ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

J. BOURGET

Rendement des machines thermiques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série, tome 5 (1876), p. 111-122

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1876_2_5__111_0>

RENDEMENT
DES MACHINES THERMIQUES,

PAR M. J. BOURGET,

DIRECTEUR DE L'ÉCOLE PRÉPARATOIRE DE SAINTE-BARBE.

(Mémoire présenté à l'Institut le 6 mai 1872.)

D'après les idées nouvelles que la Théorie mécanique de la chaleur a introduites dans l'étude des machines à feu, on doit considérer le calorique comme le véritable moteur et le foyer comme le récepteur. On pourrait donc mesurer leur *rendement* en comparant le travail utile au poids de combustible brûlé. Toutefois, comme la puissance calorifique est variable pour les divers combustibles, comme les foyers utilisent des quantités diverses de combustible pour le chauffage, comme le travail absorbé par les résistances passives varie pour les diverses machines et pour une même machine suivant son état, cette mesure du rendement manquerait de précision. Nous prendrons une autre définition.

On sait aujourd'hui que le calorique et le travail mécanique sont des choses homogènes pouvant se remplacer l'une l'autre par équivalents à raison de 430 kilogrammètres environ par calorie [1]. Mais, quand on se sert de la chaleur pour produire du travail à l'aide d'un corps intermédiaire, on ne transforme jamais qu'une portion de celle

---

[1] Cette proposition a été démontrée par les nombreuses expériences de Joule, Hirn, etc. : elle a été démontrée aussi analytiquement par nous-même en 1857, dans un Mémoire sur les machines à air chaud, présenté à l'Institut, et plus tard dans un Mémoire qui fait partie des *Annales de Chimie et de Physique* (1859). Cette démonstration a été insérée par M. Regnault dans le tome XXXVII des *Mémoires de l'Institut*, page 559.

qu'on emprunte au foyer, et nous pouvons appeler *rendement théorique* [1] le rapport qui existe entre la chaleur *transformée* en travail et la chaleur *empruntée* à la source, au foyer. Nous distinguons le rendement théorique du *rendement effectif* : ce dernier serait le rapport qui existe entre le travail utile de la machine et le travail total que la machine devrait faire en vertu de son rendement théorique.

Il n'est pas évident, *a priori*, que l'on ne puisse pas transformer complétement en travail une quantité donnée de chaleur et qu'il y ait un *rendement théorique* maximum qu'on ne pourra jamais dépasser; cependant ce principe paraît aujourd'hui certain.

Si l'on admet, avec Clausius, qu'*il est impossible de faire passer de la chaleur d'un corps plus froid dans un corps plus chaud sans une dépense de travail*, on peut démontrer rigoureusement que, si une machine thermique quelconque opère entre deux températures extrêmes, t_1 et t_2, le rendement théorique ne peut dépasser la fraction

$$\rho = 1 - \frac{1 + \alpha t_1}{1 + \alpha t_2}$$

ou

$$\rho = \frac{T_2 - T_1}{T_2},$$

en nommant T_1 et T_2 les *températures absolues*, c'est-à-dire les températures comptées à partir de $-273° = -\frac{1}{\alpha}$.

Mais nous avouons que le principe de Clausius ne nous paraît pas avoir le degré d'évidence qui convient à un axiome. Nous avons donc cherché à démontrer le théorème du *rendement théorique*, indépendamment de ce principe métaphysique. La démonstration suivante, relative aux machines à gaz permanents, est complète et ne repose que sur les lois expérimentales connues. Si l'on joint cette démonstration à celle que nous avons donnée (*Annales de Chimie et de Physique*, 1859) du principe de l'équivalence, on a un premier chapitre de la Thermodynamique, aussi rationnel que l'Hydrostatique et l'Hydrodynamique.

---

[1] On appelle habituellement *coefficient économique* ce que nous nommons ici *rendement théorique*.

Notre analyse s'étend aussi aux machines dites à *récurrence* ou à *régénérateurs*, dans lesquelles une partie de la chaleur cédée aux réfrigérants est utilisée pour échauffer le gaz moteur du cycle suivant. Ces machines sont soumises à la loi du rendement théorique maximum; c'est une proposition qui n'est pas démontrée dans les Traités publiés jusqu'à présent sur les machines à feu.

Analyse.

1. Désignons par p et v la pression et le volume d'une masse gazeuse. Considérons ces deux éléments, qui définissent l'état de cette masse, comme l'ordonnée et l'abscisse d'un point. Une courbe fermée quelconque représentera un cycle d'états successifs, au bout desquels le gaz sera revenu à son état primitif. Nous avons démontré le théorème suivant [1] :

Si une masse gazeuse parcourt un cycle fermé quelconque d'états, dans le sens des aiguilles d'une montre, il y a anéantissement d'une quantité de chaleur proportionnelle à l'aire du circuit, qui représente le travail extérieur produit par le gaz, dans ses variations de pression et de volume.

En sens inverse, il y aurait anéantissement de travail extérieur et création proportionnelle de chaleur.

Une machine à gaz est un organe qui prend à un certain état $(p_0\, v_0)$ une masse gazeuse de poids (D_0), et qui la fait passer par une série d'états formant un cycle fermé, variable suivant la machine.

Cela posé, nous pouvons démontrer les théorèmes relatifs au rendement théorique, qui font l'objet de ce Mémoire.

2. Théorème I. — *Si une machine à gaz fonctionne suivant le cycle de Carnot, son rendement théorique sera*

$$\rho = 1 - \frac{1+\alpha t_1}{1+\alpha t_2} = \frac{T_2 - T_1}{T_2},$$

[1] *Voir* les *Annales de Chimie et de Physique* (1859), ou le tome XXXVII des *Mémoires de l'Institut*, page 559.

t_1 et t_2 étant les températures extrêmes entre lesquelles le gaz se meut, T_1, T_2 *désignant les températures absolues.*

Nous appelons *cycle de Carnot* celui qui est formé par deux courbes *isothermiques* ($pV =$ const.) et deux courbes *adiabatiques* ($pV^\gamma =$ const., $\gamma = \frac{c}{c'} = 1{,}41$). Nous désignerons par la lettre Q, affectée d'indices divers, les quantités de chaleur empruntées au foyer et par la lettre R, affectée d'indices divers, les quantités de chaleur reçues par les réfrigérants.

Soient (*fig.* 1)

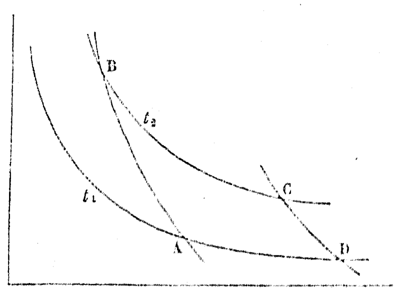
ABCD le cycle de Carnot considéré;
AD et BC les courbes isothermiques t_1 et t_2;
AB et CD les courbes adiabatiques.

Désignons par

$(v_1 p_1)$	l'état du gaz en	A;
$(v_2 p_2)$	»	B;
$(V_2 P_2)$	»	C;
$(V_1 P_1)$	»	D.

Faisons parcourir à la masse D_0 le cycle ABCD.

Fig. 1.



1° Suivant AB, courbe adiabatique, la dépense est nulle.

2° Suivant BC, courbe isothermique, la chaleur empruntée au foyer est

$$Q = \frac{H}{E}(1 + \alpha t_2)\, \mathcal{L} \frac{V_2}{v_2} \quad \text{ou} \quad Q = AH(1 + \alpha t_2)\, \mathcal{L} \frac{V_2}{v_2}$$

(*voir* notre Mémoire *Sur les machines à air chaud,* formule (40). Gauthier-Villars, 1871; ou notre Mémoire des *Annales de Chimie et de Physique*, 1859). Dans cette formule, E désigne l'équivalent mécanique de la chaleur, A son inverse, H le nombre 10333 kilogrammètres, $\mathcal{L}$ un logarithme népérien.

3° Suivant CD, courbe adiabatique, la dépense est nulle.

4° Suivant DA, courbe isothermique, la chaleur recueillie ou déposée dans le réfrigérant est

$$R = AH(1+\alpha t_1)\,\mathcal{L}\frac{V_1}{v_1}.$$

La chaleur transformée est donc Q — R, tandis que la chaleur empruntée au foyer est Q; donc le *rendement théorique* de la machine est

$$\frac{Q-R}{Q} = 1 - \frac{R}{Q} = 1 - \frac{1+\alpha t_1}{1+\alpha t_2}\,\frac{\mathcal{L}\dfrac{V_1}{v_1}}{\mathcal{L}\dfrac{V_2}{v_2}};$$

mais, par hypothèse,

$$p_1 v_1 = P_1 V_1, \quad p_2 v_2 = P_2 V_2,$$
$$p_1 v_1^\gamma = p_2 v_2^\gamma, \quad P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma;$$

de là on conclut sans peine

$$\frac{V_1}{v_1} = \frac{V_2}{v_2};$$

donc le rendement théorique de la machine, dans laquelle l'air suit le cycle de Carnot, est bien

$$\rho = 1 - \frac{1+\alpha t_1}{1+\alpha t_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2} = \frac{T_2 - T_1}{T_2}.$$

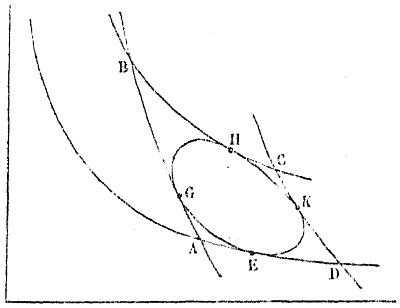
C. Q. F. D.

Ce qu'il y a de remarquable dans le cycle de Carnot, c'est que le gaz n'est jamais mis en contact avec des corps d'une température différente. Il n'y a jamais chute brusque de température. La chaleur n'est jamais donnée ou ôtée au gaz pour changer sa température; elle est tout entière employée à faire varier son volume, à effectuer un travail extérieur.

3. Théorème II. — *Si une machine fonctionne suivant un cycle quelconque autre que celui de Carnot, le rendement théorique est moindre que ρ.*

En effet, soit un cycle quelconque (*fig.* 2) autre que celui de Carnot EGHK. Nous pouvons toujours l'enfermer complétement dans un cycle

Fig. 2.



de Carnot par deux courbes isothermiques et deux courbes adiabatiques tangentes. Il pourrait arriver, sans que la démonstration fût un défaut, qu'une partie du cycle donné se confondît avec une partie du cycle de Carnot ABCD.

Nous désignerons par

	σ_1,	σ_2,	σ_3,	σ_4
les aires	EKD,	EAG,	GBH,	ECK,

et nous appellerons

R_1	la chaleur recueillie suivant	DE;
R_2	»	EA;
ρ_1	»	KE;
ρ_2	»	EG;
Q_1	la chaleur dépensée suivant	BH;
Q_2	»	HC;
χ_1	»	GH;
χ_2	»	HK.

D'après le théorème de l'équivalent déjà rappelé (1), nous avons les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
\rho_1 - R_1 &= A\sigma_1, &\text{d'où}\quad \rho_1 &= R_1 + A\sigma_1;\\
\rho_2 - R_2 &= A\sigma_2, & \rho_2 &= R_2 + A\sigma_2;\\
Q_1 - \chi_1 &= A\sigma_3, & \chi_1 &= Q_1 - A\sigma_3;\\
Q_2 - \chi_2 &= A\sigma_4, & \chi_2 &= Q_2 - A\sigma_4;
\end{aligned}$$

par suite, le *rendement théorique* sera

$$R = \frac{\chi_1 + \chi_2 - \rho_1 - \rho_2}{\chi_1 + \chi_2} = 1 - \frac{\rho_1 + \rho_2}{\chi_1 + \chi_2} = 1 - \frac{R_1 + R_2 + A\sigma_1 + A\sigma_2}{Q_1 + Q_2 - A\sigma_3 - A\sigma_4},$$

d'où l'on voit que ce rendement sera moindre que

$$\rho = 1 - \frac{R_1 + R_2}{Q_1 + Q_2} = \frac{T_2 - T_1}{T^2}.$$

C. Q. F. D.

Notre démonstration a l'avantage de montrer que la différence entre R et ρ est liée à la différence qui existe entre l'aire du cycle de Carnot et l'aire du cycle qui y est contenu. Elle fait voir que plus σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 s'approchent de zéro, plus le rendement théorique de la machine se rapproche de ρ, tout en lui restant inférieur.

Dans notre Mémoire *Sur les machines à air chaud*, nous avons donné, du même théorème, une démonstration moins complète et moins claire en enfermant le circuit donné dans un cycle autre que celui de Carnot.

Machines à récurrence.

4. On appelle *régénérateurs de chaleur* des organes destinés à recevoir momentanément dans le parcours d'un cycle une certaine quantité de la chaleur possédée par le gaz au moment où il va sortir de la machine. Cette chaleur est mise en réserve pour réchauffer le gaz nouveau qui doit parcourir le cycle suivant. Les machines munies de régénérateurs sont dites *à récurrence*. On peut imaginer, par exemple, dans la machine d'Ericsson, que l'air sortant traverse une série de tubes métalliques, tandis que l'air entrant pénètre en sens contraire et en circulant autour des surfaces extérieures de ces tubes. Ces dispositions

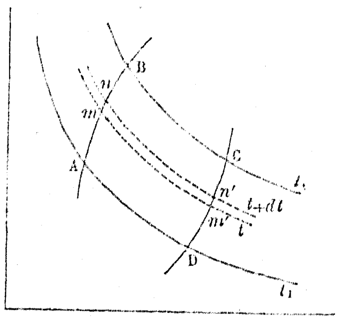
ingénieuses et d'autres qui ont été imaginées par Ericsson, Burdin, etc., donnent à une machine un rendement supérieur à celui qu'elle aurait si l'on perdait inutilement tout le calorique que l'air emporte en s'échappant dans l'atmosphère.

Une condition indispensable que le régénérateur doit remplir, c'est que la température de la portion qui est en contact avec l'air rentrant soit supérieure à celle de cet air, car un corps ne s'échauffe qu'au contact d'un corps plus chaud. Il ne suffit donc pas de mettre en réserve une certaine quantité de chaleur pour qu'elle soit utilisable, il faut encore qu'elle soit à une température suffisante. C'est pourquoi la chaleur déposée dans le réfrigérant par l'air qui suit un cycle de Carnot est complétement perdue pour le travail de la machine dans le cycle suivant.

Sans nous préoccuper des moyens pratiques les meilleurs pour disposer les régénérateurs dans les machines à gaz, nous allons chercher à étendre aux machines à récurrence les théorèmes relatifs au rendement théorique. Nous supposerons ces machines en mouvement depuis un temps indéfini, afin de négliger la perte qui résulte du calorique abandonné au régénérateur dans le premier cycle.

5. *Courbes conjuguées.* — Pour comprendre parfaitement ce qui va suivre, il faut avoir présent à l'esprit le principe que nous allons développer. Entre deux courbes isothermiques quelconques, t_1 et t_2 (*fig.* 3),

Fig. 3.



imaginons une courbe quelconque AB, assujettie à cette seule condition, qu'une courbe isothermique intermédiaire mm' ne puisse la couper qu'en un point m. Traçons maintenant une seconde courbe pareille CD et nommons *points correspondants* ceux qui sont, comme m, m', sur une même courbe isothermique. Désignons par p, v les coordonnées de m et par p', v' les coordonnées de m'. Si l'on a

$$v' = kv, \quad p' = \frac{p}{k}$$

pour deux points correspondants quelconques, la courbe CD est appelée la conjuguée de AB. D'après cela, si

$$F(v, p) = 0$$

est l'équation de AB ou d'une portion de AB, l'équation de CD ou de la portion correspondante de CD sera

$$F\left(\frac{v'}{k}, kp'\right) = 0.$$

La ligne AB peut être formée de plusieurs branches de courbes successives n'ayant pas la même équation; la conjuguée sera formée d'autant de branches successives correspondantes, mais k sera toujours la même constante.

Deux courbes conjuguées n'ont aucun point commun; car au point commun on devrait avoir

$$v' = kv = v, \quad \text{par suite} \quad k = 1.$$

Deux courbes conjuguées jouissent de cette propriété que *la chaleur dépensée pour parcourir deux éléments correspondants compris entre deux courbes isothermiques infiniment voisines t et $t + dt$ est la même.* En effet, pour passer de m en n, la dépense de chaleur est

$$c'\,dt + A p\,dv$$

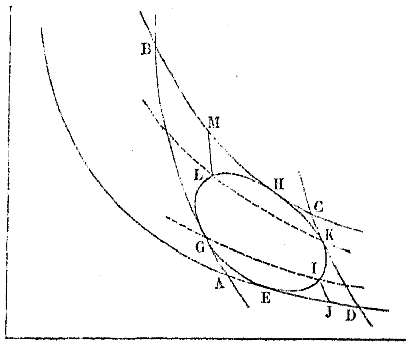
et, pour passer de m' en n', elle est

$$c'\,dt + A p'\,dv' = c'\,dt + A p\,dv.$$

De là résulte que, si ces deux éléments mn, $m'n'$ sont parcourus, pendant deux cycles successifs, en sens inverse l'un de l'autre, la chaleur recueillie dans le parcours de $n'm'$ pourra être mise en réserve et servir au passage du gaz de m en n, car ces deux chaleurs sont égales en quantité et en température.

6. Considérons maintenant un cycle quelconque EGHK (*fig.* 4); insérons-le dans un cycle de Carnot ABCD. Par les points G et K menons

Fig. 4.



des courbes isothermiques GI, KL. Nous avons vu que la source calorifique doit fournir de la chaleur le long de la branche GHK et que les réfrigérants recueillent de la chaleur le long de la branche KEG. Mais, si les portions du cycle GL et KI sont des portions *conjuguées*, la chaleur recueillie le long de KI pourra servir, élément par élément, à faire passer le gaz par les états successifs de GL. Donc, dans le cours d'un cycle, lorsque le régime de la machine sera établi, le foyer ne fournira de la chaleur que le long de LHK, et la seule chaleur réellement perdue sera celle qu'on recueille le long de IEG.

Il est clair que la machine a un rendement théorique supérieur à celui de la même machine sans récurrence; mais il n'est pas évident qu'il soit encore inférieur à celui d'une machine de Carnot. Nous allons démontrer qu'il en est ainsi dans tous les cas.

7. Théorème III. — *Dans une machine quelconque à récurrence, le rendement théorique est inférieur à celui d'une machine suivant le cycle de Carnot.*

Par les deux points L et I imaginons des portions de courbes adiabatiques LM, IJ. Nous remarquerons que les lignes complexes AGLM, CKIJ sont *conjuguées;* cela résulte de ce que deux courbes adiabatiques sont toujours conjuguées, puisque ce sont des courbes à dépense nulle de chaleur et que, par hypothèse, GL, IK sont deux branches conjuguées. Cela posé, nommons

$$\sigma'_1, \quad \sigma_2, \quad \sigma'_3, \quad \sigma_4$$

les aires

IJE, EAG, LHM, HCK,

et

R'_1	la chaleur recueillie le long de	JE,
R_2	»	EA,
ρ'_1	»	IE,
ρ_2	»	EG,
Q'_1	la chaleur dépensée le long de	MH,
Q_2	»	HC,
χ'_1	»	LH,
χ_2	»	HK,

et conservons d'ailleurs toutes les notations du théorème II. Nous aurons

$$\begin{aligned}
\rho'_1 - R'_1 &= A\sigma'_1, \quad \text{donc} \quad & \rho'_1 &= R'_1 + A\sigma'_1,\\
\rho_2 - R_2 &= A\sigma_2, & \rho_2 &= R_2 + A\sigma_2,\\
Q'_1 - \chi'_1 &= A\sigma'_3, & \chi'_1 &= Q'_1 - A\sigma'_3,\\
Q_2 - \chi_2 &= A\sigma_4, & \chi_2 &= Q_2 - A\sigma_4.
\end{aligned}$$

Le rendement de la machine à récurrence sera donc

$$\mathfrak{R} = \frac{\chi'_1 + \chi_2 - \rho'_1 - \rho_2}{\chi'_1 + \chi_2} = 1 - \frac{\rho'_1 + \rho_2}{\chi'_1 + \chi_2} = 1 - \frac{R'_1 + R_2 + A\sigma'_1 + A\sigma_2}{Q'_1 + Q_2 - A\sigma'_3 - A\sigma_4},$$

par suite

$$\mathfrak{R} < 1 - \frac{R'_1 + R_2}{Q'_1 + Q_2}$$

ou bien

$$\mathfrak{R} < 1 - \frac{1 + \alpha t_1}{1 + \alpha t_2}\,\frac{\mathcal{L}\dfrac{V_1}{v_1}}{\mathcal{L}\dfrac{V_2}{v_2}},$$

en désignant par

$$(p_1 v_1), \quad (P_1 V_1), \quad (p_2 v_2), \quad (P_2 V_2)$$

les états aux points

$$A, \quad J, \quad M, \quad C;$$

mais, en vertu des lignes conjuguées MLGA, CKIJ, on a

$$\frac{V_1}{v_1} = \frac{V_2}{v_2},$$

donc enfin

$$\mathfrak{R} < \rho.$$

C. Q. F. D.

Ainsi, qu'une machine à gaz fonctionne avec ou sans régénérateurs, le *rendement théorique* ne peut jamais dépasser celui du cycle de Carnot. C'est là une proposition fort importante au point de vue des applications industrielles.