^2}{\varepsilon^2}\right)d\lambda(\eta)\right]&=\frac{\chi''}{\varepsilon^2}\Big(\sum_k \bar{\eta}_k \nabla_l \eta_k+\sum_j \eta_j \nabla_l \bar{\eta}_j\Big)\,d\lambda(\eta)+\chi'\,\nabla_l(d\lambda(\eta))\\ &=-d\lambda(u)\left[\frac{\chi''}{\varepsilon^2}\cdot\frac{1}{2}\sum_{j,\,k,\,p} c_{jklp} v_j \bar{v}_k(\bar{z}_p+\bar{u}_p)+\frac{\chi''}{\varepsilon^2}\cdot\mathrm{O}(|u|+|z|)^4\right.\\ &\qquad\left.+\chi'\cdot\sum_{k,\,p} c_{kklp}\bar{u}_p+\chi'\cdot\mathrm{O}(|u|+|z|)^2\right].\end{aligned}$$

Comme :

$$\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_m}-\frac{\partial}{\partial \bar{u}_m}\right)|\eta|^2=-2v_m+\mathrm{O}(|u|+|z|)^3,$$

il vient :

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_m}-\frac{\partial}{\partial \bar{u}_m}\right)\left(\frac{\partial}{\partial z_l}+\frac{\partial}{\partial u_l}\right)\left[\chi'\left(\frac{|\eta|^2}{\varepsilon^2}\right)d\lambda(\eta)\right]\\ &\quad=d\lambda(u)\left[\frac{\chi'''}{\varepsilon^4}\sum_{j,\,k,\,p} c_{jklp} v_j \bar{v}_k v_m(\bar{z}_p+\bar{u}_p)+\frac{\chi'''}{\varepsilon^4}\cdot\mathrm{O}(|u|+|z|)^5\right.\\ &\quad+\frac{\chi''}{\varepsilon^2}\sum_{j,\,p} c_{jmlp} v_j(\bar{z}_p+\bar{u}_p)+2\frac{\chi''}{\varepsilon^2}\sum_{k,\,p} c_{kklp} v_m \bar{u}_p+\frac{\chi''}{\varepsilon^2}\cdot\mathrm{O}(|u|+|z|)^3\\ &\quad\left.+\chi'\sum_k c_{kklm}+\chi'\cdot\mathrm{O}(|u|+|z|)\right].\end{aligned}$$

Au point $z=0$ (c'est-à-dire au point $a$), cette dernière expression est égale à :

$$\begin{aligned}d\lambda(u)&\left[\frac{\chi'''}{\varepsilon^4}\sum_{j,\,k,\,p} c_{jklp} u_j \bar{u}_k u_m \bar{u}_p+\frac{\chi''}{\varepsilon^2}\sum_{j,\,p} c_{jmlp} u_j \bar{u}_p\right.\\ &\left.+\frac{2\chi''}{\varepsilon^2}\sum_{k,\,p} c_{kklp} u_m \bar{u}_p+\chi'\sum_k c_{kklm}+\mathrm{O}(\varepsilon)\right],\end{aligned}$$

soit encore, par un calcul aisé :

$$d\lambda(u)\sum_p \frac{\partial^2}{\partial u_p \partial \bar{u}_m}\Big[\chi'\sum_{j,\,k} c_{jklp} u_j \bar{u}_k+\varepsilon^2\chi\sum_k c_{kklp}\Big]-d\lambda(u)\sum_{j,\,k}\frac{\partial^2}{\partial \bar{u}_j \partial u_k}(\varepsilon^2\chi\, c_{jklm})+\mathrm{O}(\varepsilon)\,d\lambda(u).$$

L'égalité (8.20) nous donne en définitive au point $z=0$ :

$$\sum_{l,m}\left(\frac{\partial^2}{\partial z_l \partial \bar{z}_m}-\frac{\partial^2}{\partial u_l \partial \bar{u}_m}\right)(\chi' d\lambda(\eta))\, s_l \bar{s}_m$$

$$= d\lambda(u)\,\mathrm{Re}\sum_{l,m,p}\frac{\partial^2}{\partial u_p \partial \bar{u}_m}\Big[\chi'\sum_{j,k} c_{jklp}\, u_j \bar{u}_k+\varepsilon^2\chi\sum_k c_{kklp}\Big] s_l \bar{s}_m$$

$$-d\lambda(u)\sum_{j,k,l,m}\frac{\partial^2}{\partial \bar{u}_j \partial u_k}(\varepsilon^2\chi\, c_{jklm})\, s_l \bar{s}_m+\mathrm{O}(\varepsilon)\,|s|^2\, d\lambda(u).$$

*Étape* 3. — *Intégration par parties.*

La dernière égalité obtenue à l'étape 2 entraîne après intégration par parties :

$$\left\{\begin{aligned}&\sum_{l,m}\frac{\partial^2\varphi_\varepsilon}{\partial z_l \partial \bar{z}_m}(0)\, s_l \bar{s}_m\\ &=\frac{1}{\mathrm{C}\,\varepsilon^{2n}}\mathrm{Re}\int\chi'\Big(\sum_{l,m}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_l \partial \bar{u}_m}s_l \bar{s}_m\\ &\quad+\sum_{j,k,l,m,p}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_p \partial \bar{u}_m}c_{jklp}\, u_j \bar{u}_k\, s_l \bar{s}_m\Big)\, d\lambda(u)\\ &\quad+\frac{1}{\mathrm{C}\,\varepsilon^{2n}}\mathrm{Re}\int\varepsilon^2\chi\sum_{k,l,m,p}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_p \partial \bar{u}_m}c_{kklp}\, s_l \bar{s}_m\, d\lambda(u)\end{aligned}\right. \tag{8.21}$$

$$-\frac{1}{\mathrm{C}\,\varepsilon^{2n-2}}\int\chi\sum_{j,k,l,m}\frac{\partial^2\varphi}{\partial \bar{u}_j \partial u_k}c_{jklm}\, s_l \bar{s}_m\, d\lambda(u) \tag{8.22}$$

$$+\mathrm{O}(\varepsilon^{1-2n})\,|s|^2\,.\int_{|u|<2}|\varphi(u)|\, d\lambda(u). \tag{8.23}$$

D'après le lemme 8.3, le terme (8.23) est majoré par $0(\varepsilon\log(1/\varepsilon)|s|^2$. La fonction $\chi$ définie en (8.1) est telle que $\chi(t)=-(1-t)^2\chi'(t)$; le terme (8.21) peut donc s'écrire :

$$\frac{1}{\mathrm{C}\,\varepsilon^{2n}}\mathrm{Re}\int\chi'\sum_{l,m}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_l \partial \bar{u}_m}\left[s_l \bar{s}_m+\sum_{j,k,p}c_{jkpl}\, u_j \bar{u}_k\, s_p \bar{s}_m-\varepsilon^2\left(1-\frac{|\eta|^2}{\varepsilon^2}\right)^2\sum_{k,p}c_{kkpl}\, s_p \bar{s}_m\right] d\lambda(u),$$

soit, en introduisant le champ de vecteurs $s'_l$ défini par (8.18) :

$$\frac{1}{\mathrm{C}\,\varepsilon^{2n}}\int\chi'\sum_{l,m}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_l \partial \bar{u}_m}(s'_l \bar{s}'_m+\mathrm{O}(\varepsilon^2+|u|^2)^2)\, d\lambda(u).$$

Une nouvelle intégration par parties montre que le terme d'erreur est de la forme :

$$\frac{1}{\mathrm{C}\,\varepsilon^{2n}}\int_{|u|<2\varepsilon}\varphi(u)\,\mathrm{O}(\varepsilon^2+|u|^2)\,|s|^2\, d\lambda(u),$$

donc ce terme est majoré par $O(\varepsilon^2 \operatorname{Log}(1/\varepsilon)|s|^2$ en vertu du lemme 8.3. Enfin si on remplace $\chi(|\eta|^2/\varepsilon^2)$ par $\chi(|u|^2/\varepsilon^2)$ dans l'intégrale (8.22), on introduit un nouveau terme d'erreur qui est majoré par $O(\varepsilon^2 \operatorname{Log}(1/\varepsilon)|s|^2$. Le lemme 8.5 est démontré. □

Nous allons maintenant estimer les différents termes qui apparaissent dans l'expression de $id'd''\varphi_\varepsilon$ telle qu'elle est donnée dans le lemme 8.5. Nous commencerons par l'étude du terme de courbure.

On désigne par $\tau(a)$ la plus petite « valeur propre » du tenseur de courbure $(i/2\pi)\,c(\mathrm{TX})$ au point $a$, définie par :

$$\tau(a)=\frac{1}{2\pi}\inf_{|\zeta|=|\xi|=1} c_{jklm}\zeta_j\bar{\zeta}_k\xi_l\bar{\xi}_m=\inf_{|\zeta|=|\xi|=1}\frac{i}{2\pi}\,c(\mathrm{TX})(\zeta\otimes\xi,\,\zeta\otimes\xi).$$

On pose $\tau_-(a)=\sup(0,-\tau(a))$. Comme $\varphi$ est localement somme d'une fonction de classe $C^2$ et d'une fonction plurisousharmonique, on peut d'autre part considérer le nombre de Lelong :

$$\nu(\varphi;a)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(n-1)\,!}{2\pi^{n-1}\varepsilon^{2n-2}}\int_{|u|<\varepsilon}\Delta\varphi(u)\,d\lambda(u),$$

de $\varphi$ au point $a$. Il est classique que $\nu(\varphi;a)$ est une fonction $\geqq 0$ et semi-continue supérieurement de la variable $a$.

Lemme 8.6. — *Il existe une constante* $C_4$ *ayant les propriétés suivantes. On pose* :

$$\lambda_\varepsilon(a)=-\frac{\pi\tau_-(a)}{2\,C\,\varepsilon^{2n-2}}\int\Delta\varphi(u)\,\chi\left(\frac{|u|^2}{\varepsilon^2}\right)d\lambda(u)+C_4\,\varepsilon^2. \tag{8.24}$$

*Alors pour tout* $\varepsilon$ *assez petit et tout* $a\in V$, *on a :*

$$\frac{1}{C\,\varepsilon^{2n-2}}\int\sum_{j,k,l,m}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\bar{u}_j\,\partial u_k}c_{jklm}s_l\bar{s}_m\,\chi\left(\frac{|u|^2}{\varepsilon^2}\right)d\lambda(u)\leqq\lambda_\varepsilon(a)|s|^2, \tag{8.25}$$

(8.26) $\lambda_\varepsilon(a)$ *est fonction continue* $\geqq 0$ *de* $a$, *fonction croissante de* $\varepsilon$, *et :*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lambda_\varepsilon(a)=\tau_-(a)\,\nu(\varphi;a).$$

*Démonstration.* — En remplaçant éventuellement $\varphi(u)$ par $\psi(u)+C_2''|u|^2$ comme dans le lemme 8.4, on peut supposer $\varphi$ *plurisousharmonique*.

On va alors démontrer le lemme 8.6, avec $C_4=0$. Pour chaque $s\in\mathbb{C}^n$ fixé, on peut écrire dans une base orthonormée convenable de $T_aX$ :

$$\sum_{l,m}c_{jklm}s_l\bar{s}_m=\delta_{jk}\tau_j|s|^2,\qquad 1\leqq j,\ k\leqq n,$$

en diagonalisant par rapport aux indices $j$, $k$.

Les valeurs propres $\tau_j$ sont minorées par $-2\pi\tau_-(a)$. On obtient donc :

$$\frac{1}{C\varepsilon^{2n-2}}\int_{j,k,l,m}\sum \frac{\partial^2\varphi}{\partial\bar{u}_j\partial u_k} c_{jklm} s_l \bar{s}_m \chi\left(\frac{|u|^2}{\varepsilon^2}\right) d\lambda(u)$$

$$= \frac{|s|^2}{C\varepsilon^{2n-2}}\int\sum_j \tau_j \frac{\partial^2\varphi}{\partial u_j\partial\bar{u}_j}\chi\left(\frac{|u|^2}{\varepsilon^2}\right) d\lambda(u)$$

$$\leqq -\frac{\pi\tau_-(a)}{C\varepsilon^{2n-2}}\int\Delta\varphi\,\chi\left(\frac{|u|^2}{\varepsilon^2}\right)\lambda(u) = \lambda_\varepsilon(a)|s|^2$$

car $\chi<0$, $\qquad \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u_j\partial\bar{u}_j}\geqq 0 \quad$ et $\quad \displaystyle\sum_j \frac{\partial^2\varphi}{\partial u_j\partial\bar{u}_j} = \frac{1}{4}\Delta\varphi.$

Posons :

$$(8.27) \qquad \nu(\varphi;\, a;\, \varepsilon) = \frac{(n-1)\,!}{2\pi^{n-1}\varepsilon^{2n-2}}\int_{|u|<\varepsilon}\Delta\varphi(u)\,d\lambda(u).$$

Des calculs élémentaires montrent que :

$$(8.28) \qquad -\int\Delta\varphi(u)\,\chi\left(\frac{|u|^2}{\varepsilon^2}\right)d\lambda(u) = \int\Delta\varphi(u)\,d\lambda(u)\int_{t>|u|/\varepsilon} 2\,t\,\chi'(t^2)\,dt$$

$$= \int_0^1 2\,t\,\chi'(t^2)\,dt\int_{|u|<\varepsilon t}\Delta\varphi(u)\,d\lambda(u).$$

On obtient par conséquent d'après (8.24), (8.27) et (8.28) :

$$(8.29) \qquad \lambda_\varepsilon(a) = \frac{2\pi^n\tau_-(a)}{C(n-1)\,!}\int_0^1 t^{2n-1}\chi'(t^2)\,\nu(\varphi;\, a;\, \varepsilon\, t)\,dt$$

avec par définition de C :

$$C = \int_{u\in\mathbb{C}^n}\chi'(|u|^2)\,d\lambda(u) = \frac{2\pi^n}{(n-1)\,!}\int_0^1 t^{2n-1}\chi'(t^2)\,dt.$$

La quantité $\nu(\varphi;\, a;\, \varepsilon)$ définie par (8.27) est fonction croissante de $\varepsilon$ et tend vers $\nu(\varphi;\, a)$ quand $\varepsilon$ tend vers zéro (*cf.* P. Lelong [18]). L'assertion (8.26) résulte donc de (8.29) [la continuité de $\lambda_\varepsilon$ est évidente sur l'égalité de définition (8.24)]. □

## 9. Théorèmes d'approximation pour les fonctions plurisousharmoniques

R. Richberg [21], dans un travail déjà assez ancien, a résolu le cas des fonctions strictement p.s.h. *continues* sur un espace analytique quelconque. Grâce aux outils techniques établis au paragraphe 8, nous pouvons maintenant énoncer différents théorèmes d'approximation pour des fonctions non nécessairement continues, résultats qui avaient été utilisés à plusieurs reprises dans les sections antérieures. On se donne comme précédemment une variété analytique X de dimension $n$, munie d'une métrique kählérienne $\omega$.

THÉORÈME 9.1. — *Soit* $\varphi$ *une fonction définie sur* X *et localement plurisousharmonique modulo* $\mathscr{C}^2(X)$. *On suppose données une* $(1, 1)$*-forme réelle* **continue** $\theta$ *telle que* $id'd''\varphi \geqq \theta$.

*Alors il existe une famille* **croissante** $(\hat{\varphi}_\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]}$ *de fonctions de classe* $C^\infty$ *sur* X, *une famille de* $(1,1)$*-formes réelles continues* $(\gamma_\varepsilon)$ *et une famille* **croissante** $(\lambda_\varepsilon)$ *de fonctions continues sur* X *ayant les propriétés suivantes* :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \hat{\varphi}_\varepsilon(a) = \varphi(a) \quad \textit{pour tout } a\in X; \tag{9.1}$$

$$id'd''\hat{\varphi}_\varepsilon \geqq \gamma_\varepsilon - \lambda_\varepsilon\,\omega; \tag{9.2}$$

$$\gamma_\varepsilon \geqq \theta; \tag{9.3}$$

(9.4) $\gamma_\varepsilon$ *tend vers* $(id'd''\varphi)_c$ *presque partout sur* X *quand* $\varepsilon$ *tend vers zéro*;

(9.5) $\lambda_\varepsilon$ *tend vers zéro presque partout sur* X (*plus précisément en tout point* $a\in X$ *où le nombre de Lelong* $\nu(\varphi; a)$ *est nul*);

(9.6) *Si* $\nu(\varphi; a)=0$ *pour tout* $a\in X$ (*en particulier si* $\varphi$ *est localement bornée*) $\lambda_\varepsilon$ *converge uniformément vers zéro sur tout compact de* X.

*Démonstration.* — Soit $\psi$ une fonction exhaustive de classe $C^\infty$ sur X, à croissance suffisamment rapide pour que la fonction $\varphi_\varepsilon$ définie par (8.2) soit de classe $C^\infty$ au voisinage du compact $\{z\in X;\ \psi(z)\leqq 1/\varepsilon\}$. Soit $\rho$ une fonction numérique de classe $C^\infty$, telle que $0\leqq\rho\leqq 1$, avec $\rho(t)=1$ si $t\leqq 1/2$ et $\rho(t)=0$ si $t\geqq 1$. La fonction $\varphi_\varepsilon(z)\,\rho(\varepsilon\psi(z))$ est donc définie et de classe $C^\infty$ sur X tout entier. Le lemme 8.4 montre de plus qu'il existe des fonctions continues $C_2>0$, $C_3>0$ sur X telles que pour tout $\varepsilon$ on ait :

$$\left\{\begin{aligned} &\varphi_\varepsilon(z)\,\rho(\varepsilon\psi(z)) \geqq \varphi(z) - C_2(z)\,\varepsilon^2\,\mathrm{Log}\frac{1}{\varepsilon},\\ &\frac{d}{d\varepsilon}[\varphi_\varepsilon(z)\,\rho(\varepsilon\psi(z))] \geqq -C_3(z)\,\varepsilon\,\mathrm{Log}\frac{1}{\varepsilon}. \end{aligned}\right. \tag{9.7}$$

Soit $C_5$ une fonction de classe $C^\infty$ sur X, telle que $C_5>\sup(C_2, C_3)$. On pose :

$$\hat{\varphi}_\varepsilon(z) = \varphi_\varepsilon(z)\,\rho(\varepsilon\psi(z)) + C_5(z)\,\varepsilon^2\left(\mathrm{Log}\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{2}\right). \tag{9.8}$$

Les inégalités (9.7) entraînent que :

$$\hat{\varphi}_\varepsilon(z) > \varphi(z) \qquad \text{et} \qquad \frac{d\hat{\varphi}_\varepsilon(z)}{d\varepsilon} > 0.$$

D'autre part, la semi-continuité supérieure de $\varphi$ implique :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\ \sup \hat{\varphi}_\varepsilon(z) = \lim_{\varepsilon\to 0}\ \sup \varphi_\varepsilon(z) \leqq \varphi(z),$$

ce qui démontre (9.1).

Il nous reste à démontrer les propriétés (9.2) à (9.6) en construisant les formes $\gamma_\varepsilon$ et les fonctions $\lambda_\varepsilon$, $\lambda$. D'après (9.8) il suffit de raisonner pour $\varphi_\varepsilon$. On observe aussi qu'il suffit de construire $\gamma_\varepsilon$, $\lambda_\varepsilon$, $\lambda$ localement, sur un voisinage V d'un point quelconque $a^0 \in X$. On recollera ensuite les différentes formes et fonctions au moyen d'une partition de l'unité.

D'après la proposition 8.5 et le lemme 8.6 la fonction (8.24) :

$$\lambda_\varepsilon(a) = -\frac{\pi\tau(a)}{2\,C\,\varepsilon^{2n-2}}\int \Delta\varphi\,\chi\left(\frac{|u|^2}{\varepsilon^2}\right)d\lambda(u) + C_6\,\varepsilon\,\mathrm{Log}\frac{1}{\varepsilon}$$

sera croissante en $\varepsilon$ et aura les propriétés (9.2), (9.5) requises pourvu que la constante $C_6$ soit assez grande. L'affirmation (9.6) résulte tout simplement du théorème de Dini. Quant à la forme $\gamma_\varepsilon$, elle proviendra du premier terme dans le second membre de l'égalité de la proposition 8.5. Soit en effet :

$$id'\,d''\,\varphi = \gamma + \gamma',$$

la décomposition de Lebesgue du (1, 1)-courant d'ordre 0 $\;id'\,d''\,\varphi$.

La partie singulière $\gamma'$ est un courant $\geqq 0$, tandis que la partie absolument continue $\gamma$ vérifie par hypothèse l'inégalité $\gamma \geqq \theta$. On pose :

$$\gamma_\varepsilon(s, s) = \frac{1}{C\,\varepsilon^{2n}}\int \sum_{l,\,m} \gamma_{lm}(u)\,s'_l\,\bar{s}'_m\,\chi'\left(\frac{|\eta(0, u)|^2}{\varepsilon^2}\right)d\lambda(u)$$

(où $\gamma = i\sum \gamma_{lm}\,du_l\,d\bar{u}_m$), de sorte que (9.2) est bien vérifié. Puisque $\gamma$ est à coefficients $\gamma_{lm} \in L^1_{\mathrm{loc}}$, le théorème de Lebesgue montre que $\gamma_\varepsilon$ tend vers $\gamma$ presque partout sur X. Ceci prouve (9.4). L'hypothèse $\gamma \geqq \theta$ implique d'autre part :

$$\gamma_\varepsilon(s, s) \geqq \frac{1}{C\,\varepsilon^{2n}}\int \sum_{l,\,m} \theta_{lm}(u)\,s'_l\,\bar{s}'_m\,\chi'\left(\frac{|\eta(0, u)|^2}{\varepsilon^2}\right)d\lambda(u).$$

Grâce à la continuité de $\theta$, le second membre converge uniformément vers $\theta(s, s)$ lorsque $\varepsilon$ tend vers zéro. Quitte à remplacer $\gamma_\varepsilon$ par $\gamma_\varepsilon + \alpha(\varepsilon)\,\omega$ et $\lambda_\varepsilon$ par $\lambda_\varepsilon + \alpha(\varepsilon)$ [avec $\lim_{\varepsilon\to 0}\uparrow \alpha(\varepsilon) = 0$], toutes les propriétés (9.1) à (9.6) sont vérifiées, y compris (9.3). □

*Remarque* 9.2. — Plus généralement, soit $\theta$ une (1, 1)-forme continue à valeurs dans le fibré Herm(E, E) des endomorphismes hermitiens d'un fibré hermitien E. On suppose $id'\,d''\,\varphi \otimes \mathrm{Id}_E \geqq_s \theta$. Alors le théorème 9.1 est vrai en remplaçant (9.3) par :

(9.9) $$\gamma_\varepsilon \otimes \mathrm{Id}_E \geqq_s \theta.$$

Pour établir les propriétés (5.1) à (5.6) relatives à l'approximation de

$$ic(E, \varphi) = ic(E) + i(d'\,d''\,\varphi)_c,$$

on choisira $\theta = -ic(E)$. □

Lorsque $\varphi$ est plurisousharmonique, il est possible de donner un énoncé plus simple.

COROLLAIRE 9.3. — *Soit* $\varphi$ *une fonction plurisousharmonique sur* X. *Il existe une suite décroissante* $(\varphi_\nu)$ *de fonctions de classe* $C^\infty$ *et une suite* $(\lambda_\nu)$ *de fonctions continues* $\geqq 0$ *sur* X *telles que* :

$$\lim_{\nu \to +\infty} \downarrow \ \varphi_\nu = \varphi, \tag{9.10}$$

$$id'd''\varphi_\nu \geqq -\lambda_\nu \omega, \tag{9.11}$$

(9.12) $\lambda_\nu$ *converge uniformément vers zéro sur tout compact de* X.

*Démonstration.* — On applique le théorème 9.1 avec $\theta = 0$. La convergence uniforme de $\lambda_\nu$ n'est obtenue *a priori* que si $\varphi$ est localement bornée. On remplace donc $\varphi$ par $\sup(\varphi, -\nu)$ et on prend pour $\varphi_\nu$ une fonction de classe $C^\infty$ qui approche $\sup(\varphi, -\nu)$. Il est clair qu'on peut s'arranger pour que la suite $\varphi_\nu$ soit décroissante et pour que les conditions (9.10), (9.11), (9.12) soient réalisées. □

Le résultat suivant est relatif à l'approximation des fonctions plurisousharmoniques exhaustives, et constitue un maillon essentiel dans la preuve de la proposition 1.3.

THÉORÈME 9.4. — *Soit* $(X, \omega)$ *une variété kählérienne faiblement pseudoconvexe et* $\varphi$ *une fonction plurisousharmonique* **exhaustive** *sur* X. *Il existe des fonctions continues* $m$, M *exhaustives sur* X, *telles que* $0 < m < M$, *et ayant la propriété suivante : pour toute fonction continue* $\lambda > 0$ *sur* X, *on peut trouver une fonction* $\psi$ *de classe* $C^\infty$ *sur* X, *telle que* $m \leqq \psi \leqq M$ *et* $id'd''\psi \geqq -\lambda\omega$.

*Démonstration.* — Nous supposerons $\varphi \geqq 1$ [sinon il suffit de remplacer $\varphi$ par $\sup(\varphi, 1)$]. Pour tout réel $c \geqq 0$, on désigne par $X(c)$ l'ouvert $\{z \in X;\ \varphi(z) < c\}$. Soit $c_0 = 0 < 1 < c_1 < \ldots < c_\nu < \ldots$ une suite de réels tels que $\lim_{\nu \to +\infty} c_\nu = +\infty$ et $\overline{X(c_\nu)} \subset X(c_{\nu+1})$; la suite $c_\nu$ existe car $\varphi$ est exhaustive. On a donc :

$$\sup_{z \in \overline{X(c_\nu)}} \varphi(z) < c_{\nu+1}. \tag{9.13}$$

On considère d'autre part une suite de réels $\alpha_0 = 1 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots$ qui sera déterminée ultérieurement. La fonction plurisousharmonique $\varphi_\nu = \alpha_\nu\ (\varphi - c_{3\nu})$, qui est localement bornée, peut être approximée au moyen du théorème 9.1. D'après (9.13) on a :

$$\sup \varphi_\nu(z) < \alpha_\nu (c_{3\nu+6} - c_{3\nu}) \quad \text{pour} \quad z \in \overline{X(c_{3\nu+5})},$$
$$\sup \varphi_\nu(z) < 0 \quad \text{pour} \quad z \in \overline{X(c_{3\nu-1})}, \quad \nu \geqq 1.$$

Il existe donc une fonction $\psi_\nu$ de classe $C^\infty$ sur X telle que :

$$id'd''\psi_\nu > -\frac{1}{2}\lambda\omega \ \text{en tout point} \ z \in \overline{X(c_{3\nu+5})}, \tag{9.14}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi_\nu(z) \leqq \psi_\nu(z) < \alpha_\nu(c_{3\nu+6} - c_{3\nu}) \ \text{en tout point} \ z \in \overline{X(c_{3\nu+5})}, \\ \psi_\nu(z) < 0 \ \text{en tout point} \ z \in \overline{X(c_{3\nu-1})}, \quad \nu \geqq 1. \end{array}\right. \tag{9.15}$$

Des inégalités (9.15) on déduit pour $z\in\overline{X(c_{3\nu+2})}\setminus X(c_{3\nu+1})$ :

$$(9.16)\qquad \begin{cases} \psi_\nu(z)\geqq\varphi_\nu(z)\geqq\alpha_\nu(c_{3\nu+1}-c_{3\nu}), \\ \psi_{\nu-1}(z)<\alpha_{\nu-1}(c_{3\nu+3}-c_{3\nu-3}) \qquad \text{si} \quad \nu\geqq 1, \end{cases}$$

tandis que pour $z\in\overline{X(c_{3\nu-1})}\setminus X(c_{3\nu-2})$, $\nu\geqq 1$, on obtient :

$$(9.17)\qquad \psi_{\nu-1}(z)\geqq\varphi_{\nu-1}(z)\geqq\alpha_{\nu-1}(c_{3\nu-2}-c_{3\nu-3})>0>\psi_\nu(z).$$

Pour pouvoir exploiter (9.16), nous définirons $\alpha_\nu$ par récurrence en posant :

$$(9.18)\qquad \alpha_\nu(c_{3\nu+1}-c_{3\nu})=2\,\alpha_{\nu-1}(c_{3\nu+3}-c_{3\nu-3})$$

de sorte que :

$$(9.19)\qquad \alpha_\nu(c_{3\nu+1}-c_{3\nu})>2\,\alpha_{\nu-1}(c_{3\nu-2}-c_{3\nu-3})>\ldots>2^\nu\alpha_0(c_1-c_0)>2^\nu.$$

L'idée est de recoller les fonctions $\psi_\nu$ pour obtenir une fonction $\psi$ qui satisfasse aux exigences du théorème 9.4.

Soit $\chi_1$ une fonction $\geqq 0$ de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$, à support dans l'intervalle $[0, 2]$, telle que $\chi_1(2-t)=\chi_1(t)$ et $\int_0^2 \chi_1(t)\,dt=1$. Il vient :

$$(9.20)\qquad \int_0^2 t\,\chi_1(t)\,dt=\int_0^2(2-t)\,\chi_1(t)\,dt=\int_0^2\chi_1(t)\,dt=1.$$

On « interpole » entre $\psi_{\nu-1}$ et $\psi_\nu$ en posant :

$$(9.21)\qquad \psi'_\nu(z)=\int_0^2 \sup(t\,\psi_{\nu-1}(z), \psi_\nu(z))\,\chi_1(t)\,dt.$$

Les inégalités (9.16) et l'égalité (9.18) entraînent :

$$\psi'_\nu=\psi_\nu \text{ au voisinage de } \overline{X(c_{3\nu+2})}\setminus X(c_{3\nu+1}),$$

tandis que (9.17) et (9.20) impliquent :

$$\psi'_\nu=\psi_{\nu-1} \text{ au voisinage de } \overline{X(c_{3\nu-1})}\setminus X(c_{3\nu-2}).$$

Il est donc légitime de poser :

$$(9.22)\qquad \begin{cases} \psi=\psi_0 \quad \text{sur } \overline{X(c_2)}, \\ \psi=\psi_\nu \quad \text{sur } \overline{X(c_{3\nu+2})}\setminus X(c_{3\nu+1}), \qquad \nu\geqq 1, \\ \psi=\psi'_\nu \quad \text{sur } X(c_{3\nu+1})\setminus\overline{X(c_{3\nu-1})}, \qquad \nu\geqq 1. \end{cases}$$

Le changement de variable $u=t\,\psi_{\nu-1}(z)-\psi_\nu(z)$ dans l'intégrale (9.11) donne :

$$\psi'_\nu(z)=\psi_\nu(z)+\int_0^{+\infty} u\,\chi_1\left(\frac{u+\psi_\nu(z)}{\psi_{\nu-1}(z)}\right)\frac{du}{\psi_{\nu-1}(z)};$$

$\psi'_\nu$ est donc de classe $C^\infty$ sur l'ouvert $X(c_{3\nu+1})\setminus\overline{X(c_{3\nu-1})}$, car sur cet ouvert on a d'après (9.16) et (9.19) :

(9.23) $$\psi_{\nu-1}\geqq\varphi_{\nu-1}\geqq\alpha_{\nu-1}(c_{3\nu-2}-c_{3\nu-3})>2^{\nu-1}.$$

Par conséquent $\psi$ est de classe $C^\infty$ sur X. Les lignes (9.15) et (9.22) montrent l'existence de la fonction continue M. De plus :

$$\psi=\psi_0\geqq\varphi_0=\varphi\geqq 1 \quad \text{sur } \overline{X(c_2)},$$

$$\psi=\psi_\nu>2^\nu \quad \text{sur } \overline{X(c_{3\nu+2})}\setminus X(c_{3\nu+1}) \quad [cf.\ (9.16),\ (9.19)],$$

$$\psi=\psi'_\nu\geqq\psi_{\nu-1}>2^{\nu-1} \qquad \text{sur} \quad X(c_{3\nu+1})\setminus\overline{X(c_{3\nu-1})}$$

[*cf.* (9.20), (9.21) et (9.23)]. Il en résulte l'existence d'une fonction continue exhaustive $m$ ayant les propriétés annoncées.

Il nous reste seulement à montrer que $id'd''\psi\geqq-\lambda\omega$.

D'après (9.14) et (9.22), il suffira d'étudier le cas de la fonction $\psi'_\nu$. Soit $z_0\in X(c_{3\nu+5})$ un point fixé de X et $\mu$ une fonction de classe $C^2$ au voisinage de $z_0$ telle que $id'd''\mu=\lambda(z_0)\omega$ au point $z_0$. (9.14) montre que $\psi_\nu+\mu$ et $t\psi_{\nu-1}+\mu$, $0\leqq t\leqq 2$ sont p.s.h. sur un voisinage de $z_0$ indépendant de $t$. Par conséquent :

$$\psi'_\nu+\mu=\int_0^2 \sup(t\psi_{\nu-1}+\mu,\ \psi_\nu+\mu)\chi_1(t)\,dt$$

est p.s.h. au voisinage de $z_0$, et $id'd''\psi'_\nu\geqq-\lambda\omega$ en $z_0$. □

Le prochain énoncé fait intervenir la notion de stricte plurisousharmonicité pour une fonction non nécessairement de classe $C^2$.

Par définition, une fonction plurisousharmonique $\varphi$ sera dite strictement p.s.h. si le courant $id'd''\varphi$ est minoré par une (1, 1)-forme continue $\theta>0$, ce qui revient à dire que $\varphi$ est localement somme d'une fonction p.s.h. et d'une fonction strictement p.s.h. de classe $C^2$.

COROLLAIRE 9.5. — *Dans le théorème* 9.4, *on suppose de plus que* $\varphi$ *est strictement p.s.h. en dehors d'un compact* K *de* X. *Alors il existe une fonction p.s h.* $\psi$ *de classe* $C^\infty$, *exhaustive sur* X *et strictement p.s.h. en dehors d'un compact de* X.

*Démonstration.* — Reprenons en détail la construction du théorème 9.4. On peut trouver un compact $K_1$ et des fonctions $\psi_\nu$ de classe $C^\infty$ vérifiant (9.14), (9.15) ainsi que la condition :

$$id'd''\psi_\nu>0 \text{ en tout point } z\in\overline{X(c_{3\nu+5})}\setminus K_1.$$

Le reste du raisonnement montre alors que $\psi$ est strictement p.s.h. en dehors de $K_1$. Pour rendre $\psi$ p.s.h. sur X tout entier on choisit un réel $c>\sup\psi(K_1)$ et on remplace $\psi$ par la fonction $C^\infty$ :

$$\hat\psi(z)=\int_0^2 \sup(c+t,\ \psi(z))\chi_1(t)\,dt=\psi(z)+\int_0^{+\infty} u\chi_1(u+\psi(z)-c)\,du.$$

Il est clair que $\tilde{\psi}$ est p.s.h. sur X, et égale à $\psi$ donc strictement p.s.h. en dehors de $K_2 = \psi^{-1}(]-\infty, c+2])$. $\square$

Le théorème 9.1 permet aussi de retrouver dans le cas particulier des variétés kählériennes les résultats de R. Greene et H. Wu sur l'approximation des fonctions plurisousharmoniques continues.

COROLLAIRE 9.6 (R. Greene et H. Wu [11]). — *Soit* $\theta$ *une* $(1, 1)$*-forme réelle continue et* $\varphi$ *une fonction continue sur* X *telle que* $id'd''\varphi \geqq \theta$. *Alors pour toute fonction continue* $\lambda > 0$ *sur* X, *il existe une fonction* $\varphi$ *de classe* $C^\infty$ *sur* X *telle que* :

$$\varphi < \psi < \varphi + \lambda \qquad et \qquad id'd''\psi \geqq \theta - \lambda\omega.$$

*Démonstration.* — Grâce au théorème 9.1, on sait construire $\psi$ sur tout ouvert relativement compact dans X. La seule difficulté est de construire une fonction $\psi$ globale.

Soit $\rho : X \to [0, +\infty[$ une fonction exhaustive de classe $C^\infty$ sur X; on pose $X(c) = \{z \in X; \rho(z) < c\}$ pour tout réel $c$. On considère une suite de réels positifs $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ tels que $\varepsilon_{\nu+1} < (1/2)\varepsilon_\nu$ pour tout $\nu$. Cette suite sera précisée ultérieurement. Le théorème 9.1 montre qu'il existe une fonction $\varphi_\nu$ de classe $C^\infty$ sur $X(\nu+1)$ telle que :

$$(9.24) \qquad \varphi < \varphi_\nu < \varphi + \varepsilon_\nu \qquad \text{et} \qquad id'd''\varphi_\nu \geqq \theta - \varepsilon_\nu\omega \quad \text{sur } X(\nu+1).$$

On va recoller les fonctions $\varphi_\nu$ en utilisant un procédé analogue à (9.21). Soit $\chi_2$ une fonction de classe $C^\infty$ sur **X**, à support dans $[1/2, 3/2]$, telle que $\chi_2(2-t) = \chi_2(t)$ et $\int_0^{+\infty} \chi_2(t)\,dt = 1$, de sorte qu'on a aussi $\int_0^{+\infty} t\chi_2(t)\,dt = 1$. Posons :

$$(9.25) \qquad \psi_{\nu, t}(z) = \varphi_{\nu+1}(z) + t\varepsilon_\nu(1 - (\rho(z) - \nu)^2) \qquad \text{pour} \quad z \in X(\nu+2), \quad \nu \geqq 0,$$

$$(9.26) \qquad \psi_\nu(z) = \int_0^{+\infty} \sup(\psi_{\nu-1, t}(z), \psi_{\nu, 1}(z))\chi_2(t)\,dt \qquad \text{pour} \quad z \in X(\nu+1), \quad \nu \geqq 1.$$

Le changement de variable $u = u(t) = \psi_{\nu-1, t}(z) - \psi_{\nu, 1}(z)$ montre que :

$$\psi_\nu(z) = \psi_{\nu, 1}(z) + \int_0^{+\infty} u\chi_2\left(\frac{u + \psi_{\nu, 1}(z) - \varphi_\nu(z)}{\varepsilon_{\nu-1}(1 - (\rho - \nu + 1)^2)}\right) \frac{du}{\varepsilon_{\nu-1}(1 - (\rho - \nu + 1)^2)},$$

donc $\psi_\nu$ est de classe $C^\infty$ sur l'ouvert $\{\nu - 2 < \rho < \nu\}$.

Pour $\rho(z) = \nu$, on a d'après (9.24), (9.25) et (9.26) :

$$\psi_{\nu-1, t}(z) = \varphi_\nu(z) < \varphi(z) + \varepsilon_\nu < \varphi_{\nu+1}(z) + \varepsilon_\nu = \psi_{\nu, 1}(z),$$

tandis que pour $\rho(z) = \nu - 1$ on obtient :

$$\psi_{\nu, 1}(z) = \varphi_{\nu+1}(z) < \varphi(z) + \varepsilon_{\nu+1}, \qquad \psi_{\nu-1, t}(z) = \varphi_\nu(z) + t\varepsilon_{\nu-1}.$$

On a donc $\psi_{\nu-1,t}(z)>\psi_{\nu,1}(z)$ lorsque $\rho(z)=\nu-1$, $t\in\operatorname{Supp}\chi_2\subset[1/2,\ 3/2]$, car $(1/2)\varepsilon_{\nu-1}>\varepsilon_\nu>\varepsilon_{\nu+1}$, Il en résulte que :

$$\psi_\nu=\psi_{\nu,1} \text{ au voisinage du compact } \{\rho=\nu\},$$

$$\psi_\nu=\int_0^{+\infty}\psi_{\nu-1,t}\chi_2(t)\,dt=\psi_{\nu-1,1} \text{ au voisinage de } \{\rho=\nu-1\}.$$

On définit donc une fonction de classe $C^\infty$ sur X en posant :

$$\psi(z)=\psi_\nu(z) \qquad \text{pour} \quad \nu-1\leqq\rho(z)<\nu, \qquad \nu\geqq 1. \tag{9.27}$$

Lorsque $\nu-1\leqq\rho(z)<\nu$, les relations (9.24) et (9.25) montrent que :

$$\varphi(z)<\psi_{\nu,1}(z)\leqq\varphi_{\nu+1}(z)+\varepsilon_\nu<\varphi(z)+2\,\varepsilon_\nu,$$

et :

$$\varphi(z)<\psi_{\nu-1,t}(z)\leqq\varphi_\nu(z)+\frac{3}{2}\varepsilon_{\nu-1}<\varphi(z)+2\,\varepsilon_{\nu-1} \qquad \text{pour} \quad t\in\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right],$$

par suite $\varphi(z)<\psi(z)=\psi_\nu(z)<\varphi(z)+2\,\varepsilon_{\nu-1}$. La condition $\varphi<\psi<\varphi+\lambda$ sera donc réalisée dès que les réels $\varepsilon_\nu$ sont choisis assez petits. De plus, il est clair d'après (9.24), (9.25) et (9.26) qu'on peut faire en sorte que $id'd''\psi\geqq\theta-\lambda\,\omega$. □

*Remarque* 9.7. — N. Sibony m'a communiqué un exemple simple montrant que le corollaire 9.6 n'a pas d'analogue si l'on ne suppose pas que $\varphi$ est continue. Ainsi, soit $\sigma$ une fonction sousharmonique dans $\mathbb{C}$ telle que $\sigma(z_\nu)=-\infty$ pour une suite dense $\{z_\nu\}\subset\mathbb{C}$. On considère dans $\mathbb{C}^2$ la fonction strictement p.s.h. :

$$\varphi(z,\ w)=\sigma(z)+\log|w|+|z|^2+|w|^2,$$

et l'ouvert de Stein $X=\{(z,\ w)\in\mathbb{C}^2;\ \varphi(z,\ w)<0\}$.

Alors il est impossible de trouver une fonction p.s.h. $\psi$ continue sur X telle que $\varphi<\psi<0$. Une telle fonction $\psi$ serait en effet constante sur chacune des droites $\{z_\nu\}\times\mathbb{C}$ et $\mathbb{C}\times\{0\}$ contenues dans X. D'après la continuité de $\psi$ et la densité de la suite $\{z_\nu\}$, $\psi$ serait une constante $c$. On aurait donc $\varphi<c<0$ sur X, ce qui est impossible.

## BIBLIOGRAPHIE


[1] C. A. BERENSTEIN and B. A. TAYLOR, *Interpolation Problems in* $\mathbb{C}^n$ *with Applications to Harmonic Analysis* (à paraître au *Journal d'Analyse Math. de Jérusalem*).

[2] E. BOMBIERI, *Algebraic Values of Meromorphic Maps* (*Invent. Math.*, vol. 10, p. 267-287, 1970 et 11, p. 163-166, 1970).

[3] J. BRIANÇON, *Sur la clôture intégrale d'un idéal de germes de fonctions holomorphes en un point de* $\mathbb{C}^n$; preprint de l'Université de Nice, février 1974 (non publié).

[4] J. BRIANÇON et H. SKODA, *Sur la clôture intégrale d'un idéal de germes de fonctions holomorphes en un point de* $\mathbb{C}^n$ (*C. R. Acad. Sc.*, t. 278, série A, 1974, p. 949-951).

[5] J.-P. DEMAILLY, *Scindage holomorphe d'un morphisme de fibrés vectoriels semi-positifs avec estimations* $L^2$ (à paraître au *Séminaire P. Lelong, H. Skoda*, 1980-1981).

[6] J.-P. DEMAILLY, *Relations entre les différentes notions de fibrés et de courants positifs* (à paraître au *Séminaire P. Lelong, H. Skoda*, 1980-1981).

[7] J.-P. DEMAILLY et H. SKODA, *Relations entre les notions de positivités de P. A. Griffiths et de S. Nakano pour les fibrés vectoriels* [*Séminaire P. Lelong, H. Skoda* (*Analyse*), 19e année, 1978-1979, *Lecture Notes*, n° 822, 1980, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York].

[8] K. DIEDERICH und R. P. PFLUG, *Über Gebiete mit vollständiger Kählermetrik* (à paraître aux *Math. Annalen*).

[9] A. DOUADY et J.-L. VERDIER, *Séminaire de Géométrie analytique, E.N.S.*, 1972-1973, *Différents aspects de la positivité* (*Astérique*, 17, 1974, Société Mathématique de France).

[10] H. GRAUERT, *Charakterisierung der Holomorphie-gebiete durch die vollständige kählersche Metrik* (*Math. Annalen*, t. 131, 1956, p. 38-75).

[11] R. E. GREENE and H. WU, $C^\infty$ *Approximation of Convex, Subharmonic, and Plurisubharmonic Functions* (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 4e série, t. 12, 1979, p. 47 à 84).

[12] P. A. GRIFFITHS, *Hermitian Differential Geometry, Chern Classes and Positive Vector Bundles; Global Analysis*, Princeton University Press, 1969, p. 185-251.

[13] L. HÖRMANDER, $L^2$ *Estimates and Existence Theorem for the* $\bar{\partial}$*-Operator* (*Acta Math.*, 113, 1965, p. 89-152).

[14] L. HÖRMANDER, *An Introduction to Complex Analysis, in Several Variables;* Princeton, van Nostrand Company, 1966; 2e édition, North-Holland/American Elsevier, 1973.

[15] L. HÖRMANDER, *Generators for Some Rings of Analytic Functions* (*Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 73, 1967, p. 943-949).

[16] B. JENNANE, *Extension d'une fonction définie sur une sous-variété avec contrôle de la croissance* [*Séminaire P. Lelong-H. Skoda* (*Analyse*), 17e année, 1976-1977, *Lecture Notes in Math.*, n° 694, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1978].

[17] J. J. KELLEHER and B. A. TAYLOR, *Finitely Generated Ideals in Rings of Analytic Functions* (*Math. Ann.*, band 193, heft 3, 1971).

[18] P. LELONG, *Fonctionnelles analytiques et fonctions entières* (*n variables*); Montréal, les Presses de l'Université de Montréal, 1968 (*Séminaire de Mathématiques supérieures*, été 1967, n° 28).

[19] J. LE POTIER, *Annulation de la cohomologie à valeurs dans un fibré vectoriel holomorphe positif de rang quelconque* (*Math. Ann.*, t. 218, 1975, p. 35-53).

[20] S. NAKANO, *Vanishing Theorems for Weakly* 1-*Complete Manifolds II* (*Publ. R.I.M.S.*, Kyoto University, vol. 10, 1974, p. 101).

[21] R. RICHBERG, *Stetige streng pseudokonvexe Funktionen* (*Math. Ann.*, t. 175, 1968, p. 257-286).

[22] H. SKODA, *Application des techniques* $L^2$ *à la théorie des idéaux d'une algèbre de fonctions holomorphes avec poids* (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, t. 5, fasc. 4, 1972, p. 545-579).

[23] H. SKODA, *Formulation hilbertienne du Nullstellensatz dans les algèbres de fonctions holomorphes;* paru dans l'*Analyse harmonique dans le domaine complexe*, *Lecture Notes in Math.*, n° 336, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1973.

[24] H. SKODA, *Morphismes surjectifs et fibrés linéaires semi-positifs* [*Séminaire P. Lelong-H. Skoda* (*Analyse*), 17e année, 196-77, *Lecture Notes in Math.*, n° 694, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1978].

[25] H. SKODA, *Morphismes surjectifs de fibrés vectoriels semi-positifs* (*Annales scient. Éc. Norm. Sup.*, 4e série, t. 11, p. 577-611, 1978).

[26] H. SKODA, *Relèvement des sections globales dans les fibrés semi-positifs* [*Séminaire P. Lelong-H. Skoda* (*Analyse*), 19e année, 1978-1979, *Lecture Notes in Math.*, n° 822, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1980].

[27] H. SKODA, *Estimations* $L^2$ *pour l'opérateur* $\bar{\partial}$ *et applications arithmétiques* [*Séminaire P. Lelong* (*Analyse*), 16e année, 1975-1976, p. 314-323, *Lecture Notes in Math.*, n° 538, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1977].

[28] H. SKODA, *Sous-ensembles analytiques d'ordre fini ou infini dans* $\mathbb{C}^n$ (*Bull. Soc. Math. Fr.*, t. 100, 1972, p. 353-408).

[29] A. WEIL, *Variétés kählériennes*, Hermann, Paris, 1957.



J. P. DEMAILLY
Université de Paris-VI,
Analyse complexe et géométrie, 4,
place Jussieu, 75230 Paris Cedex 05



(Manuscrit reçu le 24 février 1982,
révisé le 30 avril 1982).