

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

P.-H. BLANCHET

## Sur la démonstration de la formule fondamentale de l'électrodynamique

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 1<sup>re</sup> série*, tome 2 (1865), p. 145-159

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1865\\_1\\_2\\_\\_145\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1865_1_2__145_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1865, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

SUR LA DÉMONSTRATION  
DE LA  
FORMULE FONDAMENTALE DE L'ÉLECTRODYNAMIQUE,

PAR FEU M. P.-H. BLANCHET,

ANCIEN MAÎTRE DE CONFÉRENCES A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE,  
INSPECTEUR GÉNÉRAL DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE (\*).

I.

On sait comment, dans sa *Théorie des phénomènes électrodynamiques*, Ampère établit la formule qui représente l'action réciproque de deux éléments de courant. En partant du principe des courants sinueux et de quelques propriétés générales des courants, faciles à constater par l'expérience, il démontre d'abord que l'action élémentaire dont il s'agit peut être considérée comme la somme de l'action réciproque de deux éléments de courant situés sur le prolongement l'un de l'autre, et de l'action réciproque de deux éléments de courant contenus dans le même plan et perpendiculaires à la droite qui joint leurs milieux. Ensuite il admet que ces deux actions varient l'une et l'autre en raison inverse d'une même puissance de la distance, et que, à égalité de distances et à égalité des éléments réagissants, elles offrent l'une avec l'autre un rapport constant, et il détermine la valeur numérique de ce rapport ainsi que l'exposant indéterminé de la distance par la considération de quelques cas d'équilibre donnés par l'observation.

On peut, en modifiant la marche des calculs, faire disparaître quelques-unes des restrictions dont cette méthode est affectée et retrouver la formule fondamentale

---

(\*) Je reproduis ici, d'après mes propres souvenirs et d'après ceux de quelques condisciples, notamment M. Simon, professeur au lycée Saint-Louis, une démonstration de la formule fondamentale de l'électrodynamique, plus générale que celle d'Ampère, que M. Blanchet a exposée plusieurs fois dans son enseignement de l'École Normale, de 1842 à 1848, mais qu'il n'a jamais publiée. E. VERDET.

de l'électrodynamique, sans supposer d'avance que les deux forces, dont l'action élémentaire électrodynamique est la résultante, sont inversement proportionnelles à une même puissance de la distance.

## II.

Lorsqu'on ne fait pas cette hypothèse, on doit représenter l'action réciproque de deux éléments de courant par la formule

$$ii' ds ds' [f(r) \cos \theta \cos \theta' + F(r) \sin \theta \sin \theta' \cos \omega],$$

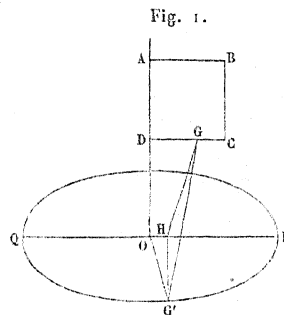
où les diverses lettres ont la même signification que dans la *Théorie des phénomènes électrodynamiques*, et la question est de déterminer les fonctions  $f(r)$  et  $F(r)$  par la considération de deux cas d'équilibre.

Les plus faciles à constater avec certitude, parmi ceux qu'Ampère et Savary ont successivement fait servir à l'établissement de la formule fondamentale sont les suivants :

- 1° *Un courant rectangulaire, qui ne peut que tourner autour d'un de ses côtés, demeure immobile sous l'action d'un courant circulaire qui a son centre sur l'axe de rotation et son plan perpendiculaire à cet axe;*
- 2° *L'action d'un solénoïde fermé sur un élément de courant est nulle.*

## III.

Il résulte du premier cas d'équilibre que, si l'on prend par rapport à l'axe de rotation les moments des actions exercées sur les trois côtés du rectangle mobile qui ne coïncident pas avec cet axe, la somme de ces moments est égale à zéro.



Soit en particulier l'action de l'élément fixe  $ds'$  dont le milieu est en  $G'$  sur l'élément mobile  $ds$  dont le milieu est en  $G$  (*fig. 1*); le moment de cette force par

rapport à l'axe de rotation est égal au produit de la distance  $DG = u$  du milieu de l'élément  $ds$  à l'axe et de la composante perpendiculaire au plan ABCD, c'est-à-dire à

$$ii' ds ds' u \cos \tau [f(r) \cos \theta \cos \theta' + F(r) \sin \theta \sin \theta' \cos \omega],$$

$\tau$  désignant l'angle de la droite  $GG'$  avec une perpendiculaire au plan ABCD. Si du point  $G'$  on abaisse une perpendiculaire  $G'H$  sur le diamètre du cercle PQ qui est contenu dans le plan ABCD, l'angle  $\tau$  étant l'angle  $GG'H$ , la considération du triangle  $GG'H$  donne

$$\cos \tau = \frac{G'H}{GG'} = \frac{a \sin q}{r},$$

si l'on désigne par  $a$  le rayon du cercle et par  $q$  l'angle  $POG'$ . Enfin, si l'on appelle  $\varepsilon$  l'angle des deux éléments l'un avec l'autre et qu'on ait égard à la relation connue

$$\cos \varepsilon = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos \omega,$$

on déduit de l'équilibre observé la condition analytique

$$\iint a ii' ds ds' \frac{u \sin q}{r} \{ [f(r) - F(r)] \cos \theta \cos \theta' + F(r) \cos \varepsilon \} = 0,$$

les intégrales étant étendues au cercle entier et aux trois côtés AB, BC, CD.

#### IV.

Occupons-nous d'abord du premier terme de l'intégrale, c'est-à-dire, en négligeant les facteurs constants, de

$$\iint ds ds' \frac{u \sin q}{r} [f(r) - F(r)] \cos \theta \cos \theta'.$$

On déduit de

$$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2,$$

$$\frac{dr}{ds} = \frac{x - x'}{r} \frac{dx}{ds} + \frac{y - y'}{r} \frac{dy}{ds} + \frac{z - z'}{r} \frac{dz}{ds} = \cos \theta,$$

$$\frac{dr}{ds'} = -\frac{x - x'}{r} \frac{dx'}{ds'} - \frac{y - y'}{r} \frac{dy'}{ds'} - \frac{z - z'}{r} \frac{dz'}{ds'} = -\cos \theta'.$$

En substituant  $\frac{dr}{ds}$  à  $\cos \theta$ , divisant et multipliant par  $r$ , et intégrant relativement

à  $s$ , on trouve

$$\int \frac{f(r) - F(r)}{r^2} \frac{dr}{ds} ds u r \cos \theta' = \left[ \frac{\psi(r)}{r} u r \cos \theta' \right]_1^2 - \int \frac{\psi(r)}{r} \frac{d(ur \cos \theta')}{ds} ds,$$

si l'on fait

$$\frac{f(r) - F(r)}{r^2} = \frac{d \cdot \frac{\psi(r)}{r}}{dr}.$$

Comme d'ailleurs  $u$  est nul aux deux extrémités du conducteur ABCD, le premier terme du second membre de la formule s'évanouit (\*), et il ne reste à considérer que l'intégrale

$$- \int \frac{\psi(r)}{r} \frac{d(ur \cos \theta')}{ds} ds.$$

Mais

$$\begin{aligned} \frac{d(ur \cos \theta')}{ds} &= r \cos \theta' \frac{du}{ds} + u \left( \cos \theta' \frac{dr}{ds} + r \frac{d \cos \theta'}{ds} \right) \\ &= r \cos \theta' \frac{du}{ds} - u \left( \frac{dr}{ds'} \frac{dr}{ds} + r \frac{d^2 r}{ds ds'} \right), \end{aligned}$$

et il n'est pas difficile de voir que

$$\frac{dr}{ds'} \frac{dr}{ds} + r \frac{d^2 r}{ds ds'} = - \left( \frac{dx}{ds} \frac{dx'}{ds'} + \frac{dy}{ds} \frac{dy'}{ds'} + \frac{dz}{ds} \frac{dz'}{ds'} \right) = - \cos \varepsilon;$$

donc

$$- \int \frac{\psi(r)}{r} \frac{d(ur \cos \theta')}{ds} ds = - \int \frac{\psi(r)}{r} \left( u \cos \varepsilon + r \cos \theta' \frac{du}{ds} \right) ds.$$

Enfin, si l'on prend le point D pour origine des arcs  $s$ , le point P pour origine des arcs  $s'$ , et qu'on appelle  $l$  la longueur DCBA,  $d$  la longueur DC, on a :

$$\begin{array}{lll} \text{de D en C} \dots\dots & \cos \varepsilon = - \sin q, & u = s, & \frac{du}{ds} = 1; \\ \text{de C en B} \dots\dots & \cos \varepsilon = 0, & u = d, & \frac{du}{ds} = 0; \\ \text{de B en A} \dots\dots & \cos \varepsilon = + \sin q, & u = l - s, & \frac{du}{ds} = -1. \end{array}$$

(\*) Cette conclusion ne serait en défaut que si  $\frac{\psi(r)}{r}$  était infini pour toute valeur de  $r$ , ce qui est évidemment impossible.

En outre, si l'on appelle  $h$  la hauteur de l'élément  $ds$  au-dessus du plan du courant circulaire, on a

$$r^2 = h^2 + (u - a \cos q)^2 + a^2 \sin^2 q = a^2 + h^2 + u^2 - 2au \cos q;$$

d'où, en différentiant par rapport à  $s'$ ,

$$r \frac{dr}{ds'} = -r \cos \theta' = au \sin q \frac{dq}{ds'},$$

c'est-à-dire, puisque, en vertu de la convention faite sur l'origine des arcs  $s'$ ,  $q = \frac{s'}{a}$ ,

$$r \cos \theta' = -u \sin q.$$

Si l'on a égard à ces diverses relations, l'intégrale cherchée se réduit en définitive à

$$2 \sin q \left[ \int_0^d \frac{\psi(r)}{r} u du + \int_d^0 \frac{\psi(R)}{R} u du \right],$$

$r$  désignant la distance d'un élément  $ds'$  à un élément  $ds$  pris sur le côté DC, et  $R$  la distance du même élément à un élément  $ds$  pris sur le côté BA.

En rétablissant les facteurs constants supprimés plus haut et indiquant la deuxième intégration, on obtient l'expression définitive

$$2 a i i' \int_0^{2\pi a} \sin^2 q ds' \int_0^d \left( \frac{\psi(r)}{r} - \frac{\psi(R)}{R} \right) u du.$$

Des transformations toutes semblables démontrent que

$$2 a i i' \int \int ds ds' \frac{u \sin q}{r} \mathbf{F}(r) \cos \varepsilon = - a i i' \int_0^{2\pi a} \sin^2 q ds' \int_0^d \left( \frac{\mathbf{F}(r)}{r} - \frac{\mathbf{F}(R)}{R} \right) u du.$$

V.

Si l'on réunit ces deux expressions, qu'on y remplace  $ds'$  par  $adq$ , et que, conformément à l'expérience, on égale à zéro la valeur de la somme des moments des forces par rapport à l'axe de rotation, on a l'équation de condition

$$a^2 i i' \int_0^{2\pi} \int_0^d \left[ \left( 2 \frac{\psi(r)}{r} - \frac{\mathbf{F}(r)}{r} \right) - \left( 2 \frac{\psi(R)}{R} - \frac{\mathbf{F}(R)}{R} \right) \right] u \sin^2 q du dq = 0,$$

et il est facile de démontrer que cette équation ne peut être satisfaite que si l'on a

$$2 \frac{\psi(r)}{r} - \frac{F(r)}{r} = \text{constante.}$$

Supposons en effet que cette expression soit variable, et que, de  $r = r_0$  à  $r = r_0 + h$ , elle soit constamment croissante avec  $r$ . Il sera toujours possible de donner au courant circulaire et au courant rectangulaire de l'expérience des dimensions telles, que pour tous les points de DC et de AB les valeurs de  $r$  et de  $R$  soient comprises entre  $r_0$  et  $r_0 + h$  (\*).  $r$  étant plus petit que  $R$  pour une valeur donnée des variables  $u$  et  $q$ , le facteur

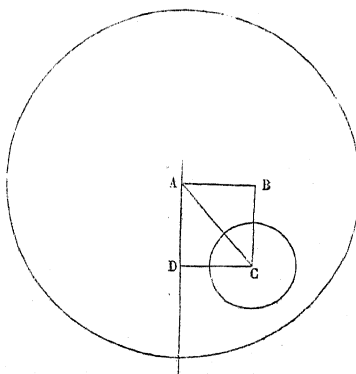
$$\left\{ \left[ \frac{2\psi(r)}{r} - \frac{F(r)}{r} \right] - \left[ \frac{2\psi(R)}{R} - \frac{F(R)}{R} \right] \right\}$$

sera positif dans toute l'étendue de l'intégrale; le facteur  $u \sin^2 q du dq$  étant lui-même positif, l'intégrale aura une valeur positive finie et la somme des moments des forces par rapport à l'axe de rotation ne sera pas nulle, ce qui est contraire à l'expérience.

On prouverait de même que l'expression dont il s'agit ne saurait être décroissante entre deux limites données; elle est donc constante.

(\*) Soit en effet ABCD (fig. 2) le conducteur rectangulaire mobile; les valeurs de  $r$  et de  $R$  seront comprises entre  $r_0$  et  $r_0 + h$  si le conducteur circulaire est extérieur à la sphère de rayon  $r_0$  qui a pour

Fig. 2.



centre le point C, et intérieur à la sphère du rayon  $r_0 + h$  qui a pour centre le point A. Cette condition pourra toujours être satisfaite si la première sphère est intérieure à la deuxième, c'est-à-dire si l'on donne au conducteur rectangulaire des dimensions telles, que la diagonale AC soit plus petite que  $h$ .

Ainsi,

$$\frac{2}{r} \frac{\psi(r)}{r} - \frac{F(r)}{r} = \text{const.}$$

Donc, en différentiant,

$$2 \frac{d \cdot \frac{\psi(r)}{r}}{dr} = \frac{d \cdot \frac{F(r)}{r}}{dr},$$

c'est-à-dire

$$2 \frac{f(r) - F(r)}{r^2} = \frac{d \cdot \frac{F(r)}{r}}{dr}.$$

Cette relation permet d'éliminer  $f(r)$  et de représenter l'action réciproque de deux éléments de courant par

$$ii' ds ds' \left[ \frac{1}{2} r^2 \frac{d \cdot \frac{F(r)}{r}}{dr} \cos \theta \cos \theta' + F(r) \cos \varepsilon \right].$$

La détermination de  $F(r)$  résulte de la considération du deuxième cas d'équilibre.

## VI.

Considérons d'abord l'action d'un courant fermé dont l'élément est  $ds$  sur un élément de courant  $ds'$  que, pour simplifier les formules, nous supposons placé à l'origine des coordonnées. La composante parallèle aux  $x$  de cette action est

$$ii' ds' \int \left[ \frac{1}{2} r^2 \frac{d \cdot \frac{F(r)}{r}}{dr} \cos \theta \cos \theta' + F(r) \cos \varepsilon \right] \frac{x}{r} ds,$$

c'est-à-dire, en remplaçant  $\cos \theta$  par  $\frac{dx}{ds}$  et intégrant par parties le premier terme de l'expression différentielle,

$$ii' ds' \left[ \frac{1}{2} \frac{F(r)}{r} x r \cos \theta' \right]_1 - ii' ds' \frac{1}{2} \int \frac{F(r)}{r} \frac{d \cdot x r \cos \theta'}{ds} ds + ii' ds' \int F(r) \cos \varepsilon \frac{x}{r} ds.$$

Le courant étant fermé, le premier terme de cette expression est nul, et comme on a

$$\frac{d \cdot x r \cos \theta'}{ds} = \frac{dx}{ds} r \cos \theta' + x \frac{d \cdot r \cos \theta'}{ds} = \frac{dx}{ds} r \cos \theta' + x \cos \varepsilon,$$



les deux autres termes se réduisent à

$$\frac{1}{2} i i' ds' \int \frac{F(r)}{r} \left( x \cos \varepsilon - r \cos \theta' \frac{dx}{ds} \right) ds.$$

On a donc, en appelant  $X ds'$  la composante cherchée,

$$X ds' = \frac{1}{2} i i' ds' \int \frac{F(r)}{r} \left( x \cos \varepsilon - r \cos \theta' \frac{dx}{ds} \right) ds.$$

Semblablement, on trouve pour les composantes parallèles aux  $y$  et aux  $z$  :

$$Y ds' = \frac{1}{2} i i' ds' \int \frac{F(r)}{r} \left( y \cos \varepsilon - r \cos \theta' \frac{dy}{ds} \right) ds,$$

$$Z ds' = \frac{1}{2} i i' ds' \int \frac{F(r)}{r} \left( z \cos \varepsilon - r \cos \theta' \frac{dz}{ds} \right) ds.$$

Mais en appelant  $\lambda, \mu, \nu$  les angles que fait la direction de l'élément  $ds'$  avec les axes des coordonnées, on a

$$\cos \theta' = \frac{x}{r} \cos \lambda + \frac{y}{r} \cos \mu + \frac{z}{r} \cos \nu,$$

$$\cos \varepsilon = \frac{dx}{ds} \cos \lambda + \frac{dy}{ds} \cos \mu + \frac{dz}{ds} \cos \nu,$$

et par conséquent

$$x \cos \varepsilon - r \cos \theta' \frac{dx}{ds} = \left( x \frac{dz}{ds} - z \frac{dx}{ds} \right) \cos \nu + \left( x \frac{dy}{ds} - y \frac{dx}{ds} \right) \cos \mu,$$

$$y \cos \varepsilon - r \cos \theta' \frac{dy}{ds} = \left( y \frac{dx}{ds} - x \frac{dy}{ds} \right) \cos \lambda + \left( y \frac{dz}{ds} - z \frac{dy}{ds} \right) \cos \nu,$$

$$z \cos \varepsilon - r \cos \theta' \frac{dz}{ds} = \left( z \frac{dy}{ds} - y \frac{dz}{ds} \right) \cos \mu + \left( z \frac{dx}{ds} - x \frac{dz}{ds} \right) \cos \lambda.$$

Donc, en faisant

$$A = \int \frac{F(r)}{r} (y dz - z dy),$$

$$B = \int \frac{F(r)}{r} (z dx - x dz),$$

$$C = \int \frac{F(r)}{r} (x dy - y dx),$$

$$X ds' = \frac{1}{2} ii' ds' (C \cos \mu - B \cos \nu),$$

$$Y ds' = \frac{1}{2} ii' ds' (A \cos \nu - C \cos \lambda),$$

$$Z ds' = \frac{1}{2} ii' ds' (B \cos \lambda - A \cos \mu).$$

Il résulte immédiatement de ces expressions que l'on a

$$X \cos \lambda + Y \cos \mu + Z \cos \nu = 0,$$

et

$$AX + BY + CZ = 0.$$

La première relation fait voir que la résultante des actions exercées par le courant fermé sur l'élément  $ds'$  est perpendiculaire à l'élément de courant.

La seconde fait voir que cette même résultante est perpendiculaire à la droite qui fait avec les axes des angles ayant respectivement pour cosinus

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Le plan mené par l'élément de courant et par la droite qui vient d'être définie est le *plan directeur* d'Ampère.

## VII.

Soit  $u$  la projection de la distance  $r$  sur le plan  $xy$ ,  $\varphi$  l'angle de cette projection avec l'axe des  $x$ , on a

$$u^2 d\varphi = y dx - x dy,$$

et par suite

$$C = \int \frac{F(r)}{r} u^2 d\varphi.$$

Supposons que l'origine des coordonnées soit en dehors de la projection du circuit fermé sur le plan  $xy$  (et il en sera toujours ainsi si le circuit fermé est un des circuits infiniment petits d'un solénoïde situé à distance finie de l'élément  $ds'$ , qui ne rencontre aucun des axes), à chaque valeur de  $\varphi$  répondront deux valeurs de  $u$ , pour lesquelles l'accroissement infinitésimal  $d\varphi$  aura des valeurs égales et de signes contraires. En appelant  $u_1$  et  $u_2$  ces deux valeurs,  $r_1$  et  $r_2$  les valeurs correspon-

dantes de  $r$ ,  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  les valeurs extrêmes de  $\varphi$ , on aura

$$C = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left[ \frac{F(r_1)}{r_1} u_1^2 - \frac{F(r_2)}{r_2} u_2^2 \right] d\varphi = - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{u_1}^{u_2} \frac{d \cdot \frac{F(r)}{r} u^2}{du} du d\varphi,$$

puisque

$$\frac{F(r_1)}{r_1} u_1^2 - \frac{F(r_2)}{r_2} u_2^2 = - \int_{u_1}^{u_2} \frac{d \cdot \frac{F(r)}{r} u^2}{du} du.$$

On peut regarder chaque système de valeurs des variables  $r$ ,  $u$  et  $\varphi$  comme déterminant un point d'une surface sur laquelle le circuit fermé est situé, et l'intégrale qui exprime la valeur de  $C$  peut être considérée comme étendue à tous les éléments de la portion limitée par ce circuit. La surface dont il s'agit est d'ailleurs arbitraire, car il est évident que la valeur de l'intégrale double ne dépend que du circuit fermé lui-même; mais une fois qu'elle est définie d'une manière quelconque, on peut regarder  $r$  comme une fonction des variables indépendantes  $u$  et  $\varphi$ .

En effectuant la différentiation indiquée pour  $\frac{F(r)}{r} u^2$ , on obtient

$$\frac{d \cdot \frac{F(r)}{r} u^2}{du} = u^2 \frac{d \cdot \frac{F(r)}{r}}{dr} \frac{dr}{du} + 2u \frac{F(r)}{r}.$$

Mais à cause de

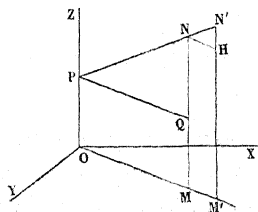
$$r^2 = u^2 + z^2,$$

on a

$$\frac{dr}{du} = \frac{u}{r} + \frac{z}{r} \frac{dz}{du},$$

et il est facile d'obtenir  $\frac{dz}{du}$ . Soit, en effet,  $N$  (*fig. 3*) le point défini par les valeurs particulières  $\varphi = \text{MOX}$  et  $u = \text{OM}$  des variables indépendantes,  $N'$  le point défini

Fig. 3.



par la même valeur de  $\varphi$  et une valeur de  $u$  infiniment peu différente; si l'on prolonge  $NN'$  jusqu'à sa rencontre en  $P$  avec l'axe des  $z$ , et que par les points

P et N on mène des parallèles à OM, la comparaison du triangle infinitésimal NN'H et du triangle fini PNQ donne

$$\frac{N'H}{NH} = \frac{NQ}{PQ},$$

c'est-à-dire

$$\frac{dz}{du} = \frac{z - OP}{u}.$$

Si maintenant par le point N on mène le plan tangent à la surface dont il vient d'être question, ce plan contiendra la droite NN', et, par conséquent, viendra rencontrer l'axe des  $z$  au point P, en sorte que si l'on représente d'une manière générale l'équation du plan par

$$\xi \cos \alpha + \eta \cos \beta + \zeta \cos \gamma = p,$$

on aura

$$OP = \frac{p}{\cos \gamma}.$$

Donc, en définitive,

$$\frac{dz}{du} = \frac{z \cos \gamma - p}{u \cos \gamma},$$

$$\frac{dr}{du} = \frac{u}{r} + \frac{z(z \cos \gamma - p)}{ur \cos \gamma} = \frac{r^2 \cos \gamma - pz}{ur \cos \gamma},$$

$$\begin{aligned} C &= - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{u_1}^{u_2} \left[ u^2 \frac{d \cdot \frac{F(r)}{r}}{dr} \left( \frac{r^2 \cos \gamma - pz}{ur \cos \gamma} \right) + 2u \frac{F(r)}{r} \right] du d\varphi \\ &= - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{u_1}^{u_2} \left\{ \left[ r \frac{d \cdot \frac{F(r)}{r}}{dr} + \frac{2F(r)}{r} \right] \cos \gamma - \frac{pz}{r} \frac{d \cdot \frac{F(r)}{r}}{dr} \right\} \frac{u du d\varphi}{\cos \gamma}, \end{aligned}$$

$p$  désignant la longueur de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur le plan de l'élément qui a pour projection sur le plan  $xy$  l'élément  $u du d\varphi$ , et  $\gamma$  l'angle de cette perpendiculaire avec l'axe des  $z$ .

On trouverait pour B et A des expressions analogues qu'il est inutile d'écrire.

### VIII.

Si le courant fermé est infiniment petit, les quantités  $r$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $p$  peuvent être regardées comme des constantes dans toute son étendue, et  $\frac{1}{\cos \gamma} \iint u du d\varphi$  est égal à l'aire  $\omega$  de la surface plane circonscrite par le cou-

rant. On a donc

$$\begin{aligned} C &= -\omega \left\{ \left[ r \frac{d \cdot \mathbf{F}(r)}{dr} + 2 \frac{\mathbf{F}(r)}{r} \right] \cos \gamma - \frac{pz}{r} \frac{d \cdot \mathbf{F}(r)}{dr} \right\}, \\ B &= -\omega \left\{ \left[ r \frac{d \cdot \mathbf{F}(r)}{dr} + 2 \frac{\mathbf{F}(r)}{r} \right] \cos \beta - \frac{py}{r} \frac{d \cdot \mathbf{F}(r)}{dr} \right\}, \\ A &= -\omega \left\{ \left[ r \frac{d \cdot \mathbf{F}(r)}{dr} + 2 \frac{\mathbf{F}(r)}{r} \right] \cos \alpha - \frac{px}{r} \frac{d \cdot \mathbf{F}(r)}{dr} \right\}. \end{aligned}$$

## IX.

Soit maintenant un système de courants fermés infiniment petits et infiniment rapprochés, égaux et équidistants, et normaux à une *courbe directrice* dont on représente les éléments par  $d\sigma$ . Si  $g$  est la distance de deux courants successifs, de façon qu'on puisse représenter par  $\frac{d\sigma}{g}$  le nombre des courants normaux à l'élément  $d\sigma$ , l'action exercée par ce *solénoïde* sur l'élément  $ds'$ , placé à l'origine des coordonnées, aura pour composantes parallèles aux axes

$$\begin{aligned} X ds' &= \frac{1}{2} i' ds' \frac{i\omega}{g} \left( \cos \mu \int \frac{C d\sigma}{\omega} - \cos \nu \int \frac{B d\sigma}{\omega} \right), \\ Y ds' &= \frac{1}{2} i' ds' \frac{i\omega}{g} \left( \cos \nu \int \frac{A d\sigma}{\omega} - \cos \lambda \int \frac{C d\sigma}{\omega} \right), \\ Z ds' &= \frac{1}{2} i' ds' \frac{i\omega}{g} \left( \cos \lambda \int \frac{B d\sigma}{\omega} - \cos \mu \int \frac{A d\sigma}{\omega} \right). \end{aligned}$$

L'expérience prouve que lorsque la courbe directrice du solénoïde est une courbe fermée, l'action est nulle. On a donc, dans cette hypothèse,

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0,$$

et, par suite,

$$\int \frac{C d\sigma}{\omega} = 0, \quad \int \frac{B d\sigma}{\omega} = 0, \quad \int \frac{A d\sigma}{\omega} = 0.$$

Mais on a en général, en remarquant que d'après la définition de la courbe directrice  $\cos \gamma = \frac{dz}{d\sigma}$ ,  $\frac{p}{r} = \frac{dr}{d\sigma}$ ,

$$\frac{C}{\omega} = - \left[ r \frac{d \cdot \mathbf{F}(r)}{dr} + 2 \frac{\mathbf{F}(r)}{r} \right] \frac{dz}{d\sigma} + z \frac{dr}{d\sigma} \frac{d \cdot \mathbf{F}(r)}{dr},$$

et, en intégrant par parties le dernier terme seulement,

$$\begin{aligned} \int \frac{C}{\omega} ds &= - \int \left[ r \frac{d \cdot \mathbf{F}(r)}{dr} + 2 \frac{\mathbf{F}(r)}{r} \right] \frac{dz}{d\sigma} d\sigma + \left[ z \frac{\mathbf{F}(r)}{r} \right]_1^2 - \int \frac{\mathbf{F}(r)}{r} \frac{dz}{d\sigma} d\sigma \\ &= - \int \left[ r \frac{d \cdot \mathbf{F}(r)}{dr} + 3 \frac{\mathbf{F}(r)}{r} \right] \frac{dz}{d\sigma} d\sigma + \left[ z \frac{\mathbf{F}(r)}{r} \right]_1^2. \end{aligned}$$

Le terme en dehors du signe  $\int$  se réduit à zéro lorsque le solénoïde est fermé, et il reste les trois relations suivantes :

$$\begin{aligned} \int \left[ r \frac{d \cdot \mathbf{F}(r)}{dr} + 3 \frac{\mathbf{F}(r)}{r} \right] \frac{dz}{d\sigma} d\sigma &= 0, \\ \int \left[ r \frac{d \cdot \mathbf{F}(r)}{dr} + 3 \frac{\mathbf{F}(r)}{r} \right] \frac{dy}{d\sigma} d\sigma &= 0, \\ \int \left[ r \frac{d \cdot \mathbf{F}(r)}{dr} + 3 \frac{\mathbf{F}(r)}{r} \right] \frac{dx}{d\sigma} d\sigma &= 0. \end{aligned}$$

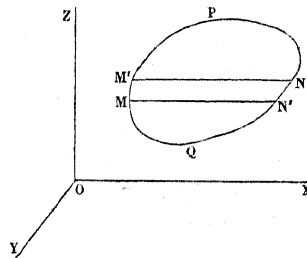
X.

Ces trois relations sont satisfaites si l'on a, le solénoïde étant fermé,

$$r \frac{d \cdot \mathbf{F}(r)}{dr} + 3 \frac{\mathbf{F}(r)}{r} = \text{const.},$$

et l'on peut démontrer que cette condition, qui est évidemment suffisante, est

Fig. 4.



nécessaire. Soit en effet MNPQ (fig. 4) la courbe directrice du solénoïde; soient

MM' et NN' deux éléments de cette courbe compris entre deux plans perpendiculaires à l'axe des  $z$  infiniment voisins; pour ces deux éléments les valeurs de  $\frac{dz}{d\sigma}d\sigma$  seront égales et de signe contraire. Si l'on appelle  $r$  la distance du point M à l'origine, R celle du point N,  $z_1$  et  $z_2$  la plus petite et la plus grande valeur de  $z$  pour la courbe directrice, la première des trois relations qu'on vient d'établir pourra se mettre sous la forme

$$\int_{z_1}^{z_2} \left[ r \frac{d \cdot \frac{F(r)}{r}}{dr} + 3 \frac{F(r)}{r} - R \frac{d \cdot \frac{F(R)}{R}}{dR} - 3 \frac{F(R)}{R} \right] dz = 0,$$

et l'on prouvera, comme on l'a fait plus haut dans un cas analogue, que le multiplicateur de  $dz$  est nécessairement nul.

## XI.

Ainsi, en appelant  $3h$  une constante indéterminée, on peut regarder comme déduit de l'expérience que

$$r \frac{d \cdot \frac{F(r)}{r}}{dr} + 3 \frac{F(r)}{r} = 3h.$$

Soit

$$\frac{F(r)}{r} - h = y,$$

cette relation devient

$$r \frac{dy}{dr} + 3y = 0,$$

d'où

$$y = \frac{k}{r^3},$$

et, par suite,

$$F(r) = hr + \frac{k}{r^2}.$$

Mais, comme on ne peut supposer que l'action élémentaire cherchée puisse en aucun cas être croissante *indéfiniment* avec la distance, on doit regarder la constante  $k$  comme nulle et poser simplement

$$F(r) = \frac{k}{r^2}.$$

Mettant cette valeur dans la relation démontrée plus haut

$$2 \frac{f(r) - \mathbf{F}(r)}{r^2} = \frac{d \cdot \frac{\mathbf{F}(r)}{r}}{dr},$$

on en déduit

$$f(r) = -\frac{1}{2} \frac{k}{r^2}.$$

Donc, en définitive, l'action élémentaire électrodynamique est égale, en négligeant le facteur constant  $k$ , à l'expression connue

$$\frac{ii' ds ds'}{r^2} \left( -\frac{1}{2} \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos \omega \right).$$