

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

J.-Y. MÉRINDOL

**Les singularités simples elliptiques, leurs déformations, les surfaces de del Pezzo et les transformations quadratiques**

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 4<sup>e</sup> série*, tome 15, n° 1 (1982), p. 17-44

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1982\\_4\\_15\\_1\\_17\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1982_4_15_1_17_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# LES SINGULARITÉS SIMPLES ELLIPTIQUES, LEURS DÉFORMATIONS, LES SURFACES DE DEL PEZZO ET LES TRANSFORMATIONS QUADRATIQUES

PAR J.-Y. MÉRINDOL

---

## Introduction

On appelle classiquement surfaces de Del Pezzo les surfaces  $X$  projectives lisses de faisceau anticanonique ample. On note  $r = 9 - d = K_X^2$ . Del Pezzo a découvert en 1887 que ces surfaces existent pour  $1 \leq r \leq 9$  et (sauf l'exception de  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ ) ont une représentation plane *via* les cubiques passant par  $d$  points en position générale (voir 1.2 et 1.3). Pour  $0 \leq d \leq 6$ , le diviseur anticanonique est très ample et plonge  $X$  comme surface de degré  $r$  dans  $\mathbb{P}^r$ . Dès cette époque de nombreux auteurs ont étudié les surfaces presque de Del Pezzo qui ont des singularités rationnelles (cf. 1.3). Plus tard Coxeter et Du Val ont complètement déterminé les singularités que l'on peut ainsi rencontrer et ce d'une façon très élégante en utilisant les groupes de symétrie de certains polytopes réguliers (c'est-à-dire en termes plus modernes en utilisant les systèmes de racines et les groupes de Weyl associés).

L'idée d'utiliser ces surfaces pour étudier les déformations verselles des points doubles rationnels  $E_6$ ,  $E_7$  ou  $E_8$  se retrouve dans Tjurina [15] (cf. aussi Pinkham [11]). Pinkham [14] l'applique aussi au cas du cône sur une courbe elliptique.

Dans cet article on donne une description géométrique de la déformation verselle de ce cône en utilisant les surfaces de (ou presque de) Del Pezzo. Le groupe de Picard d'une telle surface (ou de sa résolution) est un  $\mathbb{Z}$  module libre de rang  $d+1$  muni d'une forme quadratique (la forme intersection) sur lequel le groupe de Weyl d'un système de racines agit. Cette situation algébrique se traduit très naturellement en des propriétés géométriques d'une variété abélienne  $H$  (voir 2.1), d'un faisceau inversible  $\mathcal{L}$  sur  $H$  (voir 3) et du groupe de Crémona du plan (voir 2.2) qui agit sur  $H$  grâce à une inversion plane.

Il est à noter que Carlson [2], trouve aussi la variété abélienne  $H$  comme variété classifiant des extensions de structure de Hodge mixte. Il faut aussi signaler les résultats obtenus par Looijenga par une méthode différente (cf. [8]) et le travail de Knörrer sur les singularités  $\tilde{D}_n$  qui utilise une méthode mixte entre celles de Looijenga et celles exposées ici.

*Remarque.* — Le cas des points doubles rationnels se traite de la même façon que le cas du cône sur une courbe elliptique  $E$  en remplaçant  $E$  par une cissoïde plane et la jacobienne de  $E$  par la jacobienne généralisée de cette cissoïde. On retrouve alors la construction de Tjurina.

Ce travail n'aurait jamais vu le jour sans les conseils et encouragements de H. Pinkham que je tiens à remercier.

NOTATION. — On utilisera les notations de Bourbaki pour les groupes de Weyl et les systèmes de racines. Bien qu'une partie des résultats soit valable en toute caractéristique, on se place sur le corps  $\mathbb{C}$ .  $E$  dénote une courbe elliptique, ce qui signifie ici une courbe lisse de genre 1. On confondra parfois faisceau inversible et diviseur. Si  $D$  est un diviseur de degré positif sur  $E$ , on notera  $j_D$  le morphisme associé à  $D$  de  $E$  dans  $\mathbb{P}(H^0(E, D))$ . Si  $\mathcal{S}$  est un faisceau localement libre sur une variété  $X$ , on note  $V(\mathcal{S})$  le fibré vectoriel  $\text{Spec}_X(\bigoplus_{n \geq 0} S^n \mathcal{S})$  et  $\mathbb{P}(\mathcal{S}) = \text{Proj}_X(\bigoplus_{n \geq 0} S^n \mathcal{S})$  le fibré projectif correspondant (comme toujours  $S^n$  indique le produit symétrique). le signe ■ indique la fin d'une démonstration ou son absence.

## 1. Rappels sur les surfaces de Del Pezzo

Les références pour cette partie sont Manin [9] ou les exposés de Demazure au séminaire de l'École Polytechnique [4].

DÉFINITION 1.1. — On dit qu'une surface lisse  $S$  est une surface de Del Pezzo si son diviseur anticanonique  $-K_S$  est ample. On dit que  $S$  est presque de Del Pezzo si le diviseur anticanonique est presque ample, c'est-à-dire si une puissance assez grande de ce diviseur définit un morphisme birationnel de  $S$  sur une surface  $S'$ . La dimension du système linéaire  $-K_S$  s'appelle le degré de  $S$  et est notée  $r$ . La surface  $S'$  qui est isomorphe à  $\text{Proj} \bigoplus_{k \geq 0} H^0(S, -k \cdot K_S)$  s'appelle le modèle anticanonique de  $S$ .

THÉORÈME 1.2. — *Les surfaces de Del Pezzo existent pour  $1 \leq r \leq 9$ . Elles sont rationnelles, et outre le cas de  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ , elles s'obtiennent en éclatant  $9 - r$  points en position générale dans un plan projectif. « En position générale » signifie que :*

- (i) ces points sont tous distincts;
- (ii) trois quelconques de ces points ne sont pas alignés;
- (iii) six quelconques de ces points ne sont pas sur une conique;
- (iv) si  $r = 1$ , il n'existe pas de cubique singulière en un des points et passant par les sept autres.

Pour  $r \geq 3$ , le diviseur anticanonique de  $S$  est très ample et plonge  $S$  comme surface de degré  $r$  dans  $\mathbb{P}^r$ . De plus cette surface est projectivement normale dans  $\mathbb{P}^r$  et toutes les surfaces projectivement normales lisses et de degré  $r$  dans  $\mathbb{P}^r$  sont de Del Pezzo. Pour  $r = 2$  ou 1,  $-K_S$  n'est plus ample. L'algèbre  $\bigoplus_{k \geq 0} H^0(S, -k \cdot K_S)$  n'est plus engendrée par ses éléments de degré 1; mais par ceux de degré  $\leq 2$  pour  $r = 2$  et ceux de degré  $\leq 3$  pour  $r = 1$ .

Ce théorème est connu depuis fort longtemps. Pour avoir des références modernes on peut voir Manin [9] ou Nagata pour la deuxième partie. La référence essentielle pour le théorème suivant est [4].

**THÉORÈME 1.3.** — *Les surfaces presque de Del Pezzo n'existent aussi que pour  $1 \leq r \leq 9$ . Elles sont rationnelles. Il s'agit de :* •  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  :

• *La surface réglée  $F_2$  sur  $\mathbb{P}^1$ . Son modèle anticanonique est le plongement de Véronèse du cône quadratique de  $\mathbb{P}^3$ .*

• *Les surfaces obtenues en éclatant des « points » d'un plan projectif en position presque générale. C'est-à-dire on effectue une suite de  $d=9-r$  éclatements :  $S \rightarrow S_{8-r} \rightarrow \dots \rightarrow S_1 \rightarrow S_0 = \mathbb{P}^2$  en des points  $p_i \in S_{i-1}$  tels qu'il existe une cubique lisse et irréductible de  $S_0 = \mathbb{P}^2$  dont la transformée stricte dans  $S_{i-1}$  passe par  $p_i$ . Pour  $r \geq 3$ , les modèles anticanoniques sont les surfaces projectivement normales de degré  $r$  dans  $\mathbb{P}^r$  ayant au plus des points singuliers rationnels. Pour  $r=2$ ; resp.  $r=1$ , on obtient comme modèles anticanoniques des hypersurfaces projectivement Cohen-Macaulay dans un espace projectif à poids  $\mathbb{P}(x_1, x_2, x_3, x_4)$  où  $x_1, x_2$  et  $x_3$  sont de degré 1 et  $x_4$  est de degré 2; resp.  $x_1, x_2$  sont de degré 1,  $x_3$  de degré 2 et  $x_4$  de degré 3. Les modèles anticanoniques ont encore comme singularités au plus des points doubles rationnels.*

Pour la Preuve et d'autres descriptions de la position presque générale on renvoie à [4] (théorème 1 de la partie III). ■

Intéressons-nous maintenant au groupe de Picard d'une telle surface. A partir de maintenant nous éliminons les cas où  $S = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ ,  $S = F_2$  cas que nous traiterons à part dans le paragraphe 8.

**DÉFINITION 1.4.** — Soit  $P$  le  $\mathbb{Z}$  module engendré par une base  $e_0, e_1, \dots, e_d$  avec  $d=9-r$  et  $(\cdot, \cdot)$  ou encore  $\cdot$  la forme quadratique définie par  $-(e_0)^2 = e_1^2 = \dots = e_d^2 = -1$  et  $e_i \cdot e_j = 0$  pour  $i \neq j$ . On note  $w$  l'élément  $-3e_0 + e_1 + \dots + e_d$  et  $Q$  l'orthogonal de  $w$  dans  $P$ .

**PROPOSITION 1.5.** — *Soit  $S$  une surface presque de Del Pezzo obtenue en éclatant  $d$  points de  $\mathbb{P}^2$ . Notons  $e_0$  l'image réciproque totale dans  $S$  d'une droite de  $\mathbb{P}^2$  et  $e_1, \dots, e_d$  les classes des diviseurs exceptionnels introduits en éclatant les points. Alors  $\text{Pic}(S)$  est le  $\mathbb{Z}$  module  $P$  engendré par les  $e_i$ . La forme quadratique  $(\cdot, \cdot)$  est la forme intersection sur  $S$  et  $w$  est le diviseur canonique de  $S$ .*

*Preuve.* — Cette proposition s'obtient facilement en sachant que si  $X \xrightarrow{\pi} Y$  est l'éclatement de la surface lisse  $Y$  en un point  $y$  et  $E$  la droite exceptionnelle alors :

- (i)  $\text{Pic}(X) = \pi^* \text{Pic}(Y) \oplus \mathbb{Z} E$ ,  $(E, E) = -1$  et  $\pi^* \text{Pic}(Y)$  est orthogonal à  $E$  dans  $\text{Pic}(X)$ ;
- (ii)  $K_X = \pi^* K_Y + E$ . ■

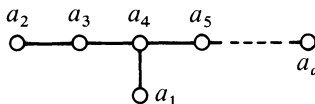
Citons tout de suite la proposition suivante démontrée dans [4] et qui sera utile par la suite :

**PROPOSITION 1.6.** — *Si  $S$  est une surface presque de Del Pezzo, alors pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $H^1(S, \mathcal{O}_S(k \cdot K_S)) = 0$ .* ■

Il existe un rapport entre les systèmes de racines et les surfaces presque de Del Pezzo. Avant de l'étudier plus à fond, voici déjà une proposition qui en donne un aperçu :

PROPOSITION 1.7. — Soit  $R = \{a \in \mathbb{Q} \mid a^2 = -2\}$ ;  $a_i = e_{i-1} - e_i$  ( $i=2, \dots, d$ ) et pour  $d \geq 3$   $a_0 = e_0 - (e_1 + e_2 + e_3)$  :

(i)  $R = \emptyset$  pour  $d=0$  ou  $1$ ,  $R = \{a_2, -a_2\}$  pour  $d=2$ . Pour  $d \geq 3$  les  $a_i$  forment une base de  $\mathbb{Q}$ ,  $a_i \in R$  et la forme d'intersection restreinte à  $\mathbb{Q}$  est donnée par :



$a_i^2 = -2$  et  $a_i \cdot a_j = 0$  sauf si  $a_i$  et  $a_j$  sont liés et alors  $a_i \cdot a_j = 1$ .

(ii) la forme quadratique ( . ) restreinte à  $\mathbb{Q}$  est négative dégénérée pour  $d=9$  et négative non dégénérée pour  $d \leq 8$ . Le groupe  $W$  des automorphismes de  $P$  laissant invariants  $w$  et ( . ) est engendré par les réflexions orthogonales  $s_a(X) = X + (X \cdot a)a$  où  $a \in R$  :

(iii) pour  $d=8, 7, \dots, 3$ ;  $R$  est un système de racines dans  $\mathbb{Q}$ , isomorphe à  $E_8, E_7, E_6, D_5, A_4, A_1 \times A_2$ ,  $W$  est le groupe de Weyl associé et les  $a_i$  ( $1 \leq i \leq d$ ) forment une base de  $\mathbb{Q}$ .

Preuve. — Pour la preuve et bien d'autres propriétés, voir [9] ou [4]. ■

On a une description des singularités du modèle anticanonique d'une surface presque de Del Pezzo à partir de la connaissance des diviseurs de  $\text{Pic}(S)$  qui sont effectifs :

PROPOSITION 1.8. — Soit  $R_e(S)$ , resp.  $R_i(S)$ , l'ensemble des éléments de  $R$  qui représentent des éléments effectifs, resp. effectifs et irréductibles de  $\text{Pic}(S)$ . Alors, pour  $d \geq 3$ ,  $R'(S) = R_e(S) \cup (-R_e(S))$  est une partie close et symétrique de  $R$ ,  $R'(S)$  est un système de racines dans le  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel qu'il engendre et  $R_i(S)$  est une base de ce système de racines. Pour  $d$  quelconque entre 1 et 8, le graphe d'intersection des éléments de  $R_i(S)$  (qui n'est pas forcément connexe), est le graphe dual de la résolution des singularités du modèle anticanonique de  $S$ .

Preuve. — Voir le théorème 2 de la partie III de [4]. ■

## 2. Construction d'une famille de surfaces.

### Le groupe de Cremona et $W$

On sait que l'on obtient les surfaces presque de Del Pezzo en éclatant des points du plan en position presque générale. Ici on va le faire en famille, pour décrire les dégénérescences des surfaces de Del Pezzo. Nous nous limiterons à considérer des ensembles de points se trouvant sur une cubique du plan isomorphe à la courbe elliptique  $E$  fixée une fois pour toutes.

A partir de maintenant on suppose  $d$  compris entre 1 et 8.

2.1. CONSTRUCTION DE LA BASE DE LA DÉFORMATION. — Soit donc  $E$  une courbe elliptique et  $\hat{O}$  un point de  $E$ .  $E$  devient ainsi une variété abélienne d'élément neutre  $\hat{O}$ . Pour indiquer le choix de  $\hat{O}$ , on distingue  $E$  et cette variété en la notant  $\hat{E}$ .

DÉFINITION 2.1.1. — Soit  $\hat{B} = P \otimes \hat{E}$  et  $\hat{H} = Q \otimes \hat{E}$  (voir définition 1.4). Notons  $J_n$  les classes d'équivalence linéaire des diviseurs de degré  $n$  sur  $E$ . On notera  $+$  le morphisme naturel  $J_n \times J_p \rightarrow J_{n+p}$  donné par l'addition des diviseurs. Définissons encore deux variétés :

$$B = J_3 \times E^d \quad \text{et} \quad H = \{(A_0; A_1, \dots, A_d) \in B \mid 3A_0 - (A_1 + \dots + A_d) = (9-d)\hat{O}\}.$$

On a évidemment utilisé dans la définition précédente l'isomorphisme naturel  $E = J_1$ . Nous définissons  $L$  comme étant l'élément  $(9-d)\hat{O}$  de  $J_{9-d}$ .  $\hat{O}$  n'est pas uniquement déterminé par le choix de  $L$  alors que  $H$  l'est. On reviendra sur cette question à la fin du III. La proposition suivante est évidente et fait le lien entre  $\hat{B}$  et  $B$ ,  $\hat{H}$  et  $H$ .

PROPOSITION 2.1.2. — Grâce aux isomorphismes  $\hat{E} \rightarrow E$  et  $\hat{E} \rightarrow J_3$  donnés par  $p \mapsto p + \hat{O}$  et  $p \mapsto -p + 3\hat{O}$  [on a identifié  $\hat{E}$  et  $\text{Pic}_0(E)$ ],  $\hat{B}$  est isomorphe à  $B$  et les deux inclusions  $\hat{H} \subset \hat{B}$  et  $H \subset B$  conduisent à un isomorphisme entre  $\hat{H}$  et  $H$ . ■

2.2. ACTION DE  $W$  SUR  $H$ . — Le groupe  $W$  de la proposition 1.7 agit aussi bien sur  $P$  que sur  $Q$ , par conséquent il opère sur  $\hat{H}$  et sur  $\hat{B}$  et donc sur  $H$  et  $B$ . Un calcul immédiat montre que pour  $2 \leq i \leq d$  [lorsque  $d \geq 2$ ]  $s_{a_i}$  opère sur  $H$  en échangeant  $A_i$  et  $A_{i-1}$  [on a écrit, comme on le fera toujours, tout élément de  $H$  sous la forme  $(A_0; A_1, \dots, A_d)$ ]. Quand à  $s_{a_1}$  [pour  $d \geq 3$ ] il opère comme suit :

$$s_{a_1}(A_0; A_1, \dots, A_d) = (2A_0 - (A_1 + A_2 + A_3); A_0 - (A_2 + A_3), A_0 - (A_1 + A_3), \\ A_0 - (A_1 + A_2), A_4, \dots, A_d).$$

On va interpréter géométriquement l'action de  $s_{a_1}$ .

Remarquons tout d'abord que  $A_0 \in J_3$  détermine un plongement  $j_{A_0}$  de  $E$  dans  $\mathbb{P}(H^0(E, A_0))$ , plan projectif que nous noterons  $X$  pour simplifier l'écriture. Notons aussi  $P_1, \dots, P_d$  les points de  $X$  images de  $A_1, \dots, A_d$  par  $j_{A_0}$ . Supposons provisoirement que  $P_1, P_2$  et  $P_3$  sont tous distincts et non alignés. Soit  $\tau: \tilde{X} \rightarrow X$  la transformation quadratique de  $X$  de centre  $P_1, P_2, P_3$ . La cubique  $j_{A_0}(E)$  est transformée par  $\tau$  en une cubique lisse  $\tilde{E}$  de  $\tilde{X}$ . La restriction de  $\tau$  à  $E$  établit un isomorphisme entre  $\tilde{E}$  et  $E$ . Les droites de  $\tilde{X}$  sont les transformées par  $\tau$  des coniques de  $X$  passant par  $P_1, P_2$  et  $P_3$ . Donc  $\tilde{E} = E$  est plongée dans  $\tilde{X}$  grâce au diviseur  $2A_0 - (A_1 + A_2 + A_3)$ .

D'autre part, la droite passant par  $P_1$  et  $P_2$  est contractée par  $\tau$  en un point de  $\tilde{X}$  se trouvant sur  $\tilde{E}$  et qui est le point :

$$j_{2A_0 - (A_1 + A_2 + A_3)}(A_0 - (A_1 + A_2)); \text{ et de même par permutation circulaire sur les indices } 1, 2 \text{ et } 3.$$

Il est amusant de voir que  $s_{a_1}$  a encore une interprétation analogue lorsque le triangle formé par les points  $P_i$  est dégénéré. Pour définir la « transformation quadratique » dans cette situation il faut tenir compte de la cubique  $j_{A_0}(E)$ .

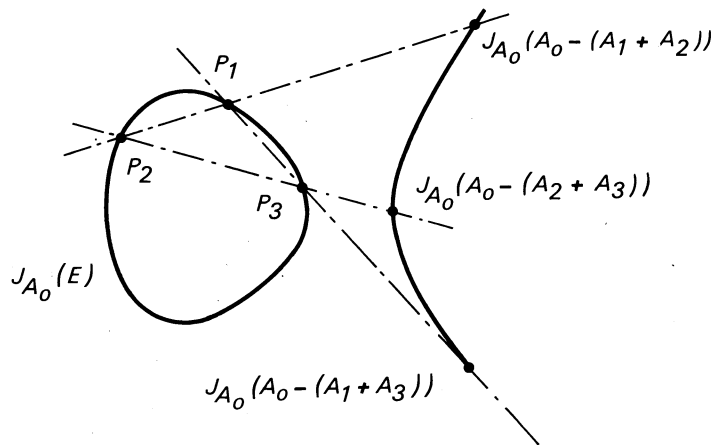


Fig. 1

Par exemple si  $P_1 = P_2$  (resp.  $P_1, P_2$  et  $P_3$  sont alignés), les droites de  $\tilde{X}$  sont les coniques de  $X$  tangentes à  $J_{A_0}(E)$  en  $P_1 = P_2$  (resp. les coniques de  $X$  se décomposant en n'importe quelle droite de  $X$  et la droite  $P_1 P_2 P_3$ , i. e.  $\tilde{X} = X$ ). On laisse au lecteur le soin d'imaginer les cas encore plus particuliers.

(2.2.1) Dans tous les cas, une cubique de  $X$  passant par les  $P_i$  se transforme par  $\tau$  en une cubique de  $\tilde{X}$  passant par les images des points  $A_0 - (A_3 + A_2), A_0 - (A_1 + A_3), A_0 - (A_1 + A_2), A_4, \dots, A_d$  de  $E$ .

2.3.1. *Faisceau de Poincaré sur  $E \times J_3$ .* — Choisissons un faisceau inversible  $f$  sur  $J_3$ . Alors il existe un faisceau inversible  $\mathcal{F}$  et un seul sur  $E \times J_3$  ayant les deux propriétés suivantes :

- (i) si  $r_1 : E \times J_3 \rightarrow E$  et  $r_2 : E \times J_3 \rightarrow J_3$  sont les deux projections, alors pour tout élément  $a$  de  $J_3$ ,  $\mathcal{F}|_{r_2^{-1}(a)} = \mathcal{O}_{r_2^{-1}(a)}(a)$ ;
- (ii) la restriction de  $\mathcal{F}$  à  $\hat{O} \times J_3$  est  $f$ .

On appelle alors ce faisceau  $\mathcal{F}$  faisceau de Poincaré sur  $E \times J_3$ .

*Remarque.* — Dans le cas des courbes, ce faisceau est facile à construire en utilisant la diagonale de  $E \times E$  et un isomorphisme  $E \simeq J_3$ . Pour une variété abélienne quelconque on renvoie à [10], pages 78-82.

Intéressons-nous maintenant au faisceau  $r_{2*}\mathcal{F}$  sur  $J_3$ . Grâce au (i) on sait que la restriction de  $\mathcal{F}$  à toute fibre de  $r_2$  est de degré 3, donc que  $H^1(r_2^{-1}(a), \mathcal{F}|_{r_2^{-1}(a)}) = 0$ . Le théorème de changement de base (voir [10], p. 50-53) prouve que  $r_{2*}\mathcal{F}$  est localement libre de rang 3 sur  $J_3$ . Soit  $\mathbb{P}_{J_3}^2 = \mathbb{P}(r_{2*}\mathcal{F})$  l'espace projectif relatif associé. La surjection de  $\mathcal{O}_{E \times J_3}$ -faisceaux de modules :  $r_2^* r_{2*}\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0$  donne un plongement  $j : E \times J_3 \rightarrow \mathbb{P}_{J_3}^2$  tel que pour tout  $a \in J_3$ ,  $j|_{E \times \{a\}} = j_a$ .

Le choix de  $\mathcal{F}$  dépend donc de  $f$  et est défini « à un fibré inversible venant de  $J_3$  près ». Par contre le fibré projectif  $\mathbb{P}_{J_3}^2$  ne dépend pas de  $f$ , il en est évidemment de même du faisceau des différentielles relatives sur  $J_3$  :  $\omega_{\mathbb{P}_{J_3}^2/J_3}$ .

2.3.2. Soit  $\pi : H \rightarrow J_3$  la projection naturelle et  $p_2 : E \times H \rightarrow H$  la deuxième projection,  $\pi^* r_{2*} \mathcal{S}$  est un faisceau localement libre de rang 3 sur  $H$  que l'on note  $\mathcal{K}$ . Le plongement  $j$  précédent donne un plongement, toujours noté  $j$ , de  $E \times H$  dans  $\mathbb{P}(\mathcal{K})$  [associé à  $p_2^* \mathcal{K} \rightarrow (1 \times \pi)^* \mathcal{S} \rightarrow 0$ ].

Les  $d$  projections évidentes  $J_3 \times E^d \supset H \rightarrow E$  définissent  $d$  sections  $s_1, \dots, s_d : H \rightarrow E \times H$  et donc  $d$  sections  $t_i = j \circ s_i$  de  $\mathbb{P}(\mathcal{K}) \rightarrow H$ . La fibre de  $\mathbb{P}(\mathcal{K})$  au-dessus de  $h = (A_0; A_1, \dots, A_d)$  est  $\mathbb{P}(H^0(E, A_0))$  et  $t_i(h) = j_{A_0}(A_i)$ .

2.3.3. *Construction de la famille  $V \rightarrow H$ .* — Éclatons dans  $\mathbb{P}(\mathcal{K})$  la section  $t_1$ , puis la transformée stricte de  $t_2$ , puis..., jusqu'à la transformée stricte de  $t_d$ . On note  $V \rightarrow H$  la famille ainsi obtenue.

La fibre de  $q$  au-dessus de  $h = (A_0; A_1, \dots, A_d)$  est l'éclaté de  $\mathbb{P}(H^0(E, A_0))$  en les points  $j_{A_0}(A_1), \dots, j_{A_0}(A_d)$ . La construction précédente permet de définir ce que l'on entend par éclater des points confondus de  $\mathbb{P}(H^0(E, A_0))$ . Il s'agit alors d'éclater le long de  $j_{A_0}(E)$ , c'est-à-dire, si  $n$  points sont confondus en un point  $X$  de  $j_{A_0}(E)$ , on éclate en  $X$ , puis dans la direction tangente en  $X$  à  $j_{A_0}(E)$ , ..., puis en la direction d'ordre  $n$  le long de  $j_{A_0}(E)$  en  $X$ .

Soit  $1 : E \times H \rightarrow V$  le plongement déduit de  $j : E \times H \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{K})$ . La restriction de  $1$  à une fibre  $E \times \{h\}$  est simplement obtenue grâce à l'isomorphisme entre  $E$  et la transformée stricte de  $j_{A_0}(E)$  dans  $V_h$ . On notera  $E^\infty$  pour  $1(E \times H)$ .

PROPOSITION 2.3.4. — *Soit  $h = (A_0; A_1, \dots, A_d) \in H$  et  $V_h$  la fibre de  $q$  au-dessus de  $h$ . La courbe  $1(E \times \{h\})$  de  $V_h$  sera notée  $E_h^\infty$ .*

- (i)  $V_h$  est une surface de, ou presque de, Del Pezzo;
- (ii)  $E_h^\infty$  est un diviseur anticanonique de  $V_h$ ;
- (iii) Le faisceau normal de  $E_h^\infty$  dans  $V_h$  est (via l'isomorphisme naturel  $E_h^\infty \simeq E$ )  $\mathcal{O}_E(L)$ .

*Preuve.* — Il suffit d'appliquer les propriétés générales des surfaces algébriques qui avaient été rappelées en 1.5 et la caractérisation en 1.3 de la position presque générale [la cubique lisse et irréductible étant ici la courbe  $j_{A_0}(E)$ ]. Pour le (ii) il suffit de savoir que si  $C$  est une courbe sur une surface  $Y$  et  $x \in C$  un point lisse de  $C$  et de  $Y$ , alors  $\pi^* C = \overline{C} + \overline{E}$  où  $\pi$  est l'éclatement de  $Y$  en  $x$ ,  $\overline{E}$  la courbe exceptionnelle dans cet éclatement et  $\overline{C}$  la transformée stricte de  $C$ .

Pour (iii), on applique  $d$  fois que si le faisceau normal de  $C$  dans  $Y$  est  $\mathcal{O}_C(N)$ , alors via l'isomorphisme naturel  $C = \overline{C}$ , le faisceau normal de  $\overline{C}$  dans l'éclaté de  $Y$  en  $x$  est  $\mathcal{O}_C(N - x)$ . Le faisceau normal de  $j_{A_0}(E)$  dans  $\mathbb{P}(H^0(E, A_0))$  est  $\mathcal{O}_E(3A_0)$  et puisque  $h \in H$ ,  $3A_0 - (A_1 + \dots + A_d) = L$ . ■

### 3. Le faisceau $\mathcal{L}$ et sa classe de Chern

On va maintenant s'intéresser aux modèles anticanoniques des surfaces  $V_h$  fibres de la famille  $q : V \rightarrow H$ . Pour cela on va utiliser le faisceau anticanonique de  $V$ .



## 3.1.

PROPOSITION 3.1.1. — Les faisceaux  $\omega_V^{-1}$ ,  $\mathcal{O}_V(1(E \times H)) = \mathcal{O}_V(E^\infty)$  et  $\omega_{V/H}^{-1}$  (faisceau anticanonique relatif) sont isomorphes.

Preuve. — Le morphisme  $q: V \rightarrow H$  est lisse, d'où la suite exacte :

$$0 \rightarrow q^* \Omega_H^1 \rightarrow \Omega_V^1 \rightarrow \Omega_{V/H}^1 \rightarrow 0.$$

En passant aux puissances extérieures maximales, on en tire un isomorphisme  $\omega_{V/H} \otimes q^* \omega_H = \omega_V$ . Mais  $H$  est une variété abélienne et  $\omega_H = \mathcal{O}_H$ . On en déduit que  $\omega_{V/H} = \omega_V$ .

On a vu en 2.3.4 que  $E^\infty$  découpe sur chaque fibre de  $q$  le faisceau anticanonique de cette fibre. Il existe alors un faisceau inversible  $M$  sur  $H$  tel que  $\omega_V^{-1} = \mathcal{O}_V(E^\infty) \otimes q^* M$  (Seesaw théorème). Il suffit d'appliquer la formule d'adjonction à  $E^\infty \subset V$  pour voir que  $M = \mathcal{O}_H(E^\infty)$  est aussi une variété abélienne). ■

3.2. La restriction de  $\omega_V^{-1}$  à n'importe quelle fibre de  $q$  est le faisceau anticanonique de cette fibre. D'après la proposition 1.6  $H^1(V_h, \omega_{V_h}^{\otimes k})$  est nul pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ . Ainsi grâce au théorème de changement de base (voir [10], corollaire 2, et pages 50 à 53)  $q_* \omega_V^{\otimes k}$  est un faisceau localement libre sur  $H$ . Puisque la dimension de  $H^0(V_h, \omega_{V_h}^{-1})$  est  $10 - d$ , le rang de  $q_* \omega_V^{-1}$  est  $10 - d$ .

DÉFINITION 3.2.1. — Posons  $\mathcal{F}_k = q_* \omega_V^{-\otimes k}$  et  $\mathcal{F} = \bigoplus_{k \geq 0} \mathcal{F}_k$ .

## 3.3

PROPOSITION 3.3.1. — Il existe un faisceau inversible unique  $\mathcal{L}$  sur  $H$  tel que le faisceau  $\mathcal{F}_1 = q_* \omega_V^{-1}$  soit une extension :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_H \rightarrow \mathcal{F}_1 \rightarrow H^0(E, L) \otimes \mathcal{L} \rightarrow 0.$$

Preuve. — De la proposition 3.1.1 on tire les suites exactes :

$$(3.3.2) \quad \begin{cases} 0 \rightarrow \mathcal{O}_V \rightarrow \omega_V^{-1} \rightarrow \mathcal{O}_{E^\infty}(E^\infty) \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow q_* \mathcal{O}_V \rightarrow \mathcal{F}_1 \rightarrow q_* \mathcal{O}_{E^\infty}(E^\infty) \rightarrow R^1 q_* \mathcal{O}_V. \end{cases}$$

Les fibres de  $q$  étant toutes rationnelles  $H^1(V_h, \mathcal{O}_{V_h})$  est nul pour tout  $h \in H$ . Le théorème de changement de base montre que  $R^1 q_* \mathcal{O}_V = 0$ . D'autre part puisque  $V$  est obtenu en éclatant un fibré projectif sur  $H$ ,  $q_* \mathcal{O}_V = \mathcal{O}_H$ . Dans chaque fibre  $V_h$  de  $q$ ,  $E^\infty$  découpe la courbe  $E_h^\infty$  de faisceau normal dans  $V_h$  constant égal à  $\mathcal{O}_E(L)$  (prop. 2.3.4). Notons  $p_1$  (resp.  $p_2$ ) la projection de  $E^\infty = E \times H$  sur  $E$  (resp. sur  $H$ ). Évidemment la restriction de  $q$  à  $E^\infty \subset V$  est  $p_2$ . Le « Seesaw » théorème ([10], page 54) montre qu'il existe un faisceau inversible  $\mathcal{L}$  sur  $H$  tel que  $\mathcal{O}_{E^\infty}(E^\infty) = p_1^* L \otimes p_2^* \mathcal{L}$ . La formule de projection appliquée à  $p_2$  montre que la suite exacte 3.3.2 devient :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_H \rightarrow \mathcal{F}_1 \rightarrow \dot{H}^0(E, L) \otimes \mathcal{L} \rightarrow 0. \quad \blacksquare$$

Remarque 3.3.3. — Le faisceau  $\mathcal{L}$  est (comme  $q: V \rightarrow H$ ) indépendant du choix de  $\mathcal{I}$ .

3.4. Rappelons le résultat bien connu suivant : soient  $Y \subset X$  deux variétés lisses,  $Y$  étant de codimension 2 dans  $X$ . Notons  $\varepsilon: \tilde{X} \rightarrow X$  l'éclatement de  $Y$  dans  $X$  et  $\hat{Y}$  le diviseur exceptionnel. Alors  $\omega_{\tilde{X}}^{-1} = \varepsilon^* \omega_X^{-1} \otimes \mathcal{O}_{\tilde{X}}(-\hat{Y})$ .

Reprenons les notations de 2.3.2. On notera  $\alpha: \mathbb{P}(\mathcal{K}) \rightarrow \mathbf{H}$  le fibré projectif qui y est construit,  $\mathcal{A}_0 = (1_E \times \pi)^* \mathcal{I}$  et  $\mathcal{A}_i = \mathcal{O}_{E \times \mathbf{H}}(s_i(\mathbf{H}))$  ( $1 \leq i \leq d$ ). Par définition si  $h = (A_0; A_1, \dots, A_d) \in \mathbf{H}$ , alors  $\mathcal{A}_j|_{E \times \{h\}} = \mathcal{O}_E(A_j)$  ( $0 \leq j \leq d$ ).

Nous allons utiliser dans la suite de 3.4 pour des raisons « pédagogiques » la notation additive pour les produits tensoriels des faisceaux inversibles  $\mathcal{A}_j$  sur  $E \times \mathbf{H}$  (par exemple  $2.\mathcal{A}_0 - \mathcal{A}_1$  signifie  $\mathcal{A}_0^{\otimes 2} \otimes \mathcal{A}_1^{-1}$ ).

On peut, exactement comme en 3.1.1 montrer que  $\omega_{\mathbb{P}(\mathcal{K})/\mathbf{H}} = \omega_{\mathbb{P}(\mathcal{K})} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{K})}(-j(E \times \mathbf{H}))$  et d'après les formules donnant le faisceau canonique relatif d'un fibré projectif, ce faisceau est  $(\alpha^* \Lambda^3 \mathcal{K})(-3)$ . Par définition même de  $j$ , on sait que  $j^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{K})}(1) = \mathcal{A}_0$  (voir 2.3.2). Le faisceau  $\mathcal{O}_{j(E \times \mathbf{H})}(j(E \times \mathbf{H}))$  est égal à  $\mathcal{O}_{j(E \times \mathbf{H})}((\alpha^* \Lambda^3 \mathcal{K})^{-1} (+3))$ .

En utilisant tout ceci, le résultat rappelé au début de 3.4 et la définition de  $\mathcal{L}$ , on trouve que  $\mathbf{H}^0(E, L) \otimes \mathcal{L} = (\Lambda^3 p_{2*} \mathcal{A}_0)^{-1} \otimes p_{2*} (3.\mathcal{A}_0 - (\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \dots + \mathcal{A}_d))$ . On vient de noter  $p_2$  la projection de  $E \times \mathbf{H}$  sur le deuxième facteur.

Pour obtenir  $\mathcal{L}$ , choisissons des points  $A_{d+1}, \dots, A_9$  tels que  $L = A_{d+1} + \dots + A_9$ . On construit alors sur le modèle des  $\mathcal{A}_i$  précédents ( $1 \leq i \leq d$ ) des  $\mathcal{A}_k$  ( $d+1 \leq k \leq 9$ ). On vient de montrer le résultat suivant :

PROPOSITION 3.4.1. — Avec les notations introduites dans 3.4 :

$$\mathcal{L} = (\Lambda^3 p_{2*} \mathcal{A}_0)^{-1} \otimes p_{2*} (3.\mathcal{A}_0 - (\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \dots + \mathcal{A}_9)). \quad \blacksquare$$

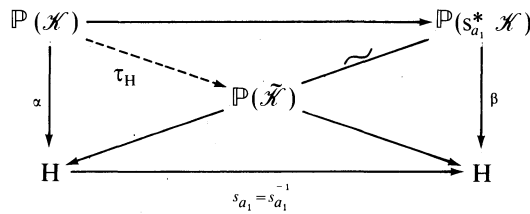
Remarque 3.4.2. — Il est à remarquer que si l'on modifie  $\mathcal{A}_0$  en le remplaçant par  $\mathcal{A}_0 \otimes p_2^* M$  (où  $M \in \text{Pic } \mathbf{H}$ ),  $\mathcal{L}$  n'est pas modifié. En particulier on retrouve que  $\mathcal{L}$  ne dépend que de  $L$  mais pas du fibré de Poincaré  $\mathcal{I}$ .

3.5. ACTION DE  $W$ . — On sait que le groupe  $W$  agit sur  $\mathbf{H}$  et est engendré par les symétries  $s_{a_i}$  ( $1 \leq i \leq d$ ). Si pour  $g \in W$  et  $(e, h) \in E \times \mathbf{H}$ , on pose  $g((e, h)) = (e, g(h))$  on a une action de  $W$  sur  $E \times \mathbf{H}$ . Pour  $i \geq 2$ , la symétrie  $s_{a_i}$  conserve évidemment les  $\mathcal{O}_{E \times \mathbf{H}}$  faisceaux  $\mathcal{A}_j$  ( $j \notin \{i-1, i\}$ ) et échange  $\mathcal{A}_{i-1}$  et  $\mathcal{A}_i$ . La proposition 3.4.1 met en évidence l'invariance de  $\mathcal{L}$  par le sous-groupe engendré par les  $s_{a_i}$  ( $i \geq 2$ ).

Considérons le faisceau  $\tilde{\mathcal{A}}_0 = 2.\mathcal{A}_0 - (\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3)$  et posons  $\tilde{\mathcal{K}} = p_{2*} \tilde{\mathcal{A}}_0$ .

La transformation quadratique de 2.2 se réalise en famille au-dessus de  $\mathbf{H}$  et conduit à une transformation birationnelle  $\tau_{\mathbf{H}}: \mathbb{P}(\mathcal{K}) \dashrightarrow \mathbb{P}(\tilde{\mathcal{K}})$  qui est un morphisme en dehors des sections  $t_1, t_2, \dots, t_d$ .

Le « Seesaw théorème » nous indique qu'il existe un faisceau inversible  $M$  sur  $\mathbf{H}$  tel que  $\tilde{\mathcal{K}} = s_{a_1}^* \mathcal{K} \otimes M$ . Par conséquent les fibrés projectifs  $\mathbb{P}(\tilde{\mathcal{K}})$  et  $\mathbb{P}(s_{a_1}^* \mathcal{K})$  sont isomorphes. On a donc un diagramme commutatif :



La transformation quadratique  $\tau_H$  transforme les sections du faisceau anticanonique de  $\mathbb{P}(\mathcal{H})$  au-dessus de  $\alpha^{-1}(U)$  ( $U$  est un ouvert de  $H$ ) s'annulant en  $t_1(U), \dots, t_d(U)$  en les sections du faisceau anticanonique de  $\mathbb{P}(s_{a_1}^* \mathcal{H})$  au-dessus de  $\beta^{-1}(U)$  s'annulant en  $t_1(s_{a_1}(U)), \dots, t_d(s_{a_1}(U))$ . D'après le résultat rappelé au début de 3.4 et la définition de  $\mathcal{F}_1$ , cela entraîne que  $s_{a_1}^* \mathcal{F}_1$  est isomorphe à  $\mathcal{F}_1$  (l'isomorphisme étant donné par  $\tau_H$ ). La transformation quadratique  $\tau_H$  conservant  $j(E \times H)$ , cet isomorphisme passe au quotient et induit un isomorphisme entre  $H^0(E, L) \otimes s_{a_1}^* \mathcal{L}$  et  $H^0(E, L) \otimes \mathcal{L}$  (voir 3.3.1) et donc entre  $s_{a_1}^* \mathcal{L}$  et  $\mathcal{L}$ .

**THÉORÈME 3.5.1.** — *Le faisceau  $\mathcal{L}$  est invariant par l'action de  $W$  sur  $H$ . Ainsi en imposant que l'action de  $W$  sur la fibre de  $V(\mathcal{L}^{-1}) \rightarrow H$  au-dessus de  $(3\hat{O}; \hat{O}, \dots, \hat{O})$  soit l'identité, on obtient une action équivariante de  $W$  sur  $V(\mathcal{L}^{-1}) \rightarrow H$ .*

**3.6. CALCUL DE LA CLASSE DE CHERN DE  $\mathcal{L}$ .** — Grâce au choix de  $\hat{O}$  sur  $E$  on a en 2.1.2 identifié la variété abélienne  $\hat{H} = \hat{E} \otimes \mathbb{Q}$  à  $H$ . La functorialité de la variété duale  $\text{Pic}^0$  montre que  $\text{Pic}^0 \hat{H} = \text{Pic}^0 \hat{E} \otimes \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$ . D'autre part :

$$H^2(\hat{H}, \mathbb{C}) = \Lambda^2 \text{Hom}_{\mathbb{R}}(H_1(\hat{H}, \mathbb{R}), \mathbb{C}) = \Lambda^2 [\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q} \otimes H_1(E, \mathbb{R}), \mathbb{C})]$$

contient comme sous-espace  $S^2 \mathbb{Q} \otimes H^2(E, \mathbb{C})$ . Le théorème d'Appel-Humbert ([10], page 20) décrit l'image  $c_1(\text{Pic}(H))$ . Si la courbe  $E$  a de la multiplication complexe cette image est plus grosse que  $S^2 \mathbb{Q} \otimes H^2(E, \mathbb{Z}) \subset H^2(H, \mathbb{Z})$ . Cependant, pour  $d \geq 3$  :

**PROPOSITION 3.6.1.** — *Notons  $R^\sim \subset \text{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) = P(R^\sim)$  le système de racine dual et  $Q(R^\sim)$  le  $\mathbb{Z}$  module engendré par  $R^\sim$ . Si l'exposant  $W$  indique les parties invariantes par  $W$ , la suite exacte :  $0 \rightarrow \text{Pic}^0 H \rightarrow \text{Pic}(H) \rightarrow H^2(H, \mathbb{Z})$  donne une suite exacte :  $0 \rightarrow H^1(E, \mathbb{Z}) \otimes P(R^\sim)/Q(R^\sim) \rightarrow (\text{Pic} H)^W \rightarrow (S^2 \mathbb{Q})^W$ .*

*Preuve.* — En 3.6.2 on montrera que la flèche de droite est (pour  $d \geq 4$ ) surjective. Looijenga [7], montre que  $(\text{Pic}^0 H)^W = H^1(E, \mathbb{Z}) \otimes P(R^\sim)/Q(R^\sim)$ . Choisissons une forme alternée  $\alpha : H_1(E, \mathbb{Z}) \times H_1(E, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$  qui engendre  $H^2(E, \mathbb{Z})$ . Par exemple si  $H_1(E, \mathbb{Z})$  est engendré par  $a$  et  $b$ ,  $\alpha$  est définie par  $\alpha(a, b) = 1$ . Soit

$$\beta : (Q \otimes H_1(E, \mathbb{Z})) \times (Q \otimes H_1(E, \mathbb{Z})) \rightarrow \mathbb{Z}$$

une forme alternée définissant un élément de  $H^2(H, \mathbb{Z})$ . Nous supposons que  $\beta$  est invariante par l'action de  $W$  sur  $H$  [c'est bien sûr le cas si  $\beta$  est la classe de Chern d'un faisceau de  $(\text{Pic} H)^W$ ].

Définissons  $F : Q \times Q \rightarrow \mathbb{Z}$  par  $F(q_1, q_2) = \beta(q_1 \otimes a, q_2 \otimes b)$ . Il est clair que  $F$  est linéaire et invariant par l'action de  $W$  sur  $Q$ .

Montrons que  $F$  est symétrique. Soient  $r_1$  et  $r_2$  deux racines. Si  $r_1 \neq \pm r_2$ ,  $(r_1, r_2)$  peut prendre les valeurs 0, 1 ou  $-1$ . Dans le premier cas :

$$F(r_1, r_2) = F(s_{r_1}(r_1), s_{r_1}(r_2)) = F(-r_1, r_2) = 0.$$

Dans le second cas :

$$F(r_1, r_2) = F(s_{r_1+r_2}(r_1), s_{r_1+r_2}(r_2)) = F(-r_2, -r_1) = F(r_2, r_1).$$

Il suffit dans le dernier cas d'utiliser la symétrie par rapport à la racine  $r_1 - r_2$  pour montrer que  $F(r_1, r_2) = F(r_2, r_1)$ . C'est alors un simple exercice de montrer que quel que soit  $(q_1 \otimes u, q_2 \otimes v) \in (Q \otimes H_1(E, \mathbb{Z}))^2$ ,  $\beta(q_1 \otimes u, q_2 \otimes v) = F(q_1, q_2) \cdot \alpha(u, v)$ . ■

Pour  $4 \leq d \leq 8$ ,  $Q$  est le réseau engendré par un système de racines irréductible et réduit, la représentation de  $W$  dans  $G_1(Q)$  est irréductible ([1], chap. V, § 2, prop. 1) et il existe un entier  $a$  tel que  $c_1(\mathcal{L}) = a(\cdot) |_Q$  où  $(\cdot)$  est la forme quadratique sur  $P$  définie en 1.4.

PROPOSITION 3.6.2. — Pour  $4 \leq d \leq 8$ ,  $a = 1$  et  $c_1(\mathcal{L}) = (\cdot) |_Q$ .

*Preuve.* — L'inclusion  $a_2 \cdot \mathbb{Z} \subset Q$  permet de définir un morphisme noté  $i : a_2 \cdot \mathbb{Z} \otimes \hat{E} = E \rightarrow H = Q \otimes \hat{E}$ . Soit  $X \in E$ ,  $i(X) = (3\hat{O}; X, 2\hat{O} - X, \hat{O}, \dots, \hat{O}) \in H$ . Par functorialité de  $c_1$ ,  $c_1(\mathcal{L})(a_2) = c_1(i^* \mathcal{L})$  et puisque  $(a_2, a_2) = -2$  on obtient  $-2a = \text{degré}(i^* \mathcal{L})$ .

Appliquons la proposition 3.4.1 avec  $A_{d+1} = \dots = A_9 = \hat{O}$ . Notons encore  $q_1$  et  $q_2$  les projections (dans l'ordre) de  $E \times i(E)$  sur chaque facteur. Le faisceau  $(1_E \times i)^* \mathcal{A}_0$  sur  $E \times i(E)$  est donc tout simplement  $q_1^*(3\hat{O})$ . Ainsi :

$$i^*(\mathcal{L}) = q_{2*}(q_1^*(9\hat{O}) - (D_+ + D_- + q_1^*(7\hat{O})))$$

où :

$$D_+ = \{(X, Y) \in E \times i(E) \mid Y = i(X)\}$$

est la diagonale de  $E \times i(E)$  et :

$$D_- = \{(X, Y) \in E \times i(E) \mid X = 2\hat{O} - i^{-1}(Y)\}$$

est l'antidiagonale. Il est facile de vérifier que le diviseur  $D_+ + D_-$  est linéairement équivalent à  $2(q_1^*(\hat{O}) + q_2^*(i(\hat{O})))$ .

Il suit que  $i^* \mathcal{L} = q_{2*}(q_2^*(i(-2\hat{O}))) = \mathcal{O}_E(-2\hat{O})$  et  $a = +1$ . ■

Notons tout provisoirement  $P_d$  et  $Q_d$  les modules définis au paragraphe 1 pour  $1 \leq d \leq 8$ . Il existe des inclusions naturelles  $P_d \subset P_{d+1}$  qui se restreignent en  $Q_d \subset Q_{d+1}$  en respectant les formes quadratiques. Continuons à rappeler en indice l'entier  $d$ ; il est clair que l'inclusion  $h_d : H_d \hookrightarrow H_{d+1}$  est telle que  $h_d^*(\mathcal{L}_{d+1}) = \mathcal{L}_d$  (voir 3.4.1 où  $d$  n'apparaît plus). En utilisant ceci pour  $d \leq 4$ , on prouve le résultat suivant :

THÉORÈME 3.6.3. — Pour  $1 \leq d \leq 8$ ,  $c_1(\mathcal{L}) = (\cdot) |_Q \in S^2 Q \otimes H^2(E, \mathbb{Z}) \subset H^2(H, \mathbb{Z})$ .

COROLLAIRE 3.6.4. —  $\mathcal{F}_1 = \mathcal{O}_H \oplus [\mathcal{L} \otimes H^0(E, L)]$  et  $\mathcal{L}^{-1}$  est ample.

*Preuve.* — D'après la proposition 1.7 la restriction de  $(\cdot)$  à  $Q$  est négative non dégénérée. Le théorème de Lefschetz ([10], page 29) implique que  $\mathcal{L}^{-1}$  est ample. Le théorème d'annulation de Kodaira prouve que  $\text{Ext}^1(\mathcal{L}, \mathcal{O}_H) = H^1(H, \mathcal{L}^{-1}) = 0$  et que l'extension de 3.3.1 est triviale. ■

THÉORÈME 3.6.5. — Le faisceau  $\mathcal{F}_k = q_* \omega_{V/H}^{\otimes k}$  se décompose en :

$$\mathcal{F}_k = \bigoplus_{0 \leq j \leq k} H^0(E, jL) \otimes \mathcal{L}^{\otimes j}.$$

*Preuve.* — La proposition 3.1.1 nous fournit les suites exactes :

$$0 \rightarrow \omega_V^{-\otimes n} \rightarrow \omega_V^{-\otimes(n+1)} \rightarrow \mathcal{O}_{E^\infty}((n+1)E^\infty) \rightarrow 0.$$

Le même raisonnement qu'en 3.3.1 conduit à :

$$0 \rightarrow \mathcal{F}_n \rightarrow \mathcal{F}_{(n+1)} \rightarrow H^0(E, (n+1)L) \otimes \mathcal{L}^{\otimes(n+1)} \rightarrow 0.$$

On termine alors comme dans le corollaire 3.6.4. ■

3.7. CHOIX DU POINT  $\hat{O}$  (ici  $d \geq 3$ ). — La variété  $H$  ne dépend que de  $L$  alors que  $\hat{H}$  dépend du choix du point  $\hat{O}$  tel que  $(9-d)\hat{O} = L$ . Ce point dépend des éléments d'ordre  $(9-d)$  de  $\text{Pic}^0(E)$ , c'est-à-dire de  $\mathbb{Z}/(9-d) \otimes H^1(E, \mathbb{Z})$ .

La suite exacte 3.6.1 montre qu'il existe d'autres faisceaux inversibles sur  $H$  invariants par  $W$  de classe de Chern  $(\cdot)|_Q$ . Les planches de Bourbaki et la liste donnant  $R$  en fonction de  $d$  (voir 1.7) nous apprennent que  $P(\tilde{R})/Q(\tilde{R})$  est bien isomorphe à  $\mathbb{Z}/(9-d)\mathbb{Z}$ .

Les choix différents de  $\hat{O}$  correspondent aux diverses origines possibles sur  $H$  et par translation aux divers faisceaux inversibles sur  $H$  invariants par  $W$  de classe de Chern  $(\cdot)|_Q$ .

#### 4. Famille des modèles anticanoniques

DÉFINITION 4.1. — Soient  $\mathcal{F}_k = q_* \omega_{\tilde{V}/H}^{-\otimes k}$ , et  $\mathcal{G}_k = \mathcal{F}_k \otimes \mathcal{L}^{-\otimes k}$ ,  $\mathcal{F} = \bigoplus_{k \geq 0} \mathcal{F}_k$  et  $\mathcal{G} = \bigoplus_{k \geq 0} \mathcal{G}_k$ .  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  sont des faisceaux gradués de  $\mathcal{O}_H$ -algèbres.

On note  $\bar{V} = \text{Proj}_H \mathcal{F} = \text{Proj}_H \mathcal{G}$ ,  $\bar{q} : \bar{V} \rightarrow H$  le morphisme structural,  $\varepsilon : V \rightarrow \bar{V}$  le morphisme naturel,  $\bar{j} : E \times H \rightarrow \bar{V}$  la composition  $\varepsilon \circ \text{id}$ ,  $\bar{E}^\infty = \bar{j}(E \times H)$  et enfin  $\bar{E}_h^\infty = \bar{j}(E \times \{h\})$ .

PROPOSITION 4.2. — (1)  $\bar{q}$  est propre et plat. La fibre  $\bar{V}_h$  de  $\bar{q}$  au-dessus de  $h \in H$  est le modèle anticanonique de  $V_h$ .

(2)  $\varepsilon : V \rightarrow \bar{V}$  est une résolution simultanée minimale des singularités de  $\bar{V} \rightarrow H$ .

(3)  $\bar{E}^\infty$  est une section du faisceau  $\mathcal{O}_{\bar{V}}(1)$  sur  $\text{Proj}_H(\mathcal{F})$ .

(4)  $W$  agit de façon équivariante sur  $\bar{V} \rightarrow H$ .

*Preuve.* — (1) On sait que  $\mathcal{F}_k$  est localement libre sur  $H$  pour tout  $k \geq 0$ . (2) et (3) sont évidents. Les théorèmes 3.5.1 et 3.6.5 prouvent (4). ■

PROPOSITION 4.3. — Soit  $h \in H$ . Le groupe de Picard de  $V_h$  s'identifie canoniquement à  $P$ . Notons, comme en 1.8,  $R_e(h)$  [resp.  $R_i(h)$ ; ou  $R'(h)$ ] l'ensemble des racines de  $P$  représentant des éléments effectifs (resp. effectifs et irréductibles; ou effectifs ou antieffectifs) de  $\text{Pic}(V_h)$ .  $Q(h)$  désigne le  $\mathbb{Z}$ -module engendré par  $R_e(h)$  [ou  $R_i(h)$ , ou  $R'(h)$ ]:

(i) le groupe de Picard de  $\bar{V}_h$ , c'est-à-dire le groupe des diviseurs de Weil, est  $\text{Pic}(V_h)/Q(h)$ ;

(ii) soit  $g \in W$ . L'action de  $g$  sur  $\bar{V} \rightarrow H$  conduit à un isomorphisme  $g|_{\bar{V}_h} : \bar{V}_h \rightarrow \bar{V}_{g(h)}$  et donc

à une action  $g^* : \text{Pic}(\overline{V}_{g(h)}) \rightarrow \text{Pic}(V_h)$ . D'autre part  $g$  agit sur  $P = \text{Pic}(V_{g(h)})$ . il envoie  $Q(g(h))$  sur  $Q(h)$  et l'action ainsi définie de  $P/Q(g(h))$  vers  $P/Q(h)$  est simplement  $g^*$ .

*Preuve.* — Puisque  $V_h$  est obtenue par éclatements successifs de  $\mathbb{P}(H^0(E, A_0))$  on peut appliquer la proposition 1.5 pour obtenir l'isomorphisme  $P = \text{Pic}(V_h)$ .

Le (i) est alors évident grâce à 1.8 [les seules courbes contractées dans  $V_h \rightarrow \overline{V}_h$  sont des représentants des éléments de  $R_e(h)$ ].

Pour (ii) remarquons que les points  $A_i$  sont les traces sur  $E = \overline{E}_h^\infty \subset \overline{V}_h$  des droites exceptionnelles  $e_i$  de  $P = \text{Pic}(V_h)$ . Puisque  $g$  induit un isomorphisme entre  $\overline{V}_h$  et  $\overline{V}_{g(h)}$ , il envoie points singuliers sur points singuliers. L'action de  $W$  sur  $H$  a évidemment été choisie de telle façon que  $g^*(e_i) = g(e_i)$  [à gauche  $e_i$  est considéré dans  $\text{Pic}(V_h)$  et à droite dans  $P$ ] il suffit pour s'en convaincre de relire 2.2. Évidemment  $g$  conserve le diviseur anticanonique et la forme intersection. Tout cela prouve (ii). ■

On va maintenant s'intéresser aux singularités pouvant apparaître sur  $\overline{V}_h$ . On sait déjà que ce sont des points doubles rationnels et qu'ils sont décrits par la connaissance de la partie close et symétrique de  $R$  qui est l'union des diviseurs effectifs et antieffectifs de  $R \subset \text{Pic}(V_h)$  (voir 1.8).

La classification des singularités des surfaces presque de Del Pezzo a été établie au début du siècle (Timms, et pour les cubiques en 1864 par Schläfli). Du Val [5], la retrouve par des méthodes aussi proches que possible de celles utilisées ici. Il se base sur l'article de Coxeter [3]. Voici tout d'abord le résultat algébrique permettant de déterminer toutes les parties closes et symétriques d'un système de racines :

LEMME (Borel-De Siebenthal). — Soient  $R$  un système de racines réduit et irréductible dans un espace vectoriel  $V$ ,  $(a_1, \dots, a_d)$  une base de  $R$  et  $\tilde{a}$  la plus grande racine associée ( $\tilde{a} = n_1 a_1 + \dots + n_d a_d$ ). Les parties closes symétriques de  $R$ , distinctes de  $R$  et maximales pour ces propriétés sont les transformées par  $W$  des parties  $R_i$  et  $S_i$  suivantes :

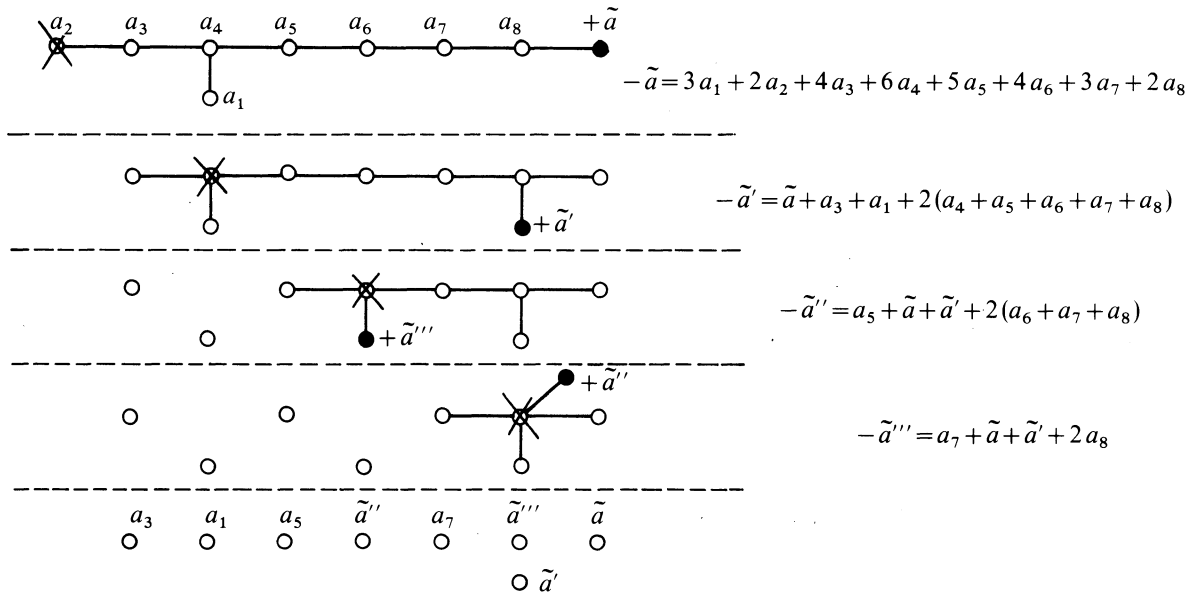
(i) soit  $i \in \{1, 2, \dots, d\}$  tel que  $n_i = 1$ . Soit  $R_i$  l'ensemble des éléments de  $R$  combinaisons linéaires des  $a_j$  pour  $j \neq i$ . Une base de  $R_i$  est  $(a_1, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_d)$ ;

(ii) soit  $i \in \{1, 2, \dots, d\}$  tel que  $n_i$  soit premier et  $S_i$  l'ensemble des racines  $\sum_{j=1}^d m_j a_j$  avec  $m_i \equiv 0 \pmod{n_i}$ . Une base de la partie close et symétrique maximale  $S_i$  est  $(-\tilde{a}, a_1, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_d)$ .

*Preuve.* — Pour tout le vocabulaire employé, on renvoie à Bourbaki [1]. Ce lemme est en fait l'exercice 4, du paragraphe 4, chapitre VI de Bourbaki, page 229. On laisse le lecteur faire cet exercice. ■

Le cas  $d \leq 2$  ne pose évidemment aucune difficulté pour cette partie, on se limite dans la suite à  $d \geq 3$ . Dans cette situation  $R$  est vraiment un système de racines et en itérant le lemme, on établit la liste complète des parties closes et symétriques de  $R$ . On peut la trouver dans [3]. Dans les graphes de Dynkin que l'on rencontrera dans la suite de cet article, les sommets noirs indiquent les plus grandes racines s'introduisant grâce à  $S_i$  et les sommets barrés ceux disparaissant dans  $S_i$  ou  $R_i$ .

Exemple. — Pour  $d=8$ , on obtient  $(A_1)^8$  comme partie close et symétrique de  $R = E_8$ .



Maintenant qu'on sait comment avoir la liste des parties closes et symétriques de  $R$ , il est intéressant de savoir si étant donnée une de ces parties il existe une surface presque de Del Pezzo ayant les singularités correspondantes.

DÉFINITION 4.4. — Soit  $q = c_0 e_0 + c_1 e_1 + \dots + c_d e_d \in Q$  et  $h = (A_0; A_1, \dots, A_d)$  un élément de  $H$ . On note  $q(h)$  l'élément de  $J_0$  suivant :

$$q(h) = c_0 A_0 + c_1 A_1 + \dots + c_d A_d.$$

On obtient bien un élément de  $J_0$  puisque  $3c_0 + c_1 + \dots + c_d = 0$ .

THÉORÈME 4.5 (Du Val, ...):

- (1) Soit  $R'$  une partie close et symétrique de  $R$  et  $h \in H$ . Pour que  $R' = R'(h)$ , il faut et suffit que  $h$  satisfasse au système suivant d'équations et d'inéquations :  $(\forall q \in R) (q(h) = 0 \Leftrightarrow q \in R')$ ;
- (2) Pour tout choix de  $E$  et de  $L$  ce système a une solution dès lors que  $R'$  n'est pas :  $d=7$   $R' = (A_1)^7$ ;  $d=8$ ,  $R' = (A_1)^8$ ,  $(A_1)^7$  ou  $(A_1)^4 \times D_4$ .

Preuve. — (1) Soit  $q \in R$ . Le groupe  $W$  opérant transitivement sur l'ensemble des racines, on se ramène par une action sur  $H$  au cas  $q = a_2 = e_1 - e_2$ . Alors  $q(h) = A_1 - A_2$  est nul si et seulement si  $a_2$  est une racine effective de  $\text{Pic}(V_h) = P$ .

(2) Prouvons que chaque système dans la liste ci-dessus est bien une exception. Supposons par exemple qu'il existe une surface  $V_h$  telle que  $\bar{V}_h$  ait comme singularités  $(A_1)^8$ . Éclatons le neuvième point de  $V_h$  par lequel repassent les sections de  $\omega_{V_h}^{-1}$ , on obtient un fibré elliptique

rationnel  $\tilde{V} \rightarrow \mathbb{P}^1$  et une section  $\tilde{E}$  (la courbe exceptionnelle).  $\tilde{E}$  recoupe toutes les racines de  $\text{Pic}(\tilde{V})$  créées par le dernier éclatement (en contractant  $\tilde{E}$  ces racines disparaissent). Grâce à la formule du genre, toutes ces courbes de self-intersection  $-2$  sont des composantes de fibres singulières de  $\tilde{V} \rightarrow \mathbb{P}^1$ . Cela implique que dans chaque fibre de  $\tilde{V} \rightarrow \mathbb{P}^1$  contenant au moins un  $-2$ , un seul est créé par l'éclatement du dernier point et que ce  $-2$  apparaît avec 1 comme multiplicité dans cette fibre. Comme les 8 anciens  $-2$  ne se coupaient pas, la seule possibilité, d'après la classification de Kodaira, pour ces fibres est d'être du type  $I_2 : \text{⋈}$  ou du type  $III : \text{⋈}$  et il en apparaît au moins 8. Ainsi la caractéristique d'Euler  $\chi(\tilde{V}) = 12$  ( $\tilde{V}$  est rationnelle) est supérieure ou égale à :

$$2 \times \{ \text{nombre de fibres } I_2 \} + 3 \times \{ \text{nombre de fibres } III \},$$

ce qui est supérieur à 16. D'où la contradiction. Pour  $(A_1)^7$  et  $D_4 \times (A_1)^4$  ce 16 devient 14.

Pour prouver que dans les autres cas ce système a une solution il reste à faire une longue et patiente vérification (cf. Du Val). ■

*Remarques.* – (1) La liste des racines de  $R$  est donnée explicitement dans [4] et implicitement dans la définition du théorème 1.2 sur la position générale. Les équations précédentes à résoudre sont donc :

- (i)  $A_i = A_j (i \neq j)$ ;
- (ii)  $A_0 = A_i + A_j + A_k (i, j \text{ et } k \text{ distincts})$ ;
- (iii)  $2 A_0 = A_{i_1} + \dots + A_{i_r}$  (les indices étant tous distincts);
- (iv) pour  $d=8$ ,  $A_i = L$ .

(2) On peut s'intéresser, comme on l'a mentionné dans l'introduction, au même problème avec  $E$  non lisse. Mais le système de 4.5 n'a pas toujours de solutions dans la jacobienne généralisée de  $E$ . Par exemple dans le cas de la cissoïde (c'est-à-dire de la « cubique plane avec un cusp ») – voir [15] et [11] – les singularités possibles sont exactement celles de graphe dual inclus dans celui de  $R$ ; c'est-à-dire obtenu à partir de celui de  $R$  en effaçant des sommets et toutes les arêtes s'y attachant. En effet la jacobienne généralisée de la cissoïde n'a pas de torsion (c'est  $\mathbb{C}$ ) et seule la procédure (i) de Borel-De Siebenthal est possible.

(3) Dans les systèmes de racines rencontrés, les coefficients des plus grandes racines qui sont des nombres premiers sont 2, 3 ou 5. Les solutions aux équations de 4.5 dépendent donc des points d'ordre 2, 3 ou 5 de  $J_0$ ; ce qui assure qu'en caractéristique  $\geq 7$  le problème abordé dans cette partie se résout exactement de la même façon qu'en caractéristique 0.

(4) Pour  $d \leq 6$ , les graphes possibles comme graphe des parties closes et symétriques sont exactement les graphes de système de racines inclus dans le graphe *complété* de  $R$  [au sens du (2)]. Ceci permet de trouver très rapidement la liste complète.

(5) Dans le cas des exceptions il y a trop d'équations à résoudre pour pouvoir encore satisfaire aux inéquations. Plus précisément, ce sont les points d'ordre 2 qui manquent dans  $J_0$ . Ceci explique pourquoi ces exceptions n'en sont pas en caractéristique 2.

*Exemples.* –  $\boxed{R' = R}$ . Il n'y a pas d'inéquation et les équations sont :

$$\text{pour } i = 1, \dots, d; \quad a_i(h) = 0,$$

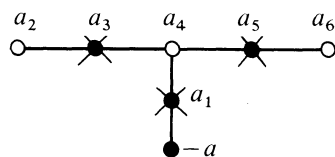


ce qui entraîne :

$$A_1 = A_2 = A_3 = \dots = A_d \quad \text{et} \quad A_0 = 3 A_1.$$

La condition supplémentaire  $h \in H$  prouve qu'il y a  $(9-d)^2$  solutions  $h = (3 A; A, \dots, A)$  où  $(9-d) A = L$ . Ces solutions correspondent aux diverses originés possibles sur  $H$  (voir 3.7).

$$\boxed{R' = (A_1)^4 \subset R = E_6 \quad (d=6)}$$



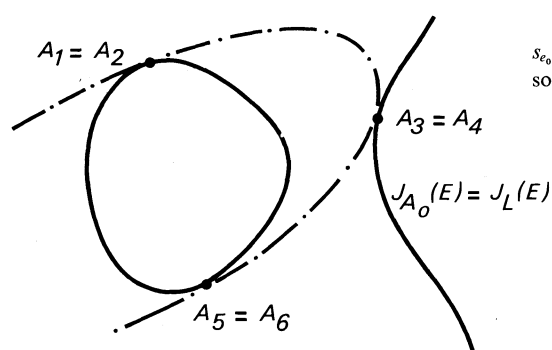
Les équations sont :

$$\begin{aligned} A_1 = A_2, \quad A_3 = A_4, \quad A_5 = A_6, \\ 2(A_2 - A_3 + A_4 - A_5 + A_0 - A_1 - A_2 - A_3) = 0, \quad 3 A_0 - (A_1 + \dots + A_6) = L, \\ A_2 \neq A_3, \quad A_4 \neq A_5, \quad A_0 \neq A_1 + A_2 + A_3. \end{aligned}$$

Ce qui se résoud en :

$$\begin{aligned} A_0 = L, \quad A_1 = A_2, \quad A_3 = A_4, \quad A_5 = A_6, \\ 2(A_1 + A_3 + A_5) = 2 A_0, \quad A_1 + A_3 + A_5 \neq A_0. \end{aligned}$$

On obtient dans  $H$  trois sous-variétés irréductibles de dimension 2.



Grâce à la transformation quadratique  $s_{e_0 - (e_3 + e_1 + e_2)}$  on se ramène à la figure classique des 6 sommets d'un quadrilatère complet.

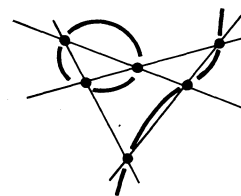


Fig. 2 ( $d=6$ ). — La courbe en pointillé est une conique ayant trois points doubles de contact avec la cubique  $j_L(E)$ .

*Remarque 4.5.1.* — Deux parties closes et symétriques  $R'$  et  $R''$  de  $R$  peuvent être isomorphes en tant que système de racines sans qu'il existe d'élément de  $W$  transformant  $R'$  en  $R''$ . Pour  $d=5$ ,  $(A_1)^2$  et  $A_3$  apparaissent chacun de deux façons différentes dans  $R=D_5$ . Pour  $d=7$  ou  $8$  ces situations sont nombreuses et répertoriées dans les listes de Du Val et Coxeter.

4.6. On appelle surface de Del Pezzo (ou presque de Del Pezzo) marquée un triplet  $(S, \mathcal{L}, \varphi)$  où  $S$  est une surface de (ou presque de) Del Pezzo, anticanonique,  $\mathcal{L}$  une section du faisceau anticanonique et  $\varphi$  un isomorphisme entre  $\mathcal{L}$  et  $E$  qui transforme le faisceau normal de  $\mathcal{L}$  dans  $S$  en  $\mathcal{O}_E(L)$ . Résolvons les éventuelles singularités de  $S$  d'où une surface  $\tilde{S}$  lisse s'obtenant par éclatements successifs de points en position générale (ou presque) dans  $\mathbb{P}^2$ . Cette chaîne d'éclatements n'est pas uniquement déterminée par  $\tilde{S}$  mais le groupe  $W$  opère transitivement sur les choix possibles (voir les systèmes exceptionnels maximaux dans [4]). On peut ainsi associer à chaque surface marquée un point de  $H/W$ . Autrement dit  $H/W$  est l'espace de module grossier des surfaces de Del Pezzo (ou presque de Del Pezzo) marquées.

## 5. Cônes sur $E$ et sur $H$

5.1. Soient  $Y$  et  $\mathcal{S}$  une variété et un faisceau localement libre de  $\mathcal{O}_Y$ -algèbre graduée. On notera  $\hat{\mathcal{S}} = \mathcal{S} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_Y[T] = \mathcal{S}[T]$  que l'on considère comme  $\mathcal{O}_Y$ -algèbre graduée en posant degré  $(T) = 1$ . On appelle (voir Grothendieck EGA II 8-3)  $\text{Spec}_Y \mathcal{S}$  le cône affine défini par  $\mathcal{S}$ ,  $\text{Proj}_Y \hat{\mathcal{S}}$  le cône projectif,  $\text{Proj}_Y \mathcal{S}$  est la base de ces cônes, l'image de  $Y$  par le morphisme déduit de l'augmentation  $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}_0 \rightarrow 0$  est le sommet de ces cônes. Grâce à  $\hat{\mathcal{S}} \rightarrow \hat{\mathcal{S}}/(T-1)\hat{\mathcal{S}} \simeq \mathcal{S} \rightarrow 0$ ,  $\text{Proj}_Y \hat{\mathcal{S}}$  contient comme ouvert le cône affine et le complémentaire s'identifie à la base du cône.

EXEMPLES ET NOTATIONS :

5.1.1.  $\mathcal{G} = \bigoplus_{k \geq 0} q_* \omega_{V/H}^{-\otimes k} \otimes \mathcal{L}^{-\otimes k}$  (voir la définition en 4.1) est une  $\mathcal{O}_H$ -algèbre graduée. On va étudier les cônes affines et projectifs associés que l'on notera  $C_{\bar{V}}$  et  $\bar{C}_{\bar{V}}$ . La base de ces cônes est  $\bar{V} = \text{Proj}_H \mathcal{G}$ .

5.1.2. Si  $M$  est un faisceau inversible ample sur une variété  $S$ , l'algèbre graduée  $A_M = \bigoplus_{n \geq 0} H^0(S, M^{\otimes n})$  permet de définir des cônes affines et projectifs de sommet un point et de base  $S = \text{Proj} A_M$ . Ainsi en utilisant les faisceaux  $\mathcal{O}_E(L)$  (sur  $E$ ) et  $\mathcal{L}^{-1}$  (sur  $H$ ) on obtient des cônes  $C_E, \bar{C}_E, C_H$  et  $\bar{C}_H$ .

PROPOSITION 5.2. — (i) Les morphismes  $C_{\bar{V}} \rightarrow H$  et  $\bar{C}_{\bar{V}} \rightarrow H$  sont tous de deux plats. Le premier est affine, le second propre.

(ii)  $\mathcal{G}$  [tout comme  $\bigoplus_{n \geq 0} H^0(E, nL)$ ] est engendré par les éléments de degré 1 pour  $d \leq 6$ , ceux de degré 1 et 2 pour  $d=7$  et par ceux de degré 1, 2 et 3 pour  $d=8$ .

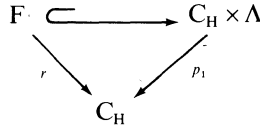
*Preuve.* – (i) Les faisceaux  $\mathcal{G}_k$  et  $\tilde{\mathcal{G}}_k$  sont localement libres, (i) en suit. Le (ii) est la répétition de la fin des théorèmes 1.2 et 1.3. ■

Cette proposition nous permet de plonger  $\bar{V} \rightarrow H$  dans un fibré projectif (pour  $d \leq 6$ ) grâce à  $S^k \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_k \rightarrow 0$ . Pour  $d=7$  (resp.  $d=8$ ), il est nécessaire d'utiliser un fibré projectif à poids de poids  $(1, 1, 2)$  (resp.  $1, 2, 3$ ). Ce fibré n'est pas trivial. Cependant une construction relative au-dessus de  $H$  analogue à ce que Pinkham appelle dans [12], page 46 « sweeping out the cone with hyperplane sections » va permettre après passage au cône  $C_H$  de fixer un plongement fixe pour les surfaces  $\bar{V}_n$  (voir aussi [13], 6.7).

Posons  $C'_H = \text{Spec} \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{L}^{-\otimes k} = C_H - \{\text{son sommet}\}$  et  $\pi$  la projection de  $C'_H$  sur  $H$ .

Pour  $d \leq 6$ , soit  $\Lambda = H^0(E, L)^\vee = \text{Spec} \bigoplus_{k \geq 0} S^k H^0(E, L)$ ; pour  $d \geq 7$ ,  $\Lambda$  sera l'espace vectoriel à poids analogue.  $C_E$  est une sous-variété de  $\Lambda$ . On note  $\Pi$  l'espace projectif (avec ou sans poids) associé,  $E$  se plonge de façon naturelle dans  $\Pi$  et le faisceau  $\mathcal{O}_\Pi(1)$  découpe sur  $E$  le diviseur  $L$ .

THÉORÈME 5.3. – *Il existe un diagramme commutatif :*



tel que :

- (i)  $p_1$  est la première projection et  $r$  est plat;
- (ii) si  $u \in C'_H$ , la fibre  $F_u$  de  $r$  au-dessus de  $u$  est isomorphe à  $\bar{V}_{\pi(u)} - \bar{E}_{\pi(u)}^\infty$  et le plongement  $F_u \subset \Lambda$  est la restriction du plongement anticanonique de  $\bar{V}_{\pi(u)}$ ;
- (iii) la fibre de  $r$  au-dessus du sommet de  $C_H$  est  $C_E$  avec son plongement naturel dans  $\Lambda$ .

*Preuve.* – Des suites exactes apparaissant dans la preuve de 3.6.5 on déduit les suites exactes suivantes :

$$(\star) \quad \begin{cases} 0 \rightarrow \mathcal{L}^{-1} \rightarrow \mathcal{G}_1 \rightarrow H^0(E, L) \otimes_{\mathcal{O}_H} \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow \mathcal{L}^{-1} \otimes \mathcal{G}_n \rightarrow \mathcal{G}_{n+1} \rightarrow H^0(E, nL) \otimes_{\mathcal{O}_H} \rightarrow 0. \end{cases}$$

Ces suites exactes sont scindées et donnent une décomposition de  $\mathcal{G}$  comme  $\mathcal{O}_H$ -module (mais pas  $\mathcal{O}_H$ -algèbre) graduée :

$$\mathcal{G}_n = \bigoplus_{p+q=n} \mathcal{L}^{-p} \otimes H^0(E, qL).$$

Ceci montre que le faisceau  $\mathcal{G}$  de  $\mathcal{O}_H$ -algèbre est aussi muni d'une structure naturelle de  $\bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{L}^{-\otimes n}$  module.

Si nous notons :

$$A_g = H^0(H, \mathcal{G}) = \bigoplus_{n \geq 0} H^0(H, \mathcal{G}_n) \quad \text{et} \quad A_{g^{-1}} = \bigoplus_{n \geq 0} H^0(H, \mathcal{L}^{-\otimes n}),$$

des suites exactes ( $\star$ ), on tire un morphisme d'anneaux gradués :

$$0 \rightarrow A_{g^{-1}} \rightarrow A_g.$$

Ces mêmes suites exactes ( $\star$ ) montrent que  $A_g$  est un  $A_{g^{-1}}$  module libre (donc plat) engendré par  $\bigoplus_{n \geq 0} H^0(E, nL)$  et que la fibre de  $\text{Spec } A_g \rightarrow \text{Spec } A_{g^{-1}}$  au sommet du cône (défini par l'idéal maximal  $\bigoplus_{n \geq 0} H^0(H, \mathcal{L}^{-\otimes n})$ ) est  $\text{Spec } \bigoplus_{n \geq 0} H^0(E, nL) = C_E$ .

De tout cela on tire le diagramme commutatif ( $\star\star$ ) suivant où les morphismes affines (horizontaux)  $r$  et  $r_H$  viennent d'être définis et où les flèches verticales proviennent de  $\eta : H \rightarrow \text{Spec } \mathbb{C}$ .

$$(\star\star) \quad \begin{array}{ccc} \text{Spec}_H \mathcal{G} \xrightarrow{r_H} V(\mathcal{L}^{-1}) = \text{Spec}_H \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{L}^{-\otimes n} & & \\ \eta_* \downarrow & & \downarrow \eta_* \\ \text{Spec } A_g \xrightarrow{r} C_H = \text{Spec } \bigoplus_{n \geq 0} H^0(H, \mathcal{L}^{-\otimes n}) = \text{Spec } A_{g^{-1}} & & \end{array}$$

La flèche  $\eta_*$  de droite est la contraction de la section nulle de  $V(\mathcal{L}^{-1})$  sur le sommet de  $C_H$  (le faisceau normal de cette section nulle est  $\mathcal{L}$  qui est anti-ample).

Posons donc  $F = \text{Spec } A_g$  et limitons-nous pour simplifier les notations (en évitant les espaces à poids et les produits symétriques tordus) au cas  $d \leq 6$ . Alors  $S^n \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_n$  est une surjection et conduit à une immersion  $\text{Spec}_H \mathcal{G} \hookrightarrow V(\mathcal{G}_1) = V(\mathcal{L}^{-1} \oplus H^0(E, L) \otimes \mathcal{O}_H) = V(\mathcal{L}^{-1}) \times \Lambda$ ;  $r_H$  étant la restriction à  $\text{Spec}_H \mathcal{G}$  de la projection sur le premier facteur. De même la surjection  $S^q H^0(E, L) \rightarrow H^0(E, qL)$  et (3.6.5) donnent une suite exacte :

$$M_n = \bigoplus_{p+q=n} [H^0(H, \mathcal{L}^{-\otimes p}) \otimes S^q H^0(E, L)] \rightarrow H^0(H, \mathcal{G}_n) \rightarrow 0$$

et une immersion :

$$\text{Spec } A_g = F \subset \text{Spec } \bigoplus_{n \geq 0} M_n = \text{Spec} \left[ \bigoplus_{p \geq 0} H^0(H, \mathcal{L}^{-\otimes p}) \right] \otimes \left[ \bigoplus_{q \geq 0} S^q H^0(E, L) \right],$$

autrement dit à  $F \subset C_H \times \Lambda$  et  $r$  est la restriction de la projection sur  $C_H$ . Les autres assertions de 5.3 sont alors évidentes. ■

*Remarques.* – (i)  $A_g$  est un  $A_{g^{-1}}$  module gradué. On a donc une action  $\mathbb{C}^*$  équivariante sur  $F \xrightarrow{r} C_H$  qui se restreint en l'action  $\mathbb{C}^*$  naturelle sur le cône  $C_E$ .

(ii) On peut évidemment compléter simultanément toutes les fibres de  $F \rightarrow C_H$  en  $\bar{F} \rightarrow C_H$  avec  $\bar{F} - F = E \times C_H$  et si  $u \in C'_H$ ,  $\bar{F}_u = \bar{V}_{\pi(u)}$ , la fibre au sommet est  $\bar{C}_E$ . De plus  $\bar{F}_u - F_u$  qui est isomorphe à  $E$  est plongé dans  $\Pi$ .

5.4. Puisque  $\mathcal{L}$  est invariant sous  $W$ , on obtient une action de  $W$  sur  $V(\mathcal{L}^{-1})$  (3.5.1) et sur  $C_H$ . Le sommet est fixé par cette action. En fait il existe même une action équivariante de  $W$  sur  $F \xrightarrow{r} C_H$  (3.5.1 et 3.6.5). Cette action commute à l'action  $\mathbb{C}^*$  sur  $F \rightarrow C_H$  et se réduit à l'identité sur la fibre de  $r$  au sommet de  $C_H$ .

5.5. La construction qu'on vient de faire en 5.3 peut se comprendre comme étant une déformation au-dessus de  $H$  de la structure d'algèbre de  $\bigoplus_{n \geq 0} H^0(E, nL)$ . Au-dessus du sommet on a la structure d'algèbre évidente (d'où le cône  $C_E$ ), ailleurs on perturbe par  $\mathcal{L}$ .

## 6. Lien avec la déformation verselle de $C_E$

On s'intéresse maintenant à la singularité que présente  $C_E$  en son sommet. Pinkham [12] (pages 63-67) a étudié la déformation verselle de  $C_E$ . Notons  $T$  l'espace tangent à l'origine de cette déformation, en utilisant l'action  $\mathbb{C}^*$  sur  $C_E$ ,  $T$  se décompose en une somme directe :  $T = T^- \oplus T^0$ . La déformation dans la direction de  $T^0$  consiste à déformer la courbe à l'infini de  $C_E$ . Notons  $S_0^-$  la base de la déformation dans la direction de  $T^-$ . Pinkham a montré que pour  $d \neq 1$   $S_0^-$  est irréductible de dimension  $d+1$ ,  $S_0^- = T^-$  si et seulement si  $d \geq 5$ . Pour  $d=1$ ,  $S_0^-$  a deux composantes de dimension 2, l'une (qu'on notera  $S^-$ ) correspondant aux surfaces de Del Pezzo et l'autre aux transformées de Véronèse des quadriques de  $\mathbb{P}^3$ . On renvoie à la partie 7 pour cette composante. Pour  $d \neq 1$ , on pose  $S^- = S_0^-$ .

On vient de construire une déformation  $F \xrightarrow{r} C_H$  de  $C_E$ . Cette déformation admet une action  $\mathbb{C}^*$  de poids négatif. De plus (5.4)  $W$  agit sur  $F \rightarrow C_H$  (en commutant à l'action  $\mathbb{C}^*$ ) et cette action se réduit à l'identité sur  $C_E \subset F$ . Ainsi, en utilisant [13], 2.3, on obtient un morphisme (respectant les actions  $\mathbb{C}^*$ )  $C_H/W \rightarrow S_0^-$ .

**THÉORÈME 6.1.** — *Ce morphisme  $C_H/W \rightarrow S_0^-$  a pour image  $S^-$  et est un isomorphisme sur  $S^-$ .*

*Preuve.* — Plaçons-nous pour l'instant dans le cas  $d \geq 4$ .  $R$  est alors un système de racines irréductible et  $W$  le groupe de Weyl associé. Dans [7], Looijenga a calculé les degrés pour l'action  $\mathbb{C}^*$  sur  $C_H/W$ . Dans [12], Pinkham a calculé les degrés pour l'action  $\mathbb{C}^*$  sur  $S^-$ .

On s'aperçoit que ces degrés sont les mêmes. Évidemment l'image est contenue dans  $S^-$ , les espaces  $C_H/W$  et  $S^-$  ont même dimension et puisque le morphisme  $C_H/W \rightarrow S^-$  est fini de degré un à l'origine, il est surjectif. Cette surjection  $\mathbb{C}^*$  équivariante entre espaces gradués avec les mêmes poids est nécessairement un isomorphisme.

Pour  $d \leq 4$ , le raisonnement ci-dessus est encore valable mais il faut calculer à la main les degrés de l'action  $\mathbb{C}^*$  sur  $C_H/W$ . ■

Ce résultat et 4.5 permettent de connaître toutes les singularités apparaissant dans la déformation verselle de  $C_E$ , en effet il ne se crée pas de nouvelles singularités dans la direction  $T^0$ . Par exemple pour  $d=6$ , il existe trois sous-variétés irréductibles de dimension 3 de  $S^-$  au-dessus desquelles on ait quatre points doubles ordinaires (voir le deuxième exemple de 4.5). On a ainsi un très bon contrôle du discriminant de la partie négative de la déformation verselle.

### 7. Action de $W$ sur $H$ et $C_H$ .

#### Relation entre les stabilisateurs et les points singuliers des fibres

On suppose ici  $d \geq 3$ , les cas  $d=1$  ou  $d=2$  étant triviaux pour la question traitée ici.

Soit  $h \in H$ ,  $h = (A_0; A_1, \dots, A_d)$ . L'orbite de  $h$  sous  $W$  correspond aux diverses façons de contracter successivement  $d$  courbes pour obtenir un plan projectif, les points  $A_1, \dots, A_d$  étant les traces de ces courbes sur  $E_h^\infty \subset V_h$ . Si le stabilisateur de  $h$  sous l'action de  $W$  sur  $H$  n'est pas réduit à l'identité on se trouve donc nécessairement dans l'un (ou dans les deux) cas suivants : soit  $\bar{V}_h$  est singulier, soit plusieurs diviseurs exceptionnels de  $V_h$  se coupent sur  $E_h^\infty \subset V_h$ . On va montrer plus loin que le stabilisateur de  $h$  pour l'action de  $W$  sur  $C_H$  décrit exactement les singularités de  $\bar{V}_h$ .

**DÉFINITION 7.1.** — On note  $W(h)$  le sous-groupe de  $W$  engendré par les réflexions orthogonales  $s_a$  ou  $a$  est une courbe contractée dans  $V_h \rightarrow \bar{V}_h$ . On note  $G(h)$  le sous-groupe des éléments de  $W$  fixant  $h \in H$  et dont l'action sur  $\bar{V}_h$  (déduite de l'action de  $W$  sur  $\bar{V} \rightarrow H$ ) est alors l'identité.

Il est bien clair que  $W(h)$  est le groupe de Weyl associé aux singularités de  $\bar{V}_h$ .

**PROPOSITION 7.2.** — (i) Soit  $u \in C'_H$ , le stabilisateur de  $u$  pour l'action de  $W$  sur  $C_H$  est le groupe  $G(\pi(u))$ .

(ii)  $W(h) \subset G(h)$ .

*Preuve.* — (i) Pour que  $g \in W$  stabilise  $u \in C'_H$ , il faut et suffit que  $g$  stabilise  $\pi(u) \in H$  et que  $g$  opère trivialement sur la fibre de  $V(\mathcal{L})$  au-dessus de  $\pi(u)$ . La deuxième condition équivaut à dire que  $g$  opère trivialement sur la fibre de  $V(\mathcal{F}_1)$  au-dessus de  $\pi(u)$ , cette fibre étant simplement  $H^0(V_h, \omega_{V_h}^{-1})$  ceci est bien équivalent à  $g \in G(\pi(u))$ .

(ii) Soit  $a \in R'(h)$  [voir 4.3 pour  $R'(h)$ ]. On sait que  $W$  agit transitivement sur les racines de  $R$ . Il existe donc  $f \in W$  tel que  $f(a) = a_2 = e_1 - e_2$ . En faisant agir  $f$  sur  $H$ , on se ramène à montrer que si  $a_2 \in R'(h)$  alors  $s_{a_2} \in G(h)$ . Mais alors  $h = (A_0; A_1, A_1, A_3, \dots, A_d)$  et  $s_{a_2}$  agit sur  $H$  en échangeant les deux premiers points sur  $E$  qui ici sont égaux. L'action de  $s_{a_2}$  sur  $\bar{V}_h$  est évidemment l'identité. ■

Le stabilisateur de  $h$  pour l'action de  $W$  sur  $H$  peut être plus gros que  $G(h)$  (voir les exemples qui suivent). Autrement dit le lieu critique de  $H \rightarrow H/W$  n'est pas simplement lié à la présence de singularités dans les fibres de  $\bar{V} \rightarrow H$  (voir aussi la remarque 3.6 de [7]).

THÉORÈME 7.3. — Soit  $h \in H$ . Les groupes  $W(h)$  et  $G(h)$  sont égaux. Autrement dit si  $u \in C'_H$  le stabilisateur de  $u$  pour l'action de  $W$  sur  $C_H$  est le groupe de Weyl associé aux singularités de  $F_u = \bar{V}_{\pi(u)}$  c'est-à-dire le sous-groupe de  $W$  engendré par les symétries  $s_a$  où  $a$  est un diviseur effectif et irréductible contracté par  $\bar{V}_{\pi(u)} \rightarrow V_{\pi(u)}$ .

On peut prouver ce théorème en utilisant le théorème 6.1, l'ouverture de la versalité et la connaissance de la monodromie des singularités rationnelles (voir par exemple [6], lemme 4.4).

On va ici en donner une démonstration purement algébrique s'appuyant sur le résultat suivant :

THÉORÈME 7.4. — Soit  $S \subset R$  une partie close et symétrique et  $Q(S)$  le  $\mathbb{Z}$  module engendré par  $S$ . Alors le groupe  $G(S)$  des automorphismes de  $P$  satisfaisant aux trois conditions suivantes :

(a) :  $g$  conserve la forme ( . ) ;

(b)<sub>S</sub> : Si  $S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n$  est la décomposition de  $S$  en parties closes et symétriques irréductibles,  $g(S_i) = S_i$  pour tout  $i = 1, \dots, n$ .

De (b)<sub>S</sub> on déduit une application linéaire  $\bar{g} : P/Q(S) \rightarrow P/Q(S)$  ;

(c)<sub>S</sub> :  $\bar{g}$  est l'identité ;

est le groupe de Weyl de  $S$  engendré par les réflexions  $s_a$  où  $a \in S$ .

Preuve. — Il est évident que si  $a \in S$ ,  $s_a \in G(S)$ . Rappelons que puisque  $S$  est clos et symétrique  $Q(S) \cap R = S$  et aussi que si  $S$  se décompose comme indiqué en (b)<sub>S</sub>, alors pour tout couple  $i \neq j$ ,  $S_i$  est orthogonal à  $S_j$ .

Il sera aussi fait constamment usage de la remarque suivante : (★) : pour tout  $Y$  non nul dans  $Q$ ,  $Y^2$  est pair et inférieur ou égal à  $-2$ .

LEMME 1. — (i) Soient  $S' \subset S \subset R$  deux parties closes et symétriques de  $R$ . Alors  $G(S') \subset G(S) \subset G(R) = W$ .

(ii) Soit  $S$  comme en 7.4,  $G(S) = G(S_1) \times G(S_2) \times \dots \times G(S_n)$ . Plus précisément les éléments de  $G(S_i)$  commutent avec ceux de  $G(S_j)$  ( $i \neq j$ ). Le produit des groupes ci-dessus doit aussi bien se comprendre comme produit de groupes abstraits que comme produit des sous-groupes  $G(S_i)$  de  $W$ .

Preuve du lemme. — (i) Soit  $g \in G(S')$ . Montrons que  $g$  satisfait à (b)<sub>S</sub>. Soit  $a \in S_i$  (on utilise les notations de 7.4). D'après (c)<sub>S'</sub> il existe  $b \in Q(S')$  tel que  $g(a) = a + b$ . Décomposons  $b$  en  $b_i + b'$  où  $b_i \in Q(S_i)$  et  $b'$  est orthogonal à  $Q(S_i)$ . Alors  $(g(a))^2 = a^2 = -2 = (a + b_i)^2 + b'^2$  et (★) entraîne que soit  $b' = 0$  et  $g(a) \in Q(S_i) \cap R = S_i$  (et on a gagné) ou que  $a = -b_i$ . Dans ce cas  $a$  est une racine dans  $Q(S')$  donc  $a \in S'$  et d'après (b)<sub>S</sub> est transformé par  $g$  en un élément de la même composante irréductible de  $S'$  donc en un élément de  $S_i$ .

(c)<sub>S</sub> est évident puisque  $Q(S') \subset Q(S)$ . On a montré que  $G(S') \subset G(S) \subset G(R)$ . Soit  $h \in G(R)$ ,  $h$  respecte donc la forme intersection et transforme  $w$  [qui engendre l'orthogonal de  $Q = Q(R)$ ] en un de ses multiples. La condition (c)<sub>R</sub> signifie précisément que  $w$  est fixé par  $h$  et le théorème 1.7 prouve que  $G(R) = W$ .

(ii) Soit  $g \in G(S)$  et  $X \in P$ . Il existe  $b_i$  unique appartenant à  $Q(S_i)$  ( $1 \leq i \leq n$ ) tel que  $g(X) = X + b_1 + \dots + b_n$ . Posons  $h_i(X) = X + b_i$ . Il est clair que  $h_i$  est linéaire.

Si  $h_1(X) = 0$ , on a  $X = -b_1$  et donc  $g(-b_1) = b_2 + \dots + b_n$  ce qui d'après  $(b)_S$  est absurde sauf si  $b_1 = b_2 = \dots = b_n = X = 0$ . Tous les  $h_i$  sont des automorphismes de  $P$ .

Montrons que  $h_i$  appartient à  $G(S_i)$  :

(a) Soit  $X$  une racine,  $X^2 = g(X)^2 = -2 = (X + b_1)^2 + \dots + (X + b_n)^2 - (n-1)X^2$  d'où :  $\sum_{i=1}^n [h_i(X)]^2 = -2n$  et d'après  $(\star)$  pour tout  $i$ ,  $h_i(X)^2 = -2$ . Les  $h_i$  sont donc des automorphismes qui envoient le système de racine  $R$  sur lui même. Ceci prouve que les  $h_i|_Q$  respectent  $(\cdot)_Q$ . De plus  $g \in W$  grâce au (i) et donc  $g(w) = w$  et par définition même  $h_i(w) = w$ . Ainsi  $h_i$  respecte la forme intersection sur  $P$  tout entier.

Les conditions  $(b)_S$  et  $(c)_S$  sont alors évidentes. Des calculs évidents montrent que  $G(S_i)$  commute à  $G(S_j)$  pour  $i \neq j$ , que  $g = h_1 \circ \dots \circ h_n$  et que  $G(S_1) \circ \dots \circ G(S_n) \subset G(S)$ . ■

La décomposition du (ii) de ce lemme étant aussi valable pour les groupes de Weyl de  $S$  et des  $S_i$ , il suffit de montrer 7.4 pour  $S$  irréductible.

LEMME 2. — Soit  $S \subset R$  clos et symétrique. On suppose que  $S$  est orthogonal à  $e_d \in P$ . Rappelons en indice l'entier  $d$ .  $P_{d-1}$  s'identifie naturellement à l'orthogonal de  $e_d$  dans  $P_d$  et  $S \subset P_{d-1}$ . Si  $g \in G(S)$  alors  $g(e_d) = e_d$  et :  $g \in G(S)_d$  (en considérant  $S \subset P_d$ ) si et seulement si  $g \in G(S)_{d-1}$  (ici on considère  $S$  dans  $P_{d-1}$ ).

Preuve. — Plus généralement soit  $X$  orthogonal à  $S$ . D'après  $(c)_S$ , il existe  $b \in Q(S)$  tel que  $g(X) = X + b$  et  $X^2 = g(X)^2 = X^2 + 2bX + b^2 = X^2 + b^2$  d'où  $b = 0$  et  $X$  est invariant par  $g$ . Le reste est trivial. ■

Soit  $\mathcal{P}$  l'ensemble des parties closes et symétriques irréductibles  $S$  de  $R \subset P_d$  qui ne sont jamais transformées par un élément de  $W$  en une partie close et symétrique de  $P_{d-1} \subset P_d$ . Il suffit donc de montrer 7.4 pour les éléments de  $\mathcal{P}$ .

Voici (pour chaque valeur de  $d$ ) une liste de parties closes et symétriques. A gauche on trouve le diagramme de Dynkin complété de  $R$ , à droite la liste en question qui s'obtient à partir des graphes de gauche par suppression de certains sommets (voir le paragraphe 4, Borel-De Siebenthal). On n'a pas précisé sur ces dessins le nom des racines mais le lecteur devrait pouvoir comprendre qui est qui. Il n'est pas utile de savoir ici ce que signifient les lettres  $(a)(b) \dots (e)$  à droite.

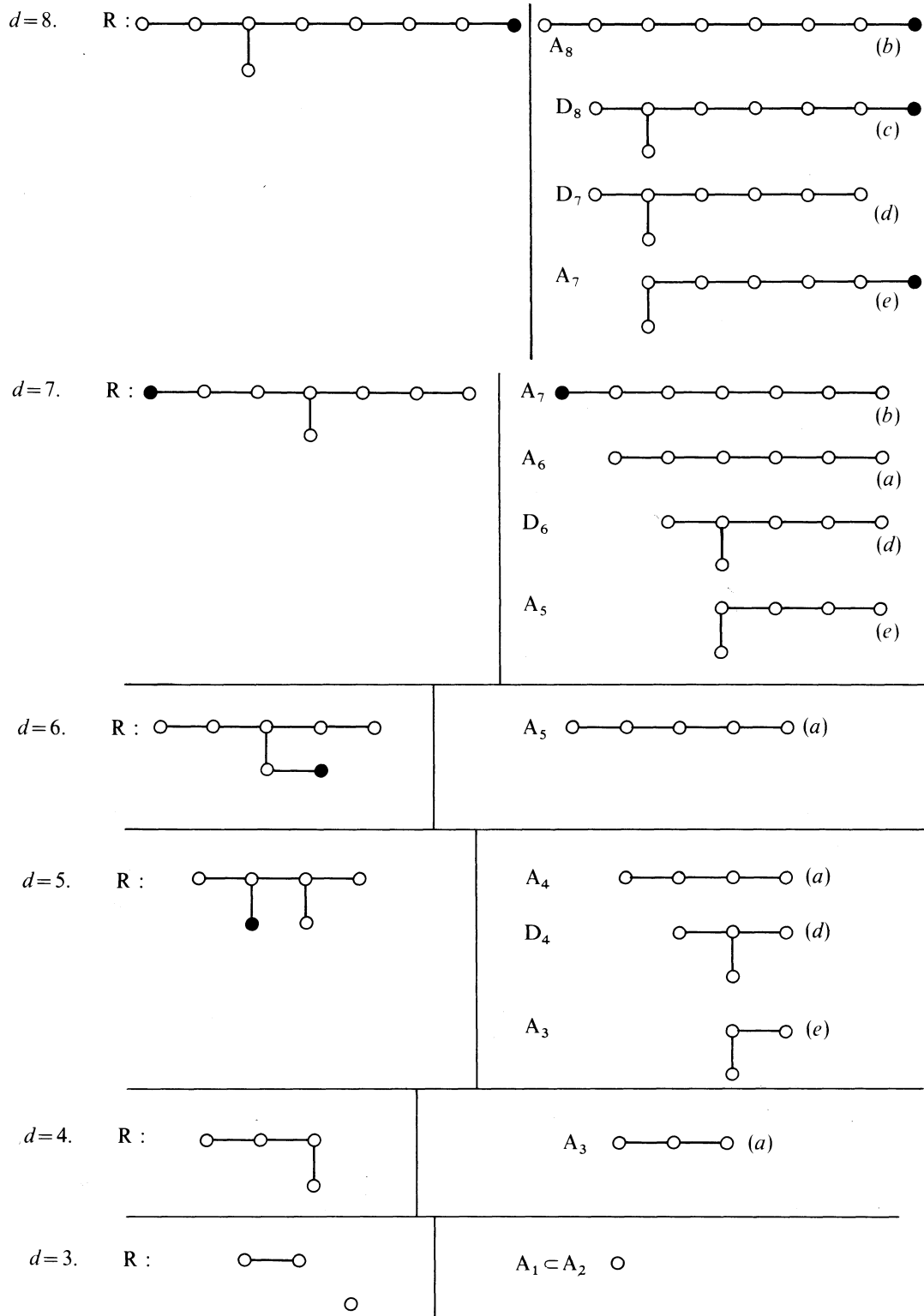
LEMME 3. —  $\mathcal{P}$  est inclus dans l'ensemble des transformés par  $W$  des éléments de la liste ci-après.

Preuve. — On peut en fait montrer que  $\mathcal{P} = \{f(S) \text{ où } f \in W \text{ et } S \text{ est dans la liste ci-dessus}\}$ .

Pour vérifier ce lemme on doit appliquer avec soin et patience la procédure de Borel-De Siebenthal. Il est facile de faire la liste des parties closes, symétriques et irréductibles de  $R$  mais certaines de ces parties apparaissent de plusieurs façons dans  $R$  (Remarque 4.5.1) ce qui crée une petite difficulté. Le lecteur peut vérifier la liste ci-dessus en utilisant les listes données par Du Val et Coxeter. ■

Preuve de 7.4. — Pour la liste qui suit (et ainsi fin de la preuve de 7.4).





Si  $g \in G(S)$ , il appartient au groupe  $A(S)$  (cf. [1], p. 143). On utilisera dans la suite les planches de Bourbaki pour connaître  $A(S)/W(S)$  où  $W(S)$  dénote le groupe de Weyl associé à  $S$ . On sait que  $W(A_1) = A(A_1)$  ce qui règle le cas  $d=3$ . On regroupe les démonstrations en tenant compte des lettres [de ( $a$ ) à ( $e$ )] situées à la droite des  $S$  de la liste qui précède.

(a) Cas  $S = A_{d-1} \subset E_d \subset P_d$  ( $7 \geq d \geq 4$ ). Soit  $g \in G(S)$ ,  $g(e_d) - e_d \in Q(S)$  c'est-à-dire est combinaison linéaire des  $a_i$  pour  $i \geq 2$ . En particulier  $e_0$  n'apparaît pas dans le développement de  $g(e_d)$  dans la base canonique de  $P$ . Puisque  $g(e_d)^2 = -1$ , un calcul élémentaire ou la liste des éléments exceptionnels donnée dans [4], montrent que  $g(e_d)$  est l'un des  $e_i$  ( $i > 0$ )  $G(S)$  est le groupe des permutations sur les  $e_i$  ( $1 \leq i \leq d$ ) et c'est bien le groupe de Weyl  $W(S)$ .

(b) Cas  $S = A_d \subset E_d \subset P_d$  ( $d=7$  ou  $8$ ).  $Q(S)$  est alors dense dans  $Q$ . Traitons le cas  $d=8$ , le cas  $d=7$  se réglant de la même façon. Supposons qu'il existe  $g \in G(S)$  n'appartenant pas à  $W(S)$ .  $A(S)/W(S)$  est engendré par l'image de  $-\text{Id} \in A(S)$ . Il existerait alors  $h \in G(S)$  tel que  $h|_Q = -\text{Id}_Q$ . On voit facilement qu'alors  $h(X) = 2(X \cdot w)w - X$ . Donc  $h(e_0) - e_0 = 16e_0 - 6(e_1 + \dots + e_8) \in Q(S)$ .  $Q(S)$  est le  $\mathbb{Z}$  module engendré par  $3a_1, a_2, \dots, a_8$  et le coefficient de  $e_0$  dans  $h(e_0) - e_0$  devrait être  $\equiv 0 \pmod{3}$  d'où la contradiction souhaitée.

(c) Cas  $S = D_8 \subset E_8 \subset P_8$ .  $Q(S)$  est encore dense dans  $Q$ .  $A(S)/W(S)$  est engendré par l'image de  $f$  qui opère sur le diagramme de Dynkin en fixant  $a_4, a_5, \dots, a_8$  et  $\tilde{a} = 2a_2 + 4a_3 + 6a_4 + 5a_5 + 4a_6 + 3a_7 + 2a_8 + 3a_1$  et en échangeant  $a_3$  et  $a_1$ . Supposons qu'il existe  $g \in G(S)$  tel que  $g|_S = f$ . Alors  $g(2a_2) = 2a_2 - a_1 + a_3$ , ce qui est absurde puisque  $a_3 - a_1$  n'est pas divisible par 2.

(d) Cas  $S = D_{d-1} \subset E_d \subset P_d$  ( $d=8, 7, 5$ ).  $Q(S)$  est engendré par  $a_1, a_3, a_4, \dots, a_d$ . Pour tout élément de  $Q(S)$  le coefficient de  $e_0$  et celui de  $-e_1$  sont égaux. Soit  $g \in G(S)$ , il existe  $b \in Q(S)$  tel que  $g(e_d) = e_d + b$ . Un calcul facile montre que les seuls éléments exceptionnels ayant même coefficient de  $e_0$  et de  $-e_1$  sont :  $e_2, e_3, \dots, e_d$  et  $e_0 - e_1 - e_i$  où  $i \geq 2$ . Le groupe  $W(S)$  est engendré par les permutations sur les  $e_i$  ( $i \geq 2$ ) et par  $s_{a_1}$ . Si  $g(e_d)$  est l'un des  $e_i$  on se ramène par permutation à  $g(e_d) = e_d$ . Dans l'autre cas on se ramène aussi par permutation à  $g(e_d) = e_0 - e_1 - e_2$  mais  $s_{a_1}(e_0 - e_1 - e_2) = e_3$  et on se retrouve avec le problème précédent. Grâce au lemme 2, on se réduit à montrer le résultat pour  $A_3$  (de base  $a_1, a_3, a_4$ ) inclus dans  $P_4$ . En transformant par un élément de  $W$  on se retrouve dans le cas réglé en (a) et c'est fini pour (d).

(e) Cas  $S = A_n \subset D_{n+1} = S' \subset R = E_d \subset P_d$  [ $d=8, n=7$  et  $S'$  est le cas (c);  $d=7$  ou  $5, n=d-2$  et  $S'$  est le cas (d)].  $A(S)/W(S)$  est engendré par  $-\text{Id}$ . Supposons par absurde qu'il existe  $h \in G(S)$  tel que  $h|_{Q(S)} = -\text{Id}$ . Il se trouve que  $n+1$  est pair et qu'alors (cf. Bourbaki)  $-\text{Id} \in W(D_{n+1})$ . Puisque  $S \subset D_{n+1}$ , le lemme 1 nous apprend que  $h \in G(S')$ . Par suite, soit  $h|_{Q(D_{n+1})} = -\text{Id}$  soit  $h \circ (-\text{Id})|_{Q(D_{n+1})}$  est la réflexion orthogonale par rapport à l'hyperplan de  $Q(D_{n+1})$  engendré par  $A_n$ . Dans le premier cas  $h(a_3) = -a_3$  ce qui contredit (c)<sub>S</sub> puisque  $2a_3 \notin Q(S)$ . Dans le second cas d'après les cas (c) ou (d)  $h \circ (-\text{Id}) \in W(D_{n+1}) = G(D_{n+1})$ . Il devrait exister une racine dans  $D_{n+1}$  orthogonale à tout  $A_n = S \subset D_{n+1}$  ce qui est absurde.

Ceci termine enfin la démonstration de 7.4. ■

*Preuve de 7.3.* — Il suffit de montrer que  $G(h) = G(R'(h))$  puisque le théorème 7.4 montre que  $G(R'(h)) = W(R'(h)) = W(h)$ . La proposition 7.2 montre que  $W(h) \subset G(h)$ . Soit

$g \in G(h)$ ,  $g$  opère trivialement sur  $\bar{V}_h$  en particulier :

(b)<sub>h</sub>  $g$  fixe les points singuliers de  $\bar{V}_h$ ;

(c)<sub>h</sub> agit trivialement sur les diviseurs de Weil de  $\bar{V}_h$ .

Ceci, joint à la proposition 4.3 entraîne que  $g$  satisfait aux conditions (b)<sub>R'(h)</sub> et (c)<sub>R'(h)</sub> — la condition (a) étant évidente puisque  $g \in W$  — et donc que  $g \in G(R'(h))$ . ■

**COROLLAIRE 7.5.** — *Le fixateur d'un point  $u \in C'_H$  pour l'action de  $W$  sur  $C_H$  est engendré par des réflexions. Le lieu critique de  $C_H \rightarrow C_H/W$  est le cône sur la sous variété de  $H$  définie par les équations de la remarque (1) suivant le théorème 4.5. Autrement dit c'est l'ensemble  $\{u \in C_H \mid F_u \text{ est singulier}\}$ .*

■. Ce résultat est à rapprocher de [7], corollaire 3.5.

7.6. *Exemples.* — Choisissons des périodes 1 et  $\tau$  de la courbe  $\hat{E}$  et notons  $b_i$  ( $1 \leq i \leq 9$ ) les points suivants de  $\hat{E}$  :  $b_i = \{(i-1)/3\} + [(i-1)/3] \cdot \tau/3$ . Comme d'habitude  $\hat{O}$  est l'origine choisie sur  $E$ ,  $[ \ ]$  indique la partie entière et  $\{ \}$  la partie fractionnaire. Les  $b_i$  sont les neuf points d'ordre 3 de  $\text{Pic}^0 E$ .

7.6.1. Soit  $L = 6\hat{O}$  (ici  $d=6$ ) et  $h = (A_0; A_1, \dots, A_6)$  avec :

$$A_0 = L + b_2 \quad \text{et} \quad A_i = \hat{O} + b_i \quad (1 \leq i \leq 6).$$

Les droites joignant les images dans  $\mathbb{P}(H^0(E, A_0))$  des points  $A_1 A_4, A_2 A_5, A_3 A_6$  (respectivement  $A_1 A_5, A_2 A_6, A_3 A_4$  ou  $A_1 A_6, A_2 A_4, A_3 A_5$ ) se recoupent en un point  $C_1$  (resp.  $C_2$  ou  $C_3$ ) qui appartient à  $j_{A_0}(E)$ . Le dessin suivant qui représente la situation dans  $\mathbb{P}(H^0(E, A_0))$  a été fait en plaçant la droite  $C_1 C_2 C_3$  à l'infini (fig. 4) :

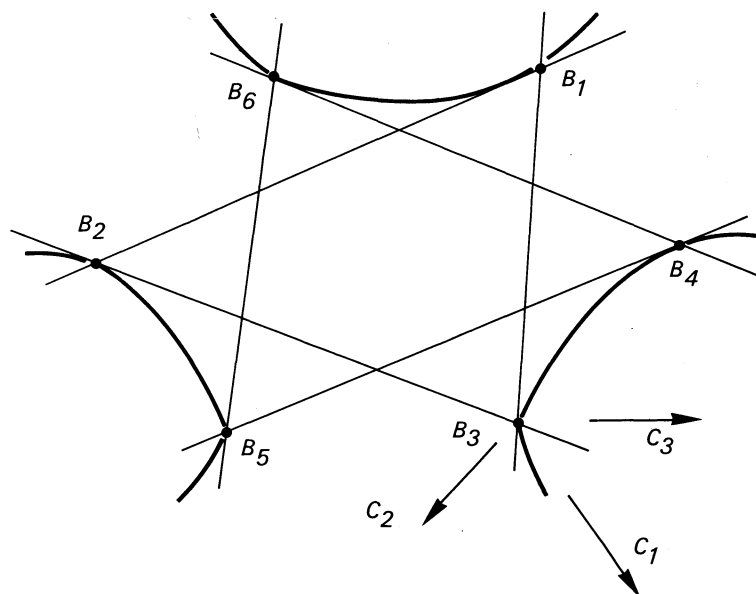


Fig. 3. — Les  $B_i$  sont les images des  $A_i$  par  $j_{A_0}$ .

Des calculs simples mais fastidieux montrent que l'action de  $g = S_{e_0 - (e_4 + e_5 + e_6)} \circ S_{e_0 - (e_1 + e_2 + e_3)}$  sur  $h$  se réduit à une permutation sur les  $A_i$  ( $1 \leq i \leq 6$ ). En composant avec cette permutation on a trouvé un élément  $f \in W$  qui fixe  $h$ . Il est facile de vérifier que  $f$  est d'ordre 3. D'autre part  $\bar{V}_h$  est une surface lisse. Les 27 droites de  $\bar{V}_h$  se coupent par trois sur  $\bar{E}_h^\infty$  en les neuf points d'inflexion de  $\bar{E}_h^\infty$  courbe dans le plan  $\mathbb{P}(H^0(E, L))$ . On voit donc que dans ce cas, bien que  $V_h$  soit lisse, le stabilisateur de  $h \in H$  n'est pas l'identité.

L'élément  $f$  précédent agit sur  $\bar{V}_h$  et permet d'obtenir un morphisme de degré 3 :  $\bar{V}_h \rightarrow \mathbb{P}(H^0(E, L))$  qui est ramifié sur  $\bar{E}_h^\infty$ . La surface précédente joue un rôle tout à fait particulier pour la singularité  $C_E$ . En effet grâce au revêtement ramifié précédent, on peut construire une famille plate  $G \rightarrow \mathbb{C}$  qui ait comme fibre au-dessus de 0 le cône  $\bar{C}_E$  et ailleurs  $\bar{V}_h$ , telle que  $G$  soit lisse. Ceci est à rapprocher par exemple de l'existence d'une famille lisse de fibre générique la courbe elliptique d'invariant modulaire 0 et de fibre spéciale la cissoïde, ou de même avec l'invariant modulaire 1728 et une droite tangente à une conique, ou...

7.6.2. Voici un exemple construit sur le modèle précédent avec  $\bar{V}_h$  singulier. Choisissons  $B \in E$  tel que  $B - \hat{O}$  ne soit pas de torsion dans  $J_0(E)$ . Posons  $h = (3B + b_2; B + b_1, \dots, B + b_6, A_7, A_8)$  (ici  $d = 8$ ) où  $A_7 = A_8$  est solution de  $2A_7 = 3A - \hat{O}$ . Alors  $\bar{V}_h$  a comme singularité un point double ordinaire correspondant à la racine  $e_7 - e_8$  et il est facile de vérifier que c'est bien la seule singularité. L'élément  $f$  construit dans l'exemple précédent fixe encore  $h$  mais puisqu'il est d'ordre 3, il ne peut appartenir à  $W(h) = \mathbb{Z}/2$ .

### 8. Plongement de Véronèse d'une quadrique de $\mathbb{P}^3$

Les quadriques irréductibles de  $\mathbb{P}^3$  sont des surfaces de faisceau anticanonique presque ample. Le morphisme anticanonique est le plongement de Véronèse. On peut dans cette situation faire exactement la même construction qu'auparavant. Les démonstrations étant rigoureusement identiques, on se contente de donner les idées essentielles.

8.1. Soit  $P$  le  $\mathbb{Z}$ -module engendré par  $e_1$  et  $e_2$  muni de la forme quadratique  $(\cdot, \cdot)$  définie par :  $e_1^2 = e_2^2 = 0$  et  $e_1 \cdot e_2 = 1$ . Soit  $w = -2(e_1 + e_2)$  et  $Q$  l'orthogonal de  $w$  dans  $P$ . On pose  $a_1 = e_1 - e_2$  et  $R = \{a \in Q \mid a^2 = -2\}$ . Alors  $Q$  est engendré par  $a_1$ ,  $R = \{-a_1, a_1\}$ , le groupe  $W$  des automorphismes de  $P$  laissant fixes  $w$  et  $(\cdot, \cdot)$  agit sur  $P$  en échangeant  $e_1$  et  $e_2$ .

Soit  $\hat{H} = Q \otimes E$ .  $\hat{H}$  est isomorphe à  $H = \{(X, Y) \in E \times E \mid X + Y = 2 \cdot \hat{O}\}$ . Posons  $L = 8 \hat{O}$ .

8.2. On va maintenant donner deux constructions de l'analogue de  $V \rightarrow H$  de la partie 2. A partir de cette famille tout se fait comme pour les surfaces de Del Pezzo.

PREMIÈRE CONSTRUCTION. — Plongeons  $E$  dans  $\mathbb{P}(H^0(E, X + Y + \hat{O}))$  grâce au diviseur  $X + Y + \hat{O}$ . Grâce à un fibré de Poincaré on peut faire ceci en famille. Il existe alors deux sections  $t_1$  et  $t_2$  telles que  $t_1(X, Y) = j_{X+Y+\hat{O}}(X)$  (idem pour  $t_2$  avec  $Y$ ). On peut, en famille, éclater  $t_1$  puis  $t_2$  puis enfin contracter la transformée stricte de la droite joignant  $t_1$  et  $t_2$ . La famille obtenue  $V \rightarrow H$  est plate et lisse.

DEUXIÈME CONSTRUCTION. — Plongeons  $E$  dans  $\mathbb{P}(H^0(E, 4\hat{O})) = \mathbb{P}^3$ . On sait que  $j_{4\hat{O}}(E)$  est l'intersection des quadriques qui le contiennent, et en fait même l'intersection complète de deux quadriques. Par  $E$  il passe donc un pinceau  $\Lambda$  de quadriques. Éclatons  $E$  dans  $\mathbb{P}^3$  et soit  $T$  le volume ainsi obtenu. Il est facile de vérifier que  $T \rightarrow \Lambda$  est un *morphisme*. La fibre générique de ce morphisme est lisse et isomorphe à  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ . Il y a quatre fibres singulières qui sont des cônes sur une conique plane lisse. Soit  $P = j_{4\hat{O}}(\hat{O})$ ; si  $Q$  est une quadrique du pinceau  $\Lambda$ ,  $Q$  est uniquement déterminée par les deux droites passant par  $P$  et contenues dans  $Q$ . Ces droites sont à leur tour définies par les points où elles recoupent  $j_{4\hat{O}}(E)$ . On obtient ainsi un revêtement double  $E \rightarrow \Lambda$  ramifié en chacun des points  $b_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) correspondant aux quatre cônes du pinceau  $\Lambda$ . Soit  $T' \rightarrow E$  l'image réciproque de  $T \rightarrow \Lambda$ .  $T'$  a quatre points singuliers, ce sont des points doubles ordinaires de volumes. On peut les résoudre de deux façons différentes en les remplaçant par des courbes rationnelles.

Il existe une façon de résoudre ces points singuliers telle que si  $V' \rightarrow T'$  est cette résolution, les fibres de  $V' \rightarrow E$  au-dessus des points  $b_i$  sont des surfaces lisses et réglées  $F_2$ .

La famille  $V' \rightarrow E$  ainsi obtenue est isomorphe à la famille  $V \rightarrow E$  de la première construction.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] N. BOURBAKI, *Groupes et algèbres de Lie*, chap. 4, 5 et 6, Hermann, Paris, 1969.
- [2] J. A. CARLSON, *The Obstruction to Splitting a Mixed Hodge Structure over the Integers*, I, Preprint, University of Utah.
- [3] H. S. M. COXETER, *Finite Groups generated by Reflections and their Subgroups Generated by Reflections* (*Proc. Cambridge Philos. Soc.*, vol. 30, 1934).
- [4] M. DEMAZURE, *Surfaces de Del Pezzo, II, III, IV et V* (*Lecture Notes in Math.*, n° 77, Berlin, Heidelberg, New York, Springer, 1980).
- [5] P. DU VAL, *On Isolated Singularities which do not Affect the Conditions of Adjunction*. III (*Proc. Cambridge Philos. Soc.*, vol. 30, 1934).
- [6] H. KNÖRRER, *Die Singularitäten vom Typ  $\tilde{D}$*  (*Math. Ann.*, vol. 251, 1980, p. 135-150).
- [7] E. LOOIJENGA, *Roots Systems and Elliptic Curves* (*Inventiones Math.*, vol. 38, 1976, p. 17-32).
- [8] E. LOOIJENGA, *On the Semi-Universal Deformation of a Simple Elliptic Singularity II* (*Topology*, vol. 17, 1978, p. 23-40).
- [9] Y. I. MANIN, *Cubic Forms*, Amsterdam North-Holland, 1974.
- [10] D. MUMFORD, *Abelian Varieties*, Oxford University Press, 1970.
- [11] H. PINKHAM, *Résolution simultanée de points doubles rationnels* (*Lecture Notes in Math.*, n° 777, Berlin, Heidelberg, New York, Springer, 1980).
- [12] H. PINKHAM, *Deformations of Algebraic Varieties with  $G_m$  Action* (*Astérisque*, vol. 20, Soc. Math. France, 1974).
- [13] H. PINKHAM, *Deformation of Normal Surface Singularities with  $C&$  Action* (*Math. Ann.*, vol. 232, 1978, p. 65-84).
- [14] H. PINKHAM, *Simple Elliptic Singularities, Del Pezzo Surface and Cremona Transformations* (*Proc. of Symposia in Pure Math.*, vol. 30, 1977, p. 69-70).
- [15] G. N. TJURINA, *Resolution of Singularities for Flat Deformations of Rational Double Points* (*Funk. Anal. i Pril.*, vol. 4, 1970, p. 77-83).

J. Y. MÉRINDOL  
 Faculté des Sciences.  
 boulevard Lavoisier.  
 49045 Angers Cedex

(Manuscrit reçu le 17 mars 1981.)