ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

LAURE ÉLIE

Comportement asymptotique du noyau potentiel sur les groupes de Lie

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 15, nº 2 (1982), p. 257-364

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1982_4_15_2_257_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.
4e série, t. 15, 1982, p. 257 à 364.

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DU NOYAU POTENTIEL SUR LES GROUPES DE LIE

PAR LAURE ÉLIE

TABLE DES MATIÈRES

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE. — 0012-9593/1982/257/$ 5.00

0. Introduction

Soit G un groupe localement compact à base dénombrable. Si μ est une mesure de probabilité sur G, nous lui associons le noyau de convolution P défini, pour toute fonction borélienne f, par :

$$P f(g) = \varepsilon_g \star \mu(f) = \int_G f(gx)\, d\mu(x).$$

Alors si μ^n désigne le produit de convolution de n mesures égales à μ, la n-ième puissance de P vérifie :

$$P_n f(g) = \varepsilon_g \star \mu^n(f)$$

et nous nous intéressons au noyau potentiel $U = \sum_{n \geqq 0} P_n$.

Nous supposerons que la mesure $\sum_{n \geqq 0} \mu^n$ est une mesure de Radon, ce qui signifie, en termes probabilistes, que la marche aléatoire de loi μ est transiente. Il découle alors du principe du maximum que, pour tout compact K de G, la fonction $U 1_K$ définie par :

$$U 1_K(g) = \sum_{n \geqq 0} P_n 1_K(g) = \varepsilon_g \star \sum_{n \geqq 0} \mu^n(K) \qquad (g \in G)$$

est bornée et nous nous demandons si cette fonction tend ou non vers zéro lorsque g tend vers l'infini dans le groupe G. Plus précisément, nous étudions *l'ensemble* I_μ des valeurs d'adhérence vague de l'ensemble $\{\varepsilon_g \star \mu^n, g \in G\}$ lorsque g tend vers l'infini.

L'étude du comportement asymptotique du noyau potentiel est souvent appelée théorie du renouvellement. L'origine de ce mot renouvellement se trouve dans une interprétation concrète du cas particulier où $G = \mathbb{R}$ et où μ est portée par $\mathbb{R}^+$. Dans ce cas μ peut être interprétée comme la loi de probabilité de l'instant aléatoire où il faut remplacer ou renouveler une pièce de machinerie. Si on suppose, comme cela est légitime, que des pièces identiques ont des durées de vie indépendantes et équidistribuées, μ^n s'interprète comme la loi de probabilité de l'instant du n-ième renouvellement. Si I est un intervalle compact de $\mathbb{R}^+$, $\sum_{n \geqq 1} \mu^n(I)$ est le nombre moyen de renouvellements effectués dans le laps de temps I. On peut penser que ce phénomène devient stationnaire dans le temps et qu'après une longue période le nombre moyen de renouvellements dans l'intervalle I ne dépendra que de la longueur de I. Autrement dit, on s'attend à ce que $\sum_{n \geqq 1} \mu^n(x+\mathrm{I}) = \varepsilon_{-x} \star \sum_{n \geqq 1} \mu^n(\mathrm{I})$ admette une limite $\lambda(\mathrm{I})$ lorsque $x \to +\infty$ et que la mesure ainsi définie soit invariante par translation. Cet exemple fut une des motivations de l'étude du comportement asymptotique du noyau potentiel et le mot renouvellement fut conservé.

Remarquons que notre étude permet entre autre d'obtenir le comportement asymptotique du noyau potentiel V associé à un semi-groupe vaguement continu $\{\mu_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ de mesures de probabilités sur G. En effet, le noyau V s'écrit :

$$\mathrm{V} f(g) = \int_0^{+\infty} \varepsilon_g \star \mu_t(f)\, dt$$

et si nous posons $\mu = \int_0^{+\infty} e^{-t} \mu_t\, dt$, nous obtenons :

$$\mathrm{V} f(g) = \varepsilon_g \star \sum_{n \geqq 1} \mu^n(f);$$

nous retrouvons donc le noyau potentiel associé à un semi-groupe discret $\{\mu^n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Après les premiers travaux de Blackwell [6], Chung [14], Feller [22], Kesten et Spitzer ([40], [49]), le problème du renouvellement a été résolu sur les groupes abéliens par Port et Stone [42], puis non moyennables par Y. Derriennic et Y. Guivarc'h [16]. Ensuite ce furent les groupes nilpotents et de type (R) et les méthodes furent très variées selon les auteurs : A. Brunel et D. Revuz [12], Y. Guivarc'h et M. Keane ([33], [34]) et B. Roynette ([46], [47]). Citons enfin le travail récent de C. Sunyach sur les groupes unimodulaires ([50], [51]).

Le type de résultats obtenus était le suivant : l'ensemble I_μ était réduit à la mesure nulle dès que G n'est pas extension d'un groupe compact par $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$; et dans ce dernier cas, l'ensemble I_μ avait exactement deux éléments : une mesure de Haar et la mesure nulle.

En revanche, le cas des groupes non unimodulaires moyennables n'avait pas été abordé et il était difficile de prévoir si les résultats ci-dessus se généralisaient. Dans cet article, nous recherchons de façon systématique les groupes susceptibles de porter une probabilité μ telle que I_μ ne soit pas réduit à la mesure nulle et plus précisément, nous nous posons les problèmes suivants :

Quelle est la structure des groupes G(LCD) sur lesquels il existe une mesure de probabilité μ telle que I_μ ait plus d'un élément ?

Quelles sont alors sur un tel groupe les mesures μ de ce type ?

Quels sont les éléments de I_μ et dans quelles directions du groupe sont-ils atteints ?

Nous répondons à ces questions et de manière complète, quant à la structure des groupes, la caractérisation des éléments de I_μ et des directions où ces éléments sont atteints, si G est un groupe presque connexe, c'est-à-dire tel que G/G_0 soit compact, où G_0 désigne la composante connexe de l'élément neutre et si la mesure μ est étalée. Et de façon surprenante, le groupe affine de la droite réelle, le plus simple des groupes moyennables non unimodulaires, porte une mesure μ tel que I_μ ne soit pas réduit à la mesure nulle.

L'ensemble I_μ a dans ce cas une infinité d'éléments. En effet, il est aisé de voir que les mesures de Haar ne peuvent être des éléments de I_μ sur un groupe non unimodulaire; et comme de plus on prouve que si G est presque connexe, l'ensemble I_μ a un, deux ou une infinité d'éléments, on en déduit que sur un groupe presque connexe non unimodulaire, l'ensemble I_μ stable par les translations à gauche du groupe, s'il n'est pas réduit à la mesure nulle, est de cardinal infini.

Lorsque G est un groupe de Lie ayant un nombre fini de composantes connexes, et en fait l'étude du cas où G est presque connexe se ramène à celle de ce cas-là, nous obtenons le théorème de structure suivant :

Il existe sur G une mesure de probabilité étalée μ telle que I_μ ne soit pas réduit à la mesure nulle si et seulement si G est produit semi-direct de deux sous-groupes fermés M et A tels que :

1. M soit nilpotent distingué connexe et simplement connexe.
2. A soit produit direct d'un groupe compact K et d'un groupe E isomorphe à $\mathbb{R}$.
3. Si $\mathscr{M}$ désigne l'algèbre de Lie de M, il existe un élément x de E tel que les valeurs propres de Ad x restreinte à $\mathscr{M}^{\mathbb{C}}$ soient toutes de module strictement supérieur à 1.

En particulier, un tel groupe est unimodulaire si et seulement si le groupe M est trivial et par suite un groupe connexe unimodulaire porte une mesure μ telle que I_μ ne soit pas réduit à la mesure nulle si et seulement s'il est isomorphe au produit direct de $\mathbb{R}$ et d'un groupe compact.

Nous désignons par la classe $\mathscr{D}$ la classe des groupes non unimodulaires vérifiant les conditions ci-dessus; les mesures μ pour lesquelles $I_\mu \neq \{0\}$ peuvent être caractérisées de la manière suivante : considérons la marche aléatoire droite de loi μ sur G et de probabilité de transition $\varepsilon_g \star \mu$ et si $\overline{[G, G]}$ désigne le sous-groupe fermé de G engendré par les commutateurs, distinguons deux cas :

Si la marche de loi μ admet une projection transiente sur $G/\overline{[G, G]}$, alors I_μ n'est pas réduit à la mesure nulle si et seulement si μ admet un moment d'ordre 1 et si $\int_G \operatorname{Log} \Delta(g)\, d\mu(g) < 0$, Δ désignant le module sur G.

Si la marche de loi μ admet une projection récurrente sur $G/\overline{[G, G]}$, sous des conditions de moment plus fortes (d'ordre $2+\varepsilon$), l'ensemble I_μ n'est pas réduit à $\{0\}$.

Précisons les éléments de I_μ; le groupe G opère par translation à gauche sur I_μ et nous montrons que l'ensemble I_μ, lorsqu'il n'est pas réduit à la mesure nulle, est formé, en dehors de cette mesure, de l'orbite sous G d'une mesure ν_0. Cette mesure ν_0 est μ-invariante et est de plus laissée stable sous l'action de A. L'ensemble I_μ est donc en fait composé de la mesure nulle et de l'ensemble $\{\varepsilon_z \star \nu_0,\ z \in M\}$, orbite sous M de la mesure ν_0.

Si nous désignons par $\check{\nu}$ l'image de ν par l'application $g \to g^{-1}$, la mesure ν_0 se met sous la forme $\widehat{m \otimes \lambda_A}$, où m est une mesure sur le G-espace M telle que $\hat{\mu} \star m = m$, le produit de convolution étant défini en faisant opérer G sur M, et où λ_A est une mesure de Haar sur A. Remarquons que m est une mesure invariante pour la chaîne induite sur l'espace homogène $G/A = M$ de probabilité de transition $\hat{\mu} \star \varepsilon_z$ $(z \in M)$, et on montre que si $I_\mu \neq \{0\}$, alors nécessairement cette chaîne induite est récurrente Harris sur un ensemble m-plein, ce qui affirme entre autre l'unicité de la mesure invariante m. Lorsque la marche de loi μ admet une projection récurrente sur $G/\overline{[G, G]}$, cette mesure m est de masse infinie et ce résultat est d'autant plus intéressant que nous pouvons à l'aide de m construire des fonctions harmoniques positives bien que dans ce cas nous sachions que les fonctions μ et $\hat{\mu}$-harmoniques bornées soient constantes.

Remarquons que les résultats obtenus ne sont pas symétriques si la marche projection sur $G/\overline{[G, G]}$ est transiente, car si $\varepsilon_g \star U$ ne converge pas vaguement vers 0 lorsque g tend vers le point à l'infini de G, alors $\varepsilon_g \star \hat{U}$ et donc $U \star \varepsilon_g$ convergent vaguement vers 0. Si l'ensemble $\{\varepsilon_g \star U \star \varepsilon_{g'}, (g, g') \in G \times G\}$ est vaguement relativement compact, ce qui est le cas sur les groupes de la classe $\mathscr{D}$ exclusivement pour les marches de projection transiente sur $G/\overline{[G, G]}$, il est possible de symétriser le problème en recherchant les valeurs d'adhérence vague de cet ensemble. Ceci fait l'objet du chapitre VI.

Enfin, au chapitre VII, nous étudions plus précisément le comportement à l'infini du noyau potentiel lorsqu'il a lieu vers 0. Lorsque g tend vers le point à l'infini du groupe dans certaines directions, avec parfois des hypothèses plus fortes sur μ, nous explicitons des fonctions h continues de G dans $\mathbb{R}^{+*}$ telles que $h(g)\varepsilon_g \star U$ converge vaguement vers une mesure non nulle. Une des applications de la théorie du renouvellement est donc une détermination partielle du comportement asymptotique du noyau de Martin sur les groupes de la classe $\mathscr{D}$. Pour le cas du groupe affine de la droite réelle, nous avons mené une étude complète du comportement de ce noyau dans [20].

Une partie de nos résultats a été résumée dans [17].

CHAPITRE I

PRÉLIMINAIRES

A. Hypothèses et notations

1.1. Marche aléatoire. — Soient G un groupe localement compact à base dénombrable (LCD) d'élément unité e et μ une mesure de probabilité définie sur la tribu borélienne $\mathscr{B}$ de G. Considérons l'espace canonique $\Omega = G^{\mathbb{N}}$ muni de la tribu $\mathscr{F}$, produit des tribus boréliennes sur chaque facteur. Comme G est à base dénombrable, la tribu $\mathscr{F}$ est la tribu des boréliens de l'espace produit topologique Ω. Désignons par X_n l'application n-ième coordonnée de Ω dans G. La *marche aléatoire* (droite) de loi μ est par définition le triplet $(\Omega, (X_n)_{n \in \mathbb{N}}, (P_g)_{g \in G})$ où, pour tout g de G, P_g est une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathscr{F})$ telle que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit relativement à P_g une chaîne de Markov d'espace d'états G, de probabilité de transition $P(x, .) = \varepsilon_x \star \mu$ et d'état initial g.

Les probabilités $(P_g)_{g\in G}$ sur $(\Omega, \mathscr{F})$ peuvent être obtenues de la manière suivante : soit Q la mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathscr{F})$, produit des mesures μ sur chaque facteur; alors, pour tout g de G, P_g est l'image de Q par l'application de Ω dans Ω définie comme suit :

$$(g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots) \to (g, gg_1, gg_1 g_2, \ldots, gg_1 g_2, \ldots, g_n, \ldots).$$

En d'autres termes P_g p. s., les variables aléatoires $(X_{n-1}^{-1} X_n)_{n\geq 0}$ sont indépendantes de loi μ et la variable X_0 égale à g.

Si ν est une mesure positive sur $(G, \mathscr{B})$, nous définirons la mesure positive P_ν sur $(\Omega, \mathscr{F})$ par $P_\nu = \int_G P_g \, d\nu(g)$ et nous poserons, si f est une fonction $\mathscr{F}$ mesurable sur Ω, $E_\nu(f) = \int_\Omega f dP_\nu$. En particulier pour $g \in G$, nous noterons $E_g(f) = \int_\Omega f dP_g$.

Dans toute la suite, lorsque nous parlerons de marche aléatoire de loi μ sur G sans autre précision, nous évoquerons la marche aléatoire *droite*. Nous considérerons aussi la marche duale, c'est-à-dire la marche aléatoire droite dont la loi $\hat{\mu}$ est l'image de μ par l'application qui à g associe g^{-1}.

Nous imposerons fréquemment au groupe G (LCD) d'être *presque connexe*, c'est-à-dire que si G_0 est la composante connexe de l'élément neutre, G/G_0 est compact.

Soit G_μ le sous-groupe fermé engendré par le support de μ. De par la construction de P_g, $g \in G$, il est clair que, si $g \in G_\mu$:

$$P_g(X_n \in G_\mu \text{ pour tout } n) = 1.$$

L'ensemble G_μ est donc absorbant et il est naturel de faire l'hypothèse suivante :

(i) *la mesure* μ *est adaptée, c'est-à-dire* $G_\mu = G$.

1.2. NOYAU POTENTIEL. — Désignons par μ^n la n-ième puissance de convolution de μ. Alors si P est la probabilité de transition $P(g, .) = \varepsilon_g \star \mu$, la n-ième puissance de P notée P_n vérifie $P_n(g, .) = \varepsilon_g \star \mu^n$. Notons $\mu^0 = \varepsilon_0$ et $P_0(g, .) = \varepsilon_g$. Le noyau potentiel $U = \sum_{n\geq 0} P_n$ de la marche aléatoire de loi μ est donc défini si $g \in G$ et $A \in \mathscr{B}$ par :

$$U(g, A) = \sum_{n\geq 0} \varepsilon_g \star \mu^n(A) = E_g[\sum_{n\geq 0} 1_A(X_n)].$$

Si nous notons encore U la mesure $\sum_{n\geq 0} \mu^n$, nous obtenons :

$$U(g, .) = \varepsilon_g \star U.$$

Nous désignerons par $\mathscr{B}(G)$ ($\mathscr{B}^+(G)$) les fonctions boréliennes (positives) sur G, par $\mathscr{C}_b(G)$ l'espace des fonctions continues bornées réelles sur G muni de la norme de la convergence uniforme $\| \ \|$, par $\mathscr{C}_K(G)$ ($\mathscr{C}_K^+(G)$) l'espace des fonctions continues réelles (positives) à support compact sur G muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.

Si λ est une mesure positive, nous noterons, pour $f \in \mathscr{B}^+(G)$:

$$\lambda(f) = \langle f, \lambda \rangle = \int f(g)\, d\lambda(g).$$

Le noyau potentiel U opère sur $\mathscr{B}^+(G)$ par la formule suivante : pour $g \in G$ et $f \in \mathscr{B}^+(G)$:

$$U f(g) = \int_G f(x)\, U(g, dx) = \varepsilon_g \star U(f) = E_g\Big[\sum_{n \geqq 0} f(X_n)\Big].$$

Si σ_g désigne l'opérateur de translation à gauche par g dans G ($\sigma_g(x) = g.x$), σ_g opère sur $\mathscr{B}(G)$ par $\sigma_g f = f \circ \sigma_g$; et par suite :

$$U f(g) = U(\sigma_g f)(e) = \langle \sigma_g f, U \rangle.$$

Rappelons (chap. 3, § 4 de [45]) que la marche de loi μ est *transiente* sur G si et seulement si la mesure $U = \sum_{n \geqq 0} \mu^n$ est une *mesure de Radon*. Dans le cas contraire, la marche de loi μ est *récurrente* et pour tout ouvert 0 de G, $U(0) = \infty$.

Nous ferons sur μ l'hypothèse :

(ii) *la mesure* $U = \sum_{n \geqq 0} \mu^n$ *est une mesure de Radon.*

Alors :

(*a*) l'ensemble des mesures $\{ \varepsilon_g \star U, g \in G \}$ est *vaguement relativement compact.*

En effet, si K est un compact de G, il résulte du principe du maximum (chap. 2 de [45]) que la fonction $U 1_K = U(., K)$ atteint son maximum sur K. Par suite, pour tout g de G :

$$U 1_K(g) = \varepsilon_g \star U(K) \leqq \sup_{g \in K} (\varepsilon_g \star U(K)) \leqq U(K^{-1} K) < \infty.$$

De plus :

(*b*) pour tout élément f de $C_K(G)$, la fonction $U f$ est *uniformément continue à gauche.*

Cette assertion découle de l'inégalité :

$$| U f(xg) - U f(g) | \leqq \| \sigma_x f - f \| \, U 1_K(g) \leqq \| \sigma_x f - f \| \, U(K^{-1} K),$$

valable pour $x \in V$ voisinage compact de e et $g \in G$ si $K = V^{-1}$ Supp f.

1.3. ENSEMBLE I_μ DES MESURES LIMITES. — Nous supposerons dans toute la suite que μ vérifie les hypothèses (i) et (ii). L'étude du renouvellement consiste en la détermination de la fermeture de l'ensemble $\{ \varepsilon_g \star U, g \in G \}$ pour la topologie de la convergence vague. Comme d'après (*b*), l'application $g \to \varepsilon_g \star U$ est vaguement continue, il s'agit en fait d'étudier *l'ensemble* I_μ *des valeurs d'adhérence vague de l'ensemble* $\{ \varepsilon_g \star U, g \in G \}$ *lorsque g tend vers* δ, *point à l'infini du groupe dans la compactification d'Alexandroff.*

Cet ensemble I_μ est vaguement compact et a les propriétés suivantes :

(α) Il est formé de mesures μ-*excessives*, c'est-à-dire de mesures de Radon ν telles que $\nu \star \mu \leqq \nu$.

En effet si g_n est une suite d'éléments de G tendant vers δ telle que $\varepsilon_{g_n} \star \mathrm{U}$ converge vaguement vers ν, nous avons :

$$\varepsilon_{g_n} \star \mathrm{U} = \varepsilon_{g_n} \star \mathrm{U} \star \mu + \varepsilon_{g_n}$$

et il résulte du lemme de Fatou, que si $f \in \mathrm{C}_{\mathrm{K}}^{+}(\mathrm{G})$:

$$\nu(f) = \lim_n \varepsilon_{g_n} \star \mathrm{U}(f) \geqq \int_{\mathrm{G}} \lim_n (\varepsilon_{g_n} \star \mathrm{U} \star \varepsilon_x(f))\, d\mu(x) + \lim_n f(g_n) = \nu \star \mu(f).$$

De plus, il découle du théorème de Lebesgue, que l'ensemble I_μ est formé d'éléments μ-*invariants*, c'est-à-dire de mesures ν telles que $\nu \star \mu = \nu$, dans les deux cas suivants :

– si μ est à support compact, ou

– si l'ensemble $\{ \varepsilon_g \star \mathrm{U} \star \varepsilon_{g'}, (g, g') \in \mathrm{G} \times \mathrm{G} \}$ est vaguement relativement compact. Cette propriété sera précisée en 1.13.

Dans le cas général on ne peut affirmer *a priori* que les éléments de I_μ sont μ-invariants, mais il s'avère en fait que dans tous les cas étudiés, les mesures obtenues sont réellement μ-invariantes.

(β) L'ensemble I_μ est stable par translation à gauche :

$$\forall \nu \in \mathrm{I}_\mu, \quad \forall g \in \mathrm{G}, \qquad \varepsilon_g \star \nu \in \mathrm{I}_\mu$$

et l'ensemble $\{ \varepsilon_g \star \nu, g \in \mathrm{G} \}$ est vaguement relativement compact.

(γ) L'ensemble I_μ contient toujours la *mesure nulle*, notée 0.

En effet, pour tout g de G, $\varepsilon_{\mathrm{X}_n} \star \mathrm{U}$ converge vaguement, P_g p. s., vers 0 lorsque $n \to \infty$. La preuve est simple : pour tout f de $\mathrm{C}_{\mathrm{K}}^{+}(\mathrm{G})$, la suite de variables aléatoires $(\mathrm{U} f(\mathrm{X}_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est, P_g p. s., une surmartingale positive et converge donc p. s. Or de l'égalité :

$$\mathrm{E}_g[\mathrm{U} f(\mathrm{X}_n)] = \mathrm{P}_n\, \mathrm{U} f(g) = \sum_{m \geqq n} \mathrm{P}_m f(g),$$

il résulte que $\mathrm{E}_g[\mathrm{U} f(\mathrm{X}_n)]$ converge vers 0 lorsque $n \to \infty$, et par suite $\mathrm{U} f(\mathrm{X}_n)$ converge P_g p. s. vers 0.

En fait le plus souvent I_μ est réduit à la mesure nulle.

B. Classification des marches

Cette classification va être basée sur le cardinal de l'ensemble I_μ.

1.4. Définition. – Une marche aléatoire de loi μ sur un groupe G (LCD) sera dite de *type* I si l'ensemble I_μ a pour cardinal 1, c'est-à-dire est réduit à la mesure nulle. Elle sera dite de *type* II dans le cas contraire.

Une marche de loi μ sur G sera de plus dite *simple* si le cardinal de l'ensemble I_μ est au plus deux.

On peut remarquer que si l'ensemble I_μ a exactement deux éléments, l'élément non nul est une mesure de Haar à gauche puisque l'ensemble I_μ est stable par translation à gauche.

1.5. EXEMPLES. — Rappelons les résultats obtenus dans le cas non moyennable [16] et dans le cas abélien (*cf.* [45]).

1.5*a*. *Soit* G *un groupe non moyennable; alors toute marche sur* G *est de type I.*

1.5*b*. *Soit* G *un groupe abélien; alors il existe sur* G *une marche de type II si et seulement si* G *est extension d'un sous-groupe compact par* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{Z}$. *De plus toute marche sur* G *est simple.*

Jusqu'à présent, tous les groupes sur lesquels la théorie du renouvellement avait été menée étaient exclusivement porteurs de marches simples et le résultat 1.5*b* s'était généralisé.

Dans cet article, nous étudierons le type des marches définies sur des groupes G *presque connexes* (c'est-à-dire G/G_0 compact si G_0 est la composante connexe de l'élément neutre); nous verrons que dans le cas des groupes moyennables non unimodulaires, la situation est différente de 1.5*b* : il existe des groupes de ce type porteurs de marches de type II, l'exemple crucial étant celui du groupe affine de la droite réelle. De plus sur un tel groupe, une marche de loi μ de type II n'est jamais simple; le cardinal de l'ensemble I_μ est même infini, comme le prouve le théorème suivant :

1.6. THÉORÈME DE CLASSIFICATION. — *Soit* G *un groupe presque connexe. Si* μ *est une mesure de probabilité sur* G, *l'ensemble* I_μ *est soit connexe, soit de cardinal deux. Par suite l'ensemble* I_μ *a un, deux ou une infinité d'éléments.*

De plus si le cardinal de I_μ *est deux, le groupe* G *est produit direct d'un groupe compact et d'un groupe isomorphe à* $\mathbb{R}$.

La démonstration de ce théorème va reposer sur la notion de « bouts » d'un groupe, notion étudiée par Freudenthal [24] pour les groupes LCD connexes, puis par Hofmann et Mostert pour les groupes presque connexes [38].

1.7. DÉFINITION. — Un groupe G localement compact est dit avoir deux « bouts » s'il existe un espace compact G^* qui contienne un sous-ensemble dense G', homéomorphe à G, tel que l'ensemble G^*-G' ait exactement deux éléments.

1.8. PROPOSITION. — *Soit* G *un groupe* LCD *et* μ *une mesure de probabilité sur* G. *Si l'ensemble* I_μ, *muni de la topologie vague, n'est pas connexe, alors le groupe* G *a deux « bouts ».*

Preuve de 1.8. — L'espace $C_K(G)$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact est séparable; considérons une suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dense dans $C_K(G)$. Alors la suite $\{Uf_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est dense dans $\{Uf, f\in C_K(G)\}$ pour la topologie de la convergence uniforme. En effet il suffit de remarquer que si f est un élément de $C_K(G)$ et si $\{f_k\}$ est une sous-suite de $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant uniformément vers f et telle que les fonctions f_k aient toutes leur support dans un même compact K, nous avons :

$$\|U(f-f_k)\| \leqq \|f-f_k\| \,.\, \|U 1_K\|.$$

Comme le groupe G est LCD, son compactifié d'Alexandroff $\hat{G}=G\cup\{\delta\}$ est métrisable. Soit d une distance sur $\hat{G}$ compatible avec sa topologie; alors la topologie définie sur G par d est sa topologie initiale et G est un ouvert dense de $\hat{G}$.

Si l'ensemble compact I_μ n'est pas connexe, il existe deux ensembles A et B non vides fermés, donc compacts, tels que $I_\mu = A \cup B$ et $A \cap B = \emptyset$. Considérons alors l'espace $G^* = G \cup \{a\} \cup \{b\}$ et soit d' l'application symétrique de $G^* \times G^*$ dans $\mathbb{R}$ définie de la façon suivante :

$$\forall (x, y) \in G \times G, \quad d'(x, y) = d(x, y) + \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n \| U f_n \|} | U f_n(x) - U f_n(y) |,$$

$$d'(x, a) = d(x, \delta) + \inf_{\nu \in A} \left[\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n \| U f_n \|} | U f_n(x) - \nu(f_n) | \right],$$

$$d'(x, b) = d(x, \delta) + \inf_{\nu' \in B} \left[\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n \| U f_n \|} | U f_n(x) - \nu'(f_n) | \right],$$

$$d'(a, b) = \inf_{(\nu, \nu') \in A \times B} \left[\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n \| U f_n \|} | \nu(f_n) - \nu'(f_n) | \right].$$

Remarquons tout de suite que d' sépare les points de G^* : il s'agit en fait de vérifier que $d'(a, b)$ est non nul. S'il était nul, il existerait à cause de la compacité de A et de B deux mesures ν_1 et ν'_1, *éléments* respectifs de A et B, telles que :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n \| U f_n \|} | \nu_1(f_n) - \nu'_1(f_n) | = 0.$$

Par densité de la suite $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, les mesures ν_1 et ν'_1 seraient alors égales, ce qui est impossible.

Cette application d' n'est pas une distance car l'inégalité triangulaire :

$$d'(x, y) \leqq d'(x, a) + d'(a, y),$$

n'est pas toujours vérifiée.

Mais nous pouvons définir une distance d_1 sur G^* en posant :

$$d_1(a, b) = d'(a, b),$$
$$\forall x \in G, \quad d_1(x, a) = \inf[d'(x, a), d_1(a, b)],$$
$$d_1(x, b) = \inf[d'(x, b), d_1(a, b)],$$
$$\forall (x, y) \in G \times G, \quad d_1(x, y) = \inf[d'(x, y), d_1(x, a) + d_1(a, y), d_1(x, b) + d_1(b, y)].$$

Muni de cette distance d_1, l'espace G^* est un espace métrique séparé. Comme les fonctions $\{U f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sont continues pour la topologie initiale sur G, la distance d_1 définit sur G cette même topologie. De plus G est dense dans G^*. En effet, si ν est un élément de I_μ, il existe une suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans G tendant vers le point à l'infini δ telle que $\varepsilon_{g_n} \star U$ converge vaguement vers ν. Alors, si ν appartient à A, $d_1(g_n, a) \to 0$ et g_n converge vers a dans G^*. Par contre si ν appartient à B, g_n converge vers b dans G^*.

Montrons pour terminer que G^* est compact. Comme G^* est métrisable, il suffit de considérer une suite quelconque $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de G; soit cette suite reste dans un compact auquel cas elle admet une valeur d'adhérence dans G; soit elle tend vers δ, alors la suite vaguement relativement compacte $\{\varepsilon_{g_n} \star U\}_{n \in \mathbb{N}}$ a une valeur d'adhérence ν dans I_μ. Selon que ν appartient à A ou B, la suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a pour valeur d'adhérence a ou b dans G*.

Nous avons construit un compactifié G* de G tel que G*-G ait deux éléments, donc G a deux « bouts ».

Preuve du théorème 1.6. — La structure des groupes presque connexes qui admettent deux « bouts » est la suivante [38] :

Un tel groupe est produit semi-direct d'un sous-groupe distingué E isomorphe à $\mathbb{R}$ et d'un sous-groupe compact K, c'est-à-dire s'écrit EK avec $E \cap K = \{e\}$.

Considérons l'automorphisme η de K dans le groupe des automorphismes de E défini pour tout k de K et tout x de E par $\eta(k)(x) = kxk^{-1}$. Comme le groupe K est compact et le groupe E isomorphe à $\mathbb{R}$, l'automorphisme $\eta(k)$ $(k \in K)$ est soit l'automorphisme identique Id, soit l'automorphisme S qui à tout élément de E associe son inverse. L'ensemble $K_0 = \{k \in K, \eta(k) = \mathrm{Id}\}$ est un sous-groupe distingué dans G.

(i) Si l'ensemble K_0 est identique à K, alors G est *produit direct* des groupes E et K et on sait (*cf.* 1.5 *b*) qu'il existe sur un tel groupe des *marches de type II*.

(ii) Si l'ensemble K_0 est distinct de K, le groupe G/K_0 est isomorphe au groupe D_1 des translations et symétries de $\mathbb{R}$: $\{x \to \varepsilon x + b,\ b \in \mathbb{R},\ \varepsilon = \pm 1\}$.

Or toute marche transiente sur D_1 *est de type I*. Ce résultat est connu pour les marches de loi étalée (déf. donnée en 2.1) puisque D_1 est un groupe de type (R) (*cf.* [12] ou [34]). En appendice A 1, nous prouvons ce résultat sans hypothèse d'étalement.

Par suite, puisque K_0 est compact, toute marche sur G sera alors de type I.

Par conséquent un groupe G presque connexe admettant deux « bouts » porte une marche de loi μ de type II si et seulement si il est produit direct d'un groupe compact et d'un groupe isomorphe à $\mathbb{R}$; de plus dans ce cas le cardinal de I_μ est deux (*cf.* 1.5 *b*). Et il découle donc de la proposition 1.8 que si I_μ n'est pas connexe, I_μ a deux éléments et G a la structure annoncée.

C. Groupes quotients

La méthode que nous utiliserons pour aborder le problème du renouvellement sur un groupe G consistera en partie en la construction de groupes quotients adéquates de G, par exemple groupes quotients pour lesquels la théorie du renouvellement est connue. Le résultat fondamental suivant sera en ce sens un excellent outil.

1.9. Proposition. — *Soient* G *et* G′ *deux groupes localement compacts à base dénombrables, p un homomorphisme surjectif de* G *sur* G′ *et* μ *une mesure de probabilité sur* G; *on pose* $\mu' = p(\mu)$;

(*a*) *si la marche de loi* μ' *sur* G′ *est transiente et de type I, alors la marche de loi* μ *sur* G *est transiente et de type* I;

(*b*) *si de plus le noyau de p est compact, la réciproque de l'assertion* (*a*) *est vraie.*

Preuve. — L'inégalité suivante :

$$(\star) \qquad \varepsilon_g \star \sum_{k \geqq 0} \mu^k(\mathrm{A}) \leqq \varepsilon_{p(g)} \star \sum_{k \geqq 0} p(\mu)^k [p(\mathrm{A})],$$

vraie pour tout élément g de G et tout borélien A de G, assure que si la marche de loi $\mu' = p(\mu)$ sur G est transiente, la marche de loi μ sur G l'est aussi.

Soit ν un élément de I_μ; il existe une suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de G tendant vers le point à l'infini δ de G telle que $\varepsilon_{g_n} \star \mathrm{U}$ converge vaguement vers ν lorsque n tend vers l'infini. Si on considère dans G′ la suite $p(g_n)$, de deux choses l'une :

- soit $p(g_n)$ reste pour tout n dans un compact K_1 de G′;
- soit il existe une sous-suite extraite $p(g_{n_i})$ tendant vers le point à l'infini de G′.

Dans le deuxième cas, l'inégalité ($\star$) et le fait que la marche de loi $p(\mu)$ soit de type I entraînent que $\varepsilon_{g_{n_i}} \star \sum_{k \geqq 0} \mu^k$ conerge vaguement vers 0; la mesure ν est donc nulle.

Dans le premier cas, pour tout compact K de G et tout entier n, le compact $g_n^{-1}\mathrm{K}$ est inclus dans le borélien $p^{-1}[\mathrm{K}_1^{-1} p(\mathrm{K})]$. Comme $\mathrm{K}_1^{-1} p(\mathrm{K})$ est compact dans G′, l'inégalité ($\star$) entraîne que $\mathrm{U}[p^{-1}(\mathrm{K}_1^{-1} p(\mathrm{K}))]$ est fini et le théorème de Lebesgue permet de conclure à la nullité de ν.

Cette proposition s'applique au cas où G′ est un groupe quotient de G, et si ce groupe quotient ne porte que des marches transientes et de type I, il en est de même du groupe G; comme la théorie du renouvellement est connu sur les groupes abéliens, il est intéressant de considérer les groupes quotients abéliens du groupe G.

1.10. Définition. — On dira qu'un groupe LCD abélien A est de rang n s'il existe un groupe compact K et deux entiers n_1 et n_2 tels que $n = n_1 + n_2$ et tels que A soit isomorphe au produit direct $\mathrm{K} \times \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{Z}^{n_2}$.

Un tel groupe est à génération compacte et réciproquement, tout groupe abélien à génération compacte a la forme ci-dessus.

D'après 1.6 *b*, un groupe abélien porte une marche de type II si et seulement si il est de rang 1.

1.11. Groupes quotients abéliens. — Soiet G un groupe LCD et H un sous-groupe fermé de G, le groupe quotient G/H est abélien si et seulement si H contient le groupe $[\overline{\mathrm{G}, \mathrm{G}}]$, plus petit sous-groupe fermé de G contenant les commutateurs de G. Le groupe $\mathrm{G}/[\overline{\mathrm{G}, \mathrm{G}}]$ est donc un groupe quotient abélien de G de rang maximal. Si le rang de $\mathrm{G}/[\overline{\mathrm{G}, \mathrm{G}}]$ est supérieur à 1, toute marche transiente sur $\mathrm{G}/[\overline{\mathrm{G}, \mathrm{G}}]$ est de type I, mais on ne peut conclure sur le type des marches définies sur G car une marche transiente sur G peut avoir une projection récurrente sur $\mathrm{G}/[\overline{\mathrm{G}, \mathrm{G}}]$.

1.12. Définition. — Soient G un groupe LCD, $[\overline{\mathrm{G}, \mathrm{G}}]$ le plus petit sous-groupe fermé de G contenant les commutateurs de G et π la surjection canonique de G sur $\mathrm{G}/[\overline{\mathrm{G}, \mathrm{G}}]$. Soit μ une mesure de probabilité sur G.

Une marche de loi μ sur G sera dite *transiente en projection* (respectivement *récurrente en projection*) si la marche projection sur $\mathrm{G}/[\overline{\mathrm{G}, \mathrm{G}}]$ de loi $\pi(\mu)$ est transiente (respectivement récurrente).

En conséquence, si $G/\overline{[G, G]}$ n'est pas de rang 1, toute marche sur G transiente en projection est de type I.

De plus si $G/\overline{[G, G]}$ est de rang supérieur ou égal à 3, toute marche sur $G/\overline{[G, G]}$ est transiente (*cf.* (45)) et par suite toute marche sur G est de type I.

D. Propriété (P)

1.13. DÉFINITION. — Une marche de loi μ sur un groupe G (LCD) sera dite avoir la *propriété* (P) si l'ensemble $\{\varepsilon_g \star U \star \varepsilon_{g'},\ (g, g') \in G \times G\}$ est vaguement relativement compact.

Nous avons vu que cette propriété (P) assurait à l'ensemble I_μ d'être formé d'éléments μ-invariants (1.3). En fait elle simplifiera aussi la caractérisation des éléments de I_μ.

1.14. DÉFINITION. — Soit μ une mesure de probabilité sur G (LCD). Une fonction borélienne positive sera dite μ-*surharmonique* si :

$$\forall x \in G, \quad Pf(x) = \int_G f(xy)\, d\mu(y) \leqq f(x).$$

Une fonction borélienne finie f sera dite μ-*harmonique* s'il y a égalité.

1.15. Si ν est un élément de I_μ, ν est une mesure μ-excessive. Alors, pour tout élément φ de $C_K^+(G)$, la fonction f_φ définie pour $g \in G$ par :

$$f_\varphi(g) = \nu \star \varepsilon_{g^{-1}}(\varphi)$$

est une fonction continue $\hat{\mu}$-surharmonique positive.

Si on impose à la marche de loi μ d'avoir la propriété (P), la mesure ν est μ-invariante et de plus l'ensemble $\{\nu \star \varepsilon_g,\ g \in G\}$ est vaguement relativement compact. Par suite f_φ est alors une fonction continue $\hat{\mu}$-harmonique bornée.

La propriété (P) établit donc un certain lien entre les fonctions $\hat{\mu}$-harmoniques bornées et les éléments de I_μ et nous venons de prouver le résultat suivant :

1.16. PROPOSITION. — *Soit* μ *une mesure de probabilité sur* G (LCD). *On suppose que la marche de loi* μ *à la propriété* (P) *et que les fonctions continues* $\hat{\mu}$-*harmoniques bornées sont constantes. Alors l'ensemble* I_μ *est formé de mesures de Haar à droite.*

Nous verrons par la suite que cette proposition est fausse si la marche ne possède pas la propriété (P).

1.17. EXEMPLES. — (α) Sur un groupe abélien, toute marche transiente de loi μ à la propriété (P) car, sur un tel groupe, (P) équivaut à la relative compacité de l'ensemble $\{\varepsilon_g \star U,\ g \in G\}$. Ce résultat s'étend aux groupes nilpotents [9].

(β) Soient G et G' deux groupes LCD, p un homomorphisme surjectif de G sur G', μ une mesure de probabilité sur G. Si la marche de loi $p(\mu)$ sur G' à la propriété (P), il en est de même de la marche de loi μ sur G. Ceci découle de l'inégalité suivante :

$$\varepsilon_g \star U \star \varepsilon_{g'}(A) \leqq \varepsilon_{p(g)} \star p(U) \star \varepsilon_{p(g')}[p(A)],$$

vraie pour tout borélien A de G et tout élément (g, g') de $G \times G$.

Par conséquent toute marche sur G transiente en projection à la propriété (P).

(γ) Considérons par contre le groupe affine de la droite réelle. Ce groupe G_1 peut s'écrire comme le produit semi-direct $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$ où le produit de deux éléments (h, a) et (h', a') de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$ est défini par $(h, a)(h', a') = (h + ah', aa')$. Toute marche sur G_1 est transiente car G_1 est un groupe non unimodulaire [11]; mais toute marche sur G_1 récurrente en projection n'a pas la propriété (P).

En effet soit π la surjection canonique de G_1 sur $G_1/\overline{[G_1, G_1]}$ et soit μ une probabilité sur G telle que la marche de loi $\pi(\mu)$ sur $G_1/\overline{[G_1, G_1]} = \mathbb{R}^{+*}$ soit récurrente. Alors pour tout compact K_2 de $\mathbb{R}^{+*}$ d'intérieur non vide, $\pi(U)(K_2)$ est infini. Si K_1 est un compact de $\mathbb{R}$, pour tout élément a de $\mathbb{R}^{+*}$, nous avons :

$$\varepsilon_{(0,a)} \star U \star \varepsilon_{(0,a)^{-1}}(K_1 \times K_2) = U\left(\frac{1}{a} K_1 \times K_2\right).$$

Choisissons K_1 de manière à ce que l'ensemble $(1/a) K_1$ croisse vers $\mathbb{R}$ lorsque a décroît vers 0. Alors $U((1/a) K_1 \times K_2)$ croît vers $+\infty$ et l'ensemble $\{ \varepsilon_{(0,a)} \star U \star \varepsilon_{(0,a)^{-1}}, a \in \mathbb{R}^{+*} \}$ n'est pas vaguement relativement compact.

Une caractérisation précise des groupes presque connexes sur lesquels toute marche de loi étalée (*cf.* 2.1) à la propriété (P) a été obtenue en collaboration avec P. Bougerol dans [9].

E. Mesures de Haar et renouvellement

Nous avons vu en 1.16 que, sous certaines hypothèses sur μ, I_μ était formé de mesures de Haar à droite et nous avions remarqué en 1.4 que si l'ensemble I_μ a exactement deux éléments, l'élément non nul était une mesure de Haar à gauche. En fait sur les groupes non unimodulaires presque connexes, le cardinal de I_μ n'est jamais deux d'après le théorème 1.6; et on peut se demander si sur un groupe non unimodulaire, les mesures de Haar sont réellement susceptibles d'être éléments de I_μ. Notons que la mesure de Haar à droite est un élément μ-invariant.

1.18. THÉORÈME. — *Si le groupe* G (LCD) *est* non unimodulaire *et si* μ *est une mesure de probabilité sur* G, *les éléments non nuls de* I_μ *ne peuvent être ni des mesures de Haar à droite, ni des mesures de Haar à gauche.*

1.19. NOTATION. — Si m_D est une mesure de Haar à droite sur G, on note Δ la fonction *module* sur G définie pour tout $g \in G$ par $\varepsilon_g \star m_D = \Delta(g) m_D$.

Preuve du théorème 1.18. — Si m_D est un élément de I_μ, l'ensemble $\{ \varepsilon_g \star m_D, g \in G \}$ est vaguement relativement compact d'après 1.3 β, ce qui est impossible si le groupe G est non unimodulaire.

Supposons qu'une mesure de Haar à gauche m_G soit élément de I_μ. Alors la mesure m_G est μ-excessive et par suite la fonction Δ^{-1} est μ-surharmonique. En effet, si $f \in C_K^+(G)$:

$$m_G \star \mu(f) = \int_G \int_G f(xy)\, dm_G(x)\, d\mu(y) = m_G(f)\, \mu(\Delta^{-1}).$$

Comme $m_G \star \mu(f) \leqq m_G(f)$, on en déduit que $\mu(\Delta^{-1}) \leqq 1$ et donc que :

$$\int_G \Delta^{-1}(xy)\, d\mu(y) \leqq \Delta^{-1}(x).$$

La fonction Δ^{-1} vaut 1 sur $[\overline{G, G}]$, et si π désigne la surjection canonique de G sur $G/[\overline{G, G}]$, cette fonction Δ^{-1}, considérée comme fonction sur $G/[\overline{G, G}]$ est une fonction positive continue $\pi(\mu)$-surharmonique.

Si la marche de loi μ est récurrente en projection, la marche de loi $\pi(\mu)$ sur $G/[\overline{G, G}]$ est récurrente et la fonction continue $\pi(\mu)$-surharmonique Δ^{-1} est alors constante (*cf.* chap. 3, prop. 3.6 de [45]), ce qui est incompatible avec la non unimodularité de G.

Supposons donc que la marche de loi μ soit transiente en projection, elle a donc la propriété (P). Par suite si m_G est élément de I_μ, l'ensemble $\{ m_G \star \varepsilon_g, g \in G \}$ est vaguement relativement compact, ce qui est impossible si le groupe est non unimodulaire.

1.20. Corollaire. — *Soit μ une mesure de probabilité sur un groupe* G (LCD) *non unimodulaire. On suppose que la marche de loi μ a la propriété* (P) *et que les fonctions $\hat{\mu}$-harmoniques bornées continues sont constantes. Alors cette marche est de type I.*

Ce résultat est immédiat d'après 1.16.

CHAPITRE II

PREMIÈRE CARACTÉRISATION DES GROUPES DE TYPE II

Dorénavant nous ferons sur la probabilité μ l'hypothèse d'étalement et nous allons rechercher des conditions nécessaires pour que le groupe G porte une marche de loi étalée de type II.

2.1. Définition. — Une mesure de probabilité μ sur un groupe G (LCD) est dite *étalée* s'il existe un entier n tel que μ^n ne soit pas étrangère à une mesure de Haar sur G.

2.2. Définition. — Un groupe G (LCD) sera dit de *type I* si toute marche (transiente) de loi étalée sur G est de type I. Il sera dit de *type II* dans le cas contraire.

Nous prouverons dans ce chapitre le résultat suivant :

2.3. Théorème. — *Soit* G *un groupe presque connexe. Si* G *est de type II, alors :*

(i) G *est moyennable,*

(ii) $G/[\overline{G, G}]$ *est de rang* 1,

(iii) $G_0/[\overline{G_0, G_0}]$ *est de rang* 1.

L'assertion (i) n'est autre que le résultat de Y. Derriennic et Y. Guivarc'h [16] rappelé en 1.5*a*.

De la proposition 1.9, il découle que si une marche sur G est de type II, alors la marche projection sur le groupe abélien $G/\overline{[G, G]}$ est soit récurrente, soit transiente et de type II. Dans le deuxième cas, $G/\overline{[G, G]}$ est nécessairement de rang 1 (*cf.* 1.5 *b*). Il s'agira donc d'étudier les marches de type II récurrentes en projection, ce qui sera l'objet du paragraphe C.

Quant à l'assertion (iii) qui sera étudiée au paragraphe D, elle est suscitée par l'idée intuitive que si une marche sur G est de type II, alors la marche induite sur G_0 (lorsque G/G_0 est fini) est de type II.

Dans le paragraphe A, nous verrons quels renseignements techniques sur le noyau potentiel nous apporte l'hypothèse d'étalement; nous en déduirons en particulier qu'il suffit, pour déterminer les mesures limites du noyau potentiel d'une marche de loi étalée sur un groupe presque connexe, d'étudier ce problème sur un groupe de Lie ayant un nombre fini de composantes connexes.

Une autre application sera donnée au paragraphe B où sera mis en évidence le rôle privilégié de certaines directions sur un groupe non unimodulaire dans le comportement asymptotique du noyau potentiel.

A. Hypothèse d'étalement

Cette hypothèse nous servira principalement dans deux situations :

(*a*) pour avoir des renseignements sur les fonctions harmoniques bornées;

(*b*) pour obtenir certaines propriétés d'équicontinuité du noyau potentiel.

(*a*) Périodes des fonctions harmoniques. — Si μ est une mesure de probabilité étalée sur G, nous noterons S_μ l'ensemble non vide des points de G pour lesquels on peut trouver une mesure de Haar m sur G et un entier p tels que la restriction de m à un voisinage de g soit majorée par μ^p. Par construction l'ensemble S_μ est ouvert.

2.4. Définition. — Soit μ une mesure de probabilité sur G (LCD). Nous appelons μ-*période* tout élément h de G tel que pour toute fonction μ-harmonique bornée f, on ait $f(gh)=f(g)$ pour tout $g \in G$; l'ensemble des μ-périodes est évidemment un sous-groupe de G.

Rappelons le résultat suivant du à R. Azencott (th. IV.1 de [1]).

2.5. *Soient* μ *une mesure de probabilité sur* G *et* $(\Omega, (X_n)_{n\in\mathbb{N}}, (P)_g)_{g\in G})$ *la marche aléatoire de loi* μ *sur* G. *Soit* h *un élément de* G. *Si pour* P_e*-presque tout* $\omega \in \Omega$, *la suite* $\{X_n^{-1}(\omega)\, h X_n(\omega)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *possède une valeur d'adhérence appartenant à* $S_\mu S_\mu^{-1}$, *l'élément* h *est une* μ-*période*.

Lorsque μ est étalée, toute fonction μ-harmonique bornée est uniformément continue à droite; et A. Raugi a prouvé dans [44] que si on cherchait à supprimer l'hypothèse d'étalement, on pouvait obtenir un théorème analogue, mais concernant exclusivement les fonctions harmoniques bornées uniformément continues à droite, classe plus restrictive que celle des fonctions harmoniques en général.

2.6. Groupes compacts inclus dans le groupe des μ-périodes :

Soient G un groupe LCD et μ une mesure de probabilité étalée sur G. Soit K un sous-groupe compact distingué de G. On peut affirmer que le groupe K est inclus dans le groupe des μ-périodes dans les deux cas suivants :

– K est un sous-groupe suffisamment petit;

– G est moyennable et G/K est le groupe des $p(\mu)$-périodes, $p(\mu)$ désignant la projection de μ sur G/K.

Dans le premier cas, on choisit un voisinage V de l'élément neutre de e inclus dans $S_\mu S_\mu^{-1}$ et K doit être un sous-groupe compact distingué de G inclus dans V. Le résultat 2.5 permet de conclure.

Le deuxième cas découle aussi des travaux d'Azencott (*voir* prop. IV.4 et IV.8 de [1]).

(*b*) Propriétés d'équicontinuité du noyau potentiel.

2.7. Proposition. – *Soient* μ *une mesure de probabilité sur* G *et* f *un élément de* $C_K^+(G)$. *On note* R_g *et* H_g *les fonctions de* G *dans* $\mathbb{R}$ *définies pour tout* $(g, x)\in G\times G$ *par :*

$$R_g(x)=Uf(xg),$$

et :

$$H_g(x)=Uf(gx).$$

Alors l'ensemble des fonctions $\{R_g, g\in G\}$ *est équicontinu en tout point* x *de* G. *Si on suppose de plus* μ *étalée, il en est de même de l'ensemble* $\{H_g, g\in G\}$.

Preuve. – La première assertion est immédiate car la fonction Uf est uniformément continue à gauche (*cf.* 1.2*b*).

Supposons donc μ étalée et considérons l'expression :

$$H_g(x_0 y)-H_g(x_0),$$

pour x_0 fixé dans G, y appartenant à un voisinage compact V de e et g décrivant G. Remarquons que, pour $x\in G$:

$$H_g(x)=U(\sigma_g f)(x)=P_n U(\sigma_g f)(x)+\varepsilon_x\star\nu_n(\sigma_g f),$$

$$\text{où } n \text{ est un entier et } \nu_n=\varepsilon_0+\mu+\ldots+\mu^n.$$

Alors :

$$H_g(x_0 y)-H_g(x_0)=P_n H_g(x_0 y)-P_n H_g(x_0))+(\varepsilon_{x_0 y}\star\nu_n(\sigma_g f)-\varepsilon_{x_0}\star\nu_n(\sigma_g f)).$$

Montrons que si ν est une mesure bornée, l'ensemble $\{h_g, g\in G\}$ où $h_g(x)=\varepsilon_x\star\nu(\sigma_g f)=\varepsilon_{gx}\star\nu(f)$ est équicontinu en tout point de G. En effet comme f a son support dans un compact K :

$$\varepsilon_{gx_0 y}\star\nu(f)\leqq\|f\|\,\nu(y^{-1}x_0^{-1}g^{-1}K)\leqq\|f\|\,\nu(V^{-1}x_0^{-1}g^{-1}K),$$

pour $y\in V$ et cette dernière quantité tend vers zéro lorsque $g\to\delta$.

Par suite on peut trouver pour tout $\varepsilon>0$ un compact K_1 tel que :

$$\forall g \notin K_1, \quad \forall y \in V, \qquad \varepsilon_{g x_0 y} \star \nu(f) < \varepsilon.$$

De plus l'uniforme continuité à gauche de f permet de trouver un voisinage compact V_1 de e inclus dans V tel que :

$$\forall y \in V_1, \quad \forall g \in K_1, \qquad |\varepsilon_{g x_0 y} \star \nu(f) - \varepsilon_{g x_0} \star \nu(f)| < \varepsilon.$$

Par conséquent : $\forall \varepsilon>0$, $\forall x_0 \in G$, $\exists V_1$ voisinage compact de e tel que :

$$\forall y \in V_1, \quad \forall g \in G, \qquad |h_g(x_0 y) - h_g(x_0)| < 2\varepsilon.$$

Pour prouver l'équicontinuité de $\{H_g, g \in G\}$ en $x_0 \in G$, il suffit de montrer qu'il existe toujours un entier n et un voisinage V de e pour lequel $P_n H_g(x_0 y) - P_n H_g(x_0)$ soit arbitrairement petit pour $y \in V$. L'étalement va jouer un rôle fondamental. On sait que pour n entier suffisamment grand, μ^n peut s'écrire $h_n m_D + \beta_n$ où $h_n \in C_K^+(G)$, m_D est une mesure de Haar à droite et β_n une mesure dont la masse $\|\beta_n\|$ tend vers zéro quand $n \to \infty$. Alors :

$$|P_n H_g(x_0 y) - P_n H_g(x_0)| \leqq \left| \int (H_g(x_0 yz) - H_g(x_0 z)) h_n(z) m_D(dz) \right| + 2 \|H_g\| . \|\beta_n\|.$$

Or $\|H_g\| = \|U(\sigma_g f)\| = \|Uf\|$ et choisissons n de manière à ce que si on se fixe $\varepsilon>0$, $2\|Uf\| . \|\beta_n\| < \varepsilon$.

Remarquons que, si Δ désigne le module défini en 1.19 :

$$\begin{aligned} &\left| \int (H_g(x_0 yz) - H_g(x_0 z)) h_n(z) m_D(dz) \right| \\ &\qquad = \left| \int H_g(x_0 z)(\Delta(y) h_n(y^{-1} z) - h_n(z)) m_D(dz) \right. \\ &\qquad\qquad \leqq \|Uf\| \int |\Delta(y) h_n(y^{-1} z) - h_n(z)| m_D(dz). \end{aligned}$$

Il résulte alors de l'uniforme continuité à gauche de la fonction h_n que l'on peut trouver un voisinage compact V de e tel que, pour $y \in V$, ce dernier terme soit plus petit que ε. Donc :

$$\forall y \in V, \quad \forall g \in G, \qquad |P_n H_g(x_0 y) - P_n H_g(x_0)| < 2\varepsilon.$$

D'où la proposition.

A l'aide du théorème d'Ascoli, on déduit le corollaire suivant :

2.8. Corollaire. — *Sous les hypothèses de la proposition* 2.7 *les ensembles de fonctions* $\{R_g, g \in G\}$ *et* $\{H_g, g \in G\}$ *sont relativement compacts pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.*

Nous pouvons maintenant prouver le résultat technique fondamental suivant :

2.9. Théorème. — *Soit* μ *une mesure de probabilité étalée sur un groupe* G (LCD). *De toute suite d'éléments de* G *tendant vers* δ, *on peut extraire une sous-suite* $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *telle que, pour tout* $y \in G$, *la suite* $\varepsilon_{g_n y} \star U$ *converge vaguement.*

De plus pour tout élément f de $C_K(G)$, *la suite de fonctions* φ_n *définies, si* $y \in G$, *par* $\varphi_n(y)=\varepsilon_{g_n y} \star U(f)$ *converge uniformément sur tout compact vers une fonction* φ μ*-hamonique bornée.*

2.10. *Remarque.* — Nous savons que si g_n est une suite d'éléments de G telle que la suite $\varepsilon_{g_n} \star U$ converge vaguement vers une mesure ν, alors pour tout y de G, la suite $\varepsilon_{y g_n} \star U$ converge vaguement vers $\varepsilon_y \star \nu$.

Par contre, il est plus difficile de savoir si $\varepsilon_{g_n y} \star U$ converge, et sauf dans certains cas particuliers, l'hypothèse d'étalement nous sera nécessaire.

Pour déterminer ν, il est intéressant de connaître les translatées de ν et plus précisément d'expliciter l'ensemble $\{ y \in G, \varepsilon_y \star \nu = \nu \}$; mais si $f \in C_K(G)$, la fonction $\psi(y)=\varepsilon_y \star \nu(f)$ qui n'est généralement pas harmonique, n'est pas facile à étudier *a priori*; on utilisera alors souvent la méthode suivante : on étudiera la fonction harmonique $\varphi = \lim_n \varepsilon_{g_n .} \star U(f)$ et on cherchera, à l'aide de relations de commutation, des renseignements sur la fonction ψ et donc sur les translatées de ν.

2.11. *Preuve du théorème* 2.9. — Considérons une suite $(f_p)_{p \in \mathbb{N}}$ dense dans $C_K(G)$ pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. De toute suite de G, on peut extraire, d'après le corollaire 2.8, pour chaque fonction f_p, une sous-suite g_n^p telle que $U(\sigma_{g_n^p} f_p)$ converge uniformément sur tout compact lorsque $n \to \infty$. Par le procédé diagonal, on peut alors extraire une sous-suite g_n telle que pour tout p de $\mathbb{N}$, la suite $U(\sigma_{g_n} f_p)$ converge uniformémement sur tout compact lorsque $n \to \infty$. Comme la suite $(U f_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est dense dans l'ensemble $\{ U f, f \in C_K(G) \}$ pour la topologie de la convergence uniforme (*cf.* preuve de 1.8), on en déduit que pour tout f de $C_K(G)$ la suite de fonctions $U(\sigma_{g_n} f)$ converge uniformément sur tout compact, et donc que, pour tout y de G, $\varepsilon_{g_n y} \star U$ converge vaguement.

Notons si $f \in C_K(G)$, $\varphi_n = \varepsilon_{g_n .} \star U(f) = U(\sigma_{g_n} f)$ et $\varphi = \lim_n \varphi_n$. Alors φ est une fonction μ-harmonique bornée. En effet, pour tout y de G :

$$\varphi_n(y)=\varepsilon_{g_n y} \star U(f)=\varepsilon_{g_n y} \star \mu \star U(f)+f(g_n y)=P\varphi_n(y)+f(g_n y).$$

La suite de fonctions φ_n étant bornée par $\| U f \|$, φ est bornée par $\| U f \|$, et $P\varphi_n$ converge vers $P\varphi$ lorsque $n \to \infty$. Comme $\sigma_{g_n} f$ tend vers 0 lorsque $n \to \infty$, f étant dans $C_K(G)$, nous obtenons $\varphi = P\varphi$; et le théorème est prouvé.

De l'harmonicité des fonctions limites, il découle le corollaire suivant :

2.12. Corollaire. — *Soit* μ *une mesure de probabilité étalée sur un groupe* G (LCD). *Alors, pour tout élément f de* $C_K(G)$ *et tout compact* C *du groupe des* μ*-périodes, nous avons :*

$$\lim_{g \to \delta} U f(gy) - U f(g) = 0,$$

uniformément pour $y \in C$.

2.13. *Remarque.* — Ce résultat a été obtenu par une méthode différente par A. Brunel et D. Revuz (*cf.* prop. 2.4 de [12]) lorsque le groupe des μ-périodes est G tout entier.

Voici une première application de ce corollaire.

2.14. PROPOSITION. — *Soit* G *un groupe* LCD *et* K *un sous-groupe compact distingué de* G. *On note p la surjection canonique de* G *sur le groupe quotient* G/K *et on considère sur* G *une marche aléatoire de loi* μ. *Alors si* ν *est un élément de* I_μ, *la mesure image* $p(\nu)$ *de* ν *par p est un élément de* $I_{p(\mu)}$.

Si on suppose μ *étalée et le groupe* K *inclus dans le groupe des* μ*-périodes, l'application p définit une correspondance biunivoque entre* I_μ *et* $I_{p(\mu)}$.

De façon précise, si m_K *est la probabilité sur* G *dont la restriction à* K *est la mesure de Haar normalisée, la mesure* $\varepsilon_g \star m_K$ *est, pour tout* $g \in G$, *portée par* gK *et ne dépend que de* $p(g)$. *On la note* $m_{p(g)}$ *et on obtient alors pour tout élément* ν *de* I_μ *la désintégration suivante :*

$$\nu = \int_{G/K} m_y \, dp(\nu)(y).$$

Preuve. — De l'égalité :

$$\forall A \in \mathscr{B}, \quad \forall g \in G, \qquad \varepsilon_g \star \sum_{n \geqq 0} \mu^n(AK) = \varepsilon_{p(g)} \star \sum_{n \geqq 0} p(\mu)^n [p(A)],$$

il découle que si ν est un élément de I_μ, $p(\nu)$ est un élément de $I_{p(\mu)}$.

Réciproquement, si ν_1 est un élément de $I_{p(\mu)}$, alors il existe une mesure $\nu \in I_\mu$ telle $\nu_1 = p(\nu)$. En effet considérons une suite y_n de G/K telle que $\varepsilon_{y_n} \star \sum_{r \geqq 0} p(\mu)^r$ converge vers ν_1 et une suite g_n de G telle $y_n = p(g_n)$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut affirmer que $\varepsilon_{g_n} \star \sum_{r \geqq 0} \mu^r$ converge vers une mesure ν et, de l'égalité rappelée ci-dessus, il découle que $\nu_1 = p(\nu)$.

Supposons que μ est étalée et K inclus dans le groupe des μ-périodes. Nous allons prouver que, pour tout élément ν de I_μ, nous avons :

$$\forall k \in K, \quad \varepsilon_k \star \nu = \nu.$$

La désintégration de ν en découlera et de ce fait l'application $p : I_\mu \to I_{p(\mu)}$ sera injective et par suite bijective.

Soit $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de G telle que $\varepsilon_{g_n} \star U$ converge vaguement vers ν. Alors si $f \in C_K(G)$, nous savons que :

$$\forall k \in K, \quad \varepsilon_k \star \nu(f) = \lim_n \varepsilon_k \star \varepsilon_{g_n} \star U(f) = \lim_n U f(k g_n).$$

Comme le sous-groupe K est distingué, il existe, pour tout $n \in \mathbb{N}$, un élément k_n de K tel que $k g_n = g_n k_n$. De plus K est inclus dans le groupe des μ-périodes et d'après le corollaire 2.12 nous avons :

$$\lim_{n \to \infty} (U f(g_n) - U f(g_n k')) = 0,$$

uniformément pour k' appartenant au compact K.

Il en résulte que :

$$\nu(f)=\lim_n \mathrm{U} f(g_n)=\lim_n \mathrm{U} f(g_n k_n)=\lim_n \mathrm{U} f(k g_n)=\varepsilon_k \star \nu(f).$$

Considérons une désintégration de ν relativement à la projection p :

$$\nu=\int_{\mathrm{G}/\mathrm{K}} \nu_y \, dp(\nu)(y),$$

où $p(\nu)$ est l'image de ν par p et où ν_y est, pour tout $y \in \mathrm{G}/\mathrm{K}$, une probabilité sur G portée par $p^{-1}(y)$. Nous savons (*cf.* livre VI, chap. 6, 3.1 de [10]) que, G étant LCD, une telle désintégration existe et que la famille de mesures $\{\nu_y,\ y \in \mathrm{G}/\mathrm{K}\}$ est $p(\nu)$ p. s. unique.

La relation $\varepsilon_k \star \nu=\nu$, vraie pour $k \in \mathrm{K}$, entraîne que :

$$\nu=\int_{\mathrm{G}/\mathrm{K}} \varepsilon_k \star \nu_y \, dp(\nu)(y).$$

Comme la probabilité $\varepsilon_k \star \nu_y$ est portée par $p^{-1}(y)$, nous avons obtenu pour chaque $k \in \mathrm{K}$, une nouvelle désintégration de ν. Il en résulte que :

$$\forall k \in \mathrm{K}, \quad \varepsilon_k \star \nu_y=\nu_y \qquad p(\nu) \text{ p. s.}$$

La séparabilité de K entraîne alors qu'il existe un ensemble B de G/K tel que $p(\nu)(B^c)=0$ et tel que, pour tout y de B, la mesure ν_y est invariante par les translations à gauche par les éléments de K. Comme K est distingué, les probabilités $\varepsilon_{g^{-1}} \star \nu_y$ où $g \in \mathrm{G}$ et $y \in \mathrm{B}$, ont la même propriété. Lorsque $g \in p^{-1}(y)$, cette mesure $\varepsilon_{g^{-1}} \star \nu_y$ est portée par K et est par suite la mesure de Haar normalisée sur K. Donc, pour tout $y \in \mathrm{B}$, $\nu_y=\varepsilon_g \star \mathrm{m}_{\mathrm{K}}=m_y$ si $g \in p^{-1}(y)$. D'où la désintégration annoncée.

2.15. Application. — Si G est presque connexe, alors il existe [41] des sous-groupes compacts arbitrairement petits K distingués dans G tels que G/K soit un groupe de Lie ayant un nombre fini de composantes connexes. Or si μ est étalée et K suffisamment petit, nous avons vu (2.6) que K est inclus dans le groupe des μ-périodes. En conséquence, comme le cadre de notre travail sera principalement les groupes presque connexes, la proposition précédente 2.14 permettra de restreindre notre étude au cas des *groupes de Lie* G *tels que* G/G_0 *soit fini.*

B. Directions privilégiées sur les groupes non unimodulaires

Nous allons voir le rôle important que joue le module dans l'étude du comportement asymptotique du noyau potentiel et en particulier le caractère privilégié qu'il accorde à certaines directions.

2.16. Théorème. — *Soit* G *un groupe* LCD *non unimodulaire et* Δ *la fonction module définie en* 1.19. *Si* μ *est une mesure de probabilité étalée sur* G, *alors* $\varepsilon_g \star \mathrm{U}$ *converge vaguement vers* 0 *lorsque g tend vers le point à l'infini* δ *de* G *de manière à ce que* $\Delta(g)$ *reste borné supérieurement.*

Preuve. — Soit ν une valeur d'adhérence de $\{\varepsilon_g \star \mathrm{U},\ g \in \mathrm{G}\}$ lorsque g tend vers δ de manière à ce que $\Delta(g)$ reste borné supérieurement. Il existe alors d'après le théorème 2.9 une suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de G telle que $\overline{\lim_n}\, \Delta(g_n)$ soit fini, telle que $\varepsilon_{g_n} \star \mathrm{U}$ converge vaguement vers ν et surtout telle que $\varepsilon_{g_n y} \star \mathrm{U}$ converge vaguement pour tout $y \in \mathrm{G}$. Si f est un élément quelconque de $\mathrm{C}_\mathrm{K}^+(\mathrm{G})$, nous considérons la fonction μ-harmonique bornée $\varphi = \lim_n \mathrm{U}\,\sigma_{g_n} f$. Si nous montrons que φ est nulle, il est clair que la mesure ν sera aussi nulle.

Si h_1 et h_2 sont deux éléments de $\mathscr{B}^+(\mathrm{G})$, nous notons, si m_D est une mesure de Haar à droite :

$$\langle h_1, h_2 \rangle_{m_\mathrm{D}} = \int_\mathrm{D} h_1(g)\, h_2(g)\, m_\mathrm{D}(dg).$$

Soit h un élément de $\mathrm{C}_\mathrm{K}^+(\mathrm{G})$, nous avons par dualité, pour tout $g \in \mathrm{G}$:

$$\langle \mathrm{U}\,\sigma_g f, h \rangle_{m_\mathrm{D}} = \langle \sigma_g f, \hat{\mathrm{U}}\, h \rangle_{m_\mathrm{D}} = \Delta(g) \langle f, \hat{\mathrm{U}}\, \sigma_{g^{-1}} h \rangle_{m_\mathrm{D}},$$

et donc :

$$|\langle \mathrm{U}\,\sigma_g f, h \rangle_{m_\mathrm{D}}| \leqq \Delta(g)\, m_\mathrm{D}(f)\, \|\hat{\mathrm{U}}\, h\|.$$

Si nous appliquons cette relation à la suite $g_n y$ où y est un élément de G, il découle du théorème de Lebesgue, lorsque $n \to \infty$, que :

$$(\star) \qquad |\langle \sigma_y \varphi, h \rangle_{m_\mathrm{D}}| \leqq \Delta(y) \underline{\lim_n}\, \Delta(g_n)\, m_\mathrm{D}(f)\, \|\hat{\mathrm{U}}\, h\|.$$

Si $\underline{\lim_n}\, \Delta(g_n) = 0$, alors pour tout $h \in \mathrm{C}_\mathrm{K}^+$, le terme $\langle \varphi, h \rangle_{m_\mathrm{D}}$ est nul. Comme μ est étalée, la fonction μ-harmonique bornée φ est continue et est donc nulle.

Si $\underline{\lim_n}\, \Delta(g_n) \neq 0$, nous allons distinguer deux cas selon que la marche sur $\mathbb{R}^{+*}$ de loi $\Delta(\mu)$ est récurrente (cas 1) ou transiente (cas 2).

Cas 1. — Comme μ est étalée, pour p entier suffisamment grand, μ^p peut s'écrire $h_p\, m_\mathrm{D} + \beta_p$ où $h_p \in \mathrm{C}_\mathrm{K}^+(\mathrm{G})$ et où β_p est une mesure dont la masse tend vers zéro lorsque $p \to \infty$.

Puisque φ est μ-harmonique, nous avons donc si p est suffisamment grand,

$$\varphi(y) = \mathrm{P}_p\, \varphi(y) = \langle \sigma_y \varphi, h_p \rangle_{m_\mathrm{D}} + \beta_p(\sigma_y \varphi).$$

Il découle alors de l'inégalité $(\star)$ que :

$$\varphi(y) \leqq \Delta(y) \underline{\lim_n}\, \Delta(g_n)\, m_\mathrm{D}(f)\, \|\hat{\mathrm{U}}\, h_p\| + \|\varphi\|\, \|\beta_p\|.$$

Par conséquent, pour tout ε fixé de $\mathbb{R}^{+*}$, il existe une constante C_ε telle que pour tout $y \in \mathrm{G}$:

$$\varphi(y) \leqq \mathrm{C}_\varepsilon\, \Delta(y) + \varepsilon.$$

Nous savons (*cf.* chap. 3, prop. 3.2 de [45]) que φ étant harmonique bornée, pour tout $g \in G$, $\varphi(X_n)$ est relativement à P_g une martingale bornée qui converge donc P_g p. s. vers une variable aléatoire Z et que de plus $\varphi(g) = E_g(Z)$. Comme la marche de loi $\Delta(\mu)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ qui n'est autre que l'image par l'homomorphisme Δ de la marche de loi μ sur G est récurrente, la suite $\Delta(X_n)$ revient P_g p. s. une infinité de fois dans l'intervalle $]0, \varepsilon/C_\varepsilon[$. La variable aléatoire Z est donc P_g p. s. majorée par 2ε; elle est par suite P_g p. s. nulle, pour tout $g \in G$. La fonction φ égale en g à $E_g(Z)$ est alors nulle.

Cas 2. — Comme la suite $\Delta(g_n)$ reste dans un compact de $\mathbb{R}^{+*}$, alors pour tout compact K de G la suite $g_n^{-1} K$ reste dans un borélien A de G dont l'image $\Delta(A)$ est compacte. De la transience de la marche de loi $\Delta(\mu)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, il résulte que :

$$U(A) \leqq \sum_p \Delta(\mu)^p (\Delta(A)) < \infty.$$

Le théorème de Lebesgue entraîne alors que $\varepsilon_{g_n} \star U(K)$ qui est égal à $U(g_n^{-1} K)$ tend vers zéro lorsque $n \to \infty$. Par suite, la mesure ν est nulle.

On peut remarquer que, dans ce deuxième cas, l'hypothèse d'étalement n'a pas été utilisée. On peut noter aussi que, puisque le noyau de l'homomorphisme Δ contient $\overline{[G, G]}$, si la marche de loi $\Delta(\mu)$ est transiente, la marche de loi μ sur G est transiente en projection.

C. Marches récurrentes en projection

Dans ce paragraphe, nous verrons qu'il suffit, pour trouver les groupes G presque connexes de type II, de rechercher les groupes presque connexes susceptibles de porter une marche de loi étalée, transiente en projection et de type II; en d'autres termes, nous prouverons le résultat suivant :

2.17. Théorème. — *Si* G *est un groupe presque connexe et de type II, il existe sur* G *une marche de loi étalée transiente en projection et de type II.*

2.18. Corollaire. — *Si* G *est un groupe presque connexe et de type II, alors le groupe* $G/\overline{[G, G]}$ *est de rang* 1.

En effet, si G porte une marche transiente en projection et de type II, la marche projection sur $G/\overline{[G, G]}$ est transiente et de type II d'après 1.9 et par suite $G/\overline{[G, G]}$ est de rang 1 (*cf.* 1.5 *b*).

Pour prouver le théorème 2.17, nous distinguerons deux cas selon que le groupe G est ou n'est pas unimodulaire. La détermination du type des marches récurrentes en projection sera simple et directe dans le cas unimodulaire et se ramènera dans le cas non unimodulaire à l'étude du type des marches transientes en projection.

2.19. Théorème. — *Soit* G *un groupe presque connexe unimodulaire. Alors toute marche sur* G *récurrente en projection et de loi étalée est de type I.*

La preuve de ce théorème reposera sur les lemmes et propositions suivantes.

2.20. LEMME. — *Soit* G *un groupe presque connexe moyennable et soit* μ *une mesure de probabilité étalée sur* G. *Si la marche de loi* μ *sur* G *est récurrente en projection, les fonctions* μ *et* $\hat{\mu}$*-harmoniques bornées sont constantes.*

Preuve. — Rappelons le résultat de L. Birgé et A. Raugi [5] :

Si G est un groupe presque connexe moyennable, il existe une famille d'homomorphismes continus $(\psi_i)_{i\in I}$ de G dans $(\mathbb{R}, +)$ telle que si μ est une mesure de probabilité étalée sur G, on ait l'alternative suivante :

— ou bien il existe un $i \in I$ tel que la marche sur $(\mathbb{R}, +)$ de loi $\psi_i(\mu)$ converge p. s. vers $-\infty$;

— ou bien les fonctions μ-harmoniques bornées sont constantes.

Or tout homomorphisme continu ψ de G dans $(\mathbb{R}, +)$ peut être considéré comme un homomorphisme sur $G/\overline{[G, G]}$. Si la marche de loi μ est récurrente en projection, alors, pour tout $i \in I$, la marche sur $(\mathbb{R}, +)$ de loi $\psi_i(\mu)$ est récurrente et on se situe dans la deuxième alternative ci-dessus : les fonctions μ-harmoniques bornées sont constantes. Il en est de même des fonctions $\hat{\mu}$-harmoniques bornées car la marche duale de loi $\hat{\mu}$ est aussi récurrente en projection.

2.21. PROPOSITION. — *Soit* μ *une mesure de probabilité étalée sur un groupe* G *presque connexe. On suppose que la marche de loi* μ *a la propriété* (P) *et que les fonctions* μ *et* $\hat{\mu}$*-harmoniques bornées sont constantes. Alors si la marche de loi* μ *est de type II*, G *est produit direct d'un groupe compact et de* $\mathbb{R}$.

Preuve. — D'après le corollaire 1.20, le groupe G est nécessairement unimodulaire. Or il est prouvé dans [12] que si μ est une mesure de probabilité étalée sur un groupe unimodulaire telle que les fonctions μ et $\hat{\mu}$-harmoniques bornées soient constantes, l'ensemble I_μ a au plus deux éléments. Il découle alors du théorème de classification 1.6 que si l'ensemble I_μ a deux éléments, le groupe G presque connexe est produit direct d'un groupe compact et de $\mathbb{R}$. D'où la proposition.

Comme sur un groupe produit direct d'un groupe compact et de $\mathbb{R}$, une marche transiente ne peut être récurrente en projection, et comme tout groupe non moyennable est de type I (*cf.* 1.5 *a*), nous déduisons de 2.20 et 2.21 le corollaire suivant :

2.22. COROLLAIRE. — *Soit* G *un groupe presque connexe et soit* μ *une mesure de probabilité étalée sur* G. *Si la marche de loi* μ *sur* G *est récurrente en projection et a la propriété* (P), *alors elle est de type I.*

Comme sur un groupe unimodulaire, toute marche de loi étalée a la propriété (P) [12], le théorème 2.19 résulte de 2.22; et par suite le théorème 2.17 est prouvé pour les groupes unimodulaires. Dans le cas non unimodulaire, il découlera du résultat suivant :

2.23. THÉORÈME. — *Soit* G *un groupe presque connexe non unimodulaire. Alors à toute marche récurrente en projection de loi* μ *étalée, on peut associer une marche transiente en projection de loi* ρ *étalée telle que si* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite quelconque de* G *tendant vers* δ, *la suite* $\varepsilon_{g_n} \star \sum_{p\geq 0} \mu^p$ *converge vaguement vers* 0 *lorsque n tend vers l'infini si et seulement si la suite* $\varepsilon_{g_n} \star \sum_{p\geq 0} \rho^p$ *converge vaguement vers* 0.

Ce théorème insiste sur le fait que ce sont dans les mêmes directions que les valeurs d'adhérence des noyaux potentiels des marches de loi μ et de loi ρ sont nulles (ou non nulles).

Nous allons, avant d'établir plusieurs lemmes, donner la ligne directrice de la démonstration :

2.24. Soit μ une mesure de probabilité sur G étalée [et adaptée d'après l'hypothèse (i)] telle que la marche loi μ soit récurrente en projection. On pose :

$$\mu_1 = \sum_{n \geqq 0} \frac{\mu^n}{2^{n+1}}.$$

Il est évident que μ_1 est une mesure étalée et adaptée. De plus μ_1 a pour support le semi-groupe fermé engendré par le support de μ. De la relation classique $\sum_{n \geqq 0} \mu^n = \sum_{n \geqq 1} \mu_1^n$, il découle que si l'une des deux marches est récurrente en projection, il en est de même de l'autre, et que de plus, les comportements asymptotiques des noyaux potentiels associés à μ et μ_1 sont identiques. Il est donc équivalent, du point de vue théorie du renouvellement, d'étudier les marches de loi μ et de loi μ_1. Nous allons donc considérer la marche de loi μ_1.

2.25. Notons $(\Omega, (X_n)_{n \in \mathbb{N}}, (P_g)_{g \in G})$ cette marche de loi μ_1. Comme elle est récurrente en projection, son image sur $\mathbb{R}^{+*}$ par la fonction module Δ est récurrente. Par suite si τ désigne le temps d'entrée dans $]0, 1[$ de la marche $\Delta(X_n)$, ce temps d'arrêt est p. s. fini (c'est-à-dire P_g p. s. pour tout g de G). Notons P_τ la probabilité de transition définie si $g \in G$ et $A \in \mathscr{B}$ par :

$$P_\tau(g, A) = P_g(X_\tau \in A),$$

et considérons la suite de temps d'arrêt $(\tau_k)_{k \in \mathbb{N}}$ suivante :

$$\tau_0 = 0, \ \ldots, \ \tau_k = \inf\{n > \tau_{k-1}, \Delta(X_n) < \Delta(X_{\tau_{k-1}})\}.$$

Ces temps d'arrêt sont p. s. finis et il découle de la relation $\tau_k = \tau_{k-1} + \tau_1 \circ \theta_{\tau_{k-1}}$ que le triplet $(\Omega, (X_{\tau_k})_{k \in \mathbb{N}}, (P_g)_{g \in G})$ est une marche aléatoire de loi $\rho = P_{\tau_1}(e, .) = P_\tau(e, .)$. Cette marche est transiente en projection, puisque par construction, la marche $\Delta(X_{\tau_k})$ est transiente. Dans le lemme 2.26, nous nous préoccupons de savoir si la mesure ρ est étalée et adaptée.

D'après le théorème 2.16, nous savons que lorsque g tend vers δ de manière à ce que $\Delta(g)$ reste borné supérieurement, les noyaux potentiels $\varepsilon_g \star \sum_{p \geqq 0} \mu_1^p$ et $\varepsilon_g \star \sum_{p \geqq 0} \rho^p$ convergent vers 0. Il s'agit donc d'étudier le comportement asymptotique de ces noyaux lorsque $\Delta(g)$ tend vers $+\infty$.

Or nous pouvons remarquer que le temps d'entrée dans $]0, 1[$ de la marche $\Delta(X_{\tau_k})$ partant d'un élément g tel que $\Delta(g) > 1$ est encore τ. Par suite, pour tout $g \in \{\Delta > 1\}$, les probabilités d'atteinte $P_\tau(g, A)$ des boréliens A de $\{\Delta < 1\}$ sont les mêmes pour les marches de loi μ_1 et de loi ρ. L'idée de la démonstration est alors de comparer lorsque $\Delta(g)$ tend vers $+\infty$, les comportements asymptotiques des noyaux potentiels associés à μ_1 et ρ à celui de leur probabilité d'atteinte commune $P_\tau(g, .)$ (lemme 2.27).

2.26. LEMME. — *Soit* G *un groupe presque connexe non unimodulaire et* Δ *son module. Soit* μ *une mesure de probabilité étalée (et adaptée) sur* G *telle que la marche de loi* μ *soit récurrente en projection. On pose :*

$$\mu_1 = \sum_{n \geqq 0} \frac{\mu^n}{2^{n+1}};$$

alors la marche de loi μ_1, *que l'on notera* $(\Omega, (X_n)_{n \in \mathbb{N}}, (P_g)_{g \in G})$, *est récurrente en projection. Si* τ *est le temps d'entrée dans* $]0, 1[$ *de* $\Delta(X_n)$, *la mesure de probabilité* $\rho = P_\tau(e, .) = P_e(X_\tau \in .)$ *est étalée et adaptée.*

Preuve. — Si G est un groupe localement compact non unimodulaire tel que G/G_0 soit compact, alors (prop. 14.5 de [38]) G est produit semi-direct d'un sous-groupe distingué U et d'un groupe E isomorphe à $\mathbb{R}$; en d'autres termes les groupes U et E sont fermés, d'intersection réduite à $\{e\}$ et G s'écrit UE. Tout élément de G se notera ux où $u \in U$ et $x \in E$. Le groupe U est en fait le noyau de l'homomorphisme Δ.

Soit U_0 la composante connexe dans U de l'élément e; c'est un sous-groupe fermé distingué dans G et G_0 s'écrit U_0 E. On note s la surjection canonique de G sur G/U_0. Le groupe $s(U)$, isomorphe au groupe G/G_0, est compact. Comme la marche de loi μ sur G est récurrente en projection, la projection de cette marche sur G/U est récurrente. Il découle alors de la compacité de $s(U)$ et de l'isomorphisme existant entre G/U et $s(G)/s(U)$ que la marche de loi $s(\mu)$ définie sur $s(G)$ est récurrente. En conséquence, le semi-groupe fermé $T_{s(\mu)}$ de $s(G)$ engendré par le support de μ est $s(G)$ entier et donc le support de $s(\mu_1)$ est $s(G)$.

De l'inégalité immédiate,

$$\rho = P_\tau(e, .) \geqq \mu_{1 | \{\Delta < 1\}},$$

il découle que le support de $s(\rho)$ contient $s[\{\Delta < 1\}]$ et par suite $s(\rho)$ est adaptée.

Pour prouver que ρ est adaptée, il nous suffit alors de montrer que ρ est étalée. En effet, le sous-groupe fermé G_ρ engendré par le support de μ est ouvert si ρ est étalée et contient de ce fait le sous-groupe fermé connexe U_0. De plus, comme $s(\rho)$ est adaptée, l'image $s(G_\rho)$ est égale au groupe G/U_0 entier; et par conséquent $G = G_\rho$.

Montrons que ρ est étalée; nous allons établir que la mesure μ_1 majore une mesure de Haar sur un ouvert de $\{\Delta < 1\}$; il en sera alors de même de la mesure ρ.

Puisque justement la mesure μ est étalée, il existe un entier n_0 et un élément φ_1 de $L^1 \cap L^\infty$ tels que $\mu^{n_0} = \varphi_1 m_D + \alpha$ où α est une mesure finie de norme inférieure à 1. Alors pour tout entier p, la mesure μ^{pn_0} s'écrit $\varphi_p m_D + \alpha^p$ où φ_p est un élément de $L^1 \cap L^\infty$. Il en résulte que $\sum_{p \geqq 1} \mu^{pn_0} = \sum_{p \geqq 1} \varphi_p m_D + G_1$, où G_1 est une mesure finie.

Comme la marche sur $\mathbb{R}^{+*}$ de loi $\Delta(\mu)$ est récurrente, il en est de même de la marche de loi $\Delta(\mu^{n_0})$. [L'étalement de $\Delta(\mu)$ entraîne que $\Delta(\mu)^{n_0}$ est adaptée puisque $\mathbb{R}^{+*}$ est connexe.] On en déduit que :

$$\sum_{p \geqq 1} \mu^{pn_0}[\{\Delta < 1\}] = \infty$$

et donc que :

$$\Big(\sum_{p\geqq 1} \varphi_p m_D\Big)[\{\Delta<1\}]>0.$$

Par suite, il existe un entier k tel que la fonction φ_k ne soit pas m_D p. s. nulle sur $\{\Delta<1\}$ et il résulte de la continuité de $\varphi_k \star \varphi_k$ que μ^{2kn_0} majore une mesure de Haar sur un ouvert de $\{\Delta<1\}$. Il en est donc de même de la mesure $\mu_1 \geqq \mu^{2kn_0}/2^{2kn_0+1}$.

On peut remarquer que le fait que G/G_0 soit compact n'intervient pas pour montrer que ρ est étalée.

2.27. LEMME. — *Soit* $(\Omega, (X_n)_{n\in\mathbb{N}}, (P_g)_{g\in G})$ *une marche aléatoire de loi* μ *sur un groupe* G (LCD) *non unimodulaire. On suppose que le temps d'entrée* τ *dans* $]0, 1[$ *de* $\Delta(X_n)$ *est p. s. fini.*

Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* G *tendant vers* δ *lorsque* $n\to\infty$.

1. *Si la suite* $\varepsilon_{g_n}\star\sum_{p\geqq 0}\mu^p$ *converge vaguement vers* 0 *lorsque* $n\to\infty$, *alors la suite* $P_\tau(g_n, .)$ *converge vaguement vers* 0.

2. *Si on impose de plus à* μ *d'être étalée, et si, pour tout* $x\in G$, *la suite* $P_\tau(xg_n, .)$ *converge vaguement vers* 0, *la suite* $\varepsilon_{g_n}\star\sum_{p\geqq 0}\mu^p$ *converge vaguement vers* 0.

Preuve. — Soit f un élément de $C_K^+(G)$, dont le support est inclus dans $\{0<\Delta<1\}$. D'après la propriété de Markov forte, on a, pour tout $g\in G$:

$$P_\tau U f(g)=\sum_{n\geqq 0} E_g[f(X_{\tau+n})]=E_g\Big[\sum_{n\geqq\tau} f(X_n)\Big]=U f(g).$$

On en déduit que si $Uf(g_n)$ tend vers zéro, alors $P_\tau f(g_n)$, qui est inférieur ou égal à $P_\tau U f(g_n)$, tend aussi vers zéro lorsque $n\to\infty$. Comme pour tout $g\in G$, $P_\tau(g, .)$ a son support dans $\{0<\Delta<1\}$, la convergence vague vers 0 de $\varepsilon_{g_n}\star U$ entraîne celle de $P_\tau(g_n, .)$.

D'après le théorème 2.16, nous savons que si μ est étalée, $\varepsilon_g\star U$ converge vaguement vers 0 lorsque g tend vers δ, de manière à ce que $\Delta(g)$ reste borné supérieurement. Par suite, pour tout élément f de $C_K^+(G)$ et pour tout $\varepsilon\in\mathbb{R}^{+*}$, il existe un compact K_ε tel que :

$$\forall y\in K_\varepsilon^c\cap\{\Delta<1\},\quad Uf(y)<\varepsilon.$$

On suppose comme ci-dessus que f a son support dans $\{0<\Delta<1\}$; alors on obtient pour tout $g\in G$:

$$Uf(g)=P_\tau U f(g)=\int 1_{\{\Delta<1\}}(y)\, P_\tau(g, dy)\, U f(y)\leqq\varepsilon+\int 1_{K_\varepsilon}(y)\, P_\tau(g, dy)\, Uf(y).$$

Si la suite $P_\tau(g_n, .)$ converge vaguement vers 0, le deuxième terme de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro et $Uf(g_n)$ tend vers zéro. Pour tout élément f de $C_K^+(G)$, il existe un élément x de G tel que la fonction $\sigma_x f$ ait son support dans $\{0<\Delta<1\}$. Alors, $Uf(g_n)$ est égal à $U\sigma_x f(x^{-1}g_n)$ et si la suite $P_\tau(x^{-1}g_n, .)$ converge vaguement vers zéro, $Uf(g_n)$ tend vers zéro. D'où la deuxième assertion.

Preuve du théorème 2.23. — Elle est immédiate à partir des lemmes précédents. A toute mesure de probabilité μ étalée (adaptée) telle que la marche de loi μ soit récurrente en projection, on associe la mesure $\mu_1=\sum_{n\geqq 0}\mu^n/(2^{n+1})$, puis la mesure $\rho=P_\tau(e,\ .)$ où la probabilité de transition P_τ est associée à μ_1. La mesure ρ est étalée, adaptée et la marche de loi ρ est transiente en projection. Les comportements asymptotiques des noyaux potentiels U et U_1 associés à μ et μ_1 sont identiques.

Il est clair que si $(g_n)_{n\in N}$ est une suite d'éléments de G telle que la suite $\varepsilon_{g_n}\star U_1$ converge vers 0, alors pour tout $x\in G$, la suite $\varepsilon_{xg_n}\star U_1$ converge vers zéro. De ce fait, il découle du lemme 2.27 que la suite $\varepsilon_{g_n}\star U_1$ converge vers zéro si et seulement si $P_\tau(xg_n,\ .)$ converge vers 0 pour tout $x\in G$. Comme les probabilités d'atteinte $P_\tau(g,\ .)$ associées à μ_1 et ρ sont les mêmes si $\Delta(g)>1$, on en déduit que lorsque $\Delta(g_n)\to\infty$, la suite $\varepsilon_{g_n}\star\sum_{p\geqq 0}\mu_1^p$ converge vaguement vers zéro si et seulement si la suite $\varepsilon_{g_n}\star\sum_{p\geqq 0}\rho^p$ converge vaguement vers zéro. Le cas où $\Delta(g_n)$ reste borné supérieurement ayant déjà été étudié, le théorème est démontré.

D. Comparaison des types de G et G_0 lorsque G est presque connexe

2.28. THÉORÈME. — *Soient* G *un groupe presque connexe et* G_0 *la composante connexe de l'élément neutre. Alors si* G *est de type II*, G_0 *est de type II.*

2.29. *Remarque.* — Si G est de type I, G_0 n'est pas nécessairement de type I. Il suffit de considérer le groupe des symétries et translations de $\mathbb{R}$ qui est de type I (appendice A 1), mais dont la composante connexe isomorphe à $\mathbb{R}$ est de type II.

Preuve du théorème. — Soit G un groupe connexe; soit alors K un sous-groupe compact distingué de G tel que G/K soit un groupe de Lie ayant un nombre fini de composantes connexes. Notons p la surjection de G sur G/K. Comme le groupe G (resp. G_0) est de type I si et seulement si le groupe $p(G)$ [resp. $p(G_0)$] est de type I (prop. 1.9) et comme, p étant fermée, $p(G_0)$ est la composante connexe de $p(G)$, il suffit de prouver le théorème lorsque G est un groupe de Lie tel que G/G_0 soit fini.

Soit μ une mesure de probabilité étalée sur G. Nous allons montrer que si G_0 est de type I, la marche $(\Omega,\ (X_n)_{n\in N},\ (P_g)_{g\in G})$ de loi μ est de type I. Considérons la suite de temps d'arrêt :

$$T_0=0,\ \ldots,\ T_n=\inf\{p>T_{n-1},\ X_p\in G_0\}.$$

Le temps T_n est le n-ième temps de retour dans G_0; il est p. s. fini puisque le groupe G/G_0 est fini. Et le triplet $\{\Omega,\ (X_{T_n})_{n\in N},\ (P_g)_{g\in G_0}\}$ est une marche aléatoire sur G_0 de loi μ_0 définie par :

$$\mu_0=P_{T_1}(e,\ .).$$

Remarquons de plus que les noyaux potentiels des marches de loi μ et de loi μ_0 coïncident sur G_0. En effet, pour tout g de G_0 et tout A de $\mathscr{B}(G_0)$.

$$\varepsilon_g\star\sum_{n\geqq 0}\mu^n(A)=E_g[\sum_{n\geqq 0}1_A(X_n)]=E_g[\sum_{n\geqq 0}1_A(X_{T_n})]=\varepsilon_g\star\sum_{n\geqq 0}\mu_0^n(A).$$

Nous allons prouver que cette mesure μ_0 définie sur G_0 est étalée et par suite adaptée puisque G_0 est connexe. Considérons le semi-groupe fermé T_μ de G engendré par le support de μ. Si q désigne la surjection canonique de G sur G/G_0, $q(T_\mu)$ est le semi-groupe fermé de G/G_0 engendré par le support de $q(\mu)$. Comme G/G_0 est fini, la marche sur G/G_0 de loi $q(\mu)$ est récurrente et par suite $q(T_\mu)$ est égal au groupe G/G_0 entier. De ce fait, $G=T_\mu G_0$. Soit alors l'ensemble S_μ des points g de G pour lesquels on peut trouver une mesure de Haar m et un entier p tels que la restriction de m à un voisinage de g soit majorée par μ^p. Comme μ est étalée, S_μ est un ouvert non vide. De la relation $S_\mu T_\mu \subset S_\mu$ et de l'égalité $G=T_\mu G_0$, nous déduisons que $G=S_\mu G_0$. En particulier $S_\mu \cap G_0$ est un ouvert non vide et il existe donc un entier n tel que μ^n majore une mesure de Haar sur un ouvert de G_0. De l'égalité sur G_0 des noyaux potentiels associés à μ et μ_0, il résulte que μ_0 est étalée.

Nous déduisons alors du fait que G_0 est de type I que, si g tend vers δ dans G_0, le noyau potentiel $\varepsilon_g \star \sum_{n \geqq 0} \mu^n$ restreint à G_0, qui est égal à $\varepsilon_g \star \sum_{n \geqq 0} \mu_0^n$, converge vaguement vers 0.

Comme G/G_0 est fini, l'ensemble I_μ des valeurs d'adhérence lorsque g tend vers δ de $\{\varepsilon_g \star \sum_{n \geqq 0} \mu^n,\ g \in G\}$ sera formé de translatées à gauche par des éléments de G de mesures appartenant à l'ensemble I_μ^0 des valeurs d'adhérence lorsque g tend vers δ (dans G_0) de $\{\varepsilon_g \star \sum_{n \geqq 0} \mu^n,\ g \in G_0\}$. Soit donc ν un élément de I_μ^0. Nous avons montré ci-dessus que, puisque G_0 est de type I, la restriction de ν à G_0 est nulle.

Puisque ν est une mesure μ-excessive, nous avons, pour tout entier n, l'inégalité $\nu \star \mu^n \leqq \nu$. Il en résulte que la restriction de ν à $G_0 S_\mu$ est nulle et comme nous avons vu que $G=G_0 S_\mu$, la mesure ν est nulle. L'ensemble I_μ^0 est donc réduit à la mesure nulle et, par suite, il en est de même de I_μ; d'où le théorème.

2.30. Le théorème 2.3 est par conséquent prouvé. Nous avons vu (corollaire 2.18) que si G est de type II, $G/\overline{[G, G]}$ est de rang 1. Nous venons de montrer que si G est de type II, G_0 est de type II; et de ce fait $G_0/\overline{[G_0, G_0]}$ est aussi de rang 1.

2.31. *Remarque*. — Les hypothèses $G/\overline{[G, G]}$ et $G_0/\overline{[G_0, G_0]}$ de rang 1 ne sont pas équivalentes même lorsque G/G_0 est fini. L'exemple du groupe des symétries et translations le prouve.

On peut en fait montrer que si G est un groupe de Lie tel que G/G_0 soit fini, alors rang $G_0/\overline{[G_0, G_0]} \geqq$ rang $G/\overline{[G, G]}$.

En effet, considérons les surjections canoniques π et π_1 définies sur G, de noyaux respectifs $\overline{[G, G]}$ et $\overline{[G_0, G_0]}$. Il existe un homomorphisme π_2 surjectif continu de $G/\overline{[G_0, G_0]}$ dans $G/\overline{[G, G]}$ tel que $\pi=\pi_2 \circ \pi_1$. Supposons que $G_0/\overline{[G_0, G_0]}$ soit de rang p, alors $\pi_1[G_0]$ est produit direct d'un groupe A isomorphe à R^p et d'un groupe compact abélien K_1. Comme G/G_0 est fini, si K est un sous-groupe compact maximal de G, le groupe G s'écrit $G_0 K$ [37]. Par suite, $\pi(G)=\pi_2(A)+\pi_2(K_1)+\pi(K)$; le groupe abélien $\pi_2(K_1)+\pi(K)$ est compact et le rang de $\pi_2(A)$ est inférieur ou égal à p, car l'image par π_2 de tout sous-groupe à un paramètre de A est soit d'adhérence compacte, soit homéomorphe à $\mathbb{R}$ dans $\pi[G]$ (*cf.* XVI, prop. 2.3 de [37]). Il en résulte que le rang de $\pi(G)$ est inférieur ou égal à p.

CHAPITRE III

UNE ÉTUDE PLUS PRÉCISE DES GROUPES MOYENNABLES PRESQUE CONNEXES TELS QUE $G/\overline{[G, G]}$ ET $G_0/\overline{[G_0, G_0]}$ SOIENT DE RANG 1

Après avoir déterminé au paragraphe A la structure des groupes moyennables presque connexes tels que $G/\overline{[G, G]}$ et $G_0/\overline{[G_0, G_0]}$ soient de rang 1, nous exhiberons au paragraphe B une nouvelle classe de groupes de type I. Ce résultat nous permettra :

1° de déterminer complètement la structure des groupes presque connexes unimodulaires de type II;

2° d'introduire dans le cas non unimodulaire une nouvelle classe de groupes susceptibles d'être de type II, appelée la classe $\mathscr{D}$.

La fin de ce chapitre et les chapitres suivants seront consacrés à l'étude de cette classe $\mathscr{D}$.

A. Structure des groupes moyennables presque connexes tels que $G/\overline{[G, G]}$ et $G_0/\overline{[G_0, G_0]}$ soient de rang 1

3.1. Notation. — Si N et A sont deux groupes topologiques et η un homomorphisme continu de A dans le groupe des automorphismes continus de N, on note $N \times_\eta A$ le produit semi-direct de ces deux groupes, c'est-à-dire l'ensemble $N \times A$ muni du produit $(n_1, a_1)(n_2, a_2) = (n_1\, \eta(a_1)(n_2), a_1 a_2)$.

Si N et A sont deux sous-groupes d'un groupe G (LCD) tel que N soit distingué dans G, on dira encore que G est produit semi-direct du sous-groupe distingué N et du sous-groupe A si N et A sont deux sous-groupes fermés dans G d'intersection réduite à l'élément neutre et tels que G s'écrive NA. En effet, G est alors isomorphe au produit semi-direct $N \times_\eta A$ où pour tout $a \in A$, $\eta(a)$ est l'automorphisme intérieur τ_a de G restreint à N.

3.2. Définition. — Si G est un groupe de Lie et G_0 la composante connexe de l'élément neutre dans G, on désignera par R le *radical* de G_0 (i. e. le plus grand sous-groupe connexe résoluble distingué de G_0). Ce groupe R est fermé et si N désigne le groupe $\overline{[G_0, R]}$ (i. e. le plus petit sous-groupe fermé contenant les commutateurs de G_0 et R), alors N est un groupe connexe distingué nilpotent (*cf.* [10], chap. 1) que l'on appellera le *radical nilpotent* de G.

Le théorème de structure que nous prouverons dans ce paragraphe est le suivant :

3.3. Théorème. — *Soit* G *un groupe moyennable presque connexe tel que* $G/\overline{[G, G]}$ *et* $G_0/\overline{[G_0, G_0]}$ *soient de rang* 1. *Il existe alors un sous-groupe compact distingué* C *dans* G *tel que :*

1. G/C *soit un groupe de Lie ayant un nombre fini de composantes connexes;*
2. *le radical nilpotent* N *de* G/C *soit simplement connexe;*

3. G/C *soit le produit semi-direct de* N *par un groupe produit direct d'un groupe compact et d'un groupe isomorphe à* $\mathbb{R}$.

3.4. Si G est un groupe presque connexe, il existe [41] des sous-groupes compacts arbitrairement petits distingués S dans G tels que G/S soit un groupe de Lie ayant un nombre fini de composantes connexes. Le lemme suivant va nous montrer qu'il nous suffit de prouver le théorème 3.3 lorsque G est un groupe de Lie tel que G/G_0 soit fini.

3.5. Lemme. — *Soit* G *un groupe* LCD *et* S *un sous-groupe compact distingué de* G. *Le groupe* G *est presque connexe, moyennable, admet des groupes quotients* $G/\overline{[G, G]}$ *et* $G_0/\overline{[G_0, G_0]}$ *de rang* 1 *si et seulement si le groupe quotient* G/S *a les mêmes propriétés.*

Preuve. — Soit p la surjection canonique de G sur G/S. Puisque S est compact, p est une application fermée. Par suite, la composante connexe $p(G)_0$ de l'élément neutre dans $p(G)$ est égale à $p(G_0)$ et de plus :

$$p(\overline{[G, G]}) = \overline{[p(G), p(G)]}$$

et :

$$p(\overline{[G_0, G_0]}) = \overline{[p(G)_0, p(G)_0]})$$

Par conséquent $p(G)/p(G)_0$ est isomorphe à G/SG_0 et $p(G)/\overline{[p(G), p(G)]}$ (respectivement $p(G)_0/\overline{[p(G)_0, p(G)_0]}$) est isomorphe à $G/S\overline{[G, G]}$ (respectivement $SG_0/S\overline{[G_0, G_0]}$). Comme nous savons que G est moyennable si et seulement si G/S l'est, le lemme est alors immédiat.

Commençons par étudier la structure des groupes de Lie connexes G_0 tels que $G_0/\overline{[G_0, G_0]}$ soit de rang 1.

3.6. Lemme. — *Soit* G_0 *un groupe de Lie connexe tel que* $G_0/\overline{[G_0, G_0]}$ *soit de rang* 1*; alors si* U *désigne l'image réciproque dans* G_0 *du sous-groupe compact maximal de* $G_0/\overline{[G_0, G_0]}$, G_0 *est le produit semi-direct du groupe distingué* U *et d'un groupe isomorphe à* $\mathbb{R}$.

Preuve du lemme. — Le groupe U est un sous-groupe fermé distingué de G_0 et le groupe quotient G_0/U est isomorphe à $\mathbb{R}$. Notons $\mathscr{G}$ et $\mathscr{U}$ les algèbres de Lie respectives de G_0 et U. Considérons pour un élément a de $\mathscr{G}$ n'appartenant pas à $\mathscr{U}$, la sous-algèbre de $\mathscr{G}$ engendrée par a que nous noterons $\mathscr{L}(a)$. Comme $\mathscr{G}/\mathscr{U}$ est de dimension 1, on obtient :

$$\mathscr{G} = \mathscr{U} \oplus \mathscr{L}(a).$$

Désignons par E le sous-groupe à un paramètre de G_0 engendré par a. Puisque $\mathscr{G} = \mathscr{U} \oplus \mathscr{L}(a)$, tout élément d'un voisinage assez petit de e dans G_0 peut s'écrire ux avec $u \in U$ et $x \in E$. Comme U est distingué dans G_0 et G_0 connexe, le groupe G_0 s'écrit $U\overline{E}$, où $\overline{E}$ est l'adhérence de E. Mais puisque G_0/U est isomorphe à $\mathbb{R}$, l'ensemble $\overline{E}$ ne peut être compact. Il résulte alors de ([37], XVI, prop. 2.3) que E est fermé et isomorphe à $\mathbb{R}$. De plus, $U \cap E = \{e\}$ car le groupe $E/U \cap E$, isomorphe à G_0/U est isomorphe à $\mathbb{R}$; il s'ensuit que G_0 est produit semi-direct de U et de E.

Lorsque G est un groupe de Lie tel que G/G_0 soit fini, nous obtenons le théorème de décomposition suivant :

3.7. THÉORÈME. — *Soit* G *un groupe de Lie moyennable tel que* G/G_0 *soit fini et tel que* $G/\overline{[G, G]}$ *et* $G_0/\overline{[G_0, G_0]}$ *soient de rang* 1. *Soit* N *le radical nilpotent de* G. *Alors il existe dans* G *un sous-groupe maximal* K *et un sous-groupe* E *isomorphe à* $\mathbb{R}$ *tels que :*

1° *l'ensemble* KE *soit le produit direct des groupes* K *et* E;

2° *le groupe* G *soit le produit semi-direct du sous-groupe distingué* NK *et du groupe* E.

Preuve du théorème 3.7. — L'image réciproque U dans G_0 du sous-groupe compact maximal de $G_0/\overline{[G_0, G_0]}$ est un sous-groupe distingué de G. En effet, G_0 étant distingué dans G, pour tout x de G, le sous-groupe $x^{-1}Ux$ est inclus dans G_0, et si on appelle π_1 la surjection canonique de G sur $G/\overline{[G_0, G_0]}$, le sous-groupe $\pi_1(x^{-1}Ux)$ est compact et inclus dans $G_0/\overline{[G_0, G_0]}$, Par suite $x^{-1}Ux \subset U$.

Si G_0 est moyennable, G_0/R est compact. Il en résulte que si N est le radical nilpotent $\overline{[G_0, R]}$ de G_0, le groupe quotient $\overline{[G_0, G_0]}/N$ est compact. En effet, si $G_0 = RS$, où S est un groupe semi-simple compact, est une décomposition de Levi de G_0, on vérifie aisément que $[G_0, G_0] = [G_0, R]\ [S, S]$ et donc que $\overline{[G_0, G_0]} = \overline{[G_0, R]}\ [S, S]$. On en déduit que U/N également est compact. En effet $U/\overline{[G_0, G_0]}$ est compact et isomorphe à $(U/N)/(\overline{[G_0, G_0]}/N)$.

On rappelle maintenant (*cf.* XV, th. 3.7 de [37]) que si G est un groupe de Lie tel que G/G_0 soit fini et possédant un sous-groupe distingué fermé connexe M tel que G/M soit compact, alors quel que soit le sous-groupe compact maximal L de G, le groupe G s'écrit ML. Si on applique ceci au groupe connexe U, on voit donc que $U = NK_0$ pour un sous-groupe compact maximal K_0 de U. Si K est un sous-groupe compact maximal de G contenant K_0, une nouvelle application du même résultat nous permet d'écrire $G = G_0 K$.

Notons, comme dans le lemme 3.6, $\mathscr{G}$ et $\mathscr{U}$ les algèbres de Lie respectives de G_0 et U et considérons la représentation adjointe de K dans $\mathscr{G}$. Pour tout $k \in K$, $\operatorname{Ad} k(\mathscr{U}) \subset \mathscr{U}$ car U est distingué dans G. Comme K est compact, il existe (*cf.* II, th. 2.2 de [37]) un espace vectoriel supplémentaire $\mathscr{V}$ de $\mathscr{U}$ dans $\mathscr{G}$ stable par Ad K. Si dans la démonstration du lemme 3.6, nous choisissons a dans $\mathscr{V}$, nous obtenons :

$$\mathscr{G} = \mathscr{U} \oplus \mathscr{L}(a) \qquad \text{avec} \quad \operatorname{Ad} K[\mathscr{L}(a)] \subset \mathscr{L}(a).$$

Il résulte du lemme 3.6 que, si E est le sous-groupe à un paramètre engendré par a, alors E est fermé dans G_0 et isomorphe à $\mathbb{R}$ et G_0 est produit semi-direct du groupe distingué U et du groupe E; de plus, $[K, E] \subset E$.

Puisque $U = NK_0$, nous avons :

$$G_0 = NK_0 E \qquad \text{et} \qquad G = G_0 K = K(NK_0 E).$$

Comme N est distingué dans G et K_0 inclus dans K, nous obtenons :

$$G = NKE.$$

Soit π la surjection canonique de G sur $G/\overline{[G, G]}$. L'image $\pi(NK)$ du groupe NK est compacte car égale à $\pi(K)$. Puisque par hypothèse $G/\overline{[G, G]}$ est de rang 1, $\pi(E)$ est nécessairement isomorphe à $\mathbb{R}$. Par suite, $\pi(NK)$ est le sous-groupe compact maximal de $G/\overline{[G, G]}$ et $G/\overline{[G, G]}$ est produit direct des groupes $\pi(NK)$ et $\pi(E)$. Comme la restriction de π à E est bijective, l'image réciproque dans G de l'élément neutre de $G/\overline{[G, G]}$ est incluse dans NK. De ce fait, nous obtenons :

$$NK \cap E = \{e\} \qquad \text{et} \qquad \pi^{-1}[\pi(NK)] = NK.$$

Le groupe NK est donc distingué dans G et G est produit semi-direct de ce sous-groupe distingué et du groupe E.

On sait, de plus, que $[K, E] \subset E$. Comme NK est distingué, l'ensemble $[K, E]$ est aussi inclus dans NK. On en déduit que $[K, E] = \{e\}$ et le groupe KE est produit direct du groupe K et du groupe E.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 3.3.

3.8. *Preuve du théorème* 3.3. — Nous pouvons supposer (*cf.* 3.4) que G est un groupe de Lie tel que G/G_0 soit fini. Nous savons [30] que le radical nilpotent $N = \overline{[G_0, R]}$ qui est un groupe de Lie connexe, possède un plus grand sous-groupe compact C et que ce groupe est central dans N. Comme N est distingué dans G, il est clair que C est distingué dans G. Puisque de plus, les sous-groupes compacts maximaux d'un groupe de Lie connexe sont connexes (*cf.* th. 6 de [39]) le groupe C est connexe. Nous en déduisons (*cf.* XIII, cor. 4.2 de [37]) que le groupe de Lie C compact connexe abélien est un tore, c'est-à-dire un produit direct d'un certain nombre d'exemplaires du groupe $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Comme le groupe des automorphismes d'un tore est discret (*cf.* III, prop. 3.2 de [37]), le groupe connexe G_0 agit trivialement sur C et C est central dans G_0. De plus, puisqu'un groupe de Lie connexe est simplement connexe dès qu'un de ses sous-groupes compacts maximaux est simplement connexe (lemme 3.14 de [39]), le groupe quotient N/C n'ayant pas d'autre sous-groupe compact que $\{e\}$ est simplement connexe.

Montrons enfin que le groupe N/C est le radical nilpotent de G/C. En effet, soient $\mathcal{G}$, $\mathcal{R}$ et $\mathcal{C}$ les algèbres de Lie respectives de G_0, R et C et soit f l'homomorphisme d'algèbre canonique de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{G}/\mathcal{C}$. Si $\mathcal{R}'$ désigne le plus grand idéal résoluble de $\mathcal{G}/\mathcal{C}$, l'idéal $f(\mathcal{R})$ qui est résoluble est inclus dans $\mathcal{R}'$. De plus, $f^{-1}(\mathcal{R}')$ extension d'une algèbre résoluble par l'algèbre résoluble $\mathcal{C}$ est résoluble et est donc inclus dans $\mathcal{R}$ qui est le plus grand idéal résoluble de $\mathcal{G}$. Par suite $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R}'$. Notons p la surjection canonique de G sur G/C. Comme C est compact, l'application p est fermée; donc $p(G)_0 = p(G_0)$ et $p(R)$ est un sous-groupe fermé connexe de $p(G)_0$. Le groupe $p(R)$ [resp. $p(G)_0$] ayant pour algèbre de Lie $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R}'$ [resp. $f(\mathcal{G}) = \mathcal{G}/\mathcal{C}$], ce groupe $p(R)$ est le radical de $p(G)_0$ et donc de $p(G)$. De plus le radical nilpotent de $p(G)$ est :

$$\overline{[p(R), p(G)_0]} = \overline{[p(R), p(G_0)]} = \overline{p([R, G_0])},$$

et ce dernier terme est aussi $p(\overline{[R, G_0]}) = p(N)$ puisque p est fermée continue.

Nous venons donc de voir que le radical nilpotent de G/C, étant égal à $p(\mathrm{N})$, est simplement connexe et il nous reste à étudier la structure de G/C. D'après le théorème 3.7, il existe dans G/C un sous-groupe compact maximal K et un sous-groupe E isomorphe à $\mathbb{R}$ tels que le produit KE soit direct et tels que G/C soit le produit semi-direct des groupes $p(\mathrm{N})\mathrm{K}$ et E. De ce fait, $p(\mathrm{N})\mathrm{K} \cap \mathrm{E}=\{e\}$. Comme $p(\mathrm{N})$ n'a pas d'autres sous-groupes compacts que $\{e\}$, $p(\mathrm{N}) \cap \mathrm{K}$ est réduit à $\{e\}$. Il en résulte que $p(\mathrm{N}) \cap \mathrm{KE}=\{e\}$ et G/C est produit semi-direct de son radical nilpotent $p(\mathrm{N})$ et du groupe KE, produit direct des groupes K et E. D'où le résultat.

B. Une nouvelle classe de groupes de type I

Le type (I ou II) d'un groupe étant stable par passage au quotient par un groupe compact, le théorème 3.3 conduit à étudier le type des groupes de Lie G, produit semi-direct d'un sous-groupe N distingué nilpotent connexe simplement connexe et d'un sous-groupe A produit direct d'un groupe compact et d'un groupe isomorphe à $\mathbb{R}$.

3.9. Notations. — 1. Si G est un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathscr{G}$, nous noterons Ad la représentation adjointe de G dans $\mathscr{G}$.

Rappelons que si G a la structure indiquée ci-dessus, l'automorphisme η de A dans le groupe des automorphismes de N définissant le produit semi-direct $\mathrm{N} \times_\eta \mathrm{A}$ est défini, pour tout a de A, par l'automorphisme intérieur $\eta(a)$ de G associé à a et restreint à N. Par suite si nous identifions le groupe nilpotent connexe simplement connexe N à son algèbre de Lie $\mathscr{N}$, l'automorphisme η n'est rien d'autre que la représentation adjointe de A restreinte à $\mathscr{N}$.

2. Si W est un espace vectoriel réel, W^{C} désignera l'espace vectoriel complexifié associé à W.

3.10. Rappel. — Soit ρ une représentation d'un groupe P dans un espace vectoriel complexe V de dimension finie; un homomorphisme multiplicatif l à valeurs complexes sur P sera dit *poids* de ρ s'il existe un vecteur v non nul de V tel que :

$$\forall x \in \mathrm{P}, \quad \rho(x)(v)=l(x)v.$$

Si l est un poids de ρ, on note V_l le sous-espace vectoriel associé à l suivant :

$$\mathrm{V}_l=\{v \in \mathrm{V}, \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } [\rho(x)-l(x)\mathrm{I}]^n(v)=0, \forall x \in \mathrm{P}\}.$$

Si P est un groupe abélien, les sous-espaces V_l sont stables par ρ et V est somme directe des sous-espaces V_l, où l décrit l'ensemble L des poids de ρ. Pour x fixé dans P, l'ensemble des scalaires $l(x)$ pour l appartenant à L, n'est autre que l'ensemble des *valeurs propres* de $\rho(x)$. On appellera *multiplicité* du poids l la dimension de V_l.

3.11. Théorème. — *Soit* G *un groupe de Lie produit semi-direct de deux sous-groupes fermés non triviaux* N *et* A *tels que :*

1° N *soit nilpotent distingué connexe et simplement connexe*;

2° A *soit produit direct d'un groupe compact* K *et d'un groupe* E *isomorphe à* $\mathbb{R}$;

3° si $\mathcal{N}$ *désigne l'algèbre de Lie de* N, *il n'existe pas d'élément* x *de* E *tel que les valeurs propres de* $\operatorname{Ad} x$ *restreint à* $\mathcal{N}^{\mathbb{C}}$ *soient toutes de module strictement supérieur à* 1.

Alors G *est un groupe de type* I.

3.12. *Remarque.* — Le résultat obtenu dans ce théorème se généralise aux groupes G produit semi-direct $N \times_{\eta} A$ d'un groupe nilpotent connexe et simplement connexe et d'un groupe A produit direct d'un groupe compact et d'un groupe E isomorphe au groupe $\mathbb{R}$ ou au *groupe* $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs. Le groupe N de par sa forme est un groupe de Lie et l'homomorphisme $\mathscr{L}[\eta(x)]$ de $\mathcal{N}$ dans $\mathcal{N}$ tangent à l'automorphisme $\eta(x)$ joue pour $x \in E$ le rôle de $\operatorname{Ad} x$.

3.13. INTERPRÉTATION DU THÉORÈME 3.11. — 1. Le module Δ du groupe G peut s'exprimer à l'aide de l'ensemble L des poids de la représentation adjointe de E restreinte à $\mathcal{N}^{\mathbb{C}}$. En effet, tout élément g de G s'écrit de manière unique (n, k, x) où $(n, k, x) \in N \times K \times E$ et, puisque G est produit semi-direct des groupes unimodulaires NK et E, nous avons [36] :

$$\Delta(g) = \Delta(x).$$

Comme G est un groupe de Lie, nous savons que :

$$\Delta(x) = |\det \operatorname{Ad}^{-1}(x)|$$

et ce dernier terme est aussi $|\det \operatorname{Ad}^{-1}(x)|\mathcal{N}$ puisque KE est unimodulaire. Par suite :

$$\Delta(g) = \prod_{l \in L} |l^{-1}(x)|,$$

où dans le produit les éléments de L sont comptés avec leur ordre de multiplicité.

2. Supposons que le groupe G est *non unimodulaire;* comme l'espace vectoriel des homomorphismes continus de E dans $(\mathbb{R}, +)$ est de dimension 1, les homomorphismes $\operatorname{Log}|l|$; $l \in L$, sont tous proportionnels à $\operatorname{Log} \Delta$ et le théorème 3.11 affirme que si les scalaires réels, coefficients de proportionnalité entre $\operatorname{Log}|l|$ et $\operatorname{Log} \Delta$, pour $l \in L$, ne sont pas tous strictement de même signe, alors le groupe G est de type I.

Remarquons qu'il résulte de la relation :

$$\operatorname{Log} \Delta = -\sum_{l \in L} \log |l|,$$

que si ces coefficients de proportionnalité sont tous strictement de même signe, ils sont tous strictement négatifs.

3. Supposons que le groupe G est *unimodulaire*. Alors pour tout x de E, $\prod_{l \in L} |l^{-1}(x)| = 1$ et les valeurs propres de $\operatorname{Ad} x$ ne peuvent jamais être toutes de module strictement supérieur à 1. Par suite, un groupe de Lie G unimodulaire produit semi-direct d'un sous-groupe N nilpotent connexe simplement connexe distingué et d'un sous-groupe A produit direct d'un groupe compact et d'un groupe isomorphe à $\mathbb{R}$ est de type I si N n'est pas trivial. Par contre si N est trivial, le groupe $G = A$ est de type II (1.5 *b*).

Or, il découle des théorèmes 2.3 et 3.3 que si G est un groupe presque connexe de type II, il existe un sous-groupe compact C distingué dans G tel que le groupe G/C soit un produit semi-direct $N \times A$ du type ci-dessus. Comme G est un groupe de type II si et seulement si G/C l'est, nous en déduisons que si G est un groupe presque connexe unimodulaire de type II, G/C est produit direct d'un groupe compact et d'un groupe isomorphe à $\mathbb{R}$. Il en résulte qu'il existe un sous-groupe compact K distingué dans G tel que G/K soit isomorphe à $\mathbb{R}$. Nous savons (prop. 9.4 de [38]) qu'il existe alors un sous-groupe F isomorphe à $\mathbb{R}$ tel que G soit produit direct de K et F. Comme un tel groupe est de type II, nous obtenons :

3.14. THÉORÈME. — *Soit* G *un groupe presque connexe unimodulaire. Il est de type II si et seulement si il est produit direct d'un groupe compact et d'un groupe isomorphe à* $\mathbb{R}$.

3.15. *Preuve du théorème* 3.11. — Soit G un groupe vérifiant les hypothèses de ce théorème. Remarquons tout de suite que nous pouvons nous restreindre à l'étude des marches de loi μ étalée dont la projection sur E est transiente. En effet, considérons, puisque $\overline{[G, G]} \subset NK$, le groupe quotient $NK/\overline{[G, G]}$. S'il n'est pas compact, le groupe $G/\overline{[G, G]}$ est de rang $\geqq 2$ et G est de type I (th. 2.3). Supposons donc $NK/\overline{[G, G]}$ compact; alors toute marche transiente en projection a une projection transiente sur G/NK, groupe isomorphe à E. Et d'après le théorème 2.17, prouver que toute marche transiente en projection de loi étalée sur G est de type I suffit à montrer que G est de type I.

Soit alors une suite $(g_n)_{n\in N}$ d'éléments de G tendant vers δ telle que $\varepsilon_{g_n} \star U$ converge vaguement vers une mesure de Radon ν. Nous prouverons que ν est nulle en construisant un sous-groupe fermé B distingué dans G, strictement inclus dans N, associé à la suite $(g_n)_{n\in N}$ tel que :

(i) soit G/B est non unimodulaire, et si s désigne la surjection de G sur G/B et $\dot{\Delta}$ le module de G/B, la suite $\dot{\Delta}(s(g_n))$ est bornée;

(ii) soit G/B est unimodulaire et de plus G/B s'écrit $N^0 \times_{\eta_0} A$ et les valeurs propres de $\eta_0(x)$, pour $x \in E$, sont toutes de module 1.

En effet, dans le premier cas, le théorème 2.16 nous permettra de conclure que $\varepsilon_{s(g_n)} \star s(U)$ converge vers 0 et donc que $\varepsilon_{g_n} \star U$ converge vers 0. Dans le deuxième cas nous verrons que le groupe G/B est un groupe de type I, et comme la marche de loi μ considérée a une projection transiente sur E, elle aura une projection transiente sur G/B, projection qui sera donc de type I.

Considérons donc la suite $(g_n)_{n\in N}$; tout élément g_n de cette suite s'écrit $(y_n, k_n, x_n) \in N \times K \times E$ et remarquons que si la suite x_n reste dans un compact, la mesure ν est nulle. En effet, si K est un compact de G, et si p_E désigne la projection sur E :

$$\varepsilon_{g_n} \star U(K) \leqq p_E(U)[p_E[g_n^{-1} K]] \leqq p_2(U)[K_1\, p_E(K)],$$

puisque $p_E[g_n^{-1}]$ reste dans un compact K_1 de E. Le dernier terme de l'inégalité est fini puisque la projection sur E de la marche de loi μ est transiente et le théorème de Lebesgue permet de conclure.

Supposons donc que la suite $(x_n)_{n\in N}$ tende vers l'infini dans E. Soit L l'ensemble des poids de la représentation adjointe de E dans $\mathcal{N}^{\mathbb{C}}$. Quitte à extraire une sous-suite, nous avons, puisque E est isomorphe à $\mathbb{R}$, trois possibilités pour les poids l de L. Soit $|l(x_n)| \to +\infty$, soit $|l(x_n)| \to 0$, soit $|l(x_n)|=1$ pour tout n, ce dernier cas concernant exclusivement les poids de module 1. On associe alors à la suite $(x_n)_{n\in\mathrm{N}}$ une partition de L en L^+, L^0, L^- définie ainsi :

$$\mathrm{L}^+=\{l\in\mathrm{L},\ |l(x_n)|\to 0 \text{ quand } n\to\infty\},$$
$$\mathrm{L}^-=\{l\in\mathrm{L},\ |l(x_n)|\to +\infty \text{ quand } n\to\infty\}$$
$$\mathrm{L}^0=\{l\in\mathrm{L},\ |l(x_n)|=1, \forall n\in\mathrm{N}\}.$$

L'hypothèse (3) faite sur le groupe G assurant qu'il n'existe pas d'élément x de E pour lequel les scalaires réels $|l(x)|$ soient tous strictement supérieurs à 1 (ou tous strictement inférieurs à 1, puisque $|l(x^{-1})|=|l(x)|^{-1}$) entraîne que L est toujours distinct de L^- et également de L^+.

Si $\mathcal{N}_l$ est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{N}^{\mathbb{C}}$ associé au poids l (3.10), posons :

$$\mathcal{N}_{\mathbb{C}}^+=\sum_{l\in\mathrm{L}^+}\mathcal{N}_l,\qquad \mathcal{N}_{\mathbb{C}}^0=\sum_{l\in\mathrm{L}^0}\mathcal{N}_l,\qquad \mathcal{N}_{\mathbb{C}}^-=\sum_{l\in\mathrm{L}^-}\mathcal{N}_l.$$

Comme E est abélien, nous avons (3.10), $\mathcal{N}^{\mathbb{C}}=\mathcal{N}_{\mathbb{C}}^+\oplus\mathcal{N}_{\mathbb{C}}^0\oplus\mathcal{N}_{\mathbb{C}}^-$, et de la relation $[\mathcal{N}_l, \mathcal{N}_{l'}]\subset\mathcal{N}_{ll'}$, vraie pour tout poids l et l' de L, il résulte que les sous-espaces vectoriels $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}^+$, $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}^0$, $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}^-$ sont des sous-algèbres de $\mathcal{N}^{\mathbb{C}}$. Puisque les classes L^+, L^0, L^- sont stables par conjugaison, ces algèbres sont complexifiées d'algèbres réelles $\mathcal{N}^+, \mathcal{N}^0, \mathcal{N}^-$ et $\mathcal{N}=\mathcal{N}^+\oplus\mathcal{N}^0\oplus\mathcal{N}^-$. De plus, si :

$$\mathcal{N}_1=\mathcal{N},\qquad \mathcal{N}_2=[\mathcal{N}, \mathcal{N}_1],\ \ldots,\ \mathcal{N}_p=[\mathcal{N}, \mathcal{N}_{p-1}],\qquad \mathcal{N}_{p+1}=\{0\},$$

désigne la série centrale descendante de $\mathcal{N}$, il est aisé de voir que toujours grâce à la relation $[\mathcal{N}_l, \mathcal{N}_{l'}]\subset\mathcal{N}_{ll'}$, si l et $l'\in\mathrm{L}$, nous avons aussi pour $j\in\{1, \ldots, p\}$:

$$\mathcal{N}_j=(\mathcal{N}^+\cap\mathcal{N}_j)\oplus(\mathcal{N}^0\cap\mathcal{N}_j)\oplus(\mathcal{N}^-\cap\mathcal{N}_j).$$

Alors si N^+, N^0, N^- sont les sous-groupes fermés $\exp(\mathcal{N}^+)$, $\exp(\mathcal{N}^0)$, $\exp(\mathcal{N}^-)$ de N, le groupe N peut s'écrire $\mathrm{N}^+\mathrm{N}^0\mathrm{N}^-$ (lemme 3.6 de [43]); et tout élément de N a une écriture unique dans cette décompositon. En outre, si $(\mathrm{N}_j)_{1\leq j\leq p}$ désigne la série centrale descendante de N, $(\mathrm{N}_j=\exp\mathcal{N}_j)$, pour tout $j\in\{1, \ldots, p\}$ le groupe N_j s'écrit $\mathrm{N}_j^+\mathrm{N}_j^0\mathrm{N}_j^-$ avec $\mathrm{N}_j^{+,0,-}=\mathrm{N}_j\cap\mathrm{N}^{+,0,-}$.

On peut remarquer que, par construction, $\mathrm{N}^+\mathrm{N}^0$ et $\mathrm{N}^0\mathrm{N}^-$ sont des sous-groupes de N et que N^+ (resp. N^-) est distingué dans $\mathrm{N}^+\mathrm{N}^0$ (resp. $\mathrm{N}^-\mathrm{N}^0$).

Comme Ad E laisse $\mathcal{N}_l$ stable pour tout l de L (3.10), et donc laisse invariant les algèbres $\mathcal{N}^+$, $\mathcal{N}^0$, $\mathcal{N}^-$, tout élément de Ad K commutant avec tout élément de Ad E laisse aussi invariant les espaces ci-dessus. Il en résulte que $[\mathrm{N}^+, \mathrm{KE}]\subset\mathrm{N}^+$, $[\mathrm{N}^0, \mathrm{KE}]\subset\mathrm{N}^0$ et $[\mathrm{N}^-, \mathrm{KE}]\subset\mathrm{N}^-$.

Nous allons maintenant construire le sous-groupe B annoncé ci-dessus. Nous savons que par hypothèse L est distinct de L^+. Nous distinguerons deux cas selon que L^- est vide ou ne l'est pas. Si L^- est vide, nécessairement L^0 ne sera pas vide.

(i) Supposons L^- non vide. Nous allons rechercher un quotient non unimodulaire tel que sur ce quotient le module prenne une suite de valeurs bornée sur la projection de la suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Rappelons que si Δ est le module sur G, alors (3.13) :

$$\Delta(g_n) = \prod_{l \in L} |l^{-1}(x_n)|,$$

où, dans le produit, les éléments de L sont comptés avec leur ordre de multiplicité. Si L^+ était vide, le module de $\Delta(g_n)$ serait borné, et l'idée est donc de prendre le quotient par un groupe distingué contenant N^+.

Désignons par k le plus grand entier $j \in \{1, \ldots, p\}$ tel que $N_j^- = N^-$; cet entier est inférieur ou égal à p, car, par hypothèse, N^- est non réduit à $\{0\}$. Alors l'ensemble $B = N^+ N^0 N_{k+1}$ est un *sous-groupe distingué* de G; c'est un groupe car N_{k+1} est distingué dans G et car N^+ est distingué dans $N^+ N^0$. Comme KE laisse stable N^+, N^0 et N_{k+1}, nous avons $[B, KE] \subset B$. Il reste à prouver que B est distingué dans N. Mais comme le groupe N_k^- est égal à N^-, le groupe N s'écrit $N^+ N^0 N_k^-$. Donc $[N^+ N^0, N] \subset N^+ N^0 N_{k+1} = B$, et N_{k+1} étant distingué dans N, $[N^+ N^0 N_{k+1}, N]$ est inclus dans $BN_{k+1} = B$. D'où $[B, N] \subset B$.

Enfin, de par la définition de l'entier k, le *groupe* B est *distinct* du *groupe* N; et comme N est simplement connexe, B est fermé (chap. XIII, th. 1.2 de [37]). Soit s la surjection canonique de G sur G/B et $\dot{\Delta}$ le module de G/B. Le groupe quotient G/B est isomorphe au produit semi-direct $N/B \times KE$, produit semi-direct déterminé par la représentation adjointe de KE dans l'algèbre de Lie de N/B. Si $\mathscr{B}$ désigne l'algèbre de Lie de B, nous avons :

$$\dot{\Delta}[s(g_n)] = |\det \mathrm{Ad}\, x_n|^{-1} |\det \mathrm{Ad}\, x_n|_{\mathscr{B}}$$

et par suite $\dot{\Delta}[s(g_n)]$ est un produit de $|l(x_n)|^{-1}$, pour l appartenant à un sous-ensemble non vide de L^-.

Il en résulte que $\dot{\Delta}[s(g_n)]$ tend vers zéro lorsque $n \to \infty$. Le groupe G/B est donc non unimodulaire et il découle du théorème 2.16 que $\varepsilon_{s(g_n)} \star s(U)$ converge vaguement vers 0. Par suite, la mesure ν est nulle.

(ii) Supposons L^- vide, alors L^0 est non vide. Le groupe N s'écrit $N^+ N^0$ et N^+ étant distingué dans $N^+ N^0$, est distingué dans G. Posons $B = N^+$ et considérons le groupe quotient G/B, il est isomorphe au sous-groupe $H = N^0 \times KE$, groupe pour lequel les valeurs propres de la représentation adjointe de E restreinte à $\mathscr{N}^0$ sont toutes de module 1. Ce groupe est de type I. En effet, si μ_1 est une mesure de probabilité étalée sur H, les fonctions μ_1-harmoniques bornées et aussi les fonctions $\hat{\mu}_1$-harmoniques bornées sont constantes d'après le théorème V.3 de [1] puisque les valeurs propres de la représentation adjointe Ad sont de module 1. De plus, comme ce groupe est unimodulaire, la marche de loi μ_1 a la propriété (P) et il découle de la proposition 2.21 que, puisque H n'est pas produit direct d'un groupe compact et d'un groupe isomorphe à $\mathbb{R}$ (le groupe simplement connexe N^0 n'étant pas trivial), la marche de loi μ_1 est de type I. Pour terminer la démonstration du théorème, il suffit de remarquer que la marche de loi μ sur G ayant une projection transiente sur E, aura aussi une projection transiente sur G/N^+ qui sera donc de type I.

3.16. *Remarque.* — Le fait que le groupe H soit de type I est un résultat connu ([12] et [34]) puisque la composante connexe de H est de type (R). Notre démonstration suit d'ailleurs celle de [12].

C. La classe $\mathscr{D}$

Ayant déterminé les groupes unimodulaires presque connexes de type II, nous allons dorénavant nous intéresser aux groupes non unimodulaires presque connexes susceptibles d'être de type II, c'est-à-dire à la classe des groupes G moyennables tels que $G/\overline{[G, G]}$ et $G_0/\overline{[G_0, G_0]}$ soient de rang 1 et tels que les quotients de G par un sous-groupe compact distingué n'aient jamais la structure énoncée dans le théorème 3.11.

3.17. Définition. — Supposons que G soit un groupe de Lie moyennable tel que G/G_0 soit fini et tel que les groupes $G_0/\overline{[G_0, G_0]}$ et $G/\overline{[G, G]}$ soient de rang 1. Nous appelons décomposition (N, K, E) associée à G où N est le radical nilpotent, K un sous-groupe compact maximal, E un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{R}$ une décomposition de G définie dans le théorème 3.7. Soit alors L la famille des poids de la représentation adjointe de E dans $\mathscr{N}^{\mathbb{C}}$. L'espace vectoriel, que nous noterons V_G, des homomorphismes continus de G dans $\mathbb{R}(+)$ est de dimension 1 et les homomorphismes $\{\operatorname{Log}|l|\}_{l\in L}$ de E dans $\mathbb{R}(+)$ se prolongent à G de manière unique et définissent une famille d'*homomorphismes* $\{\alpha_l\}_{l\in L}$ de G dans $\mathbb{R}$ que l'on dit *associés à* G et qui ne dépendent pas de la décomposition de G choisie.

3.18. *Remarque.* — Ce sont les mêmes homomorphismes que définit A. Raugi dans un cadre plus général pour étudier les fonctions harmoniques [43].

3.19. Nous allons vérifier la dernière assertion de la définition, à savoir que la famille $\{\alpha_l\}_{l\in L}$ ne dépend pas de la décomposition choisie. Considérons la suite centrale descendante de l'algèbre de Lie $\mathscr{N}$ de N; soit :

$$\mathscr{N}_1=\mathscr{N}, \qquad \mathscr{N}_2=[\mathscr{N}, \mathscr{N}_1]=\mathscr{D}\mathscr{N}, \ \ldots, \mathscr{N}_p=[\mathscr{N}, \mathscr{N}_{p-1}], \qquad \mathscr{N}_{p+1}=\{0\}.$$

L'espace vectoriel $\mathscr{N}$ peut être identifié à la somme directe des espaces vectoriels $\mathscr{N}_j/\mathscr{N}_{j+1}$ où $1\leqq j\leqq p$. Les espaces $\mathscr{N}_j/\mathscr{N}_{j+1}$ sont stables par Ad E, et l'ensemble L des poids l de la représentation adjointe de E dans $\mathscr{N}^{\mathbb{C}}$ est la réunion des poids des représentations adjointes de E dans $\mathscr{N}_j^{\mathbb{C}}/\mathscr{N}_{j+1}^{\mathbb{C}}$ pour $j\in\{1, \ldots, p\}$.

Soit (N, K, E) une décomposition associée à G. Comme N est distingué dans G et comme $[K, E]=0$, le groupe NE est un sous-groupe distingué de G. Ce groupe est de plus résoluble connexe et est par suite inclus dans le radical R de G. Il en résulte que si K_1 est le groupe compact $R\cap K$, le groupe R s'écrit $NK_1 E$. Comme les sous-groupes compacts des groupes de Lie connexes résolubles [39] sont abéliens, le groupe K_1 est abélien, et de ce fait, comme $[E, K]=0$, le groupe EK_1 est abélien.

Par conséquent, tout poids de la représentation adjointe de E dans $\mathscr{N}_j^{\mathbb{C}}/\mathscr{N}_{j+1}^{\mathbb{C}}$, $j\in\{1, \ldots, p\}$ est la restriction à E d'un poids de la représentation adjointe de EK_1 dans $\mathscr{N}_j^{\mathbb{C}}/\mathscr{N}_{j+1}^{\mathbb{C}}$ et est même comme $[\mathscr{N}, \mathscr{N}_j]=\mathscr{N}_{j+1}$, la restriction à E d'un poids de la représentation adjointe de $R=NK_1 E$ dans $\mathscr{N}_j^{\mathbb{C}}/\mathscr{N}_{j+1}^{\mathbb{C}}$. Soit donc l'ensemble Φ réunion des poids φ des représentations adjointes de R dans $\mathcal{N}_j^{\mathbb{C}}/\mathcal{N}_{j+1}^{\mathbb{C}}$. Cet ensemble ne dépend pas de la décomposition de G choisie et si nous restreignons à E les homomorphismes φ pour $\varphi \in \Phi$, nous obtenons l'ensemble L. Par suite, si nous prolongeons à G les homomorphismes $\operatorname{Log}|\varphi|$, pour $\varphi \in \Phi$, nous obtenons les homomorphismes $(\alpha_l)_{l \in L}$ puisqu'il y a unicité du prolongement à G des homomorphismes continus de E dans $\mathbb{R}(+)$.

3.20. Définition. — Supposons que G soit un groupe de Lie *non unimodulaire* moyennable tel que G/G_0 soit fini et tel que les groupes $G/\overline{[G, G]}$ et $G_0/\overline{[G_0, G_0]}$ soient de rang 1. Alors si Δ désigne le module de G, les homomorphismes α_l, $l \in L$, associés à G sont proportionnels à $\log \Delta$ et nous appellerons *scalaires caractéristiques associés au groupe* G les scalaires réels β_l, $l \in L$ coefficients de proportionnalité entre les homomorphismes α_l et l'homomorphisme $\operatorname{Log} \Delta$; c'est-à-dire que, pour $l \in L$:

$$\beta_l = \alpha_l / \operatorname{Log} \Delta.$$

3.21. *Remarque.* — Si (N, K, E) est une décomposition associée à G, le groupe G est produit semi-direct de NK et de E et par suite (comme dans 3.13) pour tout $g=(n, x) \in NK \times E$, nous avons :

$$\Delta(g) = \Delta(x) = \prod_{l \in L} |l^{-1}(x)|^{s_l},$$

si s_l désigne l'ordre de multiplicité du poids l.

Donc :

$$\operatorname{Log} \Delta = -\sum_{l \in L} \alpha_l s_l$$

et :

$$\sum_{l \in L} \beta_l s_l = -1.$$

En conséquence, si les scalaires caractéristiques β_l associés à G sont de même signe, ils sont *négatifs*.

3.22. Définition de la classe $\mathscr{D}$. — Un groupe G non unimodulaire presque connexe sera dit de la classe $\mathscr{D}$ si les trois conditions suivantes sont satisfaites:

(*a*) le groupe G est moyennable;

(*b*) les groupes $G/\overline{[G, G]}$ et $G_0/\overline{[G_0, G_0]}$ sont de rang 1;

(*c*) il existe un sous-groupe compact Γ distingué dans G tel que le groupe quotient G/Γ soit un groupe de Lie ayant un nombre fini de composantes connexes et tel que les scalaires caractéristiques associés à G/Γ soient tous strictement négatifs.

3.23. Cette définition est cohérente car les conditions (*a*) et (*b*) étant stables par passage au quotient par un groupe compact, le groupe G/Γ vérifie les hypothèses de la définition 3.20 et l'ensemble des scalaires caractéristiques associés à G/Γ est bien défini.

Elle est naturelle, relativement au problème que nous étudions, puisque nous avons vu (théorèmes 2.3 et 3.3) que si G est un groupe presque connexe de type II, il existe un sous-groupe compact C tel que G/C soit le produit semi-direct N × A d'un sous-groupe nilpotent simplement connexe distingué et d'un sous-groupe A produit direct d'un groupe compact et d'un groupe E isomorphe à $\mathbb{R}$. De plus, d'après le théorème 3.11, si ce groupe N × A est de type II, il existe un élément x de E pour lequel les valeurs propres de $\mathrm{Ad}\, x\,|_{\mathcal{N}^{\mathbb{C}}}$ soient toutes de module strictement supérieur à 1. Comme cet ensemble de valeurs propres n'est autre que l'ensemble $\{ l(x),\ l \in \mathrm{L} \}$ si L est l'ensemble des poids de la représentation adjointe de E dans $\mathcal{N}^{\mathbb{C}}$, il est équivalent de dire que les scalaires $\alpha_l(x)$ sont tous strictement positifs ou encore que les scalaires caractéristiques β_l associés à G/C sont tous strictement de même signe et donc tous strictement négatifs; et cette dernière notion est intrinsèque.

3.24. *Exemples.* — 1. L'exemple le plus simple de groupe de la classe $\mathcal{D}$ est le groupe affine de la droite réelle. Ce groupe est en fait un sous-groupe résoluble du groupe semi-simple SL (2, $\mathbb{R}$) des matrices carrées réelles de déterminant 1. Plus généralement, soit G un groupe semi-simple connexe de centre fini et soit G = KAN est une décomposition d'Iwasawa de G : les sous-groupes K, A, N sont respectivement compact maximal, abélien connexe, nilpotent simplement connexe; si M est le centralisateur de A dans K, le groupe MAN est un sous-groupe moyennable maximal de G [26]; alors si A est de rang 1, pour tout sous-groupe M_1 de M, le groupe M_1 AN appartient à la classe $\mathcal{D}$ [52].

2. Soit G un groupe de Lie non unimodulaire résoluble connexe et simplement connexe. Alors G est de la classe $\mathcal{D}$ si et seulement si il existe sur l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de G une métrique à courbure strictement négative (*cf.* déf. 6.2 et cor. 7.8 de [3]).

3.25. STRUCTURE DES GROUPES DE LA CLASSE $\mathcal{D}$. — Nous avons donné dans le théorème 3.7 la structure des groupes de Lie G ayant un nombre fini de composantes connexes et vérifiant les conditions (*a*) et (*b*) de la définition 3.22 de la classe $\mathcal{D}$; nous avons défini une décomposition (N, K, E) associée à G où N est le radical nilpotent de G, K un groupe compact, E un groupe isomorphe à $\mathbb{R}$ tels que le produit KE soit direct et que G soit le produit semi-direct de NK et E, mais le groupe N n'est pas nécessairement simplement connexe et le groupe N ∩ K peut ne pas être trivial; et il avait été nécessaire de considérer le quotient de G par un groupe compact pour mettre en évidence un groupe nilpotent simplement connexe (théorème 3.3). Nous allons montrer que si G est un groupe de la classe $\mathcal{D}$, il existe une décomposition de G du type (M, K′, E) où M est nilpotent simplement connexe et où K′ est un groupe compact tels que le produit K′ E soit direct et que G soit produit semi-direct du groupe M distingué et du groupe K′ E.

3.26. THÉORÈME. — *Soit* G *un groupe de Lie tel que* G/G_0 *soit fini. Alors* G *est de la classe* $\mathcal{D}$ *si et seulement si* G *est produit semi-direct de deux sous-groupes fermés non triviaux* M *et* A *tels que :*

1° M *soit nilpotent distingué connexe et simplement connexe;*

2° A *soit produit direct d'un groupe compact* K *et d'un groupe* E *isomorphe à* $\mathbb{R}$*;*

3° *si* $\mathcal{M}$ *désigne l'algèbre de Lie de* M, *il existe un élément* $x \in \mathrm{E}$ *tel que les valeurs propres de* $\mathrm{Ad}\, x\,|_{\mathcal{M}^{\mathbb{C}}}$ *soient toutes de module strictement supérieur à* 1.

Preuve. — Si G est un groupe de Lie de la classe $\mathcal{D}$ tel que G/G_0 soit fini, considérons une décomposition (N, K, E) de G (*cf.* déf. 3.17). Soit Γ un sous-groupe compact distingué de G; comme K est un sous-groupe compact maximal de G, le groupe Γ est inclus dans K; sinon le groupe K Γ serait un groupe compact contenant K. Le groupe $N \cap \Gamma$, sous-groupe compact de N est inclus dans le sous-groupe compact maximum C de N qui est central dans G_0 (*cf.* dém. de 3.3); nous le noterons C_1.

Considérons p la surjection canonique de G sur le groupe G/Γ. Alors si N′ désigne le radical nilpotent de G/Γ, $(N', p(K), p(E))$ est une décomposition associée à G/Γ. En effet, il est clair que $p(K)$ est un sous-groupe compact maximal de G/Γ, que le groupe $p(E)$ est homéomorphe à $\mathbb{R}$, puisque $\overline{p(E)}$ ne peut être compact (*cf.* XVI, prop. 2.3 de [37]). Enfin, le groupe $p(N)$ est inclus dans N′ car $p(R)$ est inclus dans le radical R′ de G/Γ et que par suite, $p(N)=p(\overline{[G_0, R]})\subset\overline{[p(G_0), p(R)]}\subset\overline{[p(G)_0, R']}=N'$.

Désignons par $\mathscr{N}$, $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}_1$ les algèbres de Lie respectives de N, C et C_1 et considérons l'ensemble L des poids l de la représentation adjointe de E dans $\mathscr{N}^{\mathbb{C}}$. Si $\mathscr{N}_l$ est le sous-espace associé au poids l, nous avons (*cf.* 3.10) :

$$\mathscr{N}^{\mathbb{C}}=\sum_{l\in L}\mathscr{N}_l.$$

L'homomorphisme constant de E dans $\mathbb{R}^{+*}(\times)$ sera noté 1 et L′ sera l'ensemble des poids de L distincts de 1. Nous posons $\mathscr{M}^{\mathbb{C}}=\sum_{l\in L'}\mathscr{N}_l$. Alors :

$$\mathscr{N}^{\mathbb{C}}=\mathscr{N}_1\oplus\mathscr{M}^{\mathbb{C}},$$

où $\mathscr{N}_1=\{0\}$ si 1 n'est pas un poids.

Comme C_1 est central dans G_0, l'espace vectoriel $\mathscr{C}_1^{\mathbb{C}}$ est inclus dans $\mathscr{N}_1$ et l'espace vectoriel $\mathscr{N}^{\mathbb{C}}/\mathscr{C}_1^{\mathbb{C}}$ est isomorphe à la somme directe des espaces vectoriels $\mathscr{N}_1/\mathscr{C}_1^{\mathbb{C}}$ et $\mathscr{M}^{\mathbb{C}}$.

Puisque Ad E laisse stable $\mathscr{C}_1^{\mathbb{C}}$, nous en déduisons que l'ensemble L_1 des poids de la représentation adjointe de E dans $\mathscr{N}^{\mathbb{C}}/\mathscr{C}_1^{\mathbb{C}}$ est l'ensemble L′ si $\mathscr{N}_1/\mathscr{C}_1^{\mathbb{C}}$ est réduit à $\{0\}$ et est l'ensemble L sinon.

Remarquons que l'algèbre de Lie de $p(N)$, groupe isomorphe à N/C_1, peut être identifiée à $\mathscr{N}/\mathscr{C}_1$ et qu'un homomorphisme multiplicatif ψ est un poids de la représentation adjointe de $p(E)$ dans $\mathscr{N}^{\mathbb{C}}/\mathscr{C}_1^{\mathbb{C}}$ si et seulement si $\psi\circ p$ est un poids de la représentation adjointe de E dans $\mathscr{N}^{\mathbb{C}}/\mathscr{C}_1^{\mathbb{C}}$.

Choisissons le sous-groupe Γ de manière à ce que le groupe G/Γ obéisse à la condition (c) de 3.22. Comme $p(N)$ est inclus dans le radical nilpotent N′ de $p(G)$, cette condition (c) assure que si l est un élément de L_1, $\log|l|$ ne peut jamais être nul et donc L_1 ne contient pas le poids trivial 1. Par suite $L_1=L'$ et le groupe $\mathscr{N}_1/\mathscr{C}_1^{\mathbb{C}}$ est réduit à $\{0\}$. D'où $\mathscr{N}_1=\mathscr{C}^{\mathbb{C}}=\mathscr{C}_1^{\mathbb{C}}$.

De plus, cette sous-classe $L'=L_1$ de L est stable par multiplication, car toujours à cause de la condition (c), le produit de deux éléments de L_1 ne peut être trivial. Il résulte alors de l'inclusion $[\mathscr{N}_l, \mathscr{N}_{l'}]\subset\mathscr{N}_{ll'}$, que $\mathscr{M}^{\mathbb{C}}$ est une sous-algèbre de $\mathscr{N}^{\mathbb{C}}$. Comme L′ est aussi une classe stable par conjugaison, $\mathscr{M}^{\mathbb{C}}$ est la complexifiée d'une sous-algèbre $\mathscr{M}$ de $\mathscr{N}$; et $\mathscr{N}$ est somme directe de l'idéal $\mathscr{C}$ et de l'algèbre $\mathscr{M}$.

L'application exponentielle de $\mathcal{N}$ dans N étant surjective, si nous posons $M = \exp \mathcal{M}$, nous obtenons comme $[\mathcal{M}, \mathcal{C}] = 0$:

$$N = \exp[\mathcal{M} \oplus \mathcal{C}] = \exp(\mathcal{M}) \exp(\mathcal{C}) = MC.$$

Le groupe M est fermé dans N et simplement connexe car isomorphe à N/C.

Le groupe G s'écrit alors MCKE ou encore MKE puisque $C \subset K$, et le groupe $M \cap K$ sous-groupe compact du groupe simplement connexe nilpotent M est réduit à $\{e\}$ [37]. De plus, M est distingué dans G. En effet, Ad E laisse stable les sous-espaces $\mathcal{N}_l$ pour $l \in L'$ et, comme Ad K commute avec Ad E, Ad K laisse aussi stable les espaces $\mathcal{N}_l$. D'où Ad(KE) laisse stable $\mathcal{M}$ et donc $[KE, M] \subset M$. Par suite G est produit semi-direct du sous-groupe M nilpotent connexe, simplement connexe distingué dans G et du sous-groupe KE, produit direct de K et E. De plus, les poids de la représentation adjointe de E dans $\mathcal{M}^{\mathbb{C}}$ sont les éléments de L_1; or, il résulte de l'assertion (*c*) qu'il existe un élément x de E pour lequel les nombres réels $\alpha_l(x) = \operatorname{Log} |l(x)|$ soient tous strictement positifs pour $l \in L_1$ et donc il existe un élément x de E tel que les valeurs propres de $\operatorname{Ad} x|_{\mathcal{M}^{\mathbb{C}}}$ soient toutes de module strictement supérieur à 1. La partie directe du théorème est prouvée.

Supposons que réciproquement G ait la structure énoncée dans le théorème. Alors le groupe ME résoluble connexe distingué dans G est inclus dans le radical R de G. Et comme G/ME est compact, il en est de même de G/R. Le groupe G est par suite moyennable (*cf.* th. II.5 de [1]). Comme il existe un élément x de E pour lequel les valeurs propres de $\operatorname{Ad} x|_{\mathcal{M}^{\mathbb{C}}}$ soient toutes de module strictement supérieur à 1, nous en déduisons que $(\operatorname{Ad} x - \operatorname{Id}) \mathcal{M} = \mathcal{M}$. Si $\mathcal{E}$ désigne l'algèbre de Lie de E, il existe $\underline{x} \in \mathcal{E}$ tel que $x = \exp \underline{x}$. Alors $\operatorname{Ad} x = \exp \operatorname{ad} \underline{x}$, où ad est la représentation adjointe de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}$ telle que pour tout $(\underline{x}, \underline{y}) \in \mathcal{G} \times \mathcal{G}$, $\operatorname{ad} \underline{x}(\underline{y}) = [\underline{x}, \underline{y}]$; et $(\exp \operatorname{ad} \underline{x} - \operatorname{Id}) \mathcal{M} = \mathcal{M}$. Par suite $\operatorname{ad} \underline{x}(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$ et donc $[\mathcal{E}, \mathcal{M}] = \mathcal{M}$. Comme le groupe [E, M] sous-groupe du groupe nilpotent simplement connexe M est fermé, on en déduit que $[E, M] = M$ et les groupes $\overline{[G, G]}$ et $\overline{[G_0, G_0]}$ contiennent M. Comme ils sont de plus inclus dans MK, nous en concluons que les groupes $G_0/\overline{[G_0, G_0]}$ et $G/\overline{[G, G]}$ sont de rang 1. Il reste à vérifier la condition (*c*). Soit alors N le radical nilpotent $\overline{[G_0, R]}$ de G; nous venons de voir que $M \subset N \subset MK$. Si C est le sous-groupe compact maximum de N, alors $K \cap N$ est inclus dans C et N s'écrit MC. Comme M est supposé simplement connexe, $M \cap C = \{e\}$. Considérons le groupe G/C; puisque C est un sous-groupe compact de N, le radical nilpotent de G/C est N/C (*cf.* dém. de 3.3) et est, par suite, isomorphe à M. Il est alors clair que l'existence d'un élément x de E pour lequel les valeurs propres de $\operatorname{Ad} x|_{\mathcal{M}^{\mathbb{C}}}$ soient toutes de module strictement supérieur à 1 entraîne que les scalaires réels associés à G/C sont tous strictement de même signe; et G appartient donc à la classe $\mathcal{D}$.

3.27. PROPOSITION. — *Si* G *est un groupe de la classe* $\mathcal{D}$, *alors il existe sur* G *des marches aléatoires n'ayant pas la propriété* (P).

Plus précisément, si G *est un groupe de Lie, tel que* G/G_0 *soit fini, admettant la décomposition* (M, K, E) *donnée dans le théorème* 3.26, *les marches sur* G *n'ayant pas la propriété* (P) *sont exactement celles dont la projection sur* E *est récurrente.*

Preuve. — Elle découle immédiatement des théorèmes de structure des groupes portant des marches n'ayant pas la propriété (P) obtenus dans [9].

3.28. Si G est un groupe presque connexe contenant un sous-groupe compact S distingué dans G tel que G/S soit de la classe $\mathscr{D}$, alors G est de la classe $\mathscr{D}$. En effet, si G/S vérifie les conditions (*a*) et (*b*), il en est de même de G (lemme 3.5); et de plus de par sa définition la condition (*c*) a la même propriété. Non seulement la réciproque de l'assertion ci-dessus est vraie, mais tout quotient non unimodulaire d'un groupe de la classe $\mathscr{D}$ est de classe $\mathscr{D}$. Plus précisément, nous avons :

3.29. Proposition. — *Si* G *est un groupe de la classe* $\mathscr{D}$, *tout groupe quotient de* G *est soit compact, soit produit direct d'un groupe compact et d'un groupe isomorphe à* $\mathbb{R}$, *soit non unimodulaire. Dans ce dernier cas, le groupe quotient est aussi de la classe* $\mathscr{D}$.

Preuve. — Commençons par démontrer la proposition lorsque G est un groupe de Lie tel que G/G_0 soit fini. Alors G a la décomposition (M, K, E) donnée dans le théorème 3.26. Soit B un sous-groupe distingué fermé de G et soit p_E la surjection canonique de G sur G/MK isomorphe à E. Si $p_E(B)$ est le groupe trivial $\{0\}$, le groupe B est inclus dans MK; alors si π désigne la surjection canonique de G sur G/B, le groupe G/B peut s'écrire $\pi(M)\pi(K)\pi(E)$ où $\pi(M)$ est nilpotent, $\pi(K)$ compact, $\pi(E)$ homéomorphe à E. Si $\pi(M)$ est compact, alors G/B est extension de $\mathbb{R}$ par un groupe compact et est donc isomorphe au produit direct de $\mathbb{R}$ par un groupe compact (prop. 9.4 de [38]). Si $\pi(M)$ n'est pas conpact, appelons C son sous-groupe compact maximal. Alors (G/B)/C a la structure énoncée dans le théorème 3.26 et est donc de la classe $\mathscr{D}$. Par suite G/B est de la classe $\mathscr{D}$ (*cf.* 3.28).

Supposons donc que $p_E(B)$ n'est pas réduit à $\{0\}$, c'est-à-dire qu'il existe un élément b de B qui s'écrive ykx où $(y, k, x) \in M \times K \times E$ et où x est distinct de l'élément neutre de E. Nous allons montrer qu'alors B contient M. Comme Adk commute avec Adx, les valeurs propres de $\mathrm{Ad}(kx)|_{\mathscr{M}^{\mathbb{C}}}$ sont comme les valeurs propres de Adx, soit toutes de module strictement supérieur à 1, soit toutes de module strictement inférieur à 1. Considérons la suite centrale descendante $(\mathscr{M}_i)_{1 \leqq i \leqq k}$ de $\mathscr{M}$; alors $\mathscr{M}$ peut être identifié à la somme des sous-espaces vectoriels $\mathscr{M}_i/\mathscr{M}_{i+1}$, $1 \leqq i \leqq k$, et comme Ad(kx) laisse stable les espaces $\mathscr{M}_i/\mathscr{M}_{i+1}$, pour $1 \leqq i \leqq k$, les valeurs propres de $\mathrm{Ad}(kx)|_{(\mathscr{M}_i^{\mathbb{C}}/\mathscr{M}_{i+1}^{\mathbb{C}})}$ sont des valeurs propres de $\mathrm{Ad}(kx)|_{\mathscr{M}^{\mathbb{C}}}$. Par suite, les valeurs propres de $\mathrm{Ad}\, b|_{(\mathscr{M}_i^{\mathbb{C}}/\mathscr{M}_{i+1}^{\mathbb{C}})}$ sont, puisque $[\mathscr{M}, \mathscr{M}_i] = \mathscr{M}_{i+1}$, toutes de module strictement supérieur à 1, si les valeurs propres de $\mathrm{Ad}\, x|_{\mathscr{M}^{\mathbb{C}}}$ le sont; et par conséquent, il en est de même des valeurs propres de $\mathrm{Ad}\, b|_{\mathscr{M}^{\mathbb{C}}}$; d'où $(\mathrm{Ad}\, b - \mathrm{Id})\, \mathscr{M} = \mathscr{M}$. En raisonnant comme dans 3.26, on en déduit que [B, M] = M. Comme B est distingué, [B, M] $\subset$ B et B contient donc M. Il en résulte que G/B est soit compact, soit produit direct d'un groupe compact et d'un groupe isomorphe à $\mathbb{R}$.

Considérons maintenant le cas où G est un groupe presque connexe de la classe $\mathscr{D}$. Alors il existe un sous-groupe compact Γ tel que G/Γ soit un groupe de Lie de la classe $\mathscr{D}$ ayant un nombre fini de composantes connexes. Soit B un sous-groupe distingué de G. Le groupe $G/B\Gamma$, groupe quotient de G/Γ, est soit un groupe de la classe $\mathscr{D}$, soit un groupe compact ou un produit direct d'un groupe compact et d'un groupe isomorphe à $\mathbb{R}$. Comme $G/B\Gamma$ est isomorphe à $(G/B)/(B\Gamma/B)$, dans le premier cas G/B admet un quotient par un groupe compact qui est de la classe $\mathscr{D}$ et est donc de la classe $\mathscr{D}$ (*cf.* 3.28); dans le deuxième cas, G/B est soit compact, soit extension de $\mathbb{R}$ par un groupe compact; mais on sait qu'alors G/B est isomorphe au produit direct de $\mathbb{R}$ et d'un groupe compact (prop. 9.4 de [38]).

3.30. *Remarque.* — On peut aisément vérifier que si G est un groupe non unimodulaire tel que ses quotients soient soit compact, soit produit direct d'un compact et d'un groupe isomorphe à $\mathbb{R}$, soit non unimodulaire, alors les conditions (*a*) et (*b*) dans la définition de la classe $\mathscr{D}$ sont vérifiées, mais par contre il n'en est pas de même de la condition (*c*). Il suffit par exemple de considérer le groupe F, produit semi-direct $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ défini de la façon suivante : le produit de deux éléments (u, v, x) et (u', v', x) de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ est donné par $(u+e^{\alpha x} u', v+e^{\beta x} v', x+x')$ où α et β sont des réels fixés non nuls de signe contraire et tels que $\alpha+\beta \neq 0$. Le groupe F n'est pas de la classe $\mathscr{D}$, mais vérifie l'assertion ci-dessus.

3.31. Donnons pour terminer un exemple de groupe de Lie connexe moyennable G tel que $G/\overline{[G, G]}$ soit de rang 1, mais dont le radical nilpotent N ne peut se mettre sous la forme MC avec M nilpotent simplement connexe, C compact ce qui insistera sur l'importance de la condition (*c*) de 3.22 dans la décomposition MKE des groupes de la classe $\mathscr{D}$.

Considérons le groupe d'Heisenberg H de dimension 3; c'est-à-dire $\mathbb{R}^3$ muni du produit $(a, b, c)(a', b', c')=(a+a', b+b', c+c'+1/2(ab'-a'b))$. Si $(0, 0, x)$ est un élément non nul du centre D de H, notons D_1 le sous-groupe discret engendré par $(0, 0, x)$. Le centre $C=D/D_1$ de H/D_1 est compact et si H/D_1 se mettait sous la forme MC avec M simplement connexe, il serait abélien. Soit α un réel non nul. Le groupe G connexe produit semi-direct $H/D_1 \times_\eta \mathbb{R}$ où $\eta(x)(a, b, c)=(e^{\alpha x} a, e^{-\alpha x} b, c)$ pour $x \in \mathbb{R}$ est moyennable, vérifie $G/\overline{[G, G]}$ de rang 1 et admet pour radical nilpotent H/D_1.

Dans les chapitres suivants, nous étudierons exclusivement les groupes de la classe $\mathscr{D}$ et nous prouverons qu'ils sont de type II.

CHAPITRE IV

MESURES LIMITES SUR LES GROUPES DE LA CLASSE $\mathscr{D}$

4.1. Nous allons supposer que G est *un groupe de Lie de la classe* $\mathscr{D}$ *tel que* G/G_0 *soit fini.* Un tel groupe est non unimodulaire et Δ désignera le module. Nous connaissons (th. 3.26) la structure de ces groupes et lorsque nous parlerons d'un tel groupe G, il sera toujours sous-entendu que G *est produit semi-direct de deux sous-groupes fermés non triviaux* M *et* A *tels que :*

1° M *soit nilpotent distingué connexe simplement connexe;*

2° A *soit produit direct d'un groupe compact* K *et d'un groupe* E *isomorphe à* $\mathbb{R}$;

3° *si* $\mathscr{M}$ *désigne l'algèbre de Lie de* M, *il existe un élément* x *de* E *tel que les valeurs propres de* $\operatorname{Ad} x|_{\mathscr{M}^{\mathbb{C}}}$ *soient toutes de module strictement supérieur à* 1.

4.2. Définition. — Un élément h du groupe G sera dit *période* d'une mesure de Radon ν sur G si $\varepsilon_h \star \nu=\nu$.

Cette notion de période est distincte de la notion de μ-période introduite en 2.4 et le préfixe μ utilisé dans ce cas supprime toute ambiguïté de notation. Il est clair que l'ensemble des périodes d'une mesure de Radon est un groupe.

Au cours des paragraphes A et B de ce chapitre, nous prouverons le théorème suivant :

4.3. THÉORÈME. — *Soit* G *un groupe de Lie de la classe* $\mathscr{D}$ *tel que* G/G_0 *soit fini et soit* μ *une mesure de probabilité étalée sur* G. *Alors si la marche de loi* μ *est de type II, l'ensemble des mesures* $\{\varepsilon_x \star U, x \in E\}$ *admet exactement deux valeurs d'adhérence lorsque* x *tend vers le point à l'infini de* E : *la mesure nulle lorsque* $\Delta(x)$ *tend vers zéro et une mesure de Radon* ν_0 *non nulle admettant les éléments de* A *pour périodes lorsque* $\Delta(x)$ *tend vers* $+\infty$.

De plus, tout élément non nul de I_μ *s'écrit* $\varepsilon_z \star \nu_0$ *où* $z \in M$.

Dans le paragraphe C nous étudierons tout particulièrement la mesure ν_0 et le théorème 4.21 en donnera une désintégration précise.

4.4. Ce théorème va résulter d'une étude de la forme des valeurs limites de $\varepsilon_g \star U$ lorsque g tend vers δ selon les directions du groupe où elles sont atteintes.

Soient ν un élément de I_μ et $(g_n)_{n \in N}$ une suite d'éléments de G telle que $\varepsilon_{g_n} \star U$ converge vaguement vers ν. On peut toujours supposer, quitte à extraire une sous-suite, que la suite $(g_n)_{n \in N}$ satisfait l'un des trois cas suivants :

Cas I : $\Delta(g_n)$ tend vers $+\infty$ et $p_M(g_n)$ tend vers le point à l'infini de M.

Cas II : $\Delta(g_n)$ tend vers $+\infty$ et $p_M(g_n)$ converge vers un élément z de M.

Cas III : $\Delta(g_n)$ reste borné supérieurement.

Dans le cas III, le théorème 2.16 permet de conclure que ν est nulle. Nous nous intéresserons donc aux cas I et II; nous prouverons dans le cas I que la mesure ν est nulle et dans le cas II que la mesure $\varepsilon_{-z} \star \nu$ admet les éléments de A pour périodes, si $-z$ désigne l'inverse de z dans M.

Remarquons tout de suite que si nous considérons les valeurs d'adhérence de $\{\varepsilon_x \star U, x \in E\}$ lorsque x tend vers le point à l'infini de E, alors puisque Δ est un isomorphisme de E dans $\mathbb{R}^{+*}$, $\Delta(x)$ tend vers zéro ou vers $+\infty$, et si $\Delta(x)$ tend vers zéro, d'après le cas III, $\varepsilon_x \star U$ converge vaguement vers zéro.

4.5. NOTATION. — Le groupe G peut être identifié au produit semi-direct $M \times_\eta A$ où pour tout a de A, $\eta(a)$ n'est autre que l'automorphisme intérieur τ_a restreint à M. Notons p_M, p_A, p_K, p_E les projections respectives sur M, A, K, E. Tout élément g de G s'écrit alors $(p_M(g), p_A(g))$ ou $(p_M(g), p_K(g), p_E(g))$, et si g_1 et g_2 appartiennent à G :

$$g_1 g_2 = (p_M(g_1)\,\eta[p_A(g_1)](p_M(g_2)),\ p_A(g_1) p_A(g_2)).$$

Le groupe M étant nilpotent simplement connexe, nous l'identifierons à son algèbre de Lie, le produit de deux éléments u et v de cette algèbre de Lie étant défini par la formule de Campbell-Haussdorf :

$$u \times v = u + v + \frac{1}{2}[u, v] + \ldots$$

et nous désignerons par $M^{\mathbb{C}}$ l'algèbre complexifiée. L'automorphisme η de A dans Aut M sera alors la représentation adjointe de A restreinte à M. Nous noterons 0 les éléments neutres de M, A, K, E et les éléments y de M, a de A et x de E seront respectivement identifiés aux éléments $(y, 0)$, $(0, a)$, $(0, 0, x)$ de G.

On désignera par L l'ensemble des poids de la représentation adjointe de E dans l'algèbre de Lie complexifiée du radical nilpotent N de G et les scalaires caractéristiques associés à G (3.20) seront notés $(\beta_l)_{l \in L}$. Rappelons (preuve de 3.26) que si C est le sous-groupe compact maximal de N, le groupe N s'écrit MC. En conséquence, un des scalaires β_l est nul si et seulement si le radical nilpotent de G n'est pas simplement connexe : c'est le scalaire associé au poids trivial de la représentation adjointe de E restreinte à l'algèbre de Lie complexifiée de C. Tous les autres scalaires caractéristiques β_l sont strictement négatifs et ce sont exactement les scalaires associés à l'ensemble L' des poids de la représentation adjointe de E dans $M^{\mathbb{C}}$.

A. Étude du cas I

4.6. THÉORÈME. — *Soit* G *un groupe de Lie de la classe* $\mathscr{D}$ *tel que* G/G_0 *soit fini et soit* μ *une mesure de probabilité étalée sur* G. *Si* $(g_n)_{n \in N}$ *est une suite d'éléments de* G *telle que* $p_M(g_n)$ *tende vers le point à l'infini de* M, *alors la suite* $\varepsilon_{g_n} \star U$ *converge vaguement vers la mesure nulle.*

Preuve. — On sait (th. 2.23) qu'il suffit de prouver le théorème pour les marches sur G transientes en projection, ou, ce qui est équivalent, puisque $M \subset \overline{[G, G]} \subset MK$, pour les marches dont la projection sur E est transiente. On supposera donc que μ est une mesure de probabilité étalée sur G telle que la marche sur E de loi $p_E(\mu)$ soit transiente.

Le groupe M étant identifié à son algèbre de Lie, le produit de deux éléments (y_1, a_1) et (y_2, a_2) de $M \times A$ est défini par :

$$(y_1, a_1)(y_2, a_2) = (y_1 \operatorname{Ad} a_1(y_2), a_1 a_2).$$

Comme M est nilpotent, le centre Z de M n'est pas réduit à $\{0\}$. C'est un sous-groupe distingué de G et appelons π_1 la projection de M sur le groupe quotient M/Z qui sera noté M_1.

Soit une suite $(g_n)_{n \in N}$ de G telle que $p_M(g_n)$ tende vers le point à l'infini de M. Quitte à extraire une sous-suite, nous pouvons supposer que la suite $\varepsilon_{g_n} \star U$ converge vaguement vers une mesure ν. Considérons alors la suite $\pi_1 \circ p_M(g_n)$ de M_1 et montrons pour commencer que, quitte à passer à un quotient adéquat de G, nous pouvons supposer que cette suite $\pi_1 \circ p_M(g_n)$ admet une sous-suite convergente dans M_1.

(*a*) Supposons donc que la suite $\pi_1 \circ p_M(g_n)$ tende vers le point à l'infini de M_1. Remarquons que le groupe G/Z est isomorphe au produit semi-direct $M_1 \times KE$ et considérons comme ci-dessus le centre Z_1 de M_1. Ce groupe Z_1 est distingué dans $M_1 \times KE$ et notons π_2 la surjection de M_1 sur $M_2 = M_1/Z_1$. Si la suite $\pi_2 \circ \pi_1 \circ p_M(g_n)$ tend vers le point à l'infini de M_2, nous recommençons et nous construisons ainsi une suite de groupes quotients $M_k = M_{k-1}/Z_{k-1}$ où Z_{k-1} est le centre non trivial de M_{k-1}.

Soit alors r la borne supérieure des entiers $k \geqq 1$ tels que la suite $\pi_k \circ \ldots \circ \pi_1 \circ p_{\mathrm{M}}(g_n)$ tende vers le point à l'infini de M_k. Cet entier r sera fini puisque la suite des espaces vectoriels M_k est de dimension strictement décroissante, ne serait-ce que lorsque $\mathrm{M}_{r+1} = \{0\}$. Considérons le noyau T_r de $\pi_r \circ \ldots \circ \pi_1$. C'est un sous-groupe de M distingué dans G et le groupe quotient $\mathrm{G}' = \mathrm{G}/\mathrm{T}_r$ peut être identifié au produit semi-direct $\mathrm{M}_r \times \mathrm{KE}$. Notons π' la surjection canonique de G sur G' et étudions la suite $\pi'(g_n)$; par construction :

— la suite $p_{\mathrm{M}_r}(\pi'(g_n)) = \pi_r \circ \ldots \circ \pi_1 \circ p_{\mathrm{M}}(g_n)$ tend vers le point à l'infini de M_r;

— mais la projection $\pi_{r+1} \circ p_{\mathrm{M}_r}(\pi'(g_n))$ de cette suite $p_{\mathrm{M}_r}(\pi'(g_n))$ sur M_{r+1} admet une sous-suite convergente; et cette propriété est l'équivalent sur G' de la condition sur G réclamant à la suite $\pi_1 \circ p_{\mathrm{M}}(g_n)$ d'avoir une sous-suite convergente.

Considérons alors sur G' la marche de loi $\pi'(\mu)$. Cette marche est transiente et a même une projection transiente sur E puisque la marche de loi μ sur G a cette propriété. Elle a pour noyau potentiel $\pi'(\mathrm{U})$ et si nous remarquons que dès que la suite $\varepsilon_{\pi'(g_n)} \star \pi'(\mathrm{U})$ converge vers 0, il en est de même de $\varepsilon_{g_n} \star \mathrm{U}$, nous en déduisons qu'il nous suffit de nous placer sur G' et d'étudier le comportement asymptotique de $\varepsilon_{\pi'(g_n)} \star \pi'(\mathrm{U})$.

(*b*) En conséquence, quitte à remplacer G par G' et quitte à extraire une sous-suite, nous pouvons supposer que la suite $\pi_1 \circ p_{\mathrm{M}}(g_n)$ converge vers un élément u de M_1. Comme le groupe M est simplement connexe et le groupe Z fermé distingué dans M, il existe (*cf.* XII, th. 1.2 de [37]) une section continue s de $\mathrm{M}_1 = \mathrm{M}/\mathrm{Z}$ dans M telle que $\pi_1 \circ s$ soit l'identité de M/Z et telle que l'application $(z, v) \to zs(v)$ soit un homéomorphisme de $\mathrm{Z} \times \mathrm{M}/\mathrm{Z}$ sur M. Alors il existe, pour tout n, un élément z_n de Z tel que :

$$p_{\mathrm{M}}(g_n) = z_n (s \circ \pi_1)[p_{\mathrm{M}}(g_n)].$$

Posons $w_n = s \circ \pi_1 [p_{\mathrm{M}}(g_n)]$. La suite $p_{\mathrm{M}}(g_n)$ s'écrit $z_n w_n$ et comme $\pi_1 [p_{\mathrm{M}}(g_n)]$ converge vers u, la suite w_n converge vers $w = s(u)$. Puisque $p_{\mathrm{M}}(g_n)$ tend vers le point à l'infini de M, la suite z_n tend vers le point à l'infini de Z.

Le groupe Z étant le centre de M, nous pouvons écrire $p_{\mathrm{M}}(g_n) = w_n z_n$ et si nous posons $g'_n = (z_n, p_{\mathrm{A}}(g_n))$, nous avons :

$$g_n = (w_n z_n, p_{\mathrm{A}}(g_n)) = (w_n, 0) g'_n.$$

Soit f un élément de $\mathrm{C}_{\mathrm{K}}(\mathrm{G})$. Comme $\varepsilon_{g_n} \star \mathrm{U}$ converge vaguement vers ν, il découle de l'uniforme continuité à gauche de Uf que la suite $\varepsilon_{g'_n} \star \mathrm{U}(f) = \varepsilon_{(w_n, 0)^{-1}} \star \varepsilon_{g_n} \star \mathrm{U}(f)$ converge vers $\varepsilon_{(w, 0)^{-1}} \star \nu(f)$. Par conséquent $\varepsilon_{g'_n} \star \mathrm{U}$ converge vaguement vers la mesure $\nu_1 = \varepsilon_{(w, 0)^{-1}} \star \nu$. Si nous montrons que ν_1 est nulle, il en sera de même de ν.

Étudions donc la suite $\varepsilon_{g'_n} \star \mathrm{U}$. Nous allons utiliser le lemme suivant :

4.7. Lemme. — *Soit μ une mesure de probabilité étalée sur* G *et g_n une suite d'éléments de* G *telle que $\varepsilon_{g_n} \star \mathrm{U}$ converge vaguement vers ν. Alors si il existe une suite x_n d'éléments de* G *convergeant vers e telle que la suite $x_n g_n x_n^{-1} g_n^{-1}$ admette une valeur d'adhérence y dans* G, *la mesure ν admet l'élément y comme période.*

Preuve du lemme 4.7. — Quitte à extraire une sous-suite, on suppose que la suite $y_n = x_n g_n x_n^{-1} g_n^{-1}$ converge vers y. Alors $x_n g_n x_n^{-1} = y_n g_n$. Si f est un élément de $\mathrm{C}_{\mathrm{K}}^{+}(\mathrm{G})$, on considère les fonctions de G dans $\mathbb{R}$ définies pour tout $(g, x) \in G \times G$ par :

$$R_g(x) = Uf(xg) \qquad \text{et} \qquad H_g(x) = Uf(gx).$$

On sait (prop. 2.7) que les ensembles $\{R_g, g \in G\}$ et $\{H_g, g \in G\}$ sont équi-continus en tout point x de e. Par suite, comme la suite x_n converge vers e, on a :

$$\lim_n Uf(x_n g_n x_n^{-1}) = \lim_n Uf(g_n) = \nu(f)$$

et comme la suite y_n converge vers y :

$$\lim_n Uf(y_n g_n) = \lim_n Uf(y g_n) = \varepsilon_y \star \nu(f).$$

Par conséquent, pour tout f de $C_K^+(G)$:

$$\nu(f) = \varepsilon_y \star \nu(f)$$

et la mesure ν admet y comme période.

4.8. Reprenons la démonstration du théorème 4.6 et cherchons des périodes de ν_1. Étudions, si x_n est une suite quelconque de E, la suite :

$$y_n = x_n g'_n x_n^{-1} g_n'^{-1} = (0, 0, x_n)(z_n, p_A(g_n))(0, 0, -x_n)(z_n, p_A(g_n))^{-1}.$$

Comme E est abélien et comme K et E commutent, cette suite est dans M et un calcul immédiat prouve que :

$$y_n = (\operatorname{Ad} x_n(z_n), 0)(-z_n, 0).$$

Mais puisque Z est abélien et stable par Ad E, cette suite est en fait dans Z et $y_n = \operatorname{Ad} x_n(z_n) - z_n$.

Si $\mathscr{E}$ désigne l'algèbre de Lie de E, il existe $\underline{x}_n \in \mathscr{E}$ tel que $x_n = \exp \underline{x}_n$. Alors si ad désigne la représentation adjointe de $\mathscr{G}$ dans $\mathscr{G}$ définie pour $(\underline{x}, \underline{y}) \in \mathscr{G} \times \mathscr{G}$ par $\operatorname{ad} \underline{x}(\underline{y}) = [\underline{x}, \underline{y}]$, nous avons :

$$\operatorname{Ad} x_n = \exp \operatorname{ad} \underline{x}_n = \sum_{k \geqq 0} \frac{1}{k!} (\operatorname{ad} \underline{x}_n)^k.$$

Si nous posons :

$$B(x_n) = \sum_{k \geqq 2} \frac{1}{k!} (\operatorname{ad} \underline{x}_n)^k,$$

nous avons :

$$\operatorname{Ad} x_n = \operatorname{Id} + \operatorname{ad} \underline{x}_n + B(x_n)$$

et

$$y_n = \operatorname{ad} \underline{x}_n(z_n) + B(x_n)(z_n).$$

Soit $\underline{b}$ un élément quelconque fixé non nul de $\mathscr{E}$; il existe, puisque $\mathscr{E}$ est de dimension 1, pour tout entier n, un réel t_n tel que $\underline{x}_n = t_n \underline{b}$. Considérons de plus une norme euclidienne $\| \quad \|$ sur l'espace vectoriel M. Alors, comme la suite z_n tend vers le point à l'infini de M, la suite $\| z_n \|$ tend vers $+\infty$. Posons :

$$v_n = \frac{z_n}{\| z_n \|}.$$

Quitte à extraire une sous-suite, nous pouvons supposer que v_n converge vers un élément v nécessairement non nul de Z. Nous avons donc :

$$y_n = t_n \| z_n \| \operatorname{ad} \underline{b}(v_n) + \mathrm{B}(x_n)(z_n)$$

et lorsque $n \to \infty$, la suite $\operatorname{ad} \underline{b}(v_n)$ converge vers $\operatorname{ad} \underline{b}(v)$.

Or, comme le groupe G est un groupe de la classe $\mathscr{D}$, la représentation Ad de E dans M n'a aucun poids de module 1 (condition 3) et par suite $\operatorname{ad} \underline{b}$ n'a aucune valeur propre nulle et est donc un automorphisme de M. En conséquence, puisque v est non nul, $\operatorname{ad} \underline{b}(v)$ est non nul.

Choisissons, si t est un élément quelconque de $\mathbb{R}$, la suite t_n de manière à ce que $t_n \| z_n \| = t$. Comme $\| z_n \|$ tend vers $+\infty$, la suite t_n tend vers zéro et la suite $x_n = \exp(t_n \underline{b})$ converge vers l'élément neutre de E. Montrons qu'alors y_n converge vers $t \operatorname{ad} \underline{b}(v)$. Il suffit en fait de prouver que $\mathrm{B}(x_n)(z_n)$ tend vers zéro. Or :

$$\mathrm{B}(x_n)(z_n) = \sum_{k \geqq 2} \frac{1}{k!} t_n^k \| z_n \| (\operatorname{ad} \underline{b})^k (v_n) = t_n^2 \| z_n \| \sum_{k \geqq 2} \frac{1}{k!} t_n^{k-2} (\operatorname{ad} \underline{b})^k (v_n);$$

et donc, pour n suffisamment grand :

$$| \mathrm{B}(x_n)(z_n) | \leqq 2\, t t_n \exp \| \operatorname{ad} \underline{b} \| . \| v \|$$

et ce dernier terme tend vers zéro, puisque t_n tend vers zéro lorsque $n \to \infty$.

Il découle alors du lemme 4.7 que, pour tout t de $\mathbb{R}$, l'élément $t \operatorname{ad} \underline{b}(v)$ est une période de ν_1; et le sous-groupe à un paramètre H de M engendré par $\operatorname{ad} \underline{b}(v)$ est donc inclus dans le groupe de périodes de ν_1. Comme M est nilpotent simplement connexe, ce sous-groupe H est aussi simplement connexe.

4.9. Terminons la démonstration du théorème 4.6 en prouvant que, puisque le groupe des périodes de ν_1 contient un sous-groupe simplement connexe H de M, l'élément ν_1 de I_μ est nul. Le fait que la marche sur E de loi $p_\mathrm{E}(\mu)$ est transiente, va intervenir de manière fondamentale.

En effet, si H′ désigne un supplémentaire de H dans M et si K désigne un compact de A, la fonctionnelle ν_1^K définie sur H par :

$$\nu_1^\mathrm{K}(\mathrm{B}) = \nu_1 [(\mathrm{B} + \mathrm{H}') \times \mathrm{K}] \qquad \text{si} \quad \mathrm{B} \in \mathscr{B}(\mathrm{H})$$

est une mesure sur H. Comme H est central dans M et comme $\varepsilon_y \star \nu_1 = \nu_1$, pour $y \in H$, nous en déduisons que $\varepsilon_y \star \nu_1^K = \nu_1^K$ et que par suite ν_1^K est une mesure de Haar sur H. Puisque H est simplement connexe, cette mesure de Haar, si elle n'est pas nulle, est de masse infinie.

Mais la marche de loi $p_E(\mu)$ étant transiente, $p_E(\nu_1)$ est une mesure de Radon, et donc pour tout compact K de A, $p_A(\nu_1)(K)$ est fini. Or :

$$\nu_1^K(H) = \nu_1(M \times K) = p_A(\nu_1)(K) < \infty.$$

Par suite, pour tout compact K de A, ν_1^K est la mesure nulle et donc ν_1 est la mesure nulle sur G.

4.10. Corollaire. — *Soit* G *un groupe de Lie de la classe* $\mathscr{D}$ *tel que* G/G_0 *soit fini et soit* μ *une mesure de probabilité étalée sur* G. *Considérons l'ensemble* J_μ *des valeurs d'adhérence de* $\{\varepsilon_x \star U, x \in E\}$ *lorsque* x *tend vers le point à l'infini de* E. *Alors l'ensemble* I_μ *est l'ensemble* $\{\varepsilon_y \star \nu, y \in MK, \nu \in J_\mu\}$.

Preuve. — Soit ν un élément de I_μ, et $(g_n)_{n \in N}$ une suite d'éléments de G telle que $\varepsilon_{g_n} \star U$ converge vaguement vers ν. Nous venons de voir que si $p_M(g_n)$ tend vers le point à l'infini de M, alors la mesure ν est nulle. Cette mesure est bien un élément de J_μ car si x_n est une suite de E telle que $\Delta(x_n) \to 0$, nous savons (cas III) que $\varepsilon_{x_n} \star U$ converge vers zéro.

Supposons donc, quitte à extraire une sous-suite, que $p_M(g_n)$ converge vers z et aussi, puisque K est compact, que $p_K(g_n)$ converge vers k. Alors la suite :

$$\varepsilon_{(0,\, 0,\, p_E(g_n))} \star U = \varepsilon_{(p_M(g_n),\, p_K(g_n),\, 0)^{-1}} \star \varepsilon_{g_n} \star U,$$

converge vaguement vers $\varepsilon_{(z,\, k,\, 0)^{-1}} \star \nu$ lorsque $n \to \infty$, toujours à cause de l'uniforme continuité à gauche des fonctions Uf, si $f \in C_K(G)$. La mesure $\varepsilon_{(z,\, k,\, 0)^{-1}} \star \nu$ est donc un élément de J_μ et le corollaire 4.10 est prouvé.

L'étude du cas II se ramène par suite à la détermination des valeurs d'adhérence de $\{\varepsilon_x \star U, x \in E\}$ lorsque $\Delta(x)$ tend vers $+\infty$.

B. Existence d'une unique valeur d'adhérence ν_0 de $\{\varepsilon_x \star U, x \in E\}$ lorsque $\Delta(x)$ tend vers $+\infty$

4.11. Proposition. — *Soit* G *un groupe de Lie de la classe* $\mathscr{D}$ *tel que* G/G_0 *soit fini et soit* μ *une mesure de probabilité étalée sur* G. *L'ensemble des mesures* $\{\varepsilon_x \star U, x \in E\}$ *admet exactement une valeur d'adhérence* ν_0 *lorsque* $\Delta(x)$ *tend vers* $+\infty$. *Cette mesure* ν_0, *éventuellement nulle, admet les éléments de* A *pour périodes.*

4.12. Corollaire. — *Soient* G *un groupe de Lie de la classe* $\mathscr{D}$ *tel que* G/G_0 *soit fini et* μ *une mesure de probabilité étalée sur* G. *Soit* ν_0 *la mesure définie en* 4.11. *Si* $(g_n)_{n \in N}$ *est une suite d'éléments de* G *telle que* $\Delta(g_n)$ *tende vers* $+\infty$ *et telle que* $p_M(g_n)$ *converge vers un élément* z *de* M, *alors la suite* $\varepsilon_{g_n} \star U$ *converge vaguement vers* $\varepsilon_z \star \nu_0$.

4.13. Comme ν_0 admet pour périodes les éléments de A, ce corollaire découle immédiatement de 4.10 et 4.11 et donne le comportement asymptotique du noyau potentiel dans le cas II. Remarquons aussi que le théorème 4.3 est une conséquence immédiate de 4.10 et 4.11.

La preuve de la proposition 4.11 nécessitera par contre plusieurs lemmes. Notons tout de suite qu'il n'est pas possible pour cette étude de se restreindre aux marches transientes en projection. En effet, le théorème 2.23 affirme qu'à toute marche de loi étalée μ récurrente en projection, on peut associer une marche de loi étalée ρ transiente en projection telle que $\varepsilon_{g_n} \star \sum\limits_{p \geqq 0} \mu^p$ converge vaguement vers 0 si et seulement si $\varepsilon_{g_n} \star \sum\limits_{p \geqq 0} \rho^p$ converge vaguement vers zéro, mais ne donne aucun critère de comparaison des mesures limites.

4.14. LEMME. — *Soit* G *un groupe de Lie de la classe* $\mathscr{D}$ *tel que* G/G_0 *soit fini et soit* $(\beta_l)_{l \in L'}$ *l'ensemble des scalaires caractéristiques associés à* G *et strictement négatifs. Alors il existe une norme* $\| \quad \|$ *sur* M *telle que :*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists C \in \mathbb{R}^+ \qquad \textit{tel que} \quad \forall v \in M, \quad \forall g \in G \ \textit{vérifiant} \ \Delta(g) > 1,$$

$$\| \mathrm{Ad}(p_A(g)(v)) \| \leqq C \exp[(\sup_{l \in L'} \beta_l + \varepsilon) \operatorname{Log} \Delta(g)] \, \| v \|.$$

Preuve. — Commençons par prouver que si ρ est une représentation linéaire du groupe vectoriel $\mathbb{R}$ dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel V de dimension m et si $(\psi_k)_{1 \leqq k \leqq p}$ désignent les poids de cette représentation dans l'espace vectoriel complexifié $V^{\mathbb{C}}$ il existe alors une norme $\| \quad \|$ sur V telle que :

$$(\star) \qquad \forall v \in V, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \| \rho(x)(v) \| \leqq 2 \sup_{r=1}^{m} \frac{|x|^r}{r!} \sup_{k=1}^{p} |\psi_k(x)| \; \| v \|.$$

En effet, identifions $\mathbb{R}$ à son algèbre de Lie et désignons par $d\rho$ la différentielle de ρ. Pour tout x de $\mathbb{R}$, nous avons $\rho(x) = \exp[d\rho(x)] = \exp[x \, d\rho(1)]$.

Soient $(\lambda_k)_{1 \leqq k \leqq p}$ les valeurs propres de l'homomorphisme propres $d\rho(1)$ de $V^{\mathbb{C}}$. Alors, les poids $(\psi_k)_{1 \leqq k \leqq p}$ de ρ sont les homomorphismes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}(\times)$ définis si $x \in \mathbb{R}$ par $\psi_k(x) = \exp(\lambda_k x)$.

Il existe une base (v_i) $1 \leqq i \leqq 2m$ de $V^{\mathbb{C}}$ telle que dans cette base, la matrice de $d\rho(1)$ soit sous forme réduite de Jordan :

$$d\boldsymbol{\rho}(1) = \begin{bmatrix} B_1 & & & 0 \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & B_s \end{bmatrix}$$

où pour $1 \leqq i \leqq s$, le bloc B_i est associé à une valeur propre λ_k, $1 \leqq k \leqq p$ et s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_k \end{bmatrix}$$

La matrice B_i est en fait la matrice de la restriction de $d\rho(1)$ à un sous-espace stable de l'espace spectral V_{λ_k}. Si λ_k est réel, les vecteurs de base de V_{λ_k} seront choisis soit réels, soit imaginaires purs, et si λ_k a une partie imaginaire non nulle les vecteurs de base de $V_{\bar{\lambda}_k}$ et V_{λ_k} seront choisis conjugués. On notera n_i l'ordre du bloc B_i. Pour tout x de $\mathbb{R}$, la matrice de $\rho(x)$ est formée des matrices blocs $\exp(x B_i)$ où :

$$\exp(x B_1) = \begin{bmatrix} \psi_k(x) & \frac{x}{1!}\psi_k(x) & \cdots & \frac{x^r}{r!}\psi_k(x) & \cdots & \frac{x^{n_i-1}}{(n_i-1)!}\psi_k(x) \\ 0 & \psi_k(x) & \frac{x}{1!}\psi_k(x) & \cdots & \cdots & \frac{x^r}{r!}\psi_k(x) \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{x}{1!}\psi_k(x) \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \psi_k(x) \end{bmatrix}$$

Considérons sur V la base que l'on peut extraire de l'ensemble $\{ v_i + \bar{v}_i,\ 1 \leqq i \leqq 2m \}$ et munissons V de la norme $\| \quad \|$, sup des coordonnées dans cette base. Alors, pour tout v de V et tout x de $\mathbb{R}$, $\| \rho(x)(v) \|$ vérifie la relation $(\star)$.

Revenons au groupe G considéré dans le lemme. Nous savons (*cf.* 4.5) que les scalaires caractéristiques strictement négatifs $(\beta_l)_{l\in L'}$ sont associés à l'ensemble L′ des poids l de la représentation adjointe de E restreinte à M et que, plus précisément, $\operatorname{Log}|l|=\beta_l \operatorname{Log}\Delta$. Appliquons le résultat ci-dessus à la représentation adjointe de E restreinte à M. Si $|\ \ |$ désigne une norme sur E, il existe une norme $\|\ \ \|$ sur M telle que la relation $(\star)$ soit satisfaite, c'est-à-dire telle que, si m est la dimension de M :

$$\forall v\in M,\quad \forall g\in G,$$
$$\|\operatorname{Ad}(p_E(g))(v)\|\leqq 2\sup_{r=1}^{m}\frac{|p_E(g)|^r}{r\,!}\sup_{l\in L'}\exp[\beta_l \operatorname{Log}\Delta(g)]\,\|v\|.$$

Le groupe K étant compact et $|p_E|$ proportionnel à $|\operatorname{Log}\Delta|$ qui est égal à $\operatorname{Log}\Delta$ sur $\{\Delta>1\}$, le lemme est aisé à obtenir.

4.15. LEMME. — *Soit* G *un groupe de Lie de la classe* $\mathscr{D}$ *tel que* G/G_0 *soit fini. Si* g_n *est une suite d'éléments de* G *telle que* $\Delta(g_n)$ *tende vers* $+\infty$, *alors pour tout élément* v *de* M, $\operatorname{Ad}(p_A(g_n))(v)$ *converge vers zéro dans* M.

Preuve. — Il suffit dans le lemme 4.14 de choisir ε suffisamment petit pour que $\sup_{l\in L'}\beta_l+\varepsilon$ soit strictement négatif.

4.16. LEMME. — *Soit* G *un groupe de Lie de la classe* $\mathscr{D}$ *tel que* G/G_0 *soit fini et soit* μ *une mesure de probabilité (non nécessairement étalée) sur* G. *Si* ν *est une valeur d'adhérence vague de l'ensemble* $\{\varepsilon_x\star U,\ x\in E\}$ *lorsque* x *tend vers le point à l'infini de* E *de manière à ce que* $\Delta(x)$ *tende vers* $+\infty$, *alors* ν *admet les éléments de* A *pour périodes.*

Preuve. — Soit $(x_n)_{n\in N}$ une suite d'éléments de E telle que $\Delta(x_n)$ tende vers $+\infty$ et telle que $\varepsilon_{x_n}\star U$ converge vaguement vers ν. Si nous ne supposons pas μ étalée, nous ne pouvons pas affirmer *a priori* qu'il existe une sous-suite x'_n de $(x_n)_{n\in N}$ telle que pour tout y de G, $\varepsilon_{x'_n y}\star U$ converge. Mais remarquons qu'ici :

$$x_n y=(\operatorname{Ad}x_n(p_M(y)),\ p_A(y))\,x_n$$

et il découle du lemme 4.15 que, puisque $\Delta(x_n)$ tend vers $+\infty$:

$$\operatorname{Ad}x_n(p_M(y))\ \text{converge vers } 0.$$

Par suite, pour tout y de G :

$$\lim_n \varepsilon_{x_n y}\star U=\varepsilon_{(0,\,p_A(y))}\star\nu.$$

Or, nous avons vu (2.11) que si $f\in C_K(G)$, la fonction φ définie, pour y dans G, par $\varphi(y)=\lim_n \varepsilon_{x_n y}\star U(f)$ est μ-harmonique bornée. Définissons la fonction φ′ sur A par :

$$\varphi'(a)=\varepsilon_{(0,\,a)}\star\nu(f)\qquad \text{si}\quad a\in A.$$

Cette fonction φ′ est continue, et comme $\varphi=\varphi'\circ p_A$, elle est aussi $p_A(\mu)$-harmonique bornée. Puisque A est produit direct d'un groupe compact et d'un groupe isomorphe à $\mathbb{R}$, il découle du théorème classique de Choquet-Deny [13] que φ' est constante. Par suite, nous obtenons :

$$\forall a \in \mathrm{A}, \quad \varepsilon_{0,a} \star \nu = \nu.$$

4.17. Lemme. — *Soit* G *un groupe de Lie de la classe* $\mathscr{D}$ *tel que* G/G_0 *soit fini et soit* μ *une mesure de probabilité étalée sur* G. *Alors pour tout* $f \in \mathrm{C}_\mathrm{K}(\mathrm{G})$:

$$\lim_{\substack{x \to \delta \\ \text{dans E}}} \mathrm{U}f(xy) - \mathrm{U}f(x) = 0,$$

uniformément pour y appartenant à un compact K, *quel que soit le compact* K *de* G.

Preuve. — Lorsque x tend vers le point à l'infini de E de manière à ce que $\Delta(x)$ tende vers zéro, alors, pour tout y de G, $\varepsilon_{xy} \star \mathrm{U}$ converge vaguement vers zéro (2.16). Lorsque x tend vers le point à l'infini de E de manière à ce que $\Delta(x)$ tende vers $+\infty$, nous avons montré au cours de la preuve du lemme 4.16 que, pour tout y de G, $\varepsilon_x \star \mathrm{U} - \varepsilon_{xy} \star \mathrm{U}$ converge vaguement vers zéro. Le lemme résulte alors de la relative compacité de l'ensemble de fonctions $\{\mathrm{U}(\sigma_x f) = \mathrm{U}f(x.), x \in \mathrm{G}\}$ pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact (2.8).

Remarquons que le lemme est encore vrai si au lieu de faire tendre x dans E vers le point à l'infini, on fait tendre x vers δ dans G; c'est-à-dire que nous avons :

$$\lim_{g \to \delta} \mathrm{U}f(gy) - \mathrm{U}f(g) = 0,$$

uniformément pour y appartenant à un compact K; ceci tout simplement parce que, lorsque $p_\mathrm{M}(g)$ tend vers le point à l'infini de M, $\varepsilon_g \star \mathrm{U}$ converge vers zéro.

4.18. — Nous pouvons maintenant prouver la proposition 4.11, c'est-à-dire l'unicité des valeurs d'adhérence de $\{\varepsilon_x \star \mathrm{U}, x \in \mathrm{E}\}$ lorsque $\Delta(x)$ tend vers $+\infty$. Cette preuve sera peu différente de celle obtenue lors de l'étude du renouvellement sur les groupes abéliens (chap. 5, § 2 de [45]) car la commutativité du groupe E va intervenir de manière fondamentale.

Preuve de 4.11. — Supposons donc que l'ensemble $\{\varepsilon_x \star \mathrm{U}, x \in \mathrm{E}\}$ ait au moins deux valeurs d'adhérence lorsque $\Delta(x) \to \infty$. Il existe alors une fonction f dans $\mathrm{C}_\mathrm{K}^+(\mathrm{G})$ telle que la fonction $\mathrm{U}f(x)$ ait au moins deux valeurs d'adhérence lorsque $\Delta(x) \to \infty$, x restant dans E. Soit $b \geqq 0$ la plus petite de ces deux valeurs; notons K le support de f.

Fixons $\varepsilon > 0$ et considérons la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E construite par récurrence de la façon suivante :

$x_0 = 0$ et pour tout $n > 0$:

$$\mathrm{U}f(x_n) < b + 2^{-n-1}\varepsilon, \qquad \mathrm{U}f(x_n^{-1}) < 2^{-n-1}\varepsilon,$$

$$|\mathrm{U}f(x_n y) - \mathrm{U}f(x_n)| < 2^{-n-1}\varepsilon \quad \text{pour tout } y \in \bigcup_{i=0}^{n-1} x_i^{-1}\mathrm{K},$$

$$|\mathrm{U}f(x_n^{-1} y) - \mathrm{U}f(x_n^{-1})| < 2^{-n-1}\varepsilon \quad \text{pour tout } y \in \bigcup_{i=0}^{n-1} x_i\mathrm{K}.$$

Le lemme 4.17 permet d'assurer l'existence d'une telle suite :

Soit $h_n = f + \sigma_{x_1} f + \ldots + \sigma_{x_n} f$. Le support de h_n est contenu dans $\bigcup_{i=0}^{n} x_i^{-1} \mathrm{K}$.

Nous allons majorer $\mathrm{U}\, h_n$ sur le support de h_n et le principe du maximum nous donnera une majoration sur G entier. Soit donc $y \in \bigcup_{i=0}^{n} x_i^{-1} \mathrm{K}$. Il existe p tel que $y \in x_p^{-1} \mathrm{K}$.

Nous avons :

1. $\mathrm{U}(\sigma_{x_p} f)(y) = \mathrm{U} f(x_p y) \leqq \| \mathrm{U} f \|$;
2. pour $i \in \{1, \ldots, n-p\}$:

$$| \mathrm{U}(\sigma_{x_{p+i}} f)(y) | = | \mathrm{U} f(x_{p+i} y) | \leqq | \mathrm{U} f(x_{p+i}) | + | \mathrm{U} f(x_{p+i} y) - \mathrm{U} f(x_{p+i}) |$$
$$\leqq b + 2^{-(p+i)-1} \varepsilon + 2^{-(p+i)-1} \varepsilon = b + 2^{-(p+i)} \varepsilon.$$

3. pour $i \in \{1, \ldots, p\}$:

$$\mathrm{U}(\sigma_{x_{p-i}} f)(y) = \mathrm{U} f(x_{p-i} y) = \mathrm{U} f(x_p^{-1} y'),$$

où $y' = x_p x_{p-i} y = x_{p-i} x_p y$ par commutativité de E.

Par suite $y' \in x_{p-i} \mathrm{K} \subset \bigcup_{j=0}^{p-1} x_j \mathrm{K}$ et nous avons :

$$| \mathrm{U}(\sigma_{x_{p-i}} f)(y) | \leqq | \mathrm{U} f(x_p^{-1}) | + | \mathrm{U} f(x_p^{-1} y') - \mathrm{U} f(x_p^{-1}) | \leqq 2^{-p-1} \varepsilon + 2^{-p-1} \varepsilon = 2^{-p} \varepsilon.$$

Nous en déduisons que :

$$\mathrm{U}\, h_n(y) \leqq \| \mathrm{U} f \| + nb + \varepsilon$$

et cette inégalité est vraie partout.

En particulier, nous avons pour tout x de E :

$$\mathrm{U} f(x) + \mathrm{U} f(x_1 x) + \ldots + \mathrm{U} f(x_n x) \leqq \| \mathrm{U} f \| + nb + \varepsilon,$$

ce que l'on peut encore écrire, puisque E est abélien :

$$\mathrm{U} f(x) + \mathrm{U} f(x x_1) + \ldots + \mathrm{U} f(x x_n) \leqq \| \mathrm{U} f \| + nb + \varepsilon.$$

Or, d'après le lemme 4.17, $\lim \mathrm{U} f(xy) - \mathrm{U} f(x) = 0$ lorsque x tend vers le point à l'infini de E.

Par suite, $(n+1) \varlimsup_{\substack{x \in \mathrm{E} \\ \Delta(x) \to \infty}} \mathrm{U} f(x) \leqq \| \mathrm{U} f \| + nb + \varepsilon$.

En faisant tendre n vers l'infini, nous obtenons $\varlimsup_{\substack{x \in \mathrm{E} \\ \Delta(x) \to \infty}} \mathrm{U} f(x) \leqq b$, ce qui est contradictoire avec la définition de b. D'où la proposition 4.11.

C. Désintégration de ν_0

4.19. NOTATIONS. — Soit G un groupe de Lie de la classe $\mathscr{D}$ tel que G/G_0 soit fini. L'espace homogène M homéomorphe à G/KE peut être muni d'une structure de G-espace par l'application qui à $(g, y) \in G \times M$ associe :

$$g.y = p_M(g(y, 0)) = p_M(g).\mathrm{Ad}[p_A(g)](y).$$

Si μ est une mesure sur G et si m est une mesure sur M, $\mu \star m$ désignera la mesure suivante :

$$\forall B \in \mathscr{B}(M), \quad \mu \star m(B) = \int_G \int_M 1_B(g.x)\, d\mu(g)\, dm(x).$$

Si ν est une mesure de Radon sur G, $\hat{\nu}$ désignera l'image de ν par l'application qui à g associe g^{-1}.

4.20. LEMME. — *Soit* μ *une mesure de probabilité sur un groupe de Lie* G *de la classe* $\mathscr{D}$ *tel que* G/G_0 *soit fini. Soit* ν *un élément non nul de* I_μ *admettant pour périodes les éléments de* A, *alors* ν *s'écrit* $\widehat{m \otimes \lambda_A}$ *où* m *est une mesure sur* M *telle que* $\hat{\mu} \star m \leqq m$ *et où* λ_A *est une mesure de Haar sur* A.

Preuve. — Si ν admet pour périodes les éléments de A, alors nous obtenons :

$$\forall f_1 \in C_K(M), \quad \forall f_2 \in C_K(A), \quad \forall x \in A,$$
$$\hat{\nu}(f_1 \times f_2) = \hat{\nu} \star (0, x)(f_1 \times f_2) = \hat{\nu}[f_1 \times \sigma_x f_2].$$

Par suite, si la fonction f_1 est fixée, nous obtenons une mesure sur A invariante par translation. En conséquence, si λ_A désigne une mesure de Haar sur A, il existe pour tout $f_1 \in C_K(M)$ un réel positif $m(f_1)$ tel que $\hat{\nu}(f_1 \times f_2) = m(f_1)\lambda_A(f_2)$.

L'application de $C_K(M)$ dans $\mathbb{R}$ qui à f_1 associe $m(f_1)$ est en fait une mesure de Radon m et ν s'écrit $\widehat{m \otimes \lambda_A}$.

Comme tout élément de I_μ est μ-excessif, nous avons $\nu \star \mu \leqq \nu$ et il en résulte que $\hat{\mu} \star m \leqq m$. En effet :

$$\begin{aligned} \forall f_1 \in C_K(M), \quad \forall f_2 \in C_K(A), \qquad & \hat{\nu}(f_1 \times f_2) = m_1(f_1)\lambda_A(f_2) \geqq \hat{\mu} \star \hat{\nu}(f_1 \times f_2) \\ & \geqq \int f_1(g.y) f_2(p_A(g)x)\, d\hat{\mu}(g)\, dm(y)\, d\lambda_A(x) \geqq \hat{\mu} \star m(f_1)\, \lambda_A(f_2) \end{aligned}$$

puisque λ_A est invariante par translation.

Remarquons que si la marche de loi μ a la propriété (P), les éléments de I_μ sont μ-invariants $(1.3-\alpha)$ et par suite $\hat{\mu} \star m = m$. Si la marche de loi μ n'a pas la propriété (P), ce qui est le cas sur les groupes de la classe $\mathscr{D}$ pour les marches récurrentes en projection (3.27), il n'est pas possible de dire *a priori* si les éléments de I_μ sont μ-invariants, mais si nous montrons que la mesure m sur M intervenant dans la désintégration de l'unique valeur d'adhérence ν_0 de $\{\varepsilon_x \star U, x \in E\}$ lorsque $\Delta(x)$ tend vers $+\infty$ est telle que $\hat{\mu} \star m = m$, alors la mesure ν_0 sera μ-invariante et d'après 4.3 il en sera de même de tous les éléments de I_μ.

4.21. THÉORÈME. — *Soient* G *un groupe de Lie de la classe* $\mathscr{D}$ *tel que* G/G_0 *soit fini et* μ *une mesure de probabilité étalée sur* G. *Si la marche aléatoire droite de loi* μ *sur* G *est de type II, il existe une mesure positive* m *sur* M *telle que* $\hat{\mu}\star m=m$ *et c'est de plus la seule mesure, à une constante multiplicative près telle que* $\hat{\mu}\star m\leqq m$. *Selon que la marche de loi* μ *est transiente ou récurrente en projection, la mesure* m *est de masse finie ou infinie.*

Il existe alors une mesure de Haar λ_A *sur* A *telle que la mesure* ν_0 *définie en* 4.3 *s'écrive* $\widehat{m\otimes\lambda_A}$ *et l'ensemble* I_μ *est formé de la mesure nulle et des mesures toutes distinctes* $\varepsilon_z\star\widehat{m\otimes\lambda_A}$, $z\in M$.

4.22. COROLLAIRE. — *Soit* μ *une mesure de probabilité étalée sur un groupe* G *presque connexe. Tout élément de* I_μ *est* μ*-invariant.*

Avant de prouver le théorème, définissons la marche induite sur M. Nous n'avons pour l'instant considéré que des marches aléatoires *droites* $(\Omega, (X_n)_{n\in\mathbb{N}}, (P_g)_{g\in G})$ *de loi* μ. La marche aléatoire *gauche de loi* $\hat{\mu}$ est par définition le triplet $(\Omega, (X_n)_{n\in\mathbb{N}}, (P'_g)_{g\in G})$ où, pour tout g de G, P'_g est une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathscr{F})$ telle que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit relativement à P'_g une chaîne de Markov d'espace d'états G, de probabilité de transition $\hat{\mu}\star\varepsilon.$ et d'état initial g (*cf.* 1.1). Cette marche aléatoire *gauche* induit sur le G-espace homogène M une chaîne de Markov de probabilité de transition $\pi(z, .)=\hat{\mu}\star\varepsilon_z$, $z\in M$; nous la noterons $(\Omega, (Y_n)_{n\in\mathbb{N}}, (P'_y)_{y\in M})$.

4.23. DÉFINITION. — Soit G un groupe de Lie de la classe $\mathscr{D}$ tel que G/G_0 soit fini et soit μ une mesure de probabilité sur G. *La chaîne induite sur* M *de loi* $\hat{\mu}$ est par définition le triplet $(\Omega, (Y_n)_{n\in\mathbb{N}}, (P'_y)_{y\in M})$ où, pour tout y de M, P'_y est une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathscr{F})$ (*cf.* 1.1) telle que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit relativement à P'_y une chaîne de Markov d'espace d'états M de probabilité de transition $\pi(g, .)=\hat{\mu}\star\varepsilon_z\,(z\in M)$ et d'état initial y.

4.24. *Preuve du théorème* 4.21. — Supposons que la marche aléatoire *droite* de loi μ sur G est de type II. Alors la mesure ν_0, unique valeur d'adhérence de $\{\varepsilon_x\star U, x\in E\}$ lorsque $\Delta(x)\to+\infty$, est non nulle d'après 4.3. Il existe donc selon le lemme 4.20 une mesure m non nulle sur M vérifiant $\hat{\mu}\star m\leqq m$ et une mesure de Haar λ_A sur A telles que $\nu_0=\widehat{m\otimes\lambda_A}$.

Montrons que la chaîne induite sur M de loi $\hat{\mu}$, admettant la mesure m comme mesure excessive, est récurrente Harris sur un ensemble m-plein. Il suffit de vérifier que si C est un borélien de M tel que $m(C)>0$, alors pour tout y de M, $\hat{U}\star\varepsilon_y(C)$ est infini. En effet, la chaîne induite de loi $\hat{\mu}$ sera alors m-irréductible et comme son noyau n'est pas propre, elle sera récurrente Harris sur un ensemble m-plein (chap. 3 de [45]).

Si f_1 et f_2 sont deux éléments respectifs de $C_K^+(M)$ et $C_K^+(A)$, nous avons pour tout y de M :

$$\sup_{x\in E}\hat{U}\star\varepsilon_{(y,\,x)}(f_1\times f_2)=\sup_{x\in E}\hat{U}\star\varepsilon_{(y,\,0)}(f_1\times\sigma_x f_2)\leqq\hat{U}\star\varepsilon_y(f_1).$$

Or :

$$\hat{U}\star\varepsilon_{(y,\,x)}(f_1\times f_2)=\varepsilon_{(-\mathrm{Ad}\,x^{-1}(y),\,x^{-1})}\star U(\widehat{f_1\times f_2}).$$

Lorsque $\Delta(x^{-1})\to+\infty$, $\varepsilon_{x^{-1}}\star U$ converge vaguement vers $\nu_0=\widehat{m\otimes\lambda_A}$ et comme, d'après le lemme 4.15, $\mathrm{Ad}\,x^{-1}(y)$ converge vers 0, $\varepsilon_{(-\mathrm{Ad}\,x^{-1}(y),\,x^{-1})}\star U$ converge aussi vaguement vers ν_0.

Par suite nous obtenons :

$$\hat{U} \star \varepsilon_y(f_1) \geqq \lim_{\Delta(x) \to 0} \hat{U} \star \varepsilon_{(y,\,x)}(f_1 \times f_2) = m(f_1)\,\lambda_A(f_2).$$

Nous en déduisons en faisant croître f_2 vers une fonction constante sur A que si $m(f_1) > 0$, alors $\hat{U} \star \varepsilon_y(f_1)$ est infini pour tout y de M.

Supposons pour commencer que m vérifie $\hat{\mu} \star m = m$. La mesure μ étant étalée, $\hat{\mu}^p$ s'écrit, pour p suffisamment grand, $\varphi_p m_D + \nu_p$ où $\varphi_p \in C_K^+(G)$ et où $\|\nu_p\| \to 0$ lorsque $p \to \infty$. Comme $\hat{\mu}^p \star m = m$, on en déduit que si C est un borélien de M tel que $m(C) > 0$, il existe un entier p tel que $\varphi_p m_D . \star m(C) > 0$. Alors, pour tout y de M :

$$\hat{U} \star \varepsilon_y(C) \geqq \varphi_p m_D \star \hat{U} \star \varepsilon_y(C) \geqq \hat{U} \star \varepsilon_y(f_1),$$

où $f_1(z) = \int_G 1_C(g.z)\,\varphi_p(g)\,m_D(dg)$ si $z \in M$. La fonction f_1 est continue et vérifie $m(f_1) = \varphi_p m_D \star m(C) > 0$ et il résulte de la première partie de la preuve que $\hat{U} \star \varepsilon_y(f_1)$ est infini. Il en est donc de même de $\hat{U} \star \varepsilon_y(C)$ et la récurrence Harris de la chaîne est prouvée dans ce cas.

Il s'agit maintenant de prouver que $\hat{\mu} \star m = m$. Remarquons que puisque m n'est pas nulle, la mesure $m' = \varphi_p m_D \star m$ n'est pas nulle. Il est alors aisé de voir par un argument analogue à celui utilisé ci-dessus que pour tout borélien C de M tel que $m'(C) > 0$, $\hat{U} \star \varepsilon_y(C)$ est infini pour tout y de M. Par suite, la chaîne induite de loi $\hat{\mu}$ est récurrente Harris sur un ensemble absorbant F, m'-plein. Elle admet donc une mesure $\hat{\mu}$-invariante m_0 portée par F, et c'est, à une constante multiplicative près, l'unique mesure portée par F vérifiant $\hat{\mu} \star m_0 \leqq m_0$. Montrons alors que si m est une mesure sur M vérifiant $\hat{\mu} \star m \leqq m$ alors m est proportionnelle à m_0. Écrivons $m = m_F + m_{FC}$ où m_F et m_{FC} sont respectivement portées par F et F^C. Comme F est absorbant, $\hat{\mu} \star m_F$ est portée par F et par suite majorée par m_F. La mesure excessive m_F portée par F est donc proportionnelle à m_0 et aussi invariante. Par suite la mesure m_{F^c} est excessive. Mais alors pour $0 < \alpha < 1$:

$$\sum_{n \geqq 0} \alpha^n \hat{\mu}^n \star m_{F^c}(F) = \int_M \Big(\sum_n \alpha^n \hat{\mu}^n \star \varepsilon_y(F)\Big)\, dm_{F^c}(y) \leqq \frac{1}{1-\alpha}\, m_{F^c}(F) = 0.$$

Or pour tout y, $\sum_n \alpha^n \hat{\mu}^n \star \varepsilon_y(F)$ est strictement positif. Par suite $m_{F^c}(M) = 0$ et m est proportionnelle à m_0. La mesure m est donc invariante et la chaîne induite est récurrente Harris sur un ensemble m-plein. En même temps nous avons obtenu l'unicité des mesures m vérifiant $\hat{\mu} \star m \leqq m$.

Supposons que la marche de loi μ soit de plus transiente en projection. Alors comme $\nu_0 = \widehat{m \otimes \lambda_A}$ est valeur d'adhérence de $\{\varepsilon_x \star U,\ x \in E\}$, nous obtenons pour tout compact C de M et tout compact D de A :

$$\nu_0(C \times D) \leqq \sup_{x \in E} \varepsilon_x \star U(C \times D) \leqq \sup_{x \in E} \varepsilon_x \star p_E(U)(D) < \infty.$$

Or lorsque C croît vers M, $\widehat{m \otimes \lambda_A}(C \times D)$ croît vers $m(M)\,\lambda_A(D^{-1})$ qui est donc fini. Par suite, la mesure m est dans ce cas de masse finie.

Par contre, si la marche de loi μ est récurrente en projection, la mesure m est toujours de masse infinie. En effet, si ce n'était pas le cas, pour toute fonction f de $C_K(M)$, la fonction φ définie sur G par :

$$\varphi(g)=\varepsilon_g \star m(f),$$

serait $\hat{\mu}$-harmonique bornée. Or nous avons vu en 2.20 que si la marche de loi μ sur G est récurrente en projection, les fonctions $\hat{\mu}$-harmoniques bornées sont constantes. Par conséquent, la mesure m serait invariante sous l'action de G, donc en particulier invariante par translation sur M et serait par suite de masse infinie, ce qui est contradictoire.

Prenons les notations de ([45], chap. 6). Nous avons obtenu le résultat suivant :

4.25. PROPOSITION. — *Soit* G *un groupe de Lie de la classe* $\mathcal{D}$ *tel que* G/G_0 *soit fini. Supposons que la marche aléatoire droite de loi* μ *étalée soit de type II. Alors la chaîne induite sur* M *de loi* $\hat{\mu}$ *est récurrente Harris sur un ensemble m-plein où m est, à une constante multiplicative près, l'unique mesure invariante de la chaîne.*

Si la marche de loi μ *est transiente en projection, cette chaîne induite est récurrente positive. Si la marche de loi* μ *est récurrente en projection, cette chaîne est récurrente nulle.*

4.26. Pour terminer la preuve du théorème 4.21, il suffit maintenant, compte tenu du théorème 4.3, de montrer que les mesures $\varepsilon_z \star \widehat{m \otimes \lambda_A}$ pour $z \in M$ sont toutes distinctes.

Si deux mesures de ce type sont égales, alors il existe un élément z de M tel que :

$$\varepsilon_z \star \widehat{m \otimes \lambda_A} = \widehat{m \otimes \lambda_A}.$$

Or, pour tout f_1 de $C_K(M)$ et tout f_2 de $C_K(A)$:

$$m \otimes \lambda_A \star \varepsilon_{z^{-1}}(f_1 \times f_2)=\int_A m \star \varepsilon_{\mathrm{Ad}\, a(z^{-1})}(f_1) f_2(a)\, d\lambda_A(a),$$

où $m \star \varepsilon_{\mathrm{Ad}\, a(z^{-1})}$ désigne le produit de convolution dans M.

L'application qui à a associe $m \star \varepsilon_{\mathrm{Ad}\, a(z^{-1})}(f_1)$ est continue et on déduit de l'égalité :

$$m \otimes \lambda_A \star \varepsilon_{z^{-1}}(f_1 \times f_2)=m(f_1)\, \lambda_A(f_2),$$

vraie pour tout f_2 de $C_K(A)$ que, pour tout a de A :

$$m \star \varepsilon_{\mathrm{Ad}\, a(z^{-1})}(f_1)=m(f_1)$$

et comme ceci est vrai pour tout f_1 de $C_K(M)$, nous obtenons :

$$\forall a \in A, \quad m \star \varepsilon_{\mathrm{Ad}\, a(z^{-1})}=m.$$

Notons H le sous-groupe fermé de M engendré par $\mathrm{Ad}\, A(z^{-1})$. Comme A n'a qu'un nombre fini de composantes connexes et comme M est nilpotent simplement connexe, ce groupe H est connexe. Et pour tout élément h de H :

$$m \star \varepsilon_h = m.$$

Posons $H' = H\overline{[M, M]}$. Ce groupe est fermé connexe distingué dans M. Comme H est stable par Ad A, il en est de même de H′ et par suite H′ est distingué dans G.

Si $H' = M$, on prouve, en considérant la suite centrale descendante de M, que $H = M$. Par suite la mesure m est une mesure de Haar sur M et la mesure ν_0 est une mesure de Haar à gauche sur G ce qui est impossible d'après 1.18.

Si H′ est distinct de M, considérons la projection π_1 de G sur G/H'. Le groupe quotient G/H' isomorphe à $M/H' \times A$ est, puisque M/H' est un groupe nilpotent simplement connexe non trivial, un groupe non unimodulaire de la classe $\mathscr{D}$. La marche de loi $\pi_1(\mu)$ sur G/H' est donc transiente. Par suite pour tout compact B de G :

$$\nu_0(B) \leqq \sup_{x \in E} \varepsilon_x \star U(B) \leqq \sup_{x \in E} \varepsilon_{\pi_1(x)} \star \pi_1(U)[\pi_1(B)].$$

Soient C, C_1, D des compacts respectifs de M, H et A. Alors si nous posons $B = (CC_1 \times D)^{-1}$, nous avons puisque C_1 est inclus dans H′ :

$$\pi_1(B) = \pi_1(C \times D)^{-1}.$$

Par conséquent si nous faisons croître C_1 vers H, il découle de l'inégalité ci-dessus que $\nu_0[(CH \times D)^{-1}] = m(CH)\,\lambda_A(D)$ est fini et donc que $m(CH)$ est fini pour tout compact C de M. Or cette dernière assertion est incompatible avec le fait que $m \star \varepsilon_h = m$ pour tout h de H. D'où le théorème 4.21.

CHAPITRE V

TYPE DES GROUPES DE LA CLASSE $\mathscr{D}$

Dans ce chapitre, nous caractériserons les groupes de type II, et nous montrerons :

5.1. Théorème. — *Un groupe presque connexe non unimodulaire est de type II si et seulement si il est de la classe* $\mathscr{D}$.

Ce théorème a pour conséquence qu'un *groupe presque connexe est de type II si et seulement si il est soit de la classe* $\mathscr{D}$, *soit isomorphe au produit direct d'un groupe compact et du groupe* $\mathbb{R}$.

Nous chercherons à déterminer sur ces groupes les marches de type II et nous étudierons successivement les marches transientes en projection et les marches récurrentes en projection. Nous saurons alors d'après le chapitre IV dans quelles directions sont atteintes les mesures limites non nulles et quelle est la forme de ces mesures.

Commençons par définir sur les groupes de la classe $\mathscr{D}$ la notion de moment introduite par Y. Guivarc'h dans [31].

A. Moments sur les groupes de la classe $\mathscr{D}$

Nous reprenons les notations de [31].

5.2. DÉFINITION. — Soit G un groupe LCD. Une application borélienne δ de G dans $\mathbb{R}$ est une jauge si il existe une constante C telle que :

$$\forall (x, y) \in G \times G, \quad \delta(xy) \leqq \delta(x) + \delta(y) + C.$$

Une jauge δ' domine une jauge δ s'il existe deux constantes positives A et B telles que :

$$\forall x \in G, \quad \delta(x) \leqq A\,\delta'(x) + B.$$

Deux jauges qui se dominent mutuellement sont dites équivalentes.

Lorsque G est engendré par un voisinage compact V de l'élément neutre, un exemple fondamental de jauge est l'application borélienne δ_V définie pour tout $g \in G$ par :

$$\delta_V(g) = \inf\{n \geqq 1, g \in V^n\}.$$

Comme cette jauge δ_V domine toutes les autres jauges définies sur G (31), il est naturel de poser :

5.3. DÉFINITION. — Si le groupe G est engendré par un compact V, une jauge équivalente à δ_V sera dite principale.

Rappelons le résultat suivant de [31] : Pour qu'une jauge positive δ soit principale, il faut et il suffit qu'il existe un voisinage compact V de e engendrant G tel que :

$$\forall n \geqq 1, \quad \mathscr{B}_n^\delta = \{g \in G, \delta(g) \leqq n\} \subset V^n.$$

5.4. DÉFINITION. — Soit μ une loi de probabilité sur un groupe G compactement engendré. La mesure μ sera dite avoir un moment d'ordre β s'il existe une jauge principale positive δ telle que δ^β soit μ-intégrable.

5.5. *Remarque.* — Si la mesure μ admet un moment d'ordre β, il en est de même de la mesure $\hat{\mu}$. En effet il suffit de remarquer que si V est un voisinage compact symétrique de l'élément neutre engendrant G, la fonction δ_V est symétrique.

5.6. *Exemples.* — 1. Si $G = \mathbb{R}^n$, une norme quelconque sur $\mathbb{R}^n$ est une jauge principale et nous retrouvons les notions classiques de moments.

Plus généralement, considérons un groupe de Lie M nilpotent connexe et simplement connexe et identifions-le à son algèbre de Lie. Soit :

$$M_1 = M \supset M_2 = [M, M_1] \ldots \supset M_p = [M, M_{p-1}] \supset M_{p+1} = \{0\}$$

la suite centrale descendante de M; alors, l'espace vectoriel M peut être identifié à la somme directe des espaces vectoriels M_j/M_{j+1} où $1 \leqq j \leqq p$. Si les espaces vectoriels sont normés par $\|\ \|_1$, nous définissons une fonction h sur M en posant :

$$h(m) = \sup_{1 \leqq j \leqq p} \|m_j\|_1^{1/j},$$

si l'élément m de M s'écrit $\sum_{1 \leqq j \leqq p} m_j$, où $m_j \in M_j/M_{j+1}$.

Il est montré dans [31] que h est une jauge principale si les $\| \ \|_1$ sont choisies correctement. Nous dirons d'une jauge construite de cette façon qu'elle est *adaptée à* M.

2. Soit G un groupe LCD et S un sous-groupe compact distingué dans G. On note p la surjection de G sur G/S. Il est facile de voir que si δ est une jauge principale sur G/S, alors $\delta \circ p$ est une jauge principale sur G. Par suite, une loi μ sur G a un moment d'ordre β si et seulement si il en est de même de la loi $p(\mu)$ sur G/S.

3. Soit G un groupe LCD et H un sous-groupe fermé de G tel que G/H soit compact. Alors la restriction à H d'une jauge principale sur G est une jauge principale sur H (th. 1.4 de [30]).

Nous allons expliciter les conditions d'existence de moments pour les groupes presque connexes de la classe $\mathscr{D}$. D'après l'exemple 2, il suffit de considérer des groupes de Lie tels que G/G_0 soit fini.

5.7. THÉORÈME. — *Soit* G *un groupe de Lie de la classe* $\mathscr{D}$ *tel que* G/G_0 *soit fini et soit* (M, K, E) *une décomposition de* G *définie en* 4.1. *On considère une jauge principale* δ_M *sur* M. *Alors une probabilité* μ *sur* G *admet un moment d'ordre* $\beta (\beta \geqq 1)$ *si et seulement si* $[\operatorname{Log}(1+\delta_M)]^\beta$ *est* $p_M(\mu)$ *intégrable et si* $p_E(\mu)$ *admet un moment d'ordre* β.

Preuve. — Ce théorème découle des résultats de Y. Guivarch obtenus en [31]. Remarquons tout d'abord que comme le groupe G est produit semi-direct du groupe distingué ME et du groupe compact K, il résulte de l'exemple 3 de 5.6, qu'il suffit d'étudier l'existence de moments pour la loi projection sur ME de la loi μ.

Considérons la représentation adjointe de E dans M. Comme il existe un élément x de E, pour lequel les valeurs propres de $\operatorname{Ad} x|_{M^{\mathbb{C}}}$ sont toutes de module strictement supérieur à 1, l'automorphisme $\operatorname{Ad} x$ est dilatant sur M; et il découle de la proposition 4 de [31] que la fonction $\delta' = \operatorname{Log}(1+\delta_M)$ est E-principale sur M; c'est-à-dire que pour tout x de E, la fonction $|\delta' \circ \operatorname{Ad} x - \delta'|$ est bornée et que toute jauge vérifiant cette condition est dominée par δ'. Il résulte alors de la proposition 3 de [31] que si δ_0 est une jauge principale sur E, la jauge $\delta_0 + \delta' = \delta_0 + \operatorname{Log}(1+\delta_M)$ est principale sur $M \times E$. Il suffit de choisir comme jauge δ_0 sur E la jauge $|p_E|$ où $| \ |$ désigne une norme euclidienne sur E pour conclure.

5.8. COROLLAIRE. — *Soit* G *un groupe de Lie de la classe* $\mathscr{D}$ *tel que* G/G_0 *soit fini, et soit* (M, K, E) *une décomposition de* G *définie en* 4.1. *Si* $\| \ \|$ *désigne une norme sur* M, *alors une mesure de probabilité* μ *sur* G *admet un moment d'ordre* $\beta (\geqq 1)$ *si et seulement si les fonctions* $[\operatorname{Log}(1+\|p_M(.)\|)]^\beta$ *et* $|\operatorname{Log} \Delta|^\beta$ *définies sur* G *sont* μ*-intégrables.*

Démonstration du corollaire. Il s'agit seulement de vérifier que l'intégrabilité de $[\operatorname{Log}(1+\|p_M(.)\|)]^\beta$ est équivalente à celle de $[\operatorname{Log}(1+\delta_M)]^\beta$. Prenons les notations de l'exemple 1) de 5.6 et considérons si les espaces vectoriels M_j/M_{j+1} où $1 \leqq j \leqq p$ sont normés par $\| \ \|_1$, la jauge h adaptée à M définie par :

$$h(m) = \sup_{1 \leqq j \leqq p} \|m_j\|_1^{1/j} \qquad \text{si} \quad m = \sum_{1 \leqq j \leqq p} m_j, \qquad \text{où} \quad m_j \in M_j/M_{j+1}$$

et munissons M de la norme $\| \ \|_1$ suivante :

$$\|m\|_1 = \sup_{1 \leqq j \leqq p} \|m_j\|_1.$$

Comme la jauge principale h est équivalente à la jauge δ_M et la norme $\| \quad \|_1$ équivalente à la norme $\| \quad \|$, il résulte de la sous-additivité de la fonction $\operatorname{Log}(1+.)$ définie sur $\mathbb{R}^+$ qu'il suffit de montrer que $[\operatorname{Log}(1+\|.\|_1)]^\beta$ est intégrable si et seulement si $[\operatorname{Log}(1+h)]^\beta$ l'est.

Or, des inégalités élémentaires suivantes, valables pour tout $m \in M$:

$$h(m) \leqq \sup(1, \|m\|_1) \qquad \text{et} \qquad \|m\|_1 \leqq \sup(1, h(m)^p),$$

il découle que :

$$\operatorname{Log}(1+h(m)) \leqq \sup[\operatorname{Log} 2, \operatorname{Log}(1+\|m\|_1)]$$

et :

$$\operatorname{Log}(1+\|m\|_1) \leqq \sup[\operatorname{Log} 2, p \operatorname{Log}(1+h(m))].$$

D'où l'assertion.

B. Marches transientes en projection

Sur un groupe G de la classe $\mathscr{D}$, les marches de loi μ transientes en projection sont exactement celles pour lesquelles la marche sur $\mathbb{R}^{+*}$ de loi $\Delta(\mu)$ est transiente.

5.9. THÉORÈME. — *Soit* μ *une mesurè de probabilité étalée sur un groupe presque connexe de la classe* $\mathscr{D}$. *On suppose que la marche de loi* $\Delta(\mu)$ *sur* $\mathbb{R}^{+*}$ *est transiente.*

Si Log Δ *n'est pas* μ-*intégrable, la marche de loi* μ *est de type I.*

Si Log Δ *est* μ-*intégrable, il y a deux possibilités selon le signe de :*

$$\alpha = \int_G \operatorname{Log} \Delta(g)\, \mu(dg).$$

(1) $\alpha > 0$, *alors la marche de loi* μ *est de type I.*

(2) $\alpha < 0$, *alors la marche de loi* μ *est de type II si et seulement si* μ *admet un moment d'ordre* 1.

5.10. *Remarque.* — Le cas $\alpha = 0$ ne peut se produire car si Log Δ est μ-intégrable, la marche de loi $\Delta(\mu)$ est transiente si et seulement si $\alpha \neq 0$.

Précisons lorsque la marche de loi μ est de type II, les valeurs limites du noyau potentiel et dans quelles directions elles sont atteintes. Nous supposerons que G est un groupe de Lie tel que G/G_0 soit fini, mais remarquons que 2.14 et 2.15 nous permettent en fait d'étendre ces résultats aux groupes presque connexes.

5.11. THÉORÈME. — *Soit* G *un groupe de Lie de la classe* $\mathscr{D}$ *tel que* G/G_0 *soit fini et soit* (M, K, E) *une décomposition de* G *définie en* 4.1. *Appelons* λ_A *la mesure de Haar sur* $A = KE$ *dont l'image par* Log Δ *est la mesure de Lebesgue sur* $\mathbb{R}$. *Considérons sur* G *une mesure de probabilité étalée* μ *ayant un moment d'ordre* 1 *et supposons que :*

$$\alpha = \int_G \operatorname{Log} \Delta(g)\, \mu(dg) \text{ est strictement négatif.}$$

Alors il existe une unique mesure de probabilité m *sur* M *telle que* $\hat{\mu} \star m = m$, *et l'ensemble des valeurs d'adhérences non nulles de* $\{\varepsilon_g \star \mathrm{U},\ g \in \mathrm{G}\}$ *est la famille de mesures toutes distinctes* $\{\varepsilon_y \star \nu_0,\ y \in \mathrm{M}\}$ *où :*

$$\nu_0 = |\alpha|^{-1}\, \widehat{m \otimes \lambda_{\mathrm{A}}}.$$

Plus précisément, lorsque g *tend vers le point à l'infini de* G *de manière à ce que* $\Delta(g)$ *tende vers zéro, ou que* $p_{\mathrm{M}}(g)$ *tende vers le point à l'infini de* M, $\varepsilon_g \star \mathrm{U}$ *converge vaguement vers* 0. *En revanche si* $\Delta(g)$ *tend vers l'infini et si* $p_{\mathrm{M}}(g)$ *converge vers un élément* z *de* M, *alors* $\varepsilon_g \star \mathrm{U}$ *converge vaguement vers* $\varepsilon_z \star \nu_0$.

La connaissance du renouvellement pour la marche sur $\mathbb{R}$ de loi $\operatorname{Log} \Delta(\mu)$, image de μ par $\operatorname{Log} \Delta$, va nous apporter d'utiles renseignements. Rappelons donc le théorème du renouvellement sur $\mathbb{R}$ que l'on peut par exemple trouver dans [45] :

5.12. THÉORÈME DE RENOUVELLEMENT SUR $\mathbb{R}$. — *Soit sur* $\mathbb{R}$ *une marche transiente de loi* μ_1. *Si la mesure* μ_1 *n'a pas de moment d'ordre* 1 (*c'est-à-dire si* $\int |x|\, d\mu_1(x) = \infty$) *la marche de loi* μ_1 *est de type I.*

Si la mesure μ_1 *a un moment d'ordre* 1, *notons* $c = \int x\, d\mu_1(x)$. *Comme la marche de loi* μ_1 *est transiente, le scalaire* c *est soit* > 0, *soit* < 0.

Si c *est positif, alors* $\varepsilon_x \star \sum_n \mu_1^n$ *converge vaguement vers la mesure nulle lorsque* $x \to +\infty$ *et* $\varepsilon_x \star \sum_n \mu_1^n$ *converge vaguement vers la mesure* $(1/c)\lambda_1$, *où* λ_1 *est la mesure de Lebesgue sur* $\mathbb{R}$, *lorsque* $x \to -\infty$.

Si c *est négatif, la conclusion est symétrique.*

Une conséquence immédiate de ce théorème de renouvellement sur $\mathbb{R}$ est la suivante :

5.13. LEMME. — *Soit* μ *une mesure de probabilité étalée sur un groupe* G *presque connexe de la classe* $\mathscr{D}$ *telle que la marche sur* $\mathbb{R}$ *de loi* $(\operatorname{Log} \Delta)(\mu)$, *image de la mesure* μ *par* $\operatorname{Log} \Delta$, *soit transiente.*

Si la mesure $(\operatorname{Log} \Delta)(\mu)$ *n'a pas de moment d'ordre* 1 *sur* $\mathbb{R}$, *la marche de loi* μ *sur* G *est de type I.*

Si la mesure $(\operatorname{Log} \Delta)(\mu)$ *a un moment d'ordre* 1 *et si* $\alpha = \int x (\operatorname{Log} \Delta)(\mu)(dx)$ *est un scalaire positif, la marche de loi* μ *est encore de type I.*

Preuve. — Si la mesure $\operatorname{Log} \Delta(\mu)$ n'a pas de moment d'ordre 1, la marche de loi $\operatorname{Log} \Delta(\mu)$ est de type I sur $\mathbb{R}$, et l'homomorphisme $\operatorname{Log} \Delta$ étant surjectif, il découle de la proposition 1.9 que la marche sur G de loi μ est de type I.

Si la mesure $\operatorname{Log} \Delta(\mu)$ a un moment d'ordre 1, et si α est positif, alors $\varepsilon_x \star \sum_n [\operatorname{Log} \Delta(\mu)]^n$ converge vaguement vers 0 lorsque $x \to +\infty$. Comme, pour tout borélien B de G, nous avons :

$$\varepsilon_g \star \sum_n \mu^n(\mathrm{B}) \leqq \varepsilon_{\operatorname{Log} \Delta(g)} \star (\operatorname{Log} \Delta)[\sum_n \mu^n]\,[\operatorname{Log} \Delta(\mathrm{B})] \leqq \varepsilon_{\operatorname{Log} \Delta(g)} \star \sum_n (\operatorname{Log} \Delta)(\mu))^n\,[\operatorname{Log} \Delta(\mathrm{B})],$$

nous en déduisons que lorsque $\Delta(g)$ tend vers $+\infty$, $\varepsilon_g \star \sum_n \mu^n$ converge vaguement vers 0. Le lemme découle alors du théorème 4.3.

5.14. Par conséquent nous allons dans toute la suite de ce paragraphe faire l'hypothèse (H) suivante : G *étant un groupe presque connexe de la classe* $\mathscr{D}$, μ *est une mesure de probabilité sur* G *telle :*

(i) Log Δ *soit* μ-*intégrable;*

(ii) $\alpha = \int_G \operatorname{Log} \Delta(g)\, \mu(dg) < 0.$

Nous avons vu (th. 4.21) que si un groupe de Lie G de classe $\mathscr{D}$ tel que G/G_0 soit fini, porte une marche de type II, il existe, à une constante multiplicative près, une unique mesure m sur M telle que $\hat{\mu} \star m = m$ (produit au sens de G-espace) et que de plus, si la marche de loi $\Delta(\mu)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ est transiente, cette mesure m est de masse finie. Nous allons donc rechercher de telles mesures.

1. Condition d'existence de mesures invariantes sur M.

5.15. Théorème. — *Soit* μ *une mesure de probabilité satisfaisant à l'hypothèse* (H) *sur un groupe de Lie* G *de la classe* $\mathscr{D}$ *tel que* G/G_0 *soit fini. Si* (M, K, E) *est une décomposition de* G *définie en* 4.1, *il existe sur* M *une mesure de probabilité m telle que* $\hat{\mu} \star m = m$ *si et seulement si* μ *a un moment d'ordre* 1 *sur* G, *et de plus cette probabilité m est unique.*

5.16. Notons que la fin de l'énoncé de ce théorème pourrait être écrite : « il existe sur M une mesure de probabilité m telle que $\hat{\mu} \star m = m$ si et seulement si $\operatorname{Log}(1 + \| p_M(.) \|)$ est intégrable (où $\| \ \|$ désigne une norme quelconque sur l'espace vectoriel M), tout simplement puisque d'après 5.8, μ a un moment d'ordre 1 si et seulement si $\operatorname{Log}(1 + \| p_M(.) \|)$ et $\operatorname{Log} \Delta$ sont μ-intégrables.

5.17. *Remarque.* — L'existence de mesures invariantes m du type ci-dessus est donnée sur l'exemple du groupe affine de la droite réelle dans [1]. Elle a ensuite été prouvée pour des produits semi-directs $\mathbb{R}^n \times_\eta \mathbb{R}^k$ dans la note [21] écrite en collaboration avec A. Raugi, qui lui-même a généralisé ce type de résultats aux groupes moyennables [43]. La preuve donnée ici est très proche de celle obtenue pour les groupes $\mathbb{R}^n \times_\eta \mathbb{R}$ et nous obtiendrons en même temps une condition nécessaire et suffisante d'existence de la mesure invariante m pour des mesures μ vérifiant (H). Remarquons enfin que nous ne faisons pas d'hypothèse d'étalement sur μ.

5.18. La méthode utilisée pour construire la mesure m consiste à exhiber une variable aléatoire Z de loi m. Et si $(\Omega, (X_n)_{n \in \mathbb{N}}, (P_g)_{g \in G})$ désigne la marche aléatoire droite de loi $\hat{\mu}$, cette variable aléatoire Z sera en fait obtenue comme limite P_e p. s. de la suite $p_M(X_n)$ lorsque $n \to \infty$. En effet montrons que si $p_M(X_n)$ converge P_e p. s. vers Z dans M, la mesure de probabilité m, loi de Z, vérifie $\hat{\mu} \star m = m$. Par définition la v. a. X_n peut s'écrire P_e p. s. $T_1 \dots T_n$ où les T_i sont des variables aléatoires indépendantes de loi $\hat{\mu}$. Or remarquons que $p_M(X_n) = T_1 . p_M(T_2 \dots T_n)$ (produit au sens de G-espace). Si $p_M(X_n)$ converge P_e p.s. vers une v. a. Z de loi m, il est clair que $p_M(T_2 \dots T_n)$ converge aussi P_e p. s. vers une v. a. Z_1 de loi m, et nous avons la relation : $Z = T_1 . Z_1$. De l'indépendance de T_1 et des variables T_i pour $i > 1$, il résulte que les v. a. T_1 et Z_1 sont indépendantes. Par suite $T_1 . Z_1$ a pour loi $\hat{\mu} \star m$ et donc $\hat{\mu} \star m = m$.

5.19. Remarquons que si nous avions considéré la marche aléatoire *gauche* de loi $\hat{\mu}$, la projection de cette marche gauche sur M n'est autre que la *chaîne induite* de loi $\hat{\mu}$ (déf. 4.23), et nous savons que si la marche droite de loi μ est de type II, il existe une probabilité m sur M telle que $\hat{\mu} \star m = m$ et alors cette chaîne induite est récurrente (4.21). Par suite selon que l'on considère la marche aléatoire droite ou gauche de loi $\hat{\mu}$, la projection de cette marche sur M sera p. s. convergente ou récurrente.

Étudions la convergence P_e p. s. de la suite $p_M(X_n)$:

5.20. PROPOSITION. — *Soient* G *un groupe de Lie de la classe* $\mathscr{D}$ *tel que* G/G_0 *soit fini et* μ *une mesure de probabilité sur* G *vérifiant l'hypothèse* (H). *Soit* $(\Omega, (X_n)_{n\in\mathbb{N}}, (P_g)_{g\in G})$ *la marche aléatoire (droite) de loi* $\hat{\mu}$ *sur* G. *Alors la suite* $p_M(X_n)$ *converge* P_e p. s. *dans* M *si et seulement si la fonction* $\operatorname{Log}[1 + \| p_M(.)\|]$ *est* $\hat{\mu}$*-intégrable (où* $\| \ \|$ *désigne une norme quelconque sur* M).

5.21. La preuve de cette proposition nécessitera plusieurs lemmes. Nous pouvons écrire P_e p. s., X_n sous la forme $T_1 \dots T_n$ où les variables aléatoires T_i, $i \in \mathbb{N}$, sont indépendantes et de loi $\hat{\mu}$. Comme le groupe M est identifié à son algèbre de Lie, nous obtenons si A désigne $K \times E$:

$$p_M(X_n) = p_M(X_{n-1}) . \operatorname{Ad}(p_A(X_{n-1}))[p_M(T_n)] \quad \text{p. s.}$$

et donc :

$$p_M(X_n) = Z_1 \dots Z_n \quad \text{p. s.}$$

où :

$$Z_1 = p_M(T_1) \text{ et où pour } i > 1,$$
$$Z_i = \operatorname{Ad}(p_A(X_{i-1}))[p_M(T_i)].$$

5.22. LEMME. — *Soit* M *un groupe nilpotent connexe et simplement connexe, et soit* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* M. *S'il existe une norme* $\| \ \|$ *sur l'algèbre de Lie de* M *(que l'on identifie à* M) *telle que* $\overline{\lim_n} \| z_n \|^{1/n} < 1$, *alors la suite* $(z_1 \dots z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge dans* M.

Preuve. — Ce lemme va découler du résultat suivant dont la preuve est donnée en appendice A 2 :

Si M *est un groupe nilpotent connexe simplement connexe de rang r, il existe une norme* $\| \ \|_1$ *sur* M *et un polynôme à coefficients réels* Q_r *de degré r sans terme constant tels que :*

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall (y_1, \dots, y_p) \in M^p, \qquad \| y_1 \dots y_p \|_1 \leqq Q_r[\| y_1 \|_1 + \dots + \| y_p \|_1].$$

Considérons donc une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de M et supposons qu'il existe une norme $\| \ \|$ sur M telle que $\overline{\lim_n} \| z_n \|^{1/n} < 1$; alors cette propriété est vraie pour toute norme sur M et en particulier pour la norme $\| \ \|_1$ définie ci-dessus. L'espace M étant complet, il suffit, pour prouver la convergence de la suite $z_1 \dots z_n$, de montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n > N, \quad \forall p > N, \qquad \| z_n z_{n+1} \dots z_{n+p} \|_1 \leqq \varepsilon.$$

Or :

$$\| z_n z_{n+1} \dots z_{n+p} \|_1 \leqq Q_r [\| z_n \|_1 + \dots + \| z_{n+p} \|_1].$$

Et puisque $\overline{\lim_n} \| z_n \|_1^{1/n} < 1$, la série de terme $\| z_n \|_1$ converge et la suite de terme $\| z_1 \|_1 + \dots + \| z_n \|_1$ est de Cauchy. Comme le polynôme Q_r n'a pas de terme constant, il est facile de conclure.

5.23. Lemme. — *Soit une suite* $(U_n)_{n \in N}$ *de variables réelles positives, non p.s. nulles, indépendantes et équidistribuées définies sur un espace de probabilité* $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. *Alors si* $\mathrm{Log}(1+U_1)$ *est intégrable,* $\overline{\lim_n} U_n^{1/n} = 1$ *p.s. et si* $\mathrm{Log}(1+U_1)$ *n'est pas intégrable,* $\overline{\lim_n} U_n^{1/n} = +\infty$ *p.s.*

Preuve. — D'après la loi du tout ou rien, nous savons que $\overline{\lim} U_n^{1/n}$ est p. s. constante. Comme U_n n'est pas p.s. nulle, il existe deux réels positifs α et δ tels que $P(U_n > \delta)$ soit supérieur à α. D'où $\sum_n P(U_n > \delta) = \infty$. Il résulte alors du lemme de Borel-Cantelli que $\overline{\lim_n} U_n^{1/n} \geqq 1$ p. s.

Sachant qu'une variable aléatoire Y réelle est intégrable si et seulement si $\sum_n P[|Y| > n] < \infty$, la variable aléatoire $(1/a)$ Log $(1+U_1)$, où a est un élément de $\mathbb{R}^{+*}$. est intégrable si et seulement si :

$$\sum_n P[\mathrm{Log}(1+U_n) > \mathrm{an}] = \sum_n P[\mathrm{Log}(1+U_1) > an] < \infty,$$

ce qui est équivalent d'après le lemme de Borel-Cantelli à :

$$\overline{\lim_n} \{\mathrm{Log}(1+U_n) > an\} = \emptyset \quad \text{p. s.}$$

ou encore à :

$$\overline{\lim_n} (1+U_n)^{1/n} \leqq e^a \text{ p. s.}$$

Par suite si $\mathrm{Log}(1+U_1)$ est intégrable, pour tout a de $\mathbb{R}^{+*}$, $\overline{\lim_n} U_n^{1/n} \leqq e^a$ p. s. et donc $\overline{\lim_n} U_n^{1/n} = 1$ p. s.

Supposons réciproquement que $\overline{\lim_n} U_n^{1/n}$ soit p. s. fini. Alors il existe un réel $a' > 0$ tel que $\overline{\lim_n} (1+U_n)^{1/n}$ soit inférieur p.s. à $e^{a'}$. Par suite $(a')^{-1}$ Log $(1+U_1)$ et donc aussi $\mathrm{Log}(1+U_1)$ sont intégrables. D'où le lemme.

5.24. *Preuve de la proposition* 5.20. — Soit μ une mesure de probabilité sur G vérifiant (H). Supposons de plus que $\mathrm{Log}[1+\|p_{\mathrm{M}}(\,.\,)\|]$ soit $\hat{\mu}$-intégrable. Comme d'après 5.21, la suite $p_{\mathrm{M}}(X_n)$ s'écrit P_e p. s. $Z_1 \ldots Z_n$, il découle du lemme 5.22, qu'il suffit de montrer que : $\overline{\lim_n} \|Z_n\|^{1/n} < 1$ P_e p. s. pour prouver que $p_{\mathrm{M}}(X_n)$ converge P_e p. s.

L'intégrabilité de $\mathrm{Log}[1+\|p_{\mathrm{M}}(\,.\,)\|]$ ne dépendant pas de la norme $\|\quad\|$ choisie (*cf.* 5.8), munissons M de la norme $\|\quad\|$ définie dans le lemme 4.14. D'après ce lemme :

$$\forall \varepsilon>0, \quad \exists C\in\mathbb{R}^+ \qquad \text{tel que} \quad \forall v\in M, \quad \forall g\in G \text{ vérifiant } \Delta(g)>1,$$

$$\|Ad(p_{\mathrm{A}}(g))(v)\| \leqq C \exp[(\sup_{l\in L'} \beta_l+\varepsilon) \,\mathrm{Log}\, \Delta(g)] \|v\|.$$

Puisque μ vérifie la condition (H), Log Δ est μ-intégrable et $\alpha=\int \mathrm{Log}\,\Delta(g)\,d\mu(g)$ est strictement négatif. Alors d'après la loi des grands nombres sur $\mathbb{R}$:

$$\frac{1}{n}\mathrm{Log}\,\Delta(X_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Log}\,\Delta(T_i) \text{ converge } P_e \text{ p. s. vers } \int_G \mathrm{Log}\,\Delta(g)\,d\hat{\mu}(g)=-\alpha>0.$$

Comme $\mathrm{Log}[1+\|p_{\mathrm{M}}(\,.\,)\|]$) est $\hat{\mu}$-intégrable, il résulte du lemme 5.23 que :

$$\overline{\lim_n} \|p_{\mathrm{M}}(T_n)\|^{1/n}=1 \; P_e \text{ p. s.}$$

Appliquant alors l'inégalité ci-dessus à $Z_n=\mathrm{Ad}\, p_{\mathrm{A}}(X_{n-1})[p_{\mathrm{M}}(T_n)]$, nous obtenons :

$$\overline{\lim_n} \|Z_n\|^{1/n} \leqq \overline{\lim_n} \exp\left[\frac{1}{n}(\sup_{l\in L'}\beta_l+\varepsilon)\,\mathrm{Log}\,\Delta(X_{n-1})\right] \overline{\lim}\, \|p_{\mathrm{M}}(T_n)\|^{1/n}$$

$$\leqq \exp[-\alpha(\sup_{l\in L'}\beta_l+\varepsilon)], \qquad P_e \text{ p. s.}$$

Comme ce résultat est valable pour tout $\varepsilon>0$ et puisque $\sup_{l\in L'}\beta_l<0$ et $\alpha<0$, nous en déduisons que :

$$\overline{\lim_n} \|Z_n\|^{1/n}<1, \qquad P_e \text{ p. s.}$$

Supposons inversement que $\mathrm{Log}(1+\|p_{\mathrm{M}}(\,.\,)\|)$ ne soit pas $\hat{\mu}$-intégrable et montrons qu'alors $\overline{\lim_n} \|Z_n\|^{1/n}=\infty$.

A cet effet remarquons que $p_{\mathrm{M}}(T_n)=\mathrm{Ad}\,[p_{\mathrm{A}}(X_{n-1})]^{-1}(Z_n)$.

Par un argument analogue à celui utilisé ci-dessus, nous obtenons :

$$\overline{\lim_n} \|p_{\mathrm{M}}(T_n)\|^{1/n} \leqq \exp[\alpha(\inf_{l\in L'}\beta_l)]\, \overline{\lim_n} \|Z_n\|^{1/n}$$

et comme le premier terme de l'inégalité est infini d'après 5.23, il en est de même du second.

Par suite Z_n ne converge pas P_e p. s. vers 0 et donc la suite $p_M(X_n)=Z_1 \dots Z_n$ ne converge pas P_e p. s. Et la démonstration de la proposition 5.20 est achevée. Nous pouvons maintenant prouver le théorème 5.15.

5.25. *Preuve du théorème* 5.15. — Remarquons pour commencer que pour une mesure μ vérifiant l'hypothèse (H), les intégrabilités de $\operatorname{Log}(1+\|p_M(\,.\,)\|)$ relativement à μ et $\hat{\mu}$ sont équivalentes, et ceci tout simplement parce que (5.5) il est équivalent pour la mesure μ ou pour la mesure $\hat{\mu}$ d'avoir un moment d'ordre 1 et que (H) assure l'intégrabilité de $\operatorname{Log}\Delta$ relativement à μ et $\hat{\mu}$.

Il résulte alors de la proposition 5.20 que si μ satisfait à la condition (H) et si $\operatorname{Log}(1+\|p_M\,(.)\|)$ est μ-intégrable, $p_M(X_n)$ converge P_e p.s. vers une variable aléatoire Z et la distribution m de Z vérifie (*cf.* 5.18) la relation $\hat{\mu}\star m=m$.

Supposons que réciproquement il existe sur M une mesure de probabilité m' telle que $\hat{\mu}\star m'=m'$. Alors si $\varphi\in C_K(M)$, la fonction f définie pour tout g de G par $f(g)=\varepsilon_g\star m'(\varphi)$ est $\hat{\mu}$-harmonique bornée. De ce fait la martingale bornée :

$$f(X_n)=\varepsilon_{X_n}\star m'(\varphi)=\int_M \varphi\,[p_M(X_n)\operatorname{Ad}[p_A(X_n)(y)]]\,m'(dy) \quad \text{converge } P_e \text{ p. s.}$$

Comme d'après la loi des grands nombres, $1/n \operatorname{Log}\Delta(X_n)$ converge P_e p. s. vers $-\alpha$, réel >0 puisque μ vérifie (H), il résulte de 4.15 que, pour tout y de M, $\operatorname{Ad} p_A(X_n)(y)$ converge P_e p. s. vers 0. La fonction φ étant uniformément continue à droite et la mesure m' bornée, nous en déduisons que $\varphi\,[p_M(X_n)]$ converge P_e p. s. Cette convergence ayant lieu pour tout $\varphi\in C_K(\mathbb{R})$, il en résulte que $p_M(X_n)$ converge P_e p. s. vers une variable aléatoire Z de loi m. Par conséquent, d'après la proposition 5.20, la mesure μ admet un moment d'ordre 1 et il découle de l'harmonicité de f que :

$$f(e)=E_e[f(X_n)]=E_e[\varphi(Z)]$$

et par suite $m'(\varphi)=m(\varphi)$. D'où l'unicité de la mesure de probabilité m vérifiant $\hat{\mu}\star m=m$. Le théorème 5.15 est prouvé.

2. Existence de marches de type II

Le théorème 5.15 admet, compte tenu de 4.21, le corollaire immédiat suivant :

5.26. Corollaire. — *Soit* G *un groupe de Lie de la classe* $\mathscr{D}$ *tel que* G/G_0*-soit fini. Si* μ *est une mesure de probabilité étalée sur* G *vérifiant* (H) *et n'ayant pas de moment d'ordre* 1, *alors la marche aléatoire* (*droite*) *de loi* μ *est de type I.*

Nous supposerons donc dorénavant que μ satisfait (H) et a un moment d'ordre 1 et nous allons enfin obtenir une classe de marches de type II; nous verrons que l'hypothèse d'étalement n'est pas nécessaire pour prouver que ces marches sont de type II; cette hypothèse est en fait utile pour démontrer la nullité des valeurs limites dans la direction où $p_M(g)$ tend vers le point à l'infini de M.

5.27. PROPOSITION. — *Soit* G *un groupe de Lie de la classe* $\mathscr{D}$ *tel que* G/G_0-*soit fini. Si* μ *est une mesure de probabilité (non nécessairement étalée) ayant un moment d'ordre* 1 *sur* G *et telle que :*

$$\alpha = \int \operatorname{Log} \Delta(g)\, d\mu(g) < 0,$$

alors la marche de loi μ *est de type II.*

5.28. Si μ vérifie les hypothèses de la proposition, il existe (*cf.* 5.15) une unique mesure de probabilité m sur M telle que $\hat{\mu} \star m = m$. Considérons la mesure de Haar λ_A sur A dont l'image par $\operatorname{Log}\Delta$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Nous savons (*cf.* 4.11) que, lorsque x tend dans E vers le point à l'infini de manière à ce que $\Delta(x)$ tende vers $+\infty$, $\varepsilon_x \star U$ converge vaguement vers une mesure ν_0 et que cette mesure ν_0 s'écrit d'après 4.21, $c\widehat{m \otimes \lambda_A}$ où c est un scalaire réel; de plus ce scalaire c est non nul si et seulement si la marche est de type II. Il va donc s'agir de déterminer le scalaire c et de prouver qu'il est non nul. L'hypothèse d'étalement était présente dans l'énoncé de 4.11, mais si nous remarquons que 4.11 repose sur 4.16 où l'étalement n'intervient pas et sur 4.17 où l'étalement sert seulement à prouver que $\lim\limits_{\substack{\Delta(x)\to 0\\ x\in E}} Uf(x) = 0$, propriété vérifiée ici sans étalement d'après le théorème de renouvellement sur $\mathbb{R}$ puisque α est <0, nous pouvons supposer que μ n'est pas étalée.

Ajoutons en outre que si $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de G telle que $\Delta(g_n) \to +\infty$ et $p_M(g_n)$ converge vers z, $\varepsilon_{g_n} \star U$ converge vaguement vers $c\,\varepsilon_z \star \widehat{m \otimes \lambda_A}$. Considérons la marche aléatoire droite $(\Omega, (X_n)_{n\in\mathbb{N}}, (P_g)_{g\in G})$ de loi $\hat{\mu}$; nous avons que $\Delta(X_n)$ tend P_e p. s. vers $+\infty$ et que $p_M(X_n)$ converge P_e p. s.; si nous connaissions la limite de $\varepsilon_{X_n} \star U$, P_e p. s., nous pourrions déterminer c. L'idée de la démonstration est là, mais nous allons considérer, au lieu de la marche droite de loi $\hat{\mu}$, le processus relativisé associé à la mesure μ-invariante $\widehat{m \otimes \lambda_A}$.

5.29. *Processus relativisé.* — Soit r *une fonction de référence* sur G relativement à μ (c'est-à-dire une fonction continue strictement positive sur G telle que le potentiel Ur soit une fonction continue finie) qui soit $\widehat{m \otimes \lambda_A}$ intégrable. Il existe alors [2] sur l'espace canonique $\Omega = G^{\mathbb{N}}$, muni de la tribu borélienne $\mathscr{F}$, d'applications coordonnées X_n, $n \geqq 0$, une unique probabilité $\pi^{\widehat{m\otimes\lambda_A}, r}$ telle que :

$$\pi^{\widehat{m\otimes\lambda_A}, r}[X_0 \in A_0, X_1 \in A_1, \ldots, X_n \in A_n] = \widehat{m \otimes \lambda_A}(I_{A_n} P \ldots I_{A_1} P I_{A_0} r),$$

pour tout entier $n \geqq 0$ et tout borélien $A_1, \ldots, A_n$ de G, P désignant la probabilité de transition $P(x, .) = \varepsilon_x \star \mu$.

5.30. THÉORÈME DE CONVERGENCE A LA FRONTIÈRE (*cf.* th. 12.2 de [2]). — *Lorsque* n *tend vers* $+\infty$, *la suite* $\varepsilon_{X_n} \star U / \varepsilon_{X_n} \star U(r)$ *converge* $\pi^{\widehat{m\otimes\lambda_A}, r}$ *p. s. vers une variable aléatoire* χ *à valeurs dans l'espace des mesures de Radon sur* G *et telle que* $\pi^{\widehat{m\otimes\lambda_A}, r}$ *p. s.*, $\chi(r) = 1$.

5.31. Nous allons choisir une fonction de référence r, $\widehat{m\otimes\lambda_A}$ intégrable, pour laquelle nous connaissons le comportement asymptotique de la fonction potentiel Ur et qui nous permette de déterminer $\pi^{\widehat{m\otimes\lambda_A}, r}$. Le fait que m soit de masse finie, va intervenir de manière fondamentale car nous pourrons construire une fonction de référence symétrique qui ne dépende que de sa projection sur A et qui soit $\widehat{m\otimes\lambda_A}$-intégrable.

5.32. LEMME. — *Sous les hypothèses de* 5.27, *il existe une fonction de référence r sur* G *relativement à* μ *telle que :*

(i) $r=r_1\circ\operatorname{Log}\Delta$ *où* r_1 *est une fonction définie sur* $\mathbb{R}$,

(ii) $\widehat{m\otimes\lambda_A}(r)=1$,

(iii) $\lim\limits_{\Delta(g)\to+\infty} U_r(g)=1/|\alpha|$, *où* $\alpha=\int \operatorname{Log}\Delta(g)\,d\mu(g)$.

Preuve. — Considérons sur $\mathbb{R}$ une suite de fonctions f_n continues symétriques, croissant vers 1, telles que f_n vaille 1 sur $[0, n]$ soit décroissante sur $[n, n+1[$ et soit nulle sur $[n+1, +\infty[$. Désignons par λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et par $U_{(\operatorname{Log}\Delta)(\mu)}$ le noyau potentiel sur $\mathbb{R}$ associé à la mesure $(\operatorname{Log}\Delta)(\mu)$. Posons si :

$$c_n=\sup\{1, \lambda(f_n), \| U_{(\operatorname{Log}\Delta)(\mu)}f_n\|\}, \qquad r_1=\gamma\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n}{c_n 2^n}, \qquad \gamma\in\mathbb{R}.$$

La fonction symétrique strictement positive r_1 est une fonction de référence sur $\mathbb{R}$ relativement à $(\operatorname{Log}\Delta)(\mu)$ telle que $\lambda(r_1)=1$ si γ est bien choisi.

De plus r_1 est croissante sur $\mathbb{R}^-$ et décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et il découle de la proposition 3.3 de [45] que le théorème de renouvellement est vrai pour la fonction $U_{(\operatorname{Log}\Delta)(\mu)}r_1$, c'est-à-dire que, puisque :

$$\int_{\mathbb{R}} x(\operatorname{Log}\Delta)(\mu)(dx)=\alpha<0, \quad \lim_{x\to+\infty} U_{(\operatorname{Log}\Delta)(\mu)}r_1(x)=\frac{1}{|\alpha|}\lambda(r_1)=\frac{1}{|\alpha|} \quad (cf.\ 5.12).$$

Posons $r=r_1\circ\operatorname{Log}\Delta$. Alors comme $Ur(g)=U_{(\operatorname{Log}\Delta)(\mu)}r_1[\operatorname{Log}\Delta(g)]$, la fonction symétrique r est une fonction de référence sur G relativement à μ. De plus $Ur(g)$ tend vers $1/|\alpha|$ lorsque $\Delta(g)\to+\infty$ et comme m est une probabilité $\widehat{m\otimes\lambda_A}(r)=1$.

5.33. *Étude de* $\pi^{\widehat{m\otimes\lambda_A}, r}$. — Choisissons comme fonction de référence celle définie en 5.32 et montrons que, vu le choix de r, $X_0^{-1}X_n$ est, pour tout n, $\pi^{\widehat{m\otimes\lambda_A}, r}$ p. s. égale au produit de n variables aléatoires indépendantes de loi $\hat{\mu}$. En effet, si $A_1, \ldots, A_n$ sont des boréliens de G :

$$\begin{aligned}
&\pi^{\widehat{m\otimes\lambda_A}, r}[X_1^{-1}X_0\in A_1, \ldots, X_n^{-1}X_{n-1}\in A_n]\\
&\quad=\int_G \widehat{m\otimes\lambda_A}(dg_0)\int_G 1_{A_n}(g_0^{-1}g_1)\,\varepsilon_{g_0}\star\mu(dg_1)\ldots\int_G 1_{A_1}(g_{n-1}^{-1}g_n)\,\varepsilon_{g_{n-1}}\star\mu(dg_n)\,r(g_n)\\
&\quad=\int_G\ldots\int_G r_1\circ\operatorname{Log}\Delta(g_0g_1\ldots g_n)\,1_{A_n}(g_1)\ldots 1_{A_1}(g_n)\,\widehat{m\otimes\lambda_A}(dg_0)\,\mu(dg_1)\ldots\mu(dg_n)
\end{aligned}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{G} \dots \int_{G} r_1 (x + \operatorname{Log} \Delta (g_1 \dots g_n)) 1_{A_n} (g_1) \dots 1_{A_1} (g_n) \lambda (dx) \mu (dg_1) \dots \mu (dg_n)$$
$$= \lambda (r_1) \mu (A_n) \dots \mu (A_1) = \mu (A_n) \dots \mu (A_1),$$

puisque λ est une mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$; et $X_n^{-1} X_0$ est le produit de n variables indépendantes de loi μ.

Il découle alors de la loi des grands nombres que :

$$\frac{1}{n} \operatorname{Log} \Delta (X_0^{-1} X_n) \to -\alpha, \qquad \pi^{\widehat{m \otimes \lambda_A}, r} \text{ p. s.}$$

et de la proposition 5.20 que $p_M (X_0^{-1} X_n)$ converge $\pi^{\widehat{m \otimes \lambda_A}, r}$ p. s. vers une variable aléatoire Z' de loi de probabilité m, et donc que $p_M (X_n)$ converge p. s. vers $X_0 . Z'$.

Nous en déduisons (*cf.* 5.28) que, lorsque $n \to \infty$, $\varepsilon_{X_n} \star U$ converge vaguement $\pi^{\widehat{m \otimes \lambda_A}, r}$ p. s. vers $c \, \varepsilon_{X_0 . Z'} \star \widehat{m \otimes \lambda_A}$.

Or il découle du théorème de convergence 5.30 rappelé ci-dessus que $\varepsilon_{X_n} \star U / \varepsilon_{X_n} \star U (r)$ converge $\pi^{\widehat{m \otimes \lambda_A}, r}$ p. s. vers une variable aléatoire χ telle que $\chi (r) = 1$ p. s.

Comme $\varepsilon_{X_n} \star U (r)$ converge p. s. vers $|\alpha|^{-1}$, nous venons de prouver que :

$$\chi = c \, |\alpha| \, \varepsilon_{X_0 . Z'} \star \widehat{m \otimes \lambda_A}.$$

Puisque, pour tout z de M, $\varepsilon_z \star \widehat{m \otimes \lambda_A} (r) = \lambda (r_1) = 1$, nous en déduisons que :

$$c = |\alpha|^{-1} \neq 0.$$

La marche de loi μ est donc en particulier *une marche de type II*, d'où la proposition 5.27.

5.34. Si nous remarquons que le comportement asymptotique de noyau potentiel selon les différentes directions résulte de 2.16, 4.6 et 4.12 et que le fait que I_μ soit formé de la mesure nulle et des mesures toutes distinctes $\{ \varepsilon_z \star \nu_0, \ z \in M \}$ où $\nu_0 = 1/|\alpha| \, \widehat{m \otimes \lambda_A}$ a été obtenu en 4.21, nous en déduisons que le théorème 5.11 est prouvé. Et enfin le théorème 5.9 résulte immédiatement de 5.13, 5.26 et 5.27.

5.35. Corollaire. — *Soit* G *un groupe de Lie de la classe* $\mathscr{D}$ *tel que* G/G_0-*soit fini et soit* μ *une mesure de probabilité étalée sur* G *ayant un moment d'ordre* 1 *et telle que* $\int \operatorname{Log} \Delta (g) \, d\mu (g)$ *soit négatif. Alors la chaîne induite sur* M *de loi* $\hat{\mu}$ *est récurrente Harris positive.*

Preuve. — Puisque la marche aléatoire de loi μ est transiente en projection et de type II, la chaîne induite sur M de loi $\hat{\mu}$ est d'après 4.25 récurrente Harris positive sur un ensemble F m-plein. Le corollaire ci-dessus affirme que cet ensemble F est l'espace M entier. Reprenons les notations de 4.23 et rappelons que si $(\Omega, (Y_n)_{n \in \mathbb{N}}, (P'_y)_{y \in M})$ est la chaîne induite de loi $\hat{\mu}$ sur M, nous avons pour tout borélien B de M :

$$P'_y [Y_n \in B] = P'_{(y, 0)} (X_n \in (B \times A)),$$

où $A = KE$ et où $(\Omega, (X_n)_{n \in \mathbb{N}}, (P'_g)_{g \in G})$ est la marche aléatoire gauche de loi $\hat{\mu}$.

L'ensemble F sur lequel la chaîne est récurrente Harris est formé des éléments y de M tels que pour tout borélien B de M vérifiant $m(\mathrm{B})>0$, alors $\mathrm{P}'_y[\overline{\lim_n}\{\mathrm{Y}_n\in\mathrm{B}\}]=1$. Remarquons que si y_0 est un élément de M tel que $\mathrm{P}'_{y_0}[\overline{\lim}\{\mathrm{Y}_n\in\mathrm{F}\}]=1$, il résultera de la propriété de Markov que y_0 est un élément de F.

Comme la mesure μ est étalée, toute fonction harmonique bornée relativement à la probabilité de transition $\pi(y,\ .)=\hat{\mu}\star\varepsilon_y$ de la chaîne induite est continue et de plus, puisque $\hat{\mu}\star m=m$, il existe une fonction ψ continue non nulle telle que $m\geqq\psi\lambda_{\mathrm{M}}$ où λ_{M} est une mesure de Haar sur M. Par suite la fonction harmonique bornée $h(y)=\mathrm{P}'_y[\overline{\lim_n}\{\mathrm{Y}_n\in\mathrm{B}\}]$ (où B est un borélien de M tel que $m(\mathrm{B})>0$) est continue et puisque elle est égale à 1 m-p. s., elle est égale à 1 sur l'ouvert $0=\{\psi>0\}$. De ce fait l'ensemble F contient 0. Si nous montrons que pour tout y de M, $\mathrm{P}'_y[\overline{\lim_n}\{\mathrm{Y}_n\in 0\}]=1$, l'assertion $\mathrm{F}=\mathrm{M}$ sera alors prouvée. Soit x un élément de F. Nous avons :

$$\mathrm{P}'_y[\overline{\lim_n}\{\mathrm{Y}_n\in 0\}]=\mathrm{P}'_{(y,\,0)}[\overline{\lim_n}\{\mathrm{X}_n\in(0\times\mathrm{A})\}]$$
$$=\mathrm{P}'_{(x,\,0)}[\overline{\lim_n}\{\mathrm{X}_n x^{-1}y\in(0\times\mathrm{A})\}]$$
$$=\mathrm{P}'_{(x,\,0)}\overline{\lim_n}\{\mathrm{Y}_n\,\mathrm{Ad}\,p_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}_n)(x^{-1}y)\in 0\}].$$

Puisque $\int\mathrm{Log}\,\Delta(g)\,d\hat{\mu}(g)>0$, d'après la loi des grands nombres $\Delta(\mathrm{X}_n)\xrightarrow{\mathrm{P}'_{(x,\,0)}\text{p. s.}}+\infty$ et donc $\mathrm{Ad}\,(p_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}_n))\,(x^{-1}y)$ converge $\mathrm{P}'_{(x,\,0)}$ p. s. vers 0. Par suite si d est une distance invariante à gauche sur le groupe M et si $\mathscr{B}(x_0,r)$ est une boule ouverte de centre x_0 et de rayon r incluse dans 0 :

$$\mathrm{P}'_{(x,\,0)}[\overline{\lim_n}\{\mathrm{Y}_n\,\mathrm{Ad}\,p_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}_n)(x^{-1}y)\in 0\}]\geqq\mathrm{P}'_x[\overline{\lim_n}\{\mathrm{Y}_n\in\mathscr{B}(x_0,r/2)\}].$$

Puisque $x\in\mathrm{F}$ et puisque $m[\mathscr{B}(x_0,r/2)]>0$;

$$\mathrm{P}'_x[\overline{\lim_n}\{\mathrm{Y}_n\in\mathscr{B}(x_0,r/2)\}]=1,$$

et donc $\mathrm{P}'_y[\overline{\lim_n}\{\mathrm{Y}_n\in 0\}]=1$.

5.35. *Remarque.* — Il est possible en étudiant le processus relativisé associé à la mesure de Haar à droite sur G de déterminer, si μ a un moment d'ordre 1 et si α est négatif, les fonctions $\hat{\mu}$-harmoniques bornées et de retrouver le résultat de [21], à savoir : toute fonction f $\hat{\mu}$-harmonique bornée sur G s'écrit :

$$f(g)=\int\psi(g.x)\,m(dx)\qquad\text{où}\quad\psi\in\mathscr{L}^\infty(\mathrm{M},\lambda_{\mathrm{M}}).$$

C. Marches récurrentes en projection

5.37. Théorème. — *Soit* μ *une mesure de probabilité étalée sur un groupe presque connexe de la classe* $\mathcal{D}$. *On suppose que la marche de loi* $\Delta(\mu)$ *sur* $\mathbb{R}^{+*}$ *est récurrente.*

Si $\operatorname{Log}\Delta$ *n'est pas* μ*-intégrable, la marche de loi* μ *est de type I.*

Si la mesure μ *admet un moment d'ordre* $2+\varepsilon$, *pour un* ε *réel positif quelconque* $\left(\text{auquel cas } \alpha=\int_G \operatorname{Log}\Delta(g)\,d\mu(g)=0\right)$, *la marche de loi* μ *est de type II.*

Si G est un groupe de Lie tel que G/G_0-soit fini, nous obtenons pour les marches de type II le résultat plus précis suivant :

5.38. Théorème. — *Soit* G *un groupe de Lie de la classe* $\mathcal{D}$ *tel que* G/G_0 *soit fini et soit* (M, K, E) *une décomposition de* G *définie en* 4.1. *Appelons* λ_A *la mesure de Haar sur* A *dont l'image par* $\operatorname{Log}\Delta$ *est la mesure de Lebesgue sur* $\mathbb{R}$. *Soit* μ *une mesure de probabilité étalée sur* G *telle que* $\operatorname{Log}^2\Delta$ *et* $\operatorname{Log}(1+\|p_M(\,.\,)\|)^{2+\varepsilon}$, *où* $\|\quad\|$ *désigne une norme sur l'espace vectoriel* M, *soient* μ*-intégrables et supposons que :*

$$\alpha=\int_G \operatorname{Log}\Delta(g)\,d\mu(g)=0.$$

Alors il existe sur M *une mesure* m *de masse infinie telle que l'ensemble des valeurs d'adhérence non nulles de* $\{\varepsilon_g\star U, g\in G\}$ *lorsque* g *tend vers le point à l'infini soit la famille de mesures distinctes* $\{\varepsilon_y\star\nu_0,\ y\in M\}$ *où* $\nu_0=\widehat{m\otimes\lambda_A}$ *et la mesure* m *est, à une constante multiplicative près, l'unique mesure sur* M *telle que* $\hat{\mu}\star m\leqq m$.

De plus le noyau potentiel a un comportement identique à celui indiqué dans le théorème 5.11.

5.39. *Remarque.* — Nous verrons (5.45) que si μ est symétrique et si $\operatorname{Log}^2\Delta$ ou Log $[1+\|p_M\|]$ n'est pas μ-intégrable, la marche de loi μ est de type I, ce qui confirme que, pour une mesure symétrique, $\operatorname{Log}^2\Delta$ μ-intégrable est une bonne hypothèse. Par contre, il est possible de construire des mesures (non symétriques) telles que $\operatorname{Log}^2\Delta$ ne soit pas μ-intégrable, mais telle que la marche de loi μ soit de type II.

5.40. Corollaire. — *Soit* G *un groupe de Lie de la classe* $\mathcal{D}$ *tel que* G/G_0 *soit fini et soit* μ *une mesure de probabilité étalée sur* G *ayant un moment d'ordre* $2+\varepsilon$ *et telle que la marche de loi* $\Delta(\mu)$ *soit récurrente. Alors il existe, à une constante multiplicative près, une unique mesure* m *de masse infinie telle que* $\mu\star m=m$ *et la chaîne induite sur* M *de loi* μ *est récurrente Harris nulle.*

Preuve. — Il découle de 4.25 que puisque la marche sur G de loi $\hat{\mu}$ est de type II, la chaîne induite sur M de loi μ est récurrente Harris sur un ensemble F m-plein. Comme de plus les fonctions μ ou $\hat{\mu}$-harmoniques bornées sur G sont constantes puisque la marche de loi $\Delta(\mu)$ est récurrente (*cf.* 2.20), on en déduit que F est l'ensemble M entier.

5.41. *Remarque.* — La récurrence au sens de Harris de la chaîne induite est donc une conséquence de cette étude du renouvellement. L'existence de telles mesures m est d'autant plus intéressante que nous savons que les fonctions μ ou $\check{\mu}$-harmoniques bornées sur G sont constantes (2.20) et qu'il est possible de construire à l'aide de m toute une classe de fonctions harmoniques positives, par exemple $f(g)=\int_{\mathrm{M}} \varphi(g.x)\, m(dx)$ où φ est une fonction positive à support compact sur M.

Pour prouver les théorèmes 5.37 et 5.38, nous utiliserons la marche transiente en projection construite en 2.23.

5.42. *Passage à la marche transiente en projection.* — Considérons sur un groupe G presque connexe non unimodulaire une mesure de probabilité μ étalée telle que la marche de loi $\Delta(\mu)$ soit récurrente. Posons $\mu_1=\sum_{n \geqq 0} \mu^n/2^{n+1}$ et notons $(\Omega, (\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\mathrm{P}_g)_{g\in\mathrm{G}})$ la marche de loi μ_1. Si τ désigne le temps d'entrée dans $]0, 1[$ de $\Delta(\mathrm{X}_n)$, il est p. s. fini puisque la marche de loi $\Delta(\mu)$ est récurrente. Nous avons vu que si nous considérons sur G la marche de loi $\rho=\mathrm{P}_\tau(e, .)$, elle est transiente en projection par construction et de plus, pour toute suite $(g_n)_{n\in\mathrm{N}}$ tendant vers δ, la suite $\varepsilon_{g_n} \star \sum_{p\geqq 0} \mu^p$ converge vaguement vers 0 si et seulement si la suite $\varepsilon_{g_n} \star \sum_{p\geqq 0} \rho^p$ converge vaguement vers 0 (th. 2.23).

Nous avons étudié au chapitre IV la forme des valeurs d'adhérence de $\{\varepsilon_g \star \mathrm{U}, g\in\mathrm{G}\}$ et nous savons qu'il existe une mesure m (éventuellement nulle) telle que :

— si $\lim \Delta(g)=+\infty$ et si $p_{\mathrm{M}}(g)$ converge vers z, alors $\varepsilon_g \star \mathrm{U}$ converge vaguement vers $\varepsilon_z \star \widehat{m \otimes \lambda_{\mathrm{A}}}$;

— si $\lim \Delta(g)=0$ ou si $p_{\mathrm{M}}(g)$ tend vers le point à l'infini de M, alors $\varepsilon_g \star \mathrm{U}$ converge vaguement vers 0.

Il nous suffit donc pour prouver le théorème 5.38 de montrer que la mesure m est non nulle et le théorème 2.23 est tout à fait adéquat. Si nous montrons que pour une probabilité μ vérifiant les hypothèses de 5.38 la mesure ρ admet un moment d'ordre 1, il découlera du théorème 5.11 que, puisque $\int_{\mathrm{G}} \operatorname{Log}\Delta(g)\, d\rho(g)$ est nécessairement négatif, $\varepsilon_x \star \sum_{n\geqq 0} \rho^n$ ne converge pas vers 0 lorsque x tend dans E vers le point à l'infini de manière à ce que $\Delta(x)$ tende vers $+\infty$. Par suite (2.23) il en sera de même de $\varepsilon_x \star \sum_{n\geqq 0} \mu^n$ et la mesure m ne sera pas nulle.

La suite de ce paragraphe sera consacrée à l'étude de conditions sur μ assurant que la mesure ρ admet ou n'admet pas de moment d'ordre 1. Remarquons qu'il est équivalent de rechercher des conditions sur μ_1 car il est équivalent pour une jauge d'être intégrable pour μ ou pour μ_1.

5.43. Proposition. — *Soit* G *un groupe presque connexe de la classe* $\mathscr{D}$ *et soit* $(\Omega, (\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\mathrm{P}_g)_{g\in\mathrm{G}})$ *une marche aléatoire sur* G *de loi* μ *telle que la marche sur* $\mathbb{R}^{+*}$ *de loi* $\Delta(\mu)$ *soit récurrente. Si* τ *désigne le temps d'entrée dans* $]0, 1[$ *de* $\Delta(\mathrm{X}_n)$, *posons* $\rho=\mathrm{P}_\tau(e, .)$.

Si Log Δ *n'est pas* μ*-intégrable*, Log Δ *n'est pas* ρ*-intégrable*.

Preuve. — Si Log Δ n'est pas μ-intégrable et si la marche de loi Δ(μ) est récurrente, les deux intégrales :

$$\int_{\mathbb{R}^-} |x| \, (\mathrm{Log}\,\Delta)(\mu)(dx) \qquad \text{et} \qquad \int_{\mathbb{R}^+} |x| \, (\mathrm{Log}\,\Delta)(\mu)(dx)$$

sont infinies. En effet si l'une de ces intégrales était finie, la loi des grands nombres entraînerait la transience de la marche de loi Δ(μ). Par suite $\int_G 1_{\{\Delta<1\}} |\mathrm{Log}\,\Delta(g)| \, d\mu(g)$ est infinie et l'inégalité évidente $\rho \geqq \mu|_{\{\Delta<1\}}$ entraîne que Log Δ n'est pas ρ-intégrable.

5.44. Rappellons quelques résultats de [23] sur les sommes de variables aléatoires indépendantes réelles :

Soit $(U_n)_{n\in N}$ *une suite de variables aléatoires réelles indépendantes sur un espace de probabilité* (Ω, $\mathscr{A}$, P). *On pose* $S_n = \sum_{p=1}^{n} U_p$ *et on note :*

$$N = \{\inf n>0,\, S_n>0\} \; et \; N^- = \inf\{n>0,\, S_n<0\}.$$

Si $E(U_1^2)<\infty$ *et* $E(U_1)=0$:

(i) $E(S_N)<\infty$ (XVIII.5, th. 1 de [23]);

(ii) $P[N>n] \sim k/\sqrt{n}$ *où k est une constante réelle* (XII.7, th. 1 *a*) *de* [23]).

Réciproquement si $P[N<\infty]=P[N^-<\infty]=1$ *et si* $E(S_N)$ *et* $E(S_{N^-})$ *sont finis, alors* $E(U_1^2)<\infty$ *et* $E(U_1)=0$ (XVIII.4, lemme 3 de [23]).

5.45. Proposition. — *Reprenons les hypothèses de* 5.43 *en supposant de plus* μ *symétrique. Si* $\mathrm{Log}^2\,\Delta$ *n'est pas* μ*-intégrable ou si* μ *n'admet pas de moment d'ordre* 1, *la mesure* ρ *n'admet pas de moment d'ordre* 1.

Preuve. — Supposons que Log Δ soit ρ-intégrable. Alors $E_e[\mathrm{Log}\,\Delta(X_\tau)]$ est fini. Appliquons la dernière assertion de 5.44 à $S_n=\mathrm{Log}\,\Delta(X_n)$, $N=\tau$, $P=P_e$. Comme μ est symétrique, $E(S_N)=E(S_{N^-})$ et ces termes sont finis puisque égaux à $E_e[\mathrm{Log}\,\Delta(X_\tau)]$. Par conséquent $E_e(\mathrm{Log}^2\,\Delta(X_1))$ est fini et $\mathrm{Log}^2\,\Delta$ est μ-intégrable ce qui prouve la première partie de la proposition.

Supposons maintenant que μ n'admet pas de moment d'ordre 1 et quitte à quotienter par un sous-groupe compact distingué que G est un groupe de Lie de la classe $\mathscr{D}$. D'après ce qui précède il suffit d'étudier le cas où $\mathrm{Log}\,[1+\|p_M(.)\|]$ n'est pas μ-intégrable. Or puisque μ est symétrique :

$$I = \int 1_{\{\Delta>1\}} \mathrm{Log}\,[1+\|p_M(g)\|]\, d\mu(g) = \int 1_{\{\Delta<1\}} \mathrm{Log}\,[1+\|\mathrm{Ad}\,p_A(g^{-1})(p_M(g))\|]\, d\mu(g)$$

et comme $\|\mathrm{Ad}\,p_A(g^{-1})(p_M(g))\| \leqq c\,\|p_M(g)\|\,(c\in\mathbb{R}^+)$ pour tout g tel que $\Delta(g)<1$ *d'après* 4.14, nous obtenons :

$$I \leqq \int 1_{\{\Delta<1\}} \mathrm{Log}\,[1+c\,\|p_M(g)\|]\, d\mu(g) \leqq \mathrm{Log}(1+c) + \int 1_{\{\Delta<1\}} \mathrm{Log}\,[1+\|p_M(g)\|]\, d\mu(g).$$

Par suite si $\operatorname{Log}[1+\|p_M(\,.\,)\|]$ n'est pas μ-intégrable :

$$\int 1_{\{\Delta<1\}} \operatorname{Log}[1+\|p_M(g)\|]\,d\mu(g)$$

est infini et le résultat découle de l'inégalité $\rho \geqq \mu|_{\{\Delta<1\}}$.

5.46. PROPOSITION. — *Reprenons les hypothèses de* 5.43 *en supposons de plus que* G *est un groupe de Lie tel que* G/G_0*-soit fini. Soit* ε *un réel* >0 *et* $\|\ \ \|$ *une norme sur* M.

Si $\operatorname{Log}^2\Delta$ *et* $\operatorname{Log}^{2+\varepsilon}[1+\|p_M(\,.\,)\|]$ *sont* μ*-intégrables, alors la mesure* $\rho=P_\tau(e,\,.\,)$ *admet un moment d'ordre* 1.

Il est clair d'après la première assertion de 5.44 que si $E_e[\operatorname{Log}^2\Delta(X_1)]<\infty$, alors $E_e[|\operatorname{Log}\Delta(X_\tau)|]<\infty$; il s'agit donc d'étudier $E_e[\operatorname{Log}(1+\|p_M(X_\tau)\|)]$. Pour le cas du groupe affine, l'existence de cette intégrale avait été obtenue par Grincevicius dans [27] et [28].

5.47. LEMME. — *Reprenons les hypothèses de* 5.46. *Soit* (T_i) *une suite de variables aléatoires indépendantes de loi* μ *telle* $X_n=T_1\ldots T_n$ *pour tout* n.

Il existe alors deux constantes c *et* c' *et une norme* $\|\ \ \|_1$ *sur* M *telles que nous avons :*

$$E_e[\operatorname{Log}(1+\|p_M(X_\tau)\|_1)] \leqq c\,E_e\left[\operatorname{Log}\left(1+\sum_{i=1}^{\tau}\|p_M(T_i)\|_1\right)\right]+c'.$$

Preuve. — Sur l'ensemble $\{\tau=n\}$:

$$p_M(X_\tau)=p_M(X_n)=Z_1\ldots Z_n,\qquad P_e\ \text{p. s.}$$

où :

$$Z_1=p_M(T_1)\qquad\text{et}\qquad Z_i=\operatorname{Ad}[p_A(X_{i-1})](p_M(T_i)).$$

Considérons la norme $\|\ \ \|_1$ sur M construite dans l'appendice A 2; alors si r est le rang de M :

$$\|p_M(X_n)\|_1 \leqq Q_r[\|Z_1\|_1+\ldots+\|Z_n\|_1],\quad P_e\ \text{p. s.}$$

où Q_r est un polynôme de degré r sans terme constant et à coefficients positifs.

Sur l'ensemble $\{\tau=n\}$ pour tout $i\in\{1,\ldots,n-1\}$, $\Delta(X_i)$ est supérieur à 1. Or d'après le lemme 4.14, il existe puisque toutes les normes sont équivalentes une constante c_1 telle que pour tout v de M et tout g de G tel que $\Delta(g)>1$:

$$\|\operatorname{Ad}(p_A(g))(v)\|_1 \leqq c_1\|v\|_1.$$

Par conséquent, pour tout $i\in\{1,\ldots,n\}$:

$$\|Z_i\|_1 \leqq c_1\|p_M(T_i)\|_1,\qquad P_e\ \text{p. s.}$$

D'où si nous posons :

$$N_\tau=\sum_{i=1}^{\tau}\|p_M(T_i)\|_1,\qquad \|p_M(X_\tau)\|_1 \leqq Q_r(c_1 N_\tau),\qquad P_e\ \text{p. s.}$$

Et il est facile de voir qu'il existe deux réels c et c' tels que pour tout y de $\mathbb{R}^+$:

$$\operatorname{Log}[1+Q_r(c_1 y)] \leqq c \operatorname{Log}(1+y)+c'.$$

Par suite :

$$\operatorname{Log}[1+\|p_M(X_\tau)\|_1] \leqq c \operatorname{Log}[1+N_\tau]+c', \qquad P_e \text{ p. s.}$$

D'où le lemme.

5.48. Comme l'intégrabilité de Log $1+\|p_M(.)\|$ ne dépend pas de la norme choisie, nous supposerons que $\| \ \| = \| \ \|_1$ et pour prouver 5.47, il nous suffit d'étudier l'intégrabilité de $\operatorname{Log}\left[1+\sum_{i=1}^{\tau}\|p_M(T_i)\|_1\right]$ où les variables aléatoires $\|p_M(T_i)\|_1$ sont réelles indépendantes équidistribuées. Appelons $\bar{\mu}$ la loi de la variable aléatoire $W_1=(\operatorname{Log}\Delta(T_1), \|p_M(T_1)\|_1)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ et considérons sur le groupe abélien $\mathbb{R}^2$ la marche aléatoire $(\Omega, (V_n)_{n\in\mathbb{N}}, (P_x^{\bar{\mu}})_{x\in\mathbb{R}^2})$ de loi $\bar{\mu}$. Notons p_1 et p_2 les projections respectives sur les premières et deuxièmes coordonnées. Si τ désigne le temps d'entrée de $p_1(V_n)$ dans $]-\infty, 0[$, nous voulons montrer que Log $(1+p_2(V_\tau))$ est $P_0^{\bar{\mu}}$ p. s. intégrable.

5.49. LEMME. — *Considérons sur* $\mathbb{R}^2$ *une marche aléatoire* $(\Omega, (V_n)_{n\in\mathbb{N}}, (P_x)_{x\in\mathbb{R}^2})$ *de loi* $\bar{\mu}$. *Soit* φ_1 *et* φ_2 *deux homomorphismes continus non triviaux de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}$. *Supposons que* $(\varphi_1)^2$ *soit* $\bar{\mu}$-intégrable et que $\int_{\mathbb{R}^2}\varphi_1(x)\,d\bar{\mu}(x)=0$. *Notons* τ *le temps d'entrée dans* $]-\infty, 0[$ *de* $\varphi_1(V_n)$. *Alors si* $E_0[\operatorname{Log}(1+|\varphi_2(V_1)|)^{2+\varepsilon}]$ *est fini pour un certain* $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$, $E_0[\operatorname{Log}(1+|\varphi_2(V_\tau)|)]$ *est fini.*

Preuve. — Considérons la suite de temps d'arrêt $(\tau_k)_{k\in\mathbb{N}}$ suivante :

$$\tau_0=0, \ldots, \qquad \tau_k=\inf\{n>\tau_{k-1}, \varphi_1(V_n)<\varphi_1(V_{\tau_{k-1}})\}.$$

Alors P_0 p. s. $\tau=\tau_1$. De la relation $\tau_k=\tau_{k-1}+\tau_1\circ\theta_{\tau_{k-1}}$, il découle que d'une part τ_n est une marche aléatoire sur $\mathbb{N}$ de loi la loi de τ et que d'autre part $(\Omega, (V_{\tau_n})_{n\in\mathbb{N}}, (P_x)_{x\in\mathbb{R}^2})$ est une marche aléatoire sur $\mathbb{R}^2$ de loi $P_\tau(0, .)$.

Soit $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi $\bar{\mu}$ telle que $V_n=\sum_{i=1}^{n}W_i$, P_0 p. s. Alors les variables aléatoires $V_{\tau_{n+1}}-V_{\tau_n}=\sum_{i=\tau_n+1}^{\tau_{n+1}}W_i$ sont indépendantes P_0 p. s. et de loi $P_\tau(0, .)$; et il résulte du lemme 5.23 que Log $(1+|\varphi_2(V_\tau)|)$ est P_0 p. s. intégrable si et seulement si :

$$\overline{\lim_n}\,|\varphi_2(V_{\tau_{n+1}}-V_{\tau_n})|^{1/n}=\overline{\lim_n}\left|\sum_{i=\tau_n+1}^{\tau_{n+1}}\varphi_2(W_i)\right|^{1/n}$$

est fini P_0 p. s.

Nous allons montrer que $\overline{\lim_n}\left(\sum_{i=1}^{\tau_n}|\varphi_2(W_i)|\right)^{1/n}$ est P_0 p. s. fini et l'intégrabilité de Log $[1+|\varphi_2(V_\tau)|]$ sera acquise.

Remarquons tout d'abord que si β est un réel tel que $0<\beta<1/2$, alors $E_0[\tau^\beta]$ est fini. En effet d'après 5.44, $P_0[\tau>n]\sim k/\sqrt{n}$ où k est une constante dépendant de $E[\varphi_1^2(V_1)]$, et la série de terme $P_0[\tau^\beta>n]$ est convergente si $1/2\beta>1$. Posons $\beta=1/(2+\varepsilon)$ où ε est la constante assurant l'intégrabilité de $\mathrm{Log}[(1+|\varphi_2(V_1)|]^{2+\varepsilon}$. Ce réel β est donc strictement inférieur à $1/2$; et comme τ_n est une marche aléatoire il découle de la loi des grands nombres que :

$$\tau_n^\beta/n \to E_0[\tau_1^\beta]=E_0[\tau^\beta], \qquad P_0 \text{ p. s.}$$

Reprenant les arguments de [28], nous obtenons, en posant pour $i\in\mathbb{N}$, $U_i=|\varphi_2(W_i)|$:

$$\overline{\lim}\left[\sum_{i=1}^{\tau_n} U_i\right]^{1/n} \leqq \overline{\lim}\exp\left[\frac{1}{n}\mathrm{Log}\left(\sum_{i=1}^{\tau_n} U_i\right)\right] \leqq \overline{\lim}\exp\left[\frac{1}{\tau_n^\beta}\mathrm{Log}\left(1+\sum_{i=1}^{\tau_n} U_i\right)\times\frac{\tau_n^\beta}{n}\right].$$

Comme nous avons vu que τ_n^β/n convergeait P_0 p. s., étudions :

$$K=\overline{\lim}\,\frac{1}{\tau_n^\beta}\mathrm{Log}\left(1+\sum_{i=1}^{\tau_n} U_i\right).$$

De l'inégalité :

$$\mathrm{Log}\left(1+\sum_{i=1}^{\tau_n} U_i\right) \leqq \left[\sup_{i=1}^{\tau_n}\mathrm{Log}(1+U_i)\right]+\mathrm{Log}\,\tau_n,$$

il découle, puisque $(\mathrm{Log}\,\tau_n)/\tau_n^\beta \to 0$ quand $n\to\infty$, que :

$$K \leqq \overline{\lim}\,\frac{1}{\tau_n^\beta}\left(\sup_{i=1}^{\tau_n}\mathrm{Log}\,(1+U_i)\right)=\overline{\lim}\left[\frac{\sup_{i=1}^{\tau_n}\mathrm{Log}(1+U_i)^{1/\beta}}{\tau_n}\right]^\beta.$$

Donc :

$$K \leqq \overline{\lim}\left[\frac{\sum_{i=1}^{\tau_n}\mathrm{Log}(1+U_i)^{1/\beta}}{\tau_n}\right]^\beta.$$

Or il résulte de la loi des grands nombres, $\mathrm{Log}\,(1+U_1)^{1/\beta}$ étant intégrable, que :

$$K \leqq E[\mathrm{Log}(1+U_1)^{1/\beta}]^\beta, \qquad P_0 \text{ p. s.}$$

Et donc :

$$\overline{\lim_n}\left(\sum_{i=1}^{\tau_n}|\varphi_2(W_i)|\right)^{1/n} < \infty P_0 \text{ p. s.}$$

Le lemme est prouvé.

En posant $\varphi_1=p_1$ et $\varphi_2=p_2$, il découle de ce lemme que $\mathrm{Log}\,[1+p_2(V_\tau)]$ est $P_0^{\overline{\mu}}$-intégrable est donc que $\mathrm{Log}\left[1+\sum_{i=1}^{\tau}\|p_M(T_i)\|_1\right]$ est P_e-intégrable.

Nous déduisons alors du lemme 5.47 que $\mathrm{Log}\,[1+\|p_M(X_\tau)\|_1]$ est P_e-intégrable.

5.50. COROLLAIRE. — *Reprenons les hypothèses de* 5.43.

Si μ *admet un moment d'ordre* $2+\varepsilon$, ρ *admet un moment d'ordre* 1.

5.51. *Remarque.* — Soit μ une mesure de probabilité étalée sur G. Nous venons de voir que sous des conditions adéquates de moment sur μ, la chaîne induite de loi μ sur M est récurrente Harris si $\int_G \operatorname{Log} \Delta(g)\,\mu(dg) \geqq 0$. Comme il est prouvé dans [29] que si $\int_G \operatorname{Log} \Delta(g)\,\mu(dg)$ est <0, la chaîne induite est transiente, nous obtenons la trichotomie suivante :

La chaîne induite de loi μ sur M est :

— récurrente Harris positive si μ admet un moment d'ordre 1 et si $\int \operatorname{Log} \Delta(g)\,d\mu(g) > 0$;

— récurrence Harris nulle si μ a un moment d'ordre $2+\varepsilon$ et si $\int \operatorname{Log} \Delta(g)\,d\mu(g) = 0$;

— transiente si μ a un moment d'ordre 1 et si $\int \operatorname{Log} \Delta(g)\,d\mu(g) < 0$.

CHAPITRE VI

VALEURS D'ADHÉRENCES DE $\{\varepsilon_g \star U \star \varepsilon_{g'}, (g, g') \in G \times G\}$

6.1. *Soit G un groupe de la classe* $\mathscr{D}$ et μ une mesure de probabilité sur G étalée. Nous supposerons que la marche de loi μ sur G est transiente en projection de manière à ce que l'ensemble $\{\varepsilon_g \star U \star \varepsilon_{g'}, (g, g') \in G \times G\}$ soit relativement compact et nous pouvons alors rechercher l'ensemble Λ_μ des valeurs d'adhérence de cet ensemble lorsque (g, g') tend vers le point à l'infini de $G \times G$. Il est clair que l'ensemble I_μ des valeurs d'adhérence de $\{\varepsilon_g \star U, g \in G\}$ est inclus dans Λ_μ; mais nous venons de voir que les résultats obtenus lors de l'étude du renouvellement sur les groupes de la classe $\mathscr{D}$ ne sont pas symétriques au sens suivant : si la marche droite de loi μ (étalée) est transiente en projection et de type II, alors la marche droite de loi $\hat{\mu}$ est de type I; autrement dit, si $\varepsilon_g \star U$ admet des valeurs d'adhérence non nulles, $U \star \varepsilon_g$ n'admet que la mesure nulle pour valeur d'adhérence. La recherche de Λ_μ présente donc l'intérêt de symétriser le problème. Remarquons tout de suite que les éléments de Λ_μ ne sont plus nécessairement μ-invariants ou μ excessifs.

6.2. Désignons par σ_g et τ_g les opérateurs de translation à gauche et à droite par g dans G. Si f est une fonction borélienne, nous posons :

$$\forall x \in G, \quad \sigma_g f(x) = f \circ \sigma_g(x) = f(gx) \qquad \text{et} \qquad \tau_g f(x) = f(xg).$$

Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de G tendant vers le point à l'infini. Alors si $f \in C_K(G)$, $\sigma_{g_n} f$ et $\tau_{g_n^{-1}} f$ convergent vers 0 et par suite pour toute mesure bornée ν, $\varepsilon_{g_n} \star \nu(f)$ et $\nu \star \varepsilon_{g_n^{-1}}(f)$ convergent vers 0. Par contre, si $(g_n, g'_n)\, n \in \mathbb{N}$ est une suite de $G \times G$ tendant vers le point à l'infini, la suite $\sigma_{g_n} \tau_{g'_n}(f)$ ne converge pas nécessairement vers 0 et il semble donc intéressant de déterminer l'ensemble $B = \{ y \in G$ tel que la suite $g_n y g'_n$ ait une valeur d'adhérence dans $G \}$. Si sur un groupe abélien G, B est soit l'ensemble vide, soit G entier, sur un groupe général l'ensemble B peut être variable. Considérons par exemple le groupe affine de la droite réelle G_1 et écrivons avec les notations habituelles (*cf.* 1.17.γ) tout élément g sous la forme (h, a) avec $h \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^{+*}$.

Si $g_n = (0, a_n)$, $g_n(v, u) g_n^{-1} = (a_n v, u)$ et l'ensemble B associé à la suite $(g_n, g_n^{-1})_{n \in \mathbb{N}}$ est $\{0\} \times \mathbb{R}^{+*}$ si $a_n \to \infty$ et G_1 si $a_n \to 0$.

Si $g_n = (h_n, 0)$, $g_n(v, u) g_n^{-1} = (h_n + v - u h_n, u)$ et l'ensemble B esr $\mathbb{R} \times \{1\}$ si h_n tend vers le point à l'infini de $\mathbb{R}$.

La proposition suivante étudie précisément l'ensemble B sur les groupes de la classe $\mathscr{D}$.

6.3. Proposition. — *Soit* G *un groupe de Lie de la classe* $\mathscr{D}$ *tel que* G/G_0 *soit fini et soit* (M, K, E) *une décomposition de* G *définie en* 4.1. *Considérons une suite* $(g_n, g'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *de* $G \times G$ *tendant vers* δ *et appelons* B *l'ensemble des éléments* y *de* G *tels que la suite* $g_n y g'_n$ *admette une valeur d'adhérence dans* G. *Alors quitte à extraire une sous-suite, l'ensemble* B *vérifie l'une des trois assertions suivantes :*

(1) $\exists u \in E,\ B \subset MK u$;

(2) $\exists v_1 \in M,\ \exists v_2 \in M,\ B \subset v_1 KE v_2$;

(3) $B = G$

et l'assertion (3) *est réalisée si et seulement si, quitte à extraire une sous-suite,* $g'_n = z g_n^{-1} z_n$ *où* $z \in G$, $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *est une suite convergente dans* G, $\Delta(g_n)$ *tend vers* $+\infty$ *et* $p_M(g_n)$ *converge dans* M.

Preuve. — Remarquons, tout d'abord que si B est non vide, il existe, quitte à extraire une sous-suite de $(g_n, g'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un élément y_0 de G tel que $g_n y_0 g'_n$ converge. Par suite $g'_n = y_0^{-1} g_n^{-1} z_n$ où z_n converge dans G et le translaté à droite $B y_0^{-1}$ de B est tout simplement l'ensemble des éléments y de G pour lesquels la suite $g_n y g_n^{-1}$ admet une valeur d'adhérence.

(*a*) Supposons tout d'abord que $\Delta(g_n)^{-1}$ reste borné lorsque $n \to \infty$, et écrivons $g_n = k_n m_n x_n$ où $(m_n, k_n, x_n) \in M \times K \times E$. Lorsque $\Delta(g_n)^{-1}$ admet une valeur d'adhérence non nulle, nous réextrayons au besoin une sous-suite pour que x_n converge dans E. Considérons un élément $y = vu$ où $(v, u) \in M \times KE$ de G. Comme $p_E(g_n y g_n^{-1}) = p_E(y)$, l'élément y appartient à $B y_0^{-1}$ si et seulement si $p_M(g_n y g_n^{-1})$ admet une valeur d'adhérence dans M. Or :

$$g_n y g_n^{-1} = k_n m_n x_n v u x_n^{-1} m_n^{-1} k_n^{-1} = k_n m_n x_n v x_n^{-1} u m_n^{-1} k_n^{-1},$$

puisque E et K commutent, et :

$$p_M(g_n y g_n^{-1}) = \mathrm{Ad}\ k_n [m_n\ \mathrm{Ad}\ x_n(v)\ \mathrm{Ad}\ u(m_n^{-1})].$$

Comme soit x_n converge, soit $\Delta(x_n)$ tend vers $+\infty$, il résulte du lemme 4.15 que dans les deux cas Ad $x_n(v)$ converge. Le lemme suivant est nécessaire pour terminer la preuve.

6.4. Lemme. — *Soit* G *un groupe de Lie de la classe* $\mathscr{D}$ *tel que* G/G_0 *soit fini et soit* (M, K, E) *une décomposition de* G *définie en* 4.1. *Si* $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *est une suite de* M *tendant vers le point à* *l'infini de* M, *si* w_n *est une suite convergente de* M, *alors pour tout élément* u *de* A *tel que* $p_E(u)$ *ne soit pas l'élément neutre de* E, *la suite* $m_n w_n$ Ad $u(m_n^{-1})$ *tend vers le point à l'infini de* M.

Preuve. — Elle repose sur le fait que les valeurs de Ad u ne sont jamais égales à 1, si $p_E(u)\neq 0$, puisque G est un groupe de la classe $\mathscr{D}$ et elle se fait par récurrence sur le rang de nilpotence de M. Si M est de rang 1, M est abélien et $m_n w_n$ Ad $u(m_n^{-1})=w_n+(\mathrm{Id}-\mathrm{Ad}\ u)\,m_n$. Comme Ad u n'a pas la valeur propre 1, si m_n tend vers le point à l'infini de M, il en est de même de $(\mathrm{Id}-\mathrm{Ad}\ u)\,m_n$, et donc aussi de $m_n w_n$ Ad $u(m_n^{-1})$. Supposons donc le lemme prouvé si M est un groupe nilpotent simplement connexe de dimension $\leqq r-1$ et supposons que M est de rang r. Soit Z le centre de M et soit π_1 la surjection canonique de M sur M/Z. Le groupe Z est fermé distingué dans G et G/Z est isomorphe à M/Z × KE. Comme M/Z est nilpotent de rang $<r$, le groupe G/Z vérifie l'hypothèse de récurrence. Par suite, si $\pi_1(m_n)$ tend vers le point à l'infini de M/Z, $\pi_1(m_n w_n\ \mathrm{Ad}\ u(m_n^{-1}))$ tend aussi vers le point à l'infini et il en est de même de $m_n w_n$ Ad $u(m_n^{-1})$. Supposons donc, quitte à extraire une sous-suite, que $\pi_1(m_n)$ converge. Comme M est simplement connexe et comme Z est un sous-groupe distingué fermé de M, il existe (*cf.* XII, th. 1.2 de [37]) une section continue s de M/Z dans M telle que $\pi_1\circ s$ soit l'identité de M/Z. La suite m_n s'écrit alors $m_n=s\circ\pi_1(m_n)\,y_n$ où $y_n\in\mathrm{Z}$. Comme s est continue, $s\circ\pi_1(m_n)$ converge et y_n tend vers le point à l'infini de Z. Le groupe Z étant central, $y_n w_n$ Ad $u(y_n^{-1})=w_n+(\mathrm{Id}-\mathrm{Ad}\ u)\,y_n$; comme dans le cas abélien, $y_n w_n$ Ad $u(y_n^{-1})$ tend vers le point à l'infini de M et il en est de même de $m_n w_n$ Ad $u(m_n^{-1})$. D'où le lemme.

6.5. *Fin de la preuve de la proposition* 6.3. — Comme Ad $x_n(v)$ converge, il découle du lemme 6.4 que si m_n tend vers le point à l'infini de M, pour tout u de KE tel que $p_E(u)\neq\{0\}$, $p_M(g_n v u g_n^{-1})$ tend vers le point à l'infini et donc $\mathrm{B}y_0^{-1}\subset\mathrm{MK}$.

Par contre, si m_n converge, $p_M(g_n y g_n'^{-1})$ reste dans un compact et par suite $\mathrm{B}y_0^{-1}=\mathrm{G}$. Dans ce cas nécessairement $\Delta(g_n)\to+\infty$ puisque g_n tend vers δ.

(*b*) Supposons maintenant que $\Delta(g_n)$ tende vers zéro lorsque $n\to\infty$ et écrivons $g_n=k_n x_n m_n$ où $(k_n, x_n, m_n)\in\mathrm{K}\times\mathrm{E}\times\mathrm{M}$. Soit $y=vu$ où $(v, u)\in\mathrm{M}\times\mathrm{KE}$ un élément de G. Alors :

$$g_n y g_n^{-1}=k_n x_n m_n y m_n^{-1} x_n^{-1} k_n^{-1}$$

et :

$$p_M(g_n y g_n^{-1})=\mathrm{Ad}(k_n x_n)[m_n v\ \mathrm{Ad}\ u(m_n^{-1})].$$

Comme $\Delta(x_n)$ tend vers zéro, il découle du lemme 4.15 que si $p_M(g_n y g_n^{-1})$ admet une sous-suite convergente, alors la suite $m_n v$ Ad $u(m_n^{-1})$ admet une sous-suite convergente vers 0. Ceci est impossible d'après le lemme 6.4 si m_n tend vers le point à l'infini et si $p_E(u)\neq 0$; dans ce cas encore, l'ensemble $\mathrm{B}y_0^{-1}$ est inclus dans MK.

Supposons donc, quitte à extraire une sous-suite, que m_n converge vers m. Alors si $y=vu$ appartient à $\mathrm{B}y_0^{-1}$, nécessairement nous avons :

$$mv\ \mathrm{Ad}\ u(m^{-1})=e.$$

Par suite, $v=m^{-1}$ Ad $u(m)$ et $y=vu=m^{-1}$ Ad $u(m)\,u=m^{-1}um$ et donc $\mathrm{B}y_0^{-1}$ est inclus dans $m^{-1}\,\mathrm{KE}\,m$. D'où la proposition.

Nous serons amenés pour étudier Λ_μ à faire une hypothèse sur μ qui assure que dans les cas (1) et (2) la mesure $\sum_{n\geq 1} \mu^n$ ne charge pas les ensembles B.

6.6. Définition. — Soit G un groupe de Lie de la classe $\mathscr{D}$ tel que G/G_0 soit fini, et soit (M, K, E) une décomposition de G définie en 4.1. Une mesure de probabilité μ sur G sera dite vérifier la condition (C) si pour tout y et y' de G la mesure $\varepsilon_y \star \sum_{n\geq 1} \mu^n \star \varepsilon_{y'}$ ne charge ni le groupe MK, ni le groupe KE.

Rappelons qu'une mesure est dite *diffuse* si elle ne charge aucun point, et donnons une condition équivalente à (C).

6.7. Proposition. — *Soit* G *un groupe de Lie de la classe* $\mathscr{D}$ *tel que* G/G_0 *soit fini et soit* (M, K, E) *une décomposition de* G *définie en* 4.1. *Une mesure de probabilité* μ *sur* G *vérifie la condition* (C) *si et seulement si la mesure* $p_E(\mu)$ *et les mesures* $p_M(\mu \star \varepsilon_z)$ *sont diffuses pour tout* z *de* M.

Preuve. — Si $\varepsilon_y \star \sum_{n\geq 1} \mu^n \star \varepsilon_{y'}$ ne charge ni MK, ni KE pour tout y et y' de G :

— la mesure $\mu \star \varepsilon_x$ ne charge pas MK pour $x \in E$ et donc $p_E(\mu)(x^{-1})=0$;

— la mesure $\varepsilon_v \star \mu \star \varepsilon_z$ ne charge pas KE pour tout v et z de M et par suite $p_M(\mu \star \varepsilon_z)(v^{-1})=0$.

Réciproquement, supposons que les mesures $p_E(\mu)$ et $p_M(\mu \star \varepsilon_z)$ soient diffuses pour $z \in M$ et montrons que pour toute mesure de probabilité μ_1 sur G, la mesure $\varepsilon_y \star \mu_1 \star \mu \star \varepsilon_{y'}$ ne charge ni MK, ni KE pour tout y et y' de G. La proposition sera alors prouvée.

Comme $\varepsilon_y \star \mu_1 \star \mu \star \varepsilon_{y'}(NK) = \varepsilon_{p_E(y)} \star p_E(\mu_1) \star p_E(\mu) \star \varepsilon_{p_E(y')}(\{0\})$ et comme la convolée d'une mesure et d'une mesure diffuse est encore diffuse, il est facile de conclure dans ce cas.

Par contre, comme KE n'est pas distingué, p_M n'est pas un homomorphisme, mais si $y'=za$ où $(z, a) \in M \times KE$:

$$\varepsilon_y \star \mu_1 \star \mu \star \varepsilon_{y'}(KE) = \int_G \int_G 1_{KE}(yvuv'u'a)\, d\mu_1(v, u)\, d(\mu \star \varepsilon_z)(v', u'),$$

or $yvuv'u'a' \in KE$ si et seulement si $p_M(v') = p_M[(yvu)^{-1}]$ et donc par Fubini :

$$\varepsilon_y \star \mu_1 \star \mu \star \varepsilon_{y'}(KE) = \int_G d\mu_1(v, u) \left[\int_G 1_{\{v'=p_M[(yvu)^{-1}]\}}\, dp_M(\mu \star \varepsilon_z)(v')\right]$$

et ce dernier terme est nul puisque $p_M(\mu \star \varepsilon_z)$ est diffuse.

6.8. *Exemples.* — Pour que μ satisfasse à la condition (C), il suffit que $p_E(\mu)$ soit diffuse et que pour toute fonction continue f de KE dans M, la mesure du graphe de f, qui est égale à $\int_G 1_{v=f(u)}\, d\mu(v, u)$, soit nulle.

Ceci est réalisé par exemple si $\mu = p_M(\mu) \otimes p_{KE}(\mu)$ et si $p_M(\mu)$ et $p_E(\mu)$ sont diffuses ou encore si la mesure μ admet une densité par rapport à la mesure de Haar sur G.

Nous imposerons dorénavant à la mesure μ de satisfaire à la condition (C) et nous prouverons le résultat suivant :

6.9. Théorème. — *Soient* G *un groupe de Lie de la classe* $\mathcal{D}$ *tel que* G/G_0 *soit fini et* (M, K, E) *une décomposition de* G *définie en* 4.1. *Soit* μ *une mesure de probabilité étalée sur* G *ayant un moment d'ordre* 1, *satisfaisant à la condition* (C) *et telle que la marche de loi* μ *soit transiente en projection. Notons* $\alpha = \int_G \operatorname{Log} \Delta(g)\, d\mu(g)$.

Si $\alpha < 0$, *considérons la mesure* $\nu_0 = 1/|\alpha| \widehat{m \otimes \lambda_A}$ *définie en* 5.11; *posons :*

$$F_\mu = \left\{ 0,\ \varepsilon_e,\ \frac{1}{|\alpha|} \widehat{m \otimes \lambda_A},\ \varepsilon_0 \otimes p_A(U),\ \frac{1}{|\alpha|} \varepsilon_0 \otimes \lambda_A \right\},$$

où ε_e (resp. ε_0) *est la mesure de Dirac sur* G (resp. M) *portée par l'élément neutre. Alors l'ensemble* Λ_μ *des valeurs d'adhérence de* $\{ \varepsilon_g \star U \star \varepsilon_{g'}, (g, g') \in G \times G \}$ *lorsque* (g, g') *tend vers le point à l'infini de* $G \times G$ *est égal à :*

$$\{ \varepsilon_y \star \nu \star \varepsilon_{y'},\ \nu \in F_\mu,\ (y, y') \in G \times G \}.$$

Si $\alpha > 0$, *alors* $\Lambda_\mu = \hat{\Lambda}_{\hat{\mu}} = \{ \hat{\nu},\ \nu \in \Lambda_{\hat{\mu}} \}$.

Remarquons que $1/|\alpha| \lambda_A$ est valeur d'adhérence de $p_A(U) \star \varepsilon_x$, $x \in A$ (*cf.* 5.12) et par suite si $\varepsilon_0 \otimes p_A(U)$ appartient à Λ_μ, nécessairement $1/|\alpha| \varepsilon_0 \otimes \lambda_A$ est aussi élément de Λ_μ.

Précisons dans quelles directions les éléments de Λ_μ sont atteints.

6.10. Proposition. — *Plaçons-nous sous les hypothèses de* 6.9 *et supposons que* α *est négatif. Soit* $(g_n, g'_n)_{n \in N}$ *une suite de* $G \times G$ *tendant vers le point à l'infini de* $G \times G$ *et telle que* $\varepsilon_{g_n} \star U \star \varepsilon_{g'_n}$ *converge vaguement vers* ν.

(1) *Si quitte à extraire une sous-suite, une des conditions suivantes :*

- $\lim_n \Delta(g_n) < \infty$;
- $\lim_n \Delta(g'_n) = +\infty$;
- $p_M(g_n)$ *tend vers le point à l'infini de* M;
- $p_M(g'^{-1}_n)$ *tend vers le point à l'infini de* M

est satisfaite, alors la mesure ν *est nulle ou égale à* ε_y $(y \in G)$ *selon que* $g_n g'_n$ *tend vers le point à l'infini de* G *ou converge vers un élément* y.

(2) *Supposons que* $p_M(g_n)$ *et* $p_M(g'^{-1}_n)$ *convergent dans* M: *il existe alors, quitte à extraire une sous-suite, deux éléments* y *et* y' *de* G *tels que* $\nu = \varepsilon_y \star \nu_1 \star \varepsilon_{y'}$ *où* $\nu_1 = \lim_n \varepsilon_{p_E(g_n)} \star U \star \varepsilon_{p_E(g'_n)}$.

(α) *Si* $\Delta(g_n)$ *tend vers* $+\infty$ *et si* $\Delta(g'_n)$ *converge vers un élément non nul, auquel cas* $p_E(g'_n)$ *converge vers un élément* x *de* E, *alors* $\nu_1 = 1/|\alpha| \widehat{m \otimes \lambda_A} \star \varepsilon_x$.

(β) *Si* $\Delta(g_n)$ *tend vers* $+\infty$ *et si* $\Delta(g'_n)$ *tend vers zéro, distinguons trois cas :*

- *soit* $\Delta(g_n g'_n)$ *tend vers zéro, alors* $\nu_1 = 0$;

— *soit* $\Delta(g_n g'_n)$ *converge vers un élément non nul, alors* $p_E(g_n g'_n)$ *converge vers un élément* x' *de* E *et* $\nu_1 = \varepsilon_0 \otimes p_A(U) \star \varepsilon_{x'}$.

— *soit* $\Delta(g_n g'_n)$ *tend vers* $+\infty$, *alors* $\nu_1 = 1/|\alpha| \varepsilon_0 \otimes \lambda_A$.

Nous commencerons par prouver l'assertion (2) de cette proposition et le lemme suivant nous sera utile.

6.11. LEMME. — *Soit* μ *une mesure de probabilité sur un groupe* G (LCD) *telle que la marche de loi* μ *ait la propriété* (P) *et soit* f *un élément de* $C_K^+(G)$. *On note* $R_{g, g'}$ *la fonction de* G *dans* $\mathbb{R}$ *définie pour* $(g, g') \in G \times G$ *par :*

$$R_{g, g'}(x) = \varepsilon_{xg} \star U \star \varepsilon_{g'}(f).$$

Alors l'ensemble de fonctions $\{R_{g, g'}, (g, g') \in G \times G\}$ *est équicontinu en tout point de* G.

Preuve. — Si V est un voisinage compact de e, posons $K = V^{-1}$ supp f. Alors $\forall x_0 \in G$, $\forall (g, g') \in G \times G, \forall y \in V$:

$$|R_{g, g'}(x_0) - R_{g, g'}(y x_0)| < \| \sigma_y f - f \| \varepsilon_{x_0 g} \star U \star \varepsilon_{g'}(K)$$

et comme par la propriété (P)

$$\sup_{(g, g') \in G} \varepsilon_{x_0 g} \star U \star \varepsilon_{g'}(K) < \infty,$$

l'ensemble $\{R_{g, g'}, (g, g') \in G \times G\}$ est équicontinu en x_0.

Ce lemme a pour conséquence que si (y_n, g_n, g'_n) est une suite de $G \times G \times G$ telle que y_n converge vers e, alors au sens vague :

$$\lim_n [\varepsilon_{y_n g_n} \star U \star \varepsilon_{g'_n} - \varepsilon_{g_n} \star U \star \varepsilon_{g'_n}] = 0.$$

6.12. *Preuve de l'assertion* (2) *de* 6.10. — Soit $(g_n, g'_n)_{n \in N}$ une suite de $G \times G$ telle que $p_M(g_n)$ et $p_M(g'^{-1}_n)$ convergent dans M. Écrivons :

$$g_n = m_n k_n x_n \qquad \text{et} \qquad g'^{-1}_n = m'_n k'_n x'^{-1}_n$$

où (m_n, k_n, x_n) et $(m'_n, k'_n, x'_n) \in M \times K \times E$. Alors m_n et m'_n convergent et quitte à extraire une sous-suite, nous pouvons supposer que $m_n k_n$ converge vers y et que $(m'_n k'_n)^{-1}$ converge vers y'. Il résulte alors du lemme 6.11 que :

$$\nu = \lim_n \varepsilon_{m_n k_n x_n} \star U \star \varepsilon_{x'_n (m'_n k'_n)^{-1}} = \lim_n \varepsilon_y \star \varepsilon_{x_n} \star U \star \varepsilon_{x'_n} \star \varepsilon_{y'}$$

et il s'agit donc d'étudier $\nu_1 = \lim_n \varepsilon_{x_n} \star U \star \varepsilon_{x'_n}$ où $x_n = p_E(g_n)$ et $x'_n = p_E(g'_n)$.

(α) Supposons que $\Delta(x_n) = \Delta(g_n)$ tende vers $+\infty$ et que $\Delta(g'_n)$ converge vers un élément non nul. Comme Δ est un isomorphisme de E sur $\mathbb{R}^{+*}$, $p_E(g'_n)$ converge vers un élément x de E et d'après 6.11 :

$$\lim_n \varepsilon_{x_n} \star U \star \varepsilon_{x'_n} = \lim_n \varepsilon_{x_n} \star U \star \varepsilon_x.$$

Comme $\Delta(x_n)$ tend vers $+\infty$, il résulte de 5.11 que $\lim_n \varepsilon_{x_n} \star U = \nu_0 = 1/|\alpha| \widehat{m \otimes \lambda_A}$. Par suite $\nu_1 = 1/|\alpha| \widehat{m \otimes \lambda_A} \star \varepsilon_x$.

(β) Supposons que $\lim_n \Delta(x_n) = +\infty$ et $\lim_n \Delta(x'_n) = 0$.

Si $\Delta(x_n x'_n)$ tend vers zéro, d'après le théorème de renouvellement sur $\mathbb{R}$ (5.12), $\varepsilon_{\Delta(x_n x'_n)} \star \Delta(U)$ converge vers 0 puisque $\alpha < 0$ et il en est de même de $\varepsilon_{x_n} \star U \star \varepsilon_{x'_n}$.

Si $\Delta(x_n x'_n)$ converge vers un élément non nul, $x_n x'_n$ converge vers un élément x' de E. Comme $\Delta(x_n) \to +\infty$, Ad $x_n(v)$ converge vers 0 pour tout v de M (*cf.* 4.15). Par suite, si f est un élément de $C_K(G)$, nous obtenons :

$$\nu(f) = \lim_n \int f[\operatorname{Ad} x_n(v),\, x_n u x'_n]\, dU(v, u) = \int f(0, xu)\, dU(v, u) = \varepsilon_0 \otimes p_A(U) \star \varepsilon_x(f),$$

par application du théorème de Lebesgue puisque $p_A(U)$ est un potentiel transient. Et donc $\nu_1 = \varepsilon_0 \otimes p_A(U) \star \varepsilon_x$.

Supposons pour terminer que $\Delta(x_n x'_n)$ tend vers $+\infty$ et posons $x_n x'_n = a_n$. Soit K_1 un compact de M dont l'intérieur contient $\{0\}$, alors puisque $\Delta(x'_n)$ tend vers zéro, Ad $x'_n(K_1)$ tend vers M. Or pour tout compact K_2 de A :

$$\varepsilon_{x_n} \star U \star \varepsilon_{x'_n}(K_1 \times K_2) = \varepsilon_{a_n} \star \varepsilon_{x'^{-1}_n} \star U \star \varepsilon_{x'_n}(K_1 \times K_2) = \varepsilon_{a_n} \star U(\operatorname{Ad} x'_n(K_1) \times K_2).$$

Par suite pour tout compact K' de M, il existe un entier p tel que pour tout $n \geqq p$, Ad $x'_n(K_1) \supset K'$ et donc tel que :

$$\varepsilon_{x_n} \star U \star \varepsilon_{x'_n}(K_1 \times K_2) \geqq \varepsilon_{a_n} \star U(K' \times K_2).$$

Comme $\Delta(a_n) \to +\infty$, $\varepsilon_{a_n} \star U$ converge vaguement vers $\nu_0 = 1/|\alpha| \widehat{m \otimes \lambda_A}$ lorsque $n \to \infty$ (*cf.* 5.11) et nous obtenons donc :

$$\nu(K_1 \times K_2) \geqq \nu_0(K' \times K_2)$$

et comme cette inégalité est valable pour tout compact K' de M, nous avons :

$$\nu(K_1 \times K_2) \geqq \nu_0(M \times K_2) = \frac{1}{|\alpha|} \lambda_A(K_2) = \frac{1}{|\alpha|} \varepsilon_0(K_1) \lambda_A(K_2).$$

Il découle de plus de la condition (C) que ν ne charge pas KE et par suite $\nu \geqq 1/|\alpha| \varepsilon_0 \otimes \lambda_A$.

Enfin, de l'inégalité :

$$\varepsilon_{x_n} \star U \star \varepsilon_{x'_n}(K_1 \times K_2) \leqq \varepsilon_{x_n x'_n} \star p_A(U)(K_2)$$

et du théorème de renouvellement sur A (*cf.* 5.12), il résulte que :

$$\nu(K_1 \times K_2) \leqq \frac{1}{|\alpha|} \lambda_A(K_2)$$

et par suite :

$$\nu=\frac{1}{|\alpha|}\varepsilon_0\otimes\lambda_A.$$

Le résultat obtenu semble *a priori* naturel car :

$$\varepsilon_{x_n}\star U\star\varepsilon_{x'_n}=\varepsilon_{a_n}\star(\varepsilon_{x_n'^{-1}}\star U\star\varepsilon_{x'_n}),$$

la suite $\varepsilon_{x_n'^{-1}}\star U\star\varepsilon_{x'_n}$ converge vers $\varepsilon_0\otimes p_A(U)$ puisque $\Delta(x'_n)\to 0$ et d'après le théorème de renouvellement sur A, $\varepsilon_{a_n}\star\varepsilon_0\otimes p_A(U)$ converge vers $1/|\alpha|\varepsilon_0\otimes\lambda_A$ puisque $\Delta(a_n)\to\infty$; mais le fait que $\varepsilon_{a_n}\star U$ ne converge pas vers 0 est fondamental; en effet, ne supposons plus que $\Delta(x'_n)\to 0$, mais seulement que $\Delta(x_n)$ et $\Delta(a_n)$ tendent vers l'infini et faisons le raisonnement suivant : écrivons :

$$\varepsilon_{x_n}\star U\star\varepsilon_{x'_n}=(\varepsilon_{x_n}\star U\star\varepsilon_{x_n^{-1}})\star\varepsilon_{a_n},$$

comme $\Delta(x_n)\to\infty$, $\varepsilon_{x_n}\star U\star\varepsilon_{x_n^{-1}}$ converge vers $\varepsilon_0\otimes p_A(U)$ et puisque $\Delta(a_n)\to\infty$, $\varepsilon_0\otimes p_A(U)\star\varepsilon_{a_n}$ converge vers $1/|\alpha|\varepsilon_0\otimes\lambda_A$; on pourrait alors penser que $\varepsilon_{x_n}\star U\star\varepsilon_{x'_n}$ converge vers $1/|\alpha|\varepsilon_0\otimes\lambda_A$; mais si $\Delta(x'_n)\to\infty$ ce résultat est faux puisque d'après (1), $\varepsilon_{x_n}\star U\star\varepsilon_{x'_n}$ converge vers 0.

6.13. La preuve de l'assertion 1 reposera sur plusieurs lemmes. Nous prouverons (6.15 et 6.17) que sous les conditions indiquées $\varepsilon_{g_n}\star\mu\star U\star\varepsilon_{g'_n}$ converge vaguement vers 0. Alors ν sera égale à $\lim_n\varepsilon_{g_ng'_n}$ et par suite sera nulle ou égale à une masse de Dirac.

6.14. Lemme. — *Soit* μ *une mesure de probabilité étalée sur un groupe* G (LCD) *telle que la marche de loi* μ *ait la propriété* (P) *et soit f un élément de* $C_K^+(G)$. *On note* $H_{g,g'}$ *la fonction de* G *dans* ℝ *définie pour* $(g,g')\in G\times G$ *par :*

$$H_{g,g'}(x)=\varepsilon_{gx}\star\mu\star U\star\varepsilon_{g'}(f).$$

Soit $(g_n, g'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de* G×G *tendant vers le point à l'infini et soit* B *l'ensemble des éléments y de* G *tels que la suite* $g_n y g'_n$ *admette une valeur d'adhérence dans* G. *Si pour tout x de* G, $\varepsilon_x\star\mu\star U(B)$ *est nul, alors, quitte à extraire une sous-suite, la suite de fonctions* H_{g_n,g'_n} *converge uniformément sur tout compact de* G.

Preuve. — Les méthodes utilisées en 2.7 pour prouver l'équicontinuité de $\{H_{g,e}, g\in G\}$ vont, comme la marche de loi μ a la propriété (P), s'adapter au cadre ci-dessus.

Remarquons que :

$$H_{g,g'}(x)=\mu\star U(\sigma_g\tau_{g'}f)(x)=P_k U(\sigma_g\tau_{g'}f)(x)+\varepsilon_x\star\nu_k(\sigma_g\tau_{g'}f)$$

si k est un entier et si $\nu_k=\mu+\mu^2+-+\mu^k$.

Supposons que le support de f soit inclus dans un compact K et considérons un voisinage compact V de e; alors si x_0 est un élément fixé de G :

$$\forall y\in V,\quad \varepsilon_{g_nx_0y}\star\nu_k\star\varepsilon_{g'_n}(f)\leqq\|f\|\,\varepsilon_{g_nx_0}\star\nu_k\star\varepsilon_{g'_n}(V^{-1}K)$$

et ce dernier terme tend vers zéro lorsque $n \to \infty$ puisque ν_k est une mesure bornée telle que pour tout x de G, $\varepsilon_x \star \nu_k(\mathrm{B}) = 0$ où B est par hypothèse l'ensemble des éléments y de G tels que $g_n y g'_n$ ne tende pas vers le point à l'infini.

Si nous montrons maintenant que : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists k \in \mathbb{N}$, $\exists$ V voisinage de e tels que :

$$(\star) \qquad \forall (g, g') \in \mathrm{G} \times \mathrm{G}, \quad \forall y \in \mathrm{V}, \qquad |\mathrm{P}_k \mathrm{U}(\sigma_g \tau_{g'} f)(x_0 y) - \mathrm{P}_k \mathrm{U}(\sigma_g \tau_{g'} f)(x_0)| < \varepsilon,$$

nous aurons alors prouvé que : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ V voisinage de e, $\exists p \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqq p, \quad \forall y \in \mathrm{V}, \qquad |\mathrm{H}_{g_n, g'_n}(x_0 y) - \mathrm{H}_{g_n, g'_n}(x_0)| < \varepsilon$$

et il en résultera que, quitte à extraire une sous-suite, la suite H_{g_n, g'_n} converge uniformément sur tout compact.

Or, compte tenu du fait que la marche de loi μ a la propriété (P), la preuve de $(\star)$ est identique à celle de la majoration de $\mathrm{P}_k \mathrm{H}_g(x_0 y) - \mathrm{P}_k \mathrm{H}_g(x_0)$ dans 2.7 car le point fondamental de la démonstration réside dans l'uniforme bornitude des fonctions H_g et ici les fonctions $\mathrm{U}(\sigma_g \tau_{g'} f)$ sont uniformément bornées grâce à la propriété (P). D'où le lemme.

6.15. LEMME. — *Soit* G *un groupe de Lie de la classe* $\mathscr{D}$ *tel que* G/G_0 *soit fini et soit* μ *une mesure de probabilité étalée sur* G *satisfaisant à la condition* (C) *et ayant un moment d'ordre* 1. *On suppose que* $\alpha = \int \operatorname{Log} \Delta(g)\, d\mu(g)$ *est* < 0. *Soit* $(g_n, g'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de* $\mathrm{G} \times \mathrm{G}$ *tendant vers le point à l'infini.*

Si $\Delta(g_n)$ *reste borné, ou si* $\Delta(g'_n)$ *tend vers* $+\infty$, *alors* $\varepsilon_{g_n} \star \mu \star \mathrm{U} \star \varepsilon_{g'_n}$ *converge vaguement vers* 0.

Preuve. — Supposons que $\varepsilon_{g_n} \star \mu \star \mathrm{U} \star \varepsilon_{g'_n}$ converge vaguement vers ν. Si $\Delta(g_n)$ reste borné, il découle de 6.3 que puisque μ satisfait à la condition (C), la suite $(g_n, g'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie les hypothèses de 6.14 et donc que si $f \in \mathrm{C}_\mathrm{K}^+(\mathrm{G})$, quitte à extraire une sous-suite, la suite H_{g_n, g'_n} converge uniformément sur tout compact. Or pour $\varphi \in \mathrm{C}_\mathrm{K}^+(\mathrm{G})$:

$$\begin{aligned}\int \varphi(x)\, \mathrm{U}(\sigma_{g_n} \tau_{g'_n} f)\,(x)\, m_\mathrm{D}(dx) &= \int \varphi(x) f(g_n x u g'_n)\, \mathrm{U}(du)\, m_\mathrm{D}(dx) \\ &= \Delta(g_n) \int \varphi(g_n^{-1} x g_n'^{-1} u^{-1}) f(x)\, \mathrm{U}(du)\, m_\mathrm{D}(dx) \\ &= \Delta(g_n) \int f(x)\, \hat{\mathrm{U}}\, \varphi(g_n^{-1} x g_n'^{-1})\, m_\mathrm{D}(dx) \leqq \Delta(g_n)\, \|\hat{\mathrm{U}}\, \varphi\|\, m_\mathrm{D}(f).\end{aligned}$$

Nous en déduisons que lorsque $\Delta(g_n)$ tend vers zéro :

$$\int \varphi(x)\, \mathrm{H}_{g_n, g'_n}(x)\, m_\mathrm{D}(dx) \to 0;$$

puisque d'autre part, H_{g_n, g'_n} converge uniformément sur tout compact, H_{g_n, g'_n} converge vers 0 et donc $\nu(f) = \lim_n \mathrm{H}_{g_n, g'_n}(e) = 0$.

Si $\Delta(g_n)$ converge vers un élément non nul, alors $p_E(g_n)$ converge; et si de plus $p_M(g_n)$ tend vers le point à l'infini de M, alors $p_M(g_n^{-1})$ tend aussi vers le point à l'infini. D'après 6.3, quitte à extraire une sous-suite, $g_n^{-1} x g_n'^{-1}$ tend vers le point à l'infini sauf peut-être pour x appartenant à un ensemble B de mesure de Haar nulle. Puisque α est négatif, la marche droite de loi $\hat{\mu}$ est de type I et par suite $\hat{U}\varphi(g_n^{-1} x g_n'^{-1})$ tend vers zéro pour presque tout x et à nouveau :

$$\int \varphi(x)\, H_{g_n, g_n'}(x)\, m_D(dx) \to 0$$

et $\nu(f)$ est donc encore nul.

Il reste le cas où $p_E(g_n)$ et $p_M(g_n)$ convergent, alors g_n converge et comme la marche droite de loi $\hat{\mu}$ est de type I, $\varepsilon_{g_n'^{-1}} \star \hat{U}$ converge vaguement vers 0 et par suite il en est de même de $\varepsilon_{g_n} \star U \star \varepsilon_{g_n'}$.

Si $\Delta(g_n')$ tend vers $+\infty$, la mesure $\varepsilon_{g_n'^{-1}} \star \hat{\mu} \star \hat{U} \star \varepsilon_{g_n^{-1}}$ converge vers 0 d'après la première partie du lemme où le fait que α soit négatif ne joue pas. Donc $\nu = 0$.

6.16. Lemme. — *Plaçons-nous sous les hypothèses de* 6.15 *et considérons une suite* $(g_n, g_n')_{n\in\mathbb{N}}$ *de* $G\times G$ *telle que* $\Delta(g_n) \to +\infty$ *et telle que* $p_M(g_n)$ *ou* $p_M(g_n'^{-1})$ *tende vers le point à l'infini de* M. *Soit f un élément de* $C_K^+(G)$; *quitte à extraire une sous-suite, la suite de fonctions* $H_{g_n, g_n'}$ *définies en* 6.14 *converge uniformément sur tout compact et de plus, si* φ *est un élément quelconque de* $C_K^+(G)$ *nous avons :*

$$\forall \varepsilon > 0,\quad \exists p\in\mathbb{N},\quad \forall n > p,\quad \forall x\in G,\qquad H_{g_n, g_n'}(e)\, U\varphi(x) \leqq \| U\varphi \| [H_{g_n, g_n'}(x) + \varepsilon].$$

Preuve. — Puisque μ satisfait la condition (C), le fait que, quitte à extraire une sous-suite, $H_{g_n, g_n'}$ converge uniformément sur tout compact découle de 6.3 et 6.14. Notons ψ la limite de cette suite de fonctions. De la relation :

$$PH_{g_n, g_n'} = H_{g_n, g_n'} + \varepsilon_{g_n} \star \mu \star \varepsilon_{g_n'},$$

il découle que $P\psi = \psi + \lim_n \varepsilon_{g_n} \star \mu \star \varepsilon_{g_n'}$, et comme μ satisfait à la condition (C), la suite $\varepsilon_{g_n} \star \mu \star \varepsilon_{g_n'}$ converge vaguement vers 0. Par suite ψ est une fonction μ-harmonique bornée. Montrons que pour tout $x = vu$ où $(v, u)\in M\times A$, $\psi(x) = \psi(u)$. En effet :

$$\lim_n \varepsilon_{g_n vu} \star \mu \star U \star \varepsilon_{g_n'}(f) = \lim_n \varepsilon_{\mathrm{Ad}(p_A(g_n))(v) g_n u} \star \mu \star U \star \varepsilon_{g_n'}(f) = \lim_n \varepsilon_{g_n u} \star \mu \star U \star \varepsilon_{g_n'}(f),$$

d'après 6.11 car comme $\Delta(g_n) \to \infty$, $\mathrm{Ad}(p_A(g_n))(v)$ converge vers 0 (4.15).

La fonction ψ peut donc être identifiée à une fonction $p_A(\mu)$-harmonique continue bornée sur $A = KE$ et puisque d'après le théorème classique de Choquet-Deny [13] de telles fonctions sont constantes, la fonction ψ est constante. Par conséquent :

$$\lim_n H_{g_n, g_n'}(x) - H_{g_n, g_n'}(e) = 0,$$

uniformément pour x appartenant à un compact quelconque de G.

Soit φ un élément de $C_K^+(G)$ et soit D son support. Appliquons ce résultat au compact D; alors :

$$\forall \varepsilon>0, \quad \exists p\in\mathbb{N}, \quad \forall n>p, \quad \forall x\in D, \qquad H_{g_n, g'_n}(e)\leqq H_{g_n, g'_n}(x)+\varepsilon.$$

Et donc :

$$\forall \varepsilon>0, \quad \exists p\in\mathbb{N}, \quad \forall n\geqq p, \quad \forall x\in D, \qquad H_{g_n, g'_n}(e)\, U\varphi(x)\leqq \| U\varphi \| [H_{g_n, g'_n}(x)+\varepsilon],$$

mais comme :

$$H_{g_n, g'_n}(x)=U f_n(x), \qquad f_n(x)=\int \sigma_{g_n x}\, \tau_{g'_n}\, f(\gamma)\, d\mu(y)$$

il découle du principe du maximum que cette inégalité valable sur le support de φ est valable partout. Le lemme est donc prouvé.

6.17. Lemme. — *Plaçons-nous sous les hypothèses de* 6.15 *et considérons une suite* $(g_n, g'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* $G\times G$ *telle que* $\Delta(g_n)\to+\infty$ *et telle que* $p_M(g_n)$ *ou* $p_M(g'^{-1}_n)$ *tende vers le point à l'infini de* M. *Alors la suite* $\varepsilon_{g_n}\star\mu\star U\star\varepsilon_{g'_n}$ *converge vaguement vers* 0.

Preuve. — Des hypothèses faites sur μ, il résulte que lorsque x tend E vers le point à l'infini de manière à ce que $\Delta(x)$ tende vers $+\infty$, $\varepsilon_x\star U$ converge vaguement vers la mesure non nulle $\nu_0=1/|\alpha|\widehat{m\otimes\lambda_A}$ (th. 5.11). Soit alors φ un élément de $C_K^+(G)$ tel que $\nu_0(\varphi)\neq 0$. Appliquons le lemme 6.16 à la fonction φ et faisons tendre x dans E vers le point à l'infini de E de manière à ce que $\Delta(x)\to+\infty$. Alors $U\varphi(x)$ converge vers $\nu_0(\varphi)$ et $H_{g_n, g'_n}(x)=\varepsilon_{g_n x}\star U\star\mu\star\varepsilon_{g'_n}(f)$ vers $\varepsilon_{g_n}\star\nu_0\star\mu\star\varepsilon_{g'_n}(f)$ puisque la marche de loi μ a la propriété (P).

Comme $\nu_0\star\mu=\nu_0$, nous obtenons :

$$\forall \varepsilon>0, \quad \exists p\in\mathbb{N}, \quad \forall n>p, \qquad H_{g_n, g'_n}(e)\,\nu_0(\varphi)\leqq \| U\varphi \| [\varepsilon_{g_n}\star\nu_0\star\varepsilon_{g'_n}(f)+\varepsilon].$$

Si la suite $\varepsilon_{g_n}\star U\star\varepsilon_{g'_n}$ converge vaguement vers ν, nous obtenons en faisant tendre n vers $+\infty$:

$$\nu(f)\,\nu_0(\varphi)\leqq \| U\varphi \| \left[\underline{\lim}_n\, \varepsilon_{g_n}\star\nu_0\star\varepsilon_{g'_n}(f)+\varepsilon\right]$$

et comme cette inégalité est valable pour tout $\varepsilon>0$, on peut supprimer le terme ε.

Utilisons alors la forme de ν_0 pour montrer que $\underline{\lim}_n\, \varepsilon_{g_n}\star\nu_0\star\varepsilon_{g'_n}(f)=0$. Posons :

$$g_n=m_n a_n \qquad \text{où} \quad (m_n, a_n)\in M\times A$$

et :

$$g'^{-1}_n=m'_n a'_n \qquad \text{où} \quad (m'_n, a'_n)\in M\times A.$$

Par hypothèse m_n ou m'_n tend vers le point à l'infini de M. Comme ν_0 admet les éléments de A pour périodes, nous avons :

$$\varepsilon_{g_n}\star\nu_0\star\varepsilon_{g'_n}=\varepsilon_{m_n a_n}\star\nu_0\star\varepsilon_{a'^{-1}_n m'^{-1}_n}=\varepsilon_{m_n a'_n}\star\nu_0\star\varepsilon_{a'^{-1}_n m'^{-1}_n}.$$

Or pour tout y de G, $p_A(m_n a'_n y a'^{-1}_n m'^{-1}_n) = p_A(y)$ et par suite si K_1 et K_2 sont deux compacts respectifs de M et A :

$$(m_n a'_n)^{-1}(K_1 \times K_2)(m'_n a'_n) \subset M \times K_2$$

et m étant de masse 1, $\nu_0(M \times K_2) = 1/|\alpha| \lambda_A(K_2) < \infty$.

Comme m_n ou m'_n tend vers le point à l'infini de M, d'après 6.3, $m_n a'_n y a'^{-1}_n m'^{-1}_n$ tend vers le point à l'infini sauf pour y appartenant à un ensemble B de ν_0 mesure nulle puisque μ vérifie (C). Il résulte alors du théorème de Lebesgue que :

$$\lim_n \varepsilon_{m_n a'_n} \star \nu_0 \star \varepsilon_{\alpha'^{-1}_n m'^{-1}_n}(K_1 \times K_2) = 0.$$

Par suite, $\varepsilon_{g_n} \star \nu_0 \star \varepsilon_{g'_n}$ converge vaguement vers 0 et il résulte de l'inégalité ci-dessus que ν est nulle.

CHAPITRE VII

COMPORTEMENT A L'INFINI DU NOYAU POTENTIEL

A. Équivalence asymptotique du noyau potentiel

Soit G un groupe presque connexe de la classe $\mathscr{D}$ et μ une mesure de probabilité étalée sur G. Lorsque la mesure μ vérifie certaines conditions de moment et lorsque $\alpha = \int_G \operatorname{Log} \Delta(g)\, d\mu(g)$ est négatif ou nul, nous avons vu que la marche droite de loi μ est de type II. Plus précisément, si G est un groupe de Lie tel que G/G_0 soit fini admettant la décomposition (M, K, E) définie en 4.1 et si $(g_n)_{n \in N}$ est une suite de G telle que $\Delta(g_n) \to +\infty$ et $p_M(g_n)$ converge dans M, la suite $\varepsilon_{g_n} \star U$ converge vaguement vers une mesure non nulle lorsque $n \to \infty$. En revanche, lorsque α est positif, $\varepsilon_{g_n} \star U$ converge vaguement vers 0 et nous allons rechercher une fonction continue h de G dans $\mathbb{R}^{+*}$ telle que $h(g_n)\varepsilon_{g_n} \star U$ converge vaguement vers une mesure non nulle. La méthode consistera tout simplement à relativiser le noyau potentiel par rapport à une exponentielle μ-harmonique non triviale, s'il en existe.

7.1. Définition. — Soit μ une mesure de probabilité sur G(LCD). La mesure μ est dite *irréductible* si le semi-groupe fermé T_μ engendré par le support de μ est le groupe G entier.

7.2. Exponentielles μ-harmoniques. — Soit G un groupe presque connexe de la classe $\mathscr{D}$. Puisque G est un groupe non unimodulaire tel que $G/\overline{[G, G]}$ soit de rang 1, toute fonction exponentielle sur G, c'est-à-dire tout homomorphisme continu de G dans $\mathbb{R}^{+*}(\times)$ s'écrit Δ^β où Δ est le module et $\beta \in \mathbb{R}$. Il est aisé de vérifier que Δ^β est μ-harmonique si et seulement si :

$$\int_G \Delta^\beta(g)\, d\mu(g) = 1.$$

Considérons alors la fonction :

$$F(t) = \int_G \Delta^t(g)\, d\mu(g) = \int_{\mathbb{R}} e^{tx}(\mathrm{Log}\ \Delta)(\mu)(dx),$$

transformée de Laplace de la mesure $(\mathrm{Log}\ \Delta)(\mu)$ sur $\mathbb{R}$. Cette fonction est continue convexe sur l'intervalle de $\mathbb{R}$ où elle est finie; par suite, il existe au plus deux valeurs de t pour lesquelles $F(t)=1$, l'une étant évidemment la valeur nulle puisque μ est une probabilité. S'il existe exactement deux valeurs, nécessairement la mesure $(\mathrm{Log}\ \Delta)(\mu)$ est irréductible; réciproquement, si $(\mathrm{Log}\ \Delta)(\mu)$ est irréductible, $F(t)$ tend vers $+\infty$ lorsque $|t| \to +\infty$; et par suite lorsque le domaine sur lequel $F(t)$ est fini est suffisamment grand, il existe deux solutions de $F(t)=1$ si F n'atteint pas son minimum en 0 ce qui se traduit lorsque $(\mathrm{Log}\ \Delta)(\mu)$ admet un moment d'ordre 1 par $\alpha = \int x(\mathrm{Log}\ \Delta)(\mu)(dx)$ différent de 0. Nous désignerons par $\Delta^\beta\ (\beta \neq 0)$ l'exponentielle μ-harmonique non triviale si elle existe. Remarquons que lorsque $(\mathrm{Log}\ \Delta)(\mu)$ et $(\mathrm{Log}\ \Delta)(\Delta^\beta \mu)$ ont un moment d'ordre 1, les intégrales :

$$\int_G \mathrm{Log}\ \Delta(g)\,\mu(dg) \qquad \text{et} \qquad \int_G \mathrm{Log}\ \Delta(g)(\Delta^\beta \mu)(dg)$$

sont de signe contraire car les tangentes au graphe de F aux points 0 et β ont des pentes opposées. De plus α est positif si et seulement si β est négatif.

Montrons tout d'abord que lorsque α est négatif, l'hypothèse d'étalement n'est pas nécessaire pour étudier le comportement de $\varepsilon_g \star U$ lorsque $\Delta(g)$ tend vers $+\infty$ et lorsque $p_M(g)$ converge.

7.3. Proposition. — *Soit* G *un groupe de Lie de la classe* $\mathscr{D}$ *tel que* G/G_0 *soit fini et soit* μ *une mesure de probabilité* (*non nécessairement étalée*) *sur* G *telle que la marche de loi* μ *soit transiente en projection.*

Si Log Δ *est* μ*-intégrable et si* $\alpha = \int_G \mathrm{Log}\ \Delta(g)\, d\mu(g) < 0$, *alors :*

$$\lim_{\substack{\Delta(g) \to +\infty \\ p_M(g) \to z}} \varepsilon_g \star \sum_{n \geq 0} \mu^n = \varepsilon_z \star \nu_0,$$

où la mesure ν_0 *est non nulle si et seulement si* μ *admet un moment d'ordre* 1. *Dans ce cas,* $\nu_0 = 1/|\alpha|\, \widehat{m \otimes \lambda_A}$ *où m est une mesure de probabilité sur* M *vérifiant* $\hat{\mu} \star m = m$.

Si Log Δ *n'est pas* μ*-intégrable, la limite ci-dessus est nulle.*

Preuve. — Lorsque Log Δ n'est pas μ-intégrable, le théorème de renouvellement sur $\mathbb{R}$ permet de conclure. Si Log Δ est μ-intégrable et si α est < 0, la mesure μ vérifie l'hypothèse (H) de 5.14 et il existe une mesure de probabilité m telle que $\hat{\mu} \star m = m$ si et seulement si μ admet un moment d'ordre 1 (5.15). Or si ν est une valeur d'adhérence de $\{\varepsilon_x \star U, x \in E\}$ lorsque $\Delta(x) \to +\infty$, ν admet les éléments de A pour périodes (*cf.* 4.16) et s'écrit donc d'après 4.20 sous la forme $\widehat{m' \otimes \lambda_A}$ où m' est une mesure de masse finie telle que $\hat{\mu} \star m' = m'$ puisque la marche de loi μ est transiente en projection. Par suite si μ n'admet pas de moment d'ordre 1, la mesure ν est nulle, et $\varepsilon_g \star \sum_{n \geqq 0} \mu^n$ converge vaguement vers 0 lorsque $\Delta(g) \to +\infty$ et $p_M(g)$ converge. Le cas où μ admet un moment d'ordre 1 est étudié sans hypothèse d'étalement dans 5.27. D'où la proposition.

7.4. PROPOSITION. — *Soit* G *un groupe de Lie de la classe* $\mathscr{D}$ *tel que* G/G_0 *soit fini et soit* μ *une mesure de probabilité (non nécessairement étalée) sur* G. *Supposons qu'il existe une exponentielle* μ*-harmonique* Δ^β *non triviale et que* β *soit négatif. Alors si* $\Delta^\beta \mu$ *admet un moment d'ordre* 1, *le moment* $\gamma = \int_G \operatorname{Log} \Delta(g)\, d(\Delta^\beta \mu)(g)$ *est négatif et :*

$$\lim_{\substack{\Delta(g) \to \infty \\ p_M(g) \to z}} \Delta^\beta(g^{-1})\, \varepsilon_g \star \sum_{n \geqq 0} \mu^n = \frac{1}{|\gamma|} \varepsilon_z \star \widehat{\Delta^\beta m \otimes \lambda_A},$$

où m *est une mesure de probabilité sur* M *telle que* $\widehat{\Delta^\beta \mu} \star m = m$.

Si $\Delta^\beta \mu$ *n'admet pas de moment d'ordre* 1, *la limite ci-dessus est nulle.*

Cette proposition s'applique évidemment au cas où Log Δ est μ-intégrable et $\alpha > 0$, car s'il existe une exponentielle μ-harmonique non triviale Δ^β, β sera dans ce cas nécessairement négatif.

Preuve de 7.4. — Il suffit de remarquer que, puisque Δ^β est un homomorphisme, nous avons pour tout f de $C_K(G)$:

$$\Delta^\beta(g^{-1})\, \varepsilon_g \star \sum_{n \geqq 0} \mu^n(f) = \varepsilon_g \star \sum_{n \geqq 0} (\Delta^\beta \mu)^n (\Delta^{-\beta} f)$$

et d'appliquer la propropositon 7.3 à $\Delta^\beta \mu$ pour conclure.

Si nous imposons de plus à la mesure μ d'avoir une densité bornée à support compact, il nous est possible grâce à la dualité existant entre les noyaux potentiels U et $\hat{U}$ d'obtenir des renseignements sur le comportement du noyau potentiel lorsque $\Delta(g)$ tend vers zéro.

7.5. PROPOSITION. — *Soit* G *un groupe de Lie de la classe* $\mathscr{D}$ *tel que* G/G_0 *soit fini et soit* μ *une mesure de probabilité sur* G *admettant une densité bornée à support compact.*

Si :

$$\alpha = \int_G \operatorname{Log} \Delta(g)\, d\mu(g) \text{ est} \geqq 0,$$

alors :

$$\lim_{\substack{\Delta(g) \to 0 \\ p_M(g^{-1}) \to z}} \Delta(g^{-1})\, \varepsilon_g \star \sum_{n \geqq 0} \mu^n = c_z m_D,$$

où m_D *est une mesure de Haar à droite sur* G *et* c_z *un réel non nul dépendant de* z.

Si $\alpha<0$ *et si la mesure* $(\mathrm{Log}\,\Delta)(\mu)$ *est irréductible, alors il existe une exponentielle* μ*-harmonique non triviale* Δ^{β} *telle que* β *soit strictement positif et :*

$$\lim_{\substack{\Delta(g)\to 0\\ p_{\mathrm{M}}(g^{-1})\to z}} \Delta^{\beta+1}(g^{-1})\,\varepsilon_g\star\sum_{n\geqq 0}\mu^n=c'_z\,\Delta^{-\beta}\,m_{\mathrm{D}},$$

où c'_z *est un réel non nul dépendant de* z.

Preuve. — Si μ admet une densité bornée à support compact, la mesure μ^2 admet une densité φ continue à support compact. Pour $f\in\mathrm{C}_{\mathrm{K}}(\mathrm{G})$, nous avons donc :

$$\mathrm{U}f(g)=\varepsilon_g\star\mu^2\star\mathrm{U}(f)+f(g)+\varepsilon_g\star\mu(f)$$
$$=\Delta(g)\int_{\mathrm{G}} f(x)\,\hat{\mathrm{U}}\,\varphi(g^{-1}x)\,m_{\mathrm{D}}+f(g)+\varepsilon_g\star\mu(f).$$

Si $\alpha\geqq 0$, alors $\int_{\mathrm{G}}\mathrm{Log}\,\Delta(g)\,d\hat{\mu}(g)$ est $\leqq 0$ et d'après 4.17 et 5.11, il existe une mesure non nulle ν_0 telle que si $\Delta(g^{-1})\to\infty$ et $p_{\mathrm{M}}(g^{-1})\to z$, $\hat{\mathrm{U}}\,\varphi(g^{-1}x)$ converge vers $\varepsilon_z\star\nu_0(\varphi)$ uniformément pour x appartenant à un compact. Par suite $\Delta^{-1}(g)\,\mathrm{U}f(g)$ converge vers $\varepsilon_z\star\nu_0(\varphi)\,m_{\mathrm{D}}(f)$ et il suffit de poser $c_z=\varepsilon_z\star\nu_0(\varphi)$.

Si α est <0, l'irréductibilité de $(\mathrm{Log}\,\Delta)(\mu)$ assure l'existence d'une exponentielle μ-harmonique non triviale Δ^{β} et nécessairement β est >0.

Comme dans la proposition précédente :

$$\Delta^{\beta}(g^{-1})\,\mathrm{U}f(g)=\varepsilon_g\star\sum_{n\geqq 0}(\Delta^{\beta}\mu)^n(\Delta^{-\beta}f)$$

et puisque $\int_{\mathrm{G}}\mathrm{Log}\,\Delta(g)(\Delta^{\beta}\mu)(dg)$ est positif, on applique à $\Delta^{\beta}\mu$ la première partie de la démonstration.

7.6. *Remarque.* — Si $\Delta(g)\to 0$ et si $p_{\mathrm{M}}(g)$ converge, alors $p_{\mathrm{M}}(g^{-1})$ tend vers zéro; par suite pour une mesure de probabilité μ admettant une densité bornée à support compact et telle que $(\mathrm{Log}\,\Delta)(\mu)$ soit irréductible, nous avons obtenu (7.3, 7.4 et 7.5) un équivalent asymptotique (au sens vague) de $\varepsilon_g\star\mathrm{U}$ lorsque g tend vers le point à l'infini de manière à ce que $p_{\mathrm{M}}(g)$ converge.

Nous pouvons en particulier en déduire le comportement asymptotique du noyau de Martin $(\varepsilon_g\star\mathrm{U})/\mathrm{U}\,r(g)$ pour $r\in\mathrm{C}_{\mathrm{K}}^{+}(\mathrm{G})$ lorsque g tend vers δ de manière à ce que $p_{\mathrm{M}}(g)$ converge. Les mesures limites du noyau de Martin obtenues sont, à une constante multiplicative près :

- $\{\Delta^{-\beta}m_{\mathrm{D}},\ \varepsilon_z\star\widehat{m\otimes\lambda_{\mathrm{A}}},\ z\in\mathrm{M}\}$ (où m vérifie $\hat{\mu}\star m=m$) si α est <0;
- $\{m_{\mathrm{D}},\ \varepsilon_z\star\widehat{m\otimes\lambda_{\mathrm{A}}},\ z\in\mathrm{M}\}$ (où m *vérifie* $\hat{\mu}\star m=m$) si α est nul;
- $\{m_{\mathrm{D}},\ \varepsilon_z\star\widehat{\Delta^{\beta}m\otimes\lambda_{\mathrm{A}}},\ z\in\mathrm{M}\}$ (où m vérifie $\widehat{\Delta^{\beta}\mu}\star m=m$) si α est >0.

Une étude complète du noyau de Martin a été menée sur le groupe affine [20] et dans ce cas nous avons montré que les limites ci-dessus engendraient exactement les génératrices extrémales du cône des mesures μ-invariantes.

B. Interprétation sur les groupes semi-simples

7.7. Soit G un groupe de Lie semi-simple connexe non compact de centre fini et NAK une décomposition d'Iwasawa de G où les sous-groupes N, A, K sont respectivement nilpotent simplement connexe, abélien connexe, compact maximal. Si le groupe A est de rang 1, le groupe NA est de la classe $\mathscr{D}$ [52].

Considérons sur G une mesure de probabilité μ-invariante à gauche par K, c'est-à-dire vérifiant $\lambda_K \star \mu = \mu$ si λ_K est la mesure de Haar normalisée sur K. Alors si f est un élément de $C_K(G)$ invariant à droite par K et si $g = nak$ où $(n, a, k) \in N \times A \times K$, nous avons :

$$\varepsilon_g \star \mu(f) = \int f(n a k n' a' k')\, d\mu(n', a', k') = \int f(n a n' a')\, d\mu(n', a', k').$$

Par suite si μ_1 désigne la projection de μ sur NA :

$$\varepsilon_g \star \mu(f) = \varepsilon_{na} \star \mu_1(f),$$

où la fonction f invariante à droite par K est considérée comme une fonction sur NA. Et de même :

$$\varepsilon_g \star \sum_{n \geqq 0} \mu^n(f) = \varepsilon_{na} \star \sum_{n \geqq 0} \mu_1^n(f),$$

où μ_1^n désigne le produit de convolution de μ_1 dans NA. Donc les résultats obtenus pour le noyau potentiel sur NA se transportent aux noyaux potentiels de mesures invariantes à gauche par K sur NAK.

7.8. Le groupe NA est non unimodulaire; soit Δ son module. Si nous prolongeons Δ à G par $\Delta(nak) = \Delta(a)$, la mesure $\lambda_G = \Delta \lambda_N \otimes \lambda_A \otimes \lambda_K$ où λ_N est une mesure de Haar sur N et λ_A une mesure de Haar sur A dont l'image par Δ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^{+*}$, est une mesure de Haar sur le groupe unimodulaire G = NAK [35]. Nous savons de plus [35] que pour tout g de G, $\int_K \Delta^{-1}(kg)\, \lambda_K(dk) = 1$. Par suite, si μ est une mesure de probabilité invariante à gauche par K, alors $\mu(\Delta^{-1}) = 1$ et Δ^{-1} est une exponentielle μ-harmonique et aussi μ_1-harmonique si μ_1 est la projection de μ sur NA. Lorsque de plus, Log Δ est μ-intégrable, nous en déduisons en particulier que :

$$\int_G \operatorname{Log} \Delta(g)\, d\mu(g) = \int_{NA} \operatorname{Log} \Delta(g)\, d\mu_1(g)$$

est positif, ce qui est naturel du point de vue théorie du renouvellement lorsque A est de rang 1, la marche de loi μ_1 sur NA devant être de type I, puisque le groupe $G=NAK$ semi-simple est de type I.

Le résultat suivant sera une application de 7.4 et 7.5.

7.9. PROPOSITION. — *Soit* G *un groupe de Lie connexe semi-simple de centre fini et soit* μ *une mesure de probabilité sur* G *invariante à gauche par* K. *Si* f *est un élément de* $C_K(G)$ *invariant à droite par* K :

$$\lim_{\substack{a\in A \\ \Delta(a)\to+\infty}} \Delta(a)\varepsilon_a\star U(f)=\nu_0(f),$$

où ν_0 *est une mesure non nulle si et seulement si* A *est de rang* 1 *et si* μ *admet un moment d'ordre* 1. *Alors dans ce cas la mesure* ν_0 *s'écrit*

$$1/|\gamma|\,\Delta\widehat{m\otimes\lambda_A}\otimes\lambda_K \qquad \textit{où} \qquad \gamma=\int_G \operatorname{Log}\Delta(g)(\Delta^{-1}\mu)(dg)$$

et où m *est une mesure de probabilité sur* N *ne dépendant pas de* μ. *Plus précisément* m *admet pour densité* $\psi(n)=\Delta^{-1}(k_0^{-1}n^{-1})$ *par rapport à une mesure de Haar adéquate sur* N *si* k_0 *est un élément de normalisateur de* A *dans* K *agissant sur* A *par symétrie.*

Preuve. — Nous avons remarqué que pour toute fonction f de $C_K(G)$ invariante à droite par K et tout élément a de A;

$$\varepsilon_a\star\sum_{n\geqq 0}\mu^n(f)=\varepsilon_a\star\sum_{n\geqq 0}\mu_1^n(f).$$

De plus, puisque Δ^{-1} est μ-harmonique, $\Delta^{-1}\mu_1$ est une probabilité sur NA et :

$$\Delta(a)\varepsilon_a\star\sum_{n\geqq 0}\mu_1^n(f)=\varepsilon_a\star\sum_{n\geqq 0}(\Delta^{-1}\mu_1)^n(\Delta f).$$

Si le rang de A est supérieur à 1, la marche de loi $\Delta^{-1}\mu_1$ sur NA admet une projection transiente et de type I et par suite est elle-même de type I. La proposition est donc immédiate dans ce cas et en fait on prouve même que :

$$\lim_{\substack{g\in G \\ \Delta(g)\to+\infty}} \Delta(g)\varepsilon_g\star U(f)=0.$$

Si le rang de A est égal à 1, alors NA est un groupe de la classe $\mathscr{D}$ et lorsque Log Δ est $(\Delta^{-1}\mu_1)$ intégrable, l'intégrale $\int_{NA}\operatorname{Log}\Delta(g)(\Delta^{-1}\mu_1)\,dg$ est nécessairement négative. Donc d'après la proposition 7.3, la mesure ν_0 est non nulle si et seulement si $\Delta^{-1}\mu_1$ admet un moment d'ordre 1. Or d'après 5.6 (3), il est équivalent pour les mesures $\Delta^{-1}\mu$ sur G et $\Delta^{-1}\mu_1$ sur NA d'avoir un moment d'ordre 1 puisque G/NA est compact. Remarquons alors que si δ est une jauge principale sur G :

$$\int_G \delta(g)\Delta^{-1}(g)\,d\mu(g)=\int_K\int_G \delta(kg)\Delta^{-1}(kg)\,d\mu(g)\,d\lambda_K(k),$$

puisque μ est invariante à gauche par K. Comme $\delta(kg) \leqq \delta(k)+\delta(g)+C$ et comme $\int_K \Delta^{-1}(kg)\, d\lambda_K(k)=1$, nous en déduisons que :

$$\int_G \delta(g)\Delta^{-1}(g)\, d\mu(g) \leqq C' + \int_G \delta(g)\, d\mu(g)$$

et un argument analogue permet de montrer que réciproquement si $\Delta^{-1}\mu$ admet un moment d'ordre 1, alors μ admet un moment d'ordre 1. Par conséquent, la mesure ν_0 est non nulle si et seulement si μ admet un moment d'ordre 1 et dans ce cas (*cf.* 7.3) :

$$\nu_0 = \frac{1}{|\gamma|}\Delta(\widehat{m \otimes \lambda_A} \otimes \lambda_K),$$

où m est une mesure de probabilité sur M vérifiant $\widehat{\Delta^{-1}\mu_1} \star m = m$.

Il s'agit maintenant d'expliciter m. Soit M′ le normalisateur de A dans K. Comme A est de rang 1, M′ agit sur A soit trivialement, soit par symétrie [52]; notons k_0 un élément de M′ agissant sur A par symétrie.

Considérons une mesure μ particulière admettant une densité continue à support compact et montrons que pour cette mesure μ :

$$\Delta \widehat{m \otimes \lambda_A} \otimes \lambda_K = \varepsilon_{k_0} \star (\Delta^{-1}\lambda_G),$$

où λ_G est une mesure de Haar sur G.

Soit a_n une suite de A telle que $\Delta(a_n) \to 0$; alors puisque μ admet une densité continue à support compact, d'après 7.5 nous avons pour tout $f \in C_K(NA)$:

$$\lim_{n\to\infty} \Delta^{-1}(a_n)\varepsilon_{a_n} \star \sum_{p \geqq 0} \mu_1^p(f) = \frac{1}{|\gamma|}\lambda_N \otimes \lambda_A(f),$$

si λ_N est une mesure de Haar adéquate sur N. Par suite, pour tout élément f de $C_K(G)$ invariant à droite par K :

$$\lim_{n\to\infty} \Delta^{-1}(a_n)\varepsilon_{a_n} \star \sum_{p \geqq 0} \mu^p(f) = \frac{1}{|\gamma|}\lambda_N \otimes \lambda_A \otimes \lambda_K(f) = \frac{1}{|\gamma|}(\Delta^{-1}\lambda_G)(f)$$

où λ_G est une mesure de Haar sur G.

Comme d'autre part $\Delta(k_0 a_n k_0^{-1}) = \Delta(a_n^{-1})$ tend vers $+\infty$, d'après la première partie de la preuve :

$$\lim_{n\to\infty} \Delta(k_0 a_n k_0^{-1})\varepsilon_{k_0 a_n k_0^{-1}} \star \sum_{p \geqq 0} \mu^p(f) = \frac{1}{|\gamma|}\Delta \widehat{m \otimes \lambda_A} \otimes \lambda_K(f),$$

ou encore puisque μ est invariante à gauche par K :

$$\lim_{n\to\infty} \Delta^{-1}(a_n)\varepsilon_{k_0 a_n} \star \sum_{p \geqq 0} \mu^p(f) = \frac{1}{|\gamma|}\Delta \widehat{m \otimes \lambda_A} \otimes \lambda_K(f).$$

Combinant ces deux limites, nous obtenons :

$$\varepsilon_{k_0} \star (\Delta^{-1} \lambda_G)(f) = (\Delta \widehat{m \otimes \lambda_A} \otimes \lambda_K)(f),$$

pour tout élément f de $C_K(G)$ invariant à droite par K et par suite :

$$(\star\star) \qquad \varepsilon_{k_0} \star \Delta^{-1} \lambda_G = (\Delta \widehat{m \otimes \lambda_A} \otimes \lambda_K).$$

La mesure m admet donc une densité ψ par rapport à la mesure de Haar λ_N définie ci-dessus. De la relation $(\star\star)$, il résulte que :

$$(\sigma_{k_0^{-1}} \Delta)^{-1} \lambda_G = \Delta \widehat{m \otimes \lambda_A} \otimes \lambda_K$$

et donc que :

$$(\sigma_{k_0^{-1}} \Delta)^{-1} \lambda_N \otimes \lambda_A = \widehat{m \otimes \lambda_A}.$$

Par suite :

$$m \otimes \lambda_A = \widehat{(\sigma_{k_0^{-1}} \Delta)}^{-1} \widehat{\lambda_N \otimes \lambda_A} = \widehat{(\sigma_{k_0^{-1}} \Delta)}^{-1} \Delta \lambda_N \otimes \lambda_A.$$

D'où pour tout $g = na \in NA$:

$$\psi(n) = \Delta^{-1}(k_0^{-1} g^{-1}) \Delta(g) = \Delta^{-1}(k_0^{-1} a^{-1} n^{-1}) \Delta(a)$$
$$= \Delta^{-1}(k_0^{-1} a^{-1} k_0) \Delta^{-1}(k_0^{-1} n^{-1}) \Delta(a) = \Delta^{-1}(k_0^{-1} n^{-1}),$$

puisque k_0 appartient au normalisateur de A.

Remarquons maintenant que $(\star\star)$ ne dépend pas de μ. Or la mesure $\varepsilon_{k_0} \star (\Delta^{-1} \lambda_G)$ vérifie, pour toute mesure de probabilité μ :

$$\varepsilon_{k_0} \star (\Delta^{-1} \lambda_G) \star \mu \star \lambda_K = \varepsilon_{k_0} \star (\Delta^{-1} \lambda_G),$$

puisque Δ^{-1} est harmonique relativement à la probabilité $\lambda_K \star \hat{\mu}$ invariante à gauche par K. On en déduit alors à l'aide de $(\star\star)$ que pour toute mesure de probabilité μ invariante à gauche par K :

$$\widehat{\Delta^{-1} \mu_1} \star m = m,$$

où μ_1 est la projection de μ sur NA et où m est la mesure ci-dessus de densité ψ. Si $\operatorname{Log} \Delta$ est $\Delta^{-1} \mu_1$-intégrable, la mesure $\Delta^{-1} \mu_1$ vérifie l'hypothèse (H) et il résulte de 5.15 que la mesure m de densité ψ est l'unique solution de $\widehat{\Delta^{-1} \mu_1} \star m = m$ et que la mesure $\Delta^{-1} \mu_1$ admet un moment d'ordre 1; la proposition est donc prouvée et on a remarqué de plus que l'existence d'un moment d'ordre 1 pour $\Delta^{-1} \mu$ est équivalente à l'intégrabilité de $\operatorname{Log} \Delta$ relativement à $\Delta^{-1} \mu$.

Plaçons-nous toujours sur un groupe G semi-simple de rang 1 et considérons une décomposition de Cartan KA^+K de G où $A^+ = \{a \in A, \ \Delta(a) \geqq 1\}$ et notons si $g = k_1 a k_2 \, (k_1, a, k_2) \in K \times A^+ \times K$, $\Pi_A(g) = a$ l'élément de A^+ dans cette décomposition. De la preuve de la proposition précédente, il découle le corollaire suivant.

7.10. COROLLAIRE. — *Soit* G *un groupe de Lie connexe semi-simple de centre fini et de rang* 1 *et soit* μ *une mesure de probabilité sur* G *invariante à gauche par* K *et ayant un moment d'ordre* 1. *Soit* g_n *une suite de* G *tendant vers* δ *que nous pouvons écrire* $k_n \Pi_A(g_n) k'_n$, *alors* $\Delta[\Pi_A(g_n)]$ *tend vers* $+\infty$ *et, quitte à extraire une sous-suite,* k_n *converge vers* k. *Nous obtenons si* f *est invariante à droite par* K :

$$\lim_{n \to \infty} \Delta(\Pi_A(g_n)) \varepsilon_{g_n} \star U(f) = \varepsilon_k \star \nu_0(f) = \frac{1}{|\gamma|} \varepsilon_{kk_0} \star (\Delta^{-1} \lambda_G)(f),$$

où λ_G *est une mesure de Haar adéquate sur* G (*cf.* 7.9) *et* $\gamma = \int_G \operatorname{Log} \Delta(g)(\Delta^{-1}\mu)(dg)$.

De l'égalité $\int_K \Delta^{-1}(kg)\, d\lambda_K(k) = 1$ pour tout g de G, il résulte que $\lambda_K \star (\Delta^{-1}\lambda_G) = \lambda_G$ et par suite si f est biinvariante par K, nous retrouvons le résultat de P. Bougerol (th. 2 de [7]) :

$$\lim_{g \to \delta} \Delta[\Pi_A(g)]\, \varepsilon_g \star U(f) = \frac{1}{|\gamma|} \lambda_G(f).$$

Ce résultat avait été obtenu par une méthode très différente utilisant l'analyse harmonique non commutative.

7.11. Si μ est une mesure de probabilité biinvariante par K sur un groupe semi-simple tel que A soit de rang 1, nous connaissons grâce à la proposition 7.10 le comportement du noyau de Martin $(\varepsilon_g \star U)/(\varepsilon_g \star U(r))$ pour toute fonction de référence r (*cf.* 5.29). Il résulte alors de [2] que les génératrices extrémales du cône des mesures μ-invariantes sont engendrées par les mesures $\varepsilon_k \star (\Delta^{-1}\lambda_G)$ où $k \in K$. En fait, pour tout élément k_1 du centralisateur M de A dans K, $\varepsilon_{k_1} \star \Delta^{-1}\lambda_G = \Delta^{-1}\lambda_G$ et il suffit donc de considérer les mesures $\varepsilon_k \star (\Delta^{-1}\lambda_G)$ pour k appartenant à la frontière de Furstenberg $B(G) \simeq K/M$ de G. Toute mesure μ-invariante se représente alors (*cf.* [2]) à l'aide de cette classe de mesures. Nous obtenons donc :

7.12. COROLLAIRE. — *Soit* G *un groupe de Lie connexe semi-simple de centre fini et de rang* 1 *et soit* μ *une mesure de probabilité sur* G, *ayant un moment d'ordre* 1 *et biinvariante par* K. *Alors toute fonction* f μ*-harmonique positive s'écrit :*

$$f(g) = \int_{B(G)} \Delta^{-1}(kg)\, d\nu(k),$$

où ν *est une mesure de Radon sur* B(G).

Furstenberg avait prouvé ce résultat dans [25] pour des mesures μ admettant des densités bornées à support compact.

C. Comportement asymptotique des noyaux $\sum_{n \geq 0} r^n \mu^n$

7.13. Dans [8], P. Bougerol fait la remarque pertinente suivante : sur un groupe non moyennable, la quantité $\sup_g \varepsilon_g \star \mu^n(C)$ où C est un compact, décroît exponentiellement lorsque $n \to \infty$; la convergence vers 0 de $\varepsilon_g \star U$ est donc immédiate et il est plus intéressant de considérer le noyau $\varepsilon_g \star \sum_{n \geqq 0} \sigma(\mu)^{-n} \mu^n$ où $\sigma(\mu)$ est la norme spectrale de l'opérateur de convolution par μ sur l'espace des fonctions de carré intégrable pour une mesure de Haar sur G; il prouve alors que ce noyau converge aussi vaguement vers 0. Sur un groupe moyennable $\sigma(\mu)=1$, mais sur un groupe semi-simple $\sigma(\mu)$ est égal au *rayon spectral* ρ de μ c'est-à-dire à l'inverse du rayon de convergence au sens vague de la série de mesure $\sum_{n \geqq 0} r^n \mu^n (r \in \mathbb{R})$. Et on peut se demander pour une marche de type I, quel est le comportement à l'infini des noyaux potentiels $\varepsilon_g \star \sum_{n \geqq 0} r^n \mu^n$ pour $1 < r \leqq \rho^{-1}$.

Y. Guivarc'h a prouvé dans [31] que, sur une certaine classe de groupes contenant en particulier les groupes de la classe $\mathscr{D}$, pour toute mesure de probabilité *irréductible* sur G, le *rayon spectral* ρ de μ est égal à la borne inférieure des scalaires $\int h(g)\, d\mu(g)$ où h décrit l'ensemble des exponentielles de G dans $\mathbb{R}^{+*}$. Par conséquent, sur un groupe de la classe $\mathscr{D}$:

$$\rho = \inf_{t \in \mathbb{R}} \mathrm{F}(t) \qquad \text{où} \qquad \mathrm{F}(t) = \int_{\mathrm{G}} \Delta^t(g)\, d\mu(g).$$

De plus, comme G est non unimodulaire, le noyau $\sum_{n \geqq 0} \rho^{-n} \mu^n$ converge vaguement.

7.14. Définition. — Soit G un groupe LCD et soit μ une mesure de probabilité sur G. La mesure μ sera dite admettre un *moment d'ordre exponentiel* si pour une jauge principale δ sur G, nous avons, pour tout t de $\mathbb{R}$:

$$\int_{\mathrm{G}} e^{t\delta(g)}\, d\mu(g) < \infty.$$

7.15. Proposition. — *Soit* G *un groupe de Lie de la classe* $\mathscr{D}$ *tel que* G/G_0 *soit fini, et* μ *une mesure de probabilité irréductible étalée sur* G *ayant un moment d'ordre exponentiel. Supposons que* $\alpha = \int_{\mathrm{G}} \operatorname{Log} \Delta(g)\, d\mu(g)$ *est positif. Alors si* ρ *désigne le rayon spectral de* μ, *il existe un réel* t_0 *négatif tel que :*

$$\lim_{\substack{\Delta(g) \to +\infty \\ p_{\mathrm{M}}(g) \to z}} \Delta^{t_0}(g^{-1})\, \varepsilon_g \star \sum_{n \geqq 0} \rho^{-n} \mu^n = \Delta^{-t_0}\, \varepsilon_z \star \widehat{m \otimes \lambda_{\mathrm{A}}}.$$

où m *est une mesure de masse infinie sur* M *vérifiant* $\widehat{\Delta^{t_0} \mu} \star m = \rho\, m$.

Preuve. — Puisque $\rho = \inf_{t \in \mathbb{R}} \mathrm{F}(t)$ et puisque μ admet un moment d'ordre exponentiel, ρ est atteint en un point t_0 tel que au point t_0 la tangente au graphe de F soit horizontale. Par suite :

$$\int_{\mathrm{G}} \operatorname{Log} \Delta(g) (\Delta^{t_0} \mu)(dg) = 0.$$

Comme pour tout f de $C_K(G)$:

$$(\star) \qquad \Delta^{t_0}(g^{-1})\varepsilon_g \star \sum_{n \geqq 0} \rho^{-n}\mu^n(f) = \varepsilon_g \star \sum_{n \geqq 0} (\rho^{-1}\Delta^{t_0}\mu)^n(\Delta^{-t_0}f)$$

et comme la mesure $\rho^{-1}\Delta^{t_0}\mu$ est une mesure de probabilité de moment d'ordre exponentiel (donc au moins $2+\varepsilon$) dont la marche associée est récurrente en projection, la proposition découle de 5.38.

Par conséquent si α est positif, $\varepsilon_g \star \sum_{n \geqq 0} \rho^{-n}\mu^n$ converge vaguement vers 0 lorsque $\Delta(g) \to +\infty$ et $p_M(g)$ converge; bien sûr si α est nul, la convergence a lieu vers une mesure non nulle et si α est négatif la famille $\varepsilon_g \star \sum_{n \geqq 0} \rho^{-n}\mu^n$ n'est pas vaguement relativement compacte.

Si la marche de loi μ admet une densité bornée à support, nous pouvons étudier, de manière analogue à 7.5, le comportement de $\varepsilon_g \star \sum_{n \geqq 0} \rho^{-n}\mu^n$ lorsque $\Delta(g) \to 0$.

7.16. Proposition. — *Soit* G *un groupe de Lie de la classe* $\mathscr{D}$ *tel que* G/G_0 *soit fini et* μ *une mesure de probabilité irréductible sur* G *ayant une densité bornée à support compact. Si* ρ *est le rayon spectral de* μ, *il existe un réel* t_0 *tel que* $\int_G \Delta^{t_0}(g)\,d\mu(g) = \rho^{-1}$. *Alors nous avons :*

$$\lim_{\substack{\Delta(g) \to 0 \\ p_M(g^{-1}) \to z}} \Delta^{1+t_0}(g^{-1})\varepsilon_g \star \sum_{n \geqq 0} \rho^{-n}\mu^n = c_z \Delta^{-t_0} m_D,$$

où m_D *est une mesure de Haar à droite sur* G *et* c_z *un réel non nul dépendant de* z.

Donc $\varepsilon_g \star \sum_{n \geqq 0} \rho^{-n}\mu^n$ *converge vaguement vers* 0 *dans cette direction si et seulement si* $1+t_0$ *est positif, ce qui est toujours le cas lorsque* $\int_G \operatorname{Log}\Delta(g)\,d\mu(g)$ *est négatif ou nul.*

7.17. *Remarque.* — Lorsque $\int_G \operatorname{Log}\Delta(g)\,d\mu(g)$ est positif, t_0 est négatif et par suite $1+t_0$ peut prendre toutes les valeurs de $-\infty$ à $+1$. Et selon les cas la suite $\varepsilon_g \star \sum_{n \geqq 0} \rho^{-n}\mu^n$ converge ou diverge. Mais remarquons que si nous considérons une mesure μ K-invariante à gauche sur un groupe semi-simple, nous avons toujours $\mu(\Delta^{-1}) = 1$ et par conséquent si μ_1 désigne la projection de μ (*cf.* 7.7) sur le groupe NA de la classe $\mathscr{D}$, le réel t_0 associé à μ_1 est supérieur à -1 (il est en fait égal à $-1/2$ d'après [8]), et donc $\varepsilon_g \star \sum_{n \geqq 0} \rho^{-n}\mu_1^n$ converge vaguement vers 0 lorsque $\Delta(g) \to 0$ et $p_N(g^{-1})$ converge. Il en est donc de même de $\varepsilon_g \star \sum_{n \geqq 0} \rho^{-n}\mu^n$ ce qui est naturel vu le résultat rappelé ci-dessus de P. Bougerol.

Preuve. — D'après la relation $(\star)$ de 7.15, il s'agit d'étudier $\varepsilon_g \star \sum_{n \geqq 0} \mu'^n$ avec $\mu' = \rho^{-1}\Delta^{t_0}\mu$ et d'après la proposition 7.5 :

$$\lim_{\substack{\Delta(g) \to 0 \\ p_M(g^{-1}) \to z}} \Delta(g^{-1})\varepsilon_g \star \sum_{n \geqq 0} \mu'^n = c_z m_D,$$

puisque $\int_G \operatorname{Log}\Delta(g)\,\mu'(dg)$ est nul. Il est alors aisé de conclure.

APPENDICE

APPENDICE A 1

Toute marche définie sur le groupe D_1 des translations et symétries de $\mathbb{R}$ est de type I.

Preuve. — Le groupe D_1 peut être représenté par le produit semi-direct $\mathbb{R} \times \{-1, +1\}$ où le produit de deux éléments (b_1, ε_1) et (b_2, ε_2) de $\mathbb{R} \times \{-1, +1\}$ est défini par :

$$(b_1, \varepsilon_1)(b_2, \varepsilon_2) = (b_1 + \varepsilon_1 b_2, \varepsilon_1 \varepsilon_2).$$

On désignera par H le sous-groupe isomorphe à $\mathbb{R}$ des translations de D_1 et si g est un élément de D_1, on notera $b(g)$ sa partie translation.

Soit $(\Omega, (X_n)_{n \in \mathbb{N}}, (P_g)_{g \in G}$ une marche de loi μ transiente sur G. Si T_n désigne le n-ième temps de retour de la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans H, le triplet $(\Omega, (X_{T_n})_{n \in \mathbb{N}}, (P_g)_{g \in H})$ est une marche aléatoire sur H de loi μ_0 égale à $P_{T_1}(e, .)$.

Il découle des relations $H.H^c = H^c.H = H^c$ et $H^c.H^c = H$ que :

$$\mu_0 = \mu_H + \sum_{n=0}^{\infty} \mu_{H^c} \star \mu_H^n \star \mu_{H^c},$$

où μ_H et μ_{H^c} sont les restrictions de μ à H et H^c. Comme la marche de loi μ est supposée adaptée, la mesure μ_{H^c} est non nulle.

Les noyaux potentiels des marches de loi μ et de loi μ_0 coïncident sur H. La marche de loi μ_0 est donc transiente sur H et nous allons vérifier qu'elle est de type I. Il est montré dans [15] par une méthode utilisant d'ailleurs la marche induite sur H que si la marche de loi μ sur D_1 est transiente, alors l'intégrale $\int_{D_1} |b(g)| \, d\mu(g)$ est infinie. De l'inégalité $\mu_0 \geqq \mu_H + \mu_{H^c} \star \mu_{H^c}$, il découle que l'intégrale $\int_H |b(g)| \, d\mu_0(g)$ est aussi infinie.

Or b définit un isomorphisme de H sur $\mathbb{R}$ et nous savons que toute marche transiente sur $\mathbb{R}$ et n'ayant pas de moment d'ordre 1 est de type I (*cf.* chap. 5, th. 3.8 de [45]). De ce fait, la marche de loi μ_0 est de type I et donc, pour tout compact K de $\mathbb{R}$:

$$\varepsilon_{(b, 1)} \star \sum_{n \geqq 0} \mu_0^n (K \times \{1\}) \to 0,$$

lorsque b tend vers le point à l'infini de $\mathbb{R}$.

Par suite, puisque les noyaux potentiels associés à μ et μ_1 coïncident sur H :

$$(\star) \qquad \varepsilon_{(b, 1)} \star U(K \times \{1\})$$

converge vers 0 lorsque b tend vers l'infini dans $\mathbb{R}$.

Considérons alors une suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ quelconque de $\mathbb{R}$ tendant vers l'infini et telle que les suites $\varepsilon_{(b_n, 1)} \star U$ et $\varepsilon_{(b_n, -1)} \star U$ convergent vaguement vers deux mesures que nous noterons ν_1 et ν_{-1}.

Si f est un élément de $C_K^+(D_1)$, posons pour tout x de $\mathbb{R}$ et tout $t\in\{-1, +1\}$:

$$\varphi(x, t)=\lim_{n\to\infty} \varepsilon_{(x, 1)}\star\varepsilon_{(b_n, t)}\star U(f)=\varepsilon_{(x, 1)}\star\nu_t(f).$$

Comme H est abélien, nous avons de plus :

$$\varphi(x, t)=\lim_{n\to\infty} \varepsilon_{(b_n, 1)(x, t)}\star U(f).$$

Cette fonction φ est donc continue bornée μ-harmonique.

Supposons que le support de f est dans H, alors d'après ($\star$), pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$\varphi(x, 1)=\lim_{n\to\infty} \varepsilon_{(b_n+x, 1)}\star U(f)=0.$$

Par suite l'harmonicité de φ nous permet d'écrire que :

$$(\star\star)\qquad \int\varphi(x+b(g), -1)\, d\mu_{H^c}(g)=0$$

et :

$$\int\varphi(x-b(g), -1)\, d\mu_H(g)=\varphi(x, -1).$$

Il en résulte que la fonction φ_1 définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi_1(x)=\varphi(x, -1)$ est harmonique bornée relativement à la probabilité adaptée $b(\mu_{H^c}+\hat{\mu}_H)$. Comme elle est de plus continue, elle est constante d'après le théorème de Choquet-Deny [13]. La mesure μ_{H^c} étant non nulle, ($\star\star$) entraîne que φ_1 est nulle.

Si le support de f est inclus dans H^c, alors la fonction $\varphi(x, -1)$ est nulle pour tout x de $\mathbb{R}$ et par un raisonnement analogue φ est nulle.

Par suite, les mesures ν_1 et ν_{-1} sont nulles et nous en déduisons que lorsque b tend vers le point à l'infini de $\mathbb{R}$, $\varepsilon_{(b, 1)}\star U$ et $\varepsilon_{(b, -1)}\star U$ convergent vaguement vers 0. La marche de loi μ sur D_1 est donc de type I.

APPENDICE A 2

Soit M un groupe nilpotent connexe simplement connexe M de rang r que l'on identifie à son algèbre de Lie. Il existe alors une norme $\|\ \|$ sur l'espace vectoriel M et un polynôme Q_r à coefficients réels de degré r et sans terme constant tel que :

$$\forall p\in\mathbb{N},\quad \forall(y_1, \ldots, y_p)\in M^p,\qquad \|y_1\ldots y_p\|\leqq Q_r[\|y_1\|+\ldots+\|y_p\|].$$

Remarquons que le polynôme Q_r ne dépend pas du *nombre p* d'éléments de M dont on fait le produit et c'est ce qui fait l'intérêt de ce résultat. Ce type d'inégalité est classqiue lorsque $p=2$ (*cf.* X.3 de [37]) mais en utilisant la formule de Campbell-Haussdorf pour un produit de p éléments, nous pouvons obtenir l'inégalité ci-dessus.

Preuve. — Supposons que M soit un espace vectoriel de dimension m. Alors il existe (*cf.* X.3 de [37]) une base $(e_1, \ldots, e_m)$ de M telle que $[e_i, e_j] = \sum_k \alpha_{ijk} e_k$ et $|\alpha_{ijk}| \leqq m^{-3/2}$. Si $\| \ \|$ désigne la norme euclidienne sur M relativement à cette base, nous avons, pour tout (u, v) de $M \times M$, $\|[u, v]\| \leqq \|u\| . \|v\|$.

Le produit des éléments $y_1, \ldots, y_p$ du groupe M identifié à son algèbre de Lie est alors donné par la formule de Campbell-Haussdorf. Si nous suivons les méthodes de ([37], chap. X.2), nous en déduisons que les coefficients de cette formule peuvent être définis de la manière suivante :

Soit $u_1, \ldots, u_p$ p éléments et soit B l'algèbre libre sur $\mathbb{R}$ à p générateurs $u_1, \ldots, u_p$. Définissons les séries formelles :

$$\exp u = \sum_{k \geqq 0} \frac{u^k}{k!} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Log}(1+u) = \sum_{n>0} (-1)^{n+1} n^{-1} u^n$$

et considérons la série formelle suivante :

$$\begin{aligned} A(u_1, \ldots, u_p) &= \operatorname{Log}(\exp u_1 \ldots \exp u_p) \\ &= \sum_{n>0} (-1)^{n+1} n^{-1} [(\exp u_1 \ldots \exp u_p - 1)]^n = \sum_{a \in \mathscr{A}} c_a \tau_a(u_1, \ldots, u_p), \end{aligned}$$

où $\mathscr{A}$ désigne l'ensemble des suites finies d'éléments de $\mathbb{N}^p - \{0\}$, et si $a = ((n_1^1, \ldots, n_p^1), \ldots, (n_1^k, \ldots, n_p^k))$ est un élément de $\mathscr{A}$, c_a est un réel positif et :

$$\tau_a(u_1, \ldots, u_p) = u_1^{n_1^1} \ldots u_p^{n_p^1} \ldots u_1^{n_1^j} \ldots u_p^{n_p^j} \ldots u_1^{n_1^k} \ldots u_p^{n_p^k}.$$

Alors dans M le produit $y_1 \ldots y_p$ peut être défini par :

$$y_1 \ldots y_p = \sum_{a \in \mathscr{A}} c_a \Pi_a(u_1, \ldots, u_p),$$

où si :

$$a = ((n_1^1, \ldots, n_p^1), \ldots, (n_1^k, \ldots, n_p^k)) \text{ et si } i = \sup\{j, n_j^k \neq 0\}$$

$$\Pi_a(u_1, \ldots, u_p) = d_a (ad y_1)^{n_1^1} \ldots (ad y_p)^{n_p^1} \ldots (ad y_1)^{n_1^k} \ldots (ad y_i)^{n_i^k - 1}(y_i)$$

avec :

$$d_a = \left(\sum_{j=1}^{p} \sum_{s=1}^{k} n_j^s \right)^{-1}.$$

On remarque que si $n_i^k \neq 1$, $\Pi_a(u_1, \ldots, u_p)$ est nul.

De plus, comme M est nilpotent la série formelle $\sum_{a \in \mathscr{A}} c_a \Pi_a(u_1, \ldots, u_p)$ n'a qu'un nombre fini de termes non nuls et est donc bien définie sur M. En effet, dès que $\sum_{j=1}^{p} \sum_{s=1}^{k} n_j^s$ est supérieur à r, $\Pi_a(u_1, \ldots, u_p) = 0$.

Mais de la relation :

$$\|\operatorname{ad}(y_i)(y_j)\| = \|[y_i, y_j]\| \leqq \|y_i\| . \|y_j\|,$$

il découle que :

$$\| \Pi_a(u_1, \ldots, u_p) \|\| \leqq d_a \| y_1 \|^{n_1^1} \ldots \| y_p \|^{n_p^1} \ldots \| y_1 \|^{n_1^k} \ldots \| y_p \|^{n_p^k}$$

et de la forme du développement de $A(u_1, \ldots, u_p)$, nous déduisons, puisque $d_a \leqq 1$, que :

$$\| y_1 \ldots y_p \| \leqq \sum_{n>0} n^{-1} ((\exp \| y_1 \| \ldots \exp \| y_p \|) - 1)^n$$

$$\leqq \sum_{n>0} n^{-1} (\exp (\| y_1 \| + \ldots + \| y_p \|) - 1)^n,$$

où ici l'exponentielle a son sens usuel sur $\mathbb{R}$.

Considérons la série formelle $H(Y) = \sum_{n>0} n^{-1} (\exp Y - 1)^n$, nous pouvons l'écrire sous la forme $H(Y) = \sum_{k>0} d_k Y^k$ et posons :

$$Q_r(Y) = \sum_{k=1}^{r} d_k Y^k.$$

Comme le groupe M est nilpotent de rang r, nous savons que $\Pi_a(u_1, \ldots, u_p)$ est nul dès que $\sum_{j=1}^{p} \sum_{s=1}^{k} n_j^s$ est supérieur à r et il s'ensuit donc qu'en fait :

$$\| y_1 \ldots y_p \| \leqq Q_r [\| y_1 \| + \ldots + \| y_p \|].$$

Le polynôme Q_r est de degré r, sans terme constant et ne dépend pas du nombre p d'éléments dont on fait le produit. Il dépend seulement du rang r de M.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. AZENCOTT, *Espaces de Poisson des groupes localement compacts* (*Lecture notes*, Springer Verlag n° 148, 1970).

[2] R. AZENCOTT et P. CARTIER, *Martin Boundaries of Random Walks on Locally Compact Groups* (*Proceedings of the 6th Berkeley Symposium on Math. Stat. and Prob. III*, p. 87-129).

[3] R. AZENCOTT et E. WILSON, *Homogeneous Manifolds with Negative Curvature I* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 215, 1976, p. 323-362).

[4] C. BERG. et J. P. R. CHRISTENSEN, *Sur la norme des opérateurs de convolution* (*Inv. Math.*, vol. 23, 1974, p. 173-178).

[5] L. BIRGE et A. RAUGI, *Fonctions harmoniques sur les groupes moyennables* (*Comptes rendus*, t. 278, 1974, p. 1287).

[6] BLACKWELL, *A Renewal Theorem* (*Duke Math. J.*, vol. 15, 1948, p. 145-150).

[7] P. BOUGEROL, *Comportement asymptotique des puissances de convolution d'une probabilité sur un espace symétrique* (*Astérisque*, 74, p. 29-45, Société Math. de France, 1980).

[8] P. BOUGEROL, *Théorème central limite local sur certains groupes de Lie* (à paraître).

[9] P. BOUGEROL et L. ELIE, *Sur une propriété de compacité du noyau potentiel associé à une probabilité sur un groupe*, Z.W., 52, 1980, p. 59-68.

[10] N. BOURBAKI, *Groupes et algèbres de Lie*, Chap. I, II, III, Herman, Paris, 1960.

[11] A. BRUNEL, P. CREPEL, Y. GUIVARC'H et M. KEANE, *Marches aléatoires récurrentes sur les groupes localement compacts* (*Comptes rendus*, t. 275, 1972, p. 1359-1361).

[12] A. BRUNEL et D. REVUZ, *Sur la théorie du renouvellement pour les groupes non abéliens* (*Israël J. Math.*, vol. 20, n° 1, 1975, p. 46).

[13] G. CHOQUET et J. DENY, *Sur l'équation de convolution* $\mu=\mu\star\sigma$ (*Comptes rendus*, 250, 1960, p. 799-801).

[14] K. L. CHUNG, *On the Renewal Theorem in Higher Dimensions* (*Skand. Aktuarietidskrift*, vol. 35, 1952, p. 188-194).

[15] P. CREPEL, *Récurrence des marches aléatoires sur les groupes de Lie* (*Lecture notes*, Springer Verlag, n° 532, 1976, p. 50-69).

[16] Y. DERRIENNIC et Y. GUIVARC'H, *Théorème de renouvellement pour les groupes non moyennables* (*Comptes rendus*, t. 277, 1973, p. 613-615).

[17] L. ÉLIE, *Étude de renouvellement pour certains groupes résolubles* (*Comptes rendus*, t. 280, 1975, p. 1149); *Renouvellement sur les groupes moyennables* (*Comptes rendus*, t. 284, 1977, p. 555).

[18] L. ÉLIE, *Étude du renouvellement sur le groupe affine de la droite réelle* (*Ann. Scient.*, Université de Clermont, vol. 65, 1977, p. 47-62).

[19] L. ÉLIE, *Quelques propriétés du noyau potentiel associé à une marche aléatoire* (*Proc. Oberwolfach. Lecture notes*, vol. 706, 1979, p. 88-95).

[20] L. ÉLIE, *Fonctions harmoniques positives sur le groupe affine* (*Proc. Oberwolfach. Lecture notes*, vol. 706, 1979, p. 96-110).

[21] L. ÉLIE et A. RAUGI, *Fonctions harmoniques sur certains groupes résolubles* (*Comptes rendus*, t. 280, 1975, p. 377).

[22] W. FELLER, *A Simple Proof for Renewal Theorems* (*Commun. Pure Appl. Math.*, vol. 14, 1961, p. 285-293).

[23] W. FELLER, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, vol. 2, Wiley, New York, 1966.

[24] H. FREUDENTHAL, *La structure des groupes à deux bouts et des groupes triplement transitifs* (*Akad. Wetensch. Indag. Math.*, vol. 13, 1951, p. 288-294).

[25] H. FURSTENBERG, *A Poisson Formula for Semi-Simple Lie Groups* (*Ann. Math.*, vol. 77, (2), 1963, p. 335-386).

[26] H. FURSTENBERG, *Translation Invariant Cones of Functions on Semi-Simple Lie Groups* (*Bull. Ann. Math. Soc.*, vol. 71, (2), 1965, p. 271-326).

[27] A. GRINCEVICIUS, *A Central Limit Theorem for the Group of Linear Transformations of the Real Line* (*Th. of Proba.*, vol. XIX, n° 1, 1974, p. 163-168).

[28] A. GRINCEVICUS, *Théorèmes limites pour les produits de transformations linéaires de la droite* [*Lith. Math. J.*, vol. 15, 1975, p. 568-579 (en russe)].

[29] H. HENNION et B. ROYNETTE, *Un théorème de dichotomie pour une marche aléatoire sur un espace homogène* (*Astérisque*, vol. 74, Soc. Math. de France, 1980, p. 99-122).

[30] Y. GUIVARC'H, *Croissance polynomiale et périodes des fonctions harmoniques* (*Bull. Soc. math. Fr.* vol. 101, 1973, p. 333-379).

[31] Y. GUIVARC'H, *Sur la loi des grands nombres et le rayon spectral d'une marche aléatoire* [*Astérisque*, vol. 74, Soc. Math. de France 1980, p. 47-98).

[32] Y. GUIVARC'H, *Théorèmes quotients* (*Astérisque*, vol. 74, Soc. Math. de France, 1980, p. 15-28).

[33] Y. GUIVARC'H et M. KEANE, *Un théorème de renouvellement pour les groupes nilpotents* (*Astérique*, vol. 4, Soc. Math. de France, 1973).

[34] Y. GUIVARC'H, M. KEANE et B. ROYNETTE, *Marche aléatoire sur un groupe de Lie* (*Lecture notes*, Springer Verlag, n° 264, 1977).

[35] S. HELGASON, *Lie groups and Symmetric Spaces*, Battelle Recontres-Benjamin, 1968.

[36] E. HEWITT et K. A. ROSS, *Abstract Harmonic analysis I*, Springer Berlin, 1963.

[37] G. HOCHSCHILD, *The Structure of Lie Groups*, Holden. Day. Inc. San-Francisco, U.S.A., 1965.

[38] K. H. HOFMANN et P. MOSTERT, *Splitting in Topological Groups* (*Memoirs of Amer. Math. Soc.*, vol. 43, 1963).

[39] K. IWASAWA, *On Some Types of Topological Groups* (*Ann. of Math.*, vol. 50, 1949, p. 507-558).

[40] H. KESTEN, F. SPITZER, *Random Walk on Countably Infinite Abelian Groups* (*Acta. Math.*, vol. 114, 1965, p. 237-265).

[41] D. MONTGOMERY et L. ZIPPIN, *Topological Transformation Groups*, Interscience Publishers, New York, 1955.

[42] S. C. PORT et C. J. STONE, *Potential Theory of Random Walks on Abelian Groups* (*Acta Math.*, vol. 122, 1969, p. 19-114).

[43] A. RAUGI, *Fonctions harmoniques et théorèmes limites pour les marches aléatoires sur les groupes* (*Bull. Soc. math. Fr.*, Mémoire, vol. 54, n° 127, p. 1977).
[44] A. RAUGI, *Périodes des fonctions harmoniques bornées* (à paraître).
[45] D. REVUZ, *Markov Chains*, North-Holland Mathematical Library, vol. 11, 1975.
[46] B. ROYNETTE, *Marches aléatoires sur le groupe des déplacements de* $\mathbb{R}^d$, ZW 31, 1974, p. 25-34.
[47] B. ROYNETTE et M. SUEUR, *Marche aléatoire sur un groupe nilpotent.* ZW 30, 1974, p. 129-138.
[48] Séminaire Sophus Lie, Paris, exposé 9, F. Bruhat (1954-1955).
[49] F. SPITZER, *Principle of Random Walks*, Van Nostrand, New York, 1964.
[50] C. SUNYACH, *Sur la théorie du renouvellement pour les groupes unimodulaires* (*Comptes rendus*, 284, 1977).
[51] C. SUNYACH, *Capacité et théorie du renouvellement* (à paraître).
[52] G. WARNER, *Harmonic Analysis on Semi-Simple Lie Groups*, t. I et II, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1972).

(Manuscrit reçu le 31 août 1981
révisé le 5 octobre 1981.)

Laure ÉLIE
Université de Paris-VII,
U.E.R. de Mathématiques,
Tour 45/55,
75251 Paris Cedex 05.