ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

MASAKAZU SUZUKI

Sur les opérations holomorphes du groupe additif complexe sur l'espace de deux variables complexes

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 10, nº 4 (1977), p. 517-546

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1977_4_10_4_517_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.
4e série, t. 10, 1977, p. 517 à 546.

SUR LES OPÉRATIONS HOLOMORPHES DU GROUPE ADDITIF COMPLEXE SUR L'ESPACE DE DEUX VARIABLES COMPLEXES (1)

PAR MASAKAZU SUZUKI

Introduction

En 1968, R. Rentschler [7] a montré que toute opération algébrique du groupe additif d'un corps k de caractéristique nulle sur le plan affine k^2 est algébriquement équivalente à une opération de la forme $t \circ (x, y) = (x, y + f(x) t)$, où $t \in k$, $(x, y) \in k^2$ et $f \in k [X]$.

Le présent article est consacré à l'étude des opérations holomorphes du groupe additif $\mathbf{C}$ des nombres complexes. Après avoir rappelé au paragraphe 1 quelques notions introduites dans [14], on étudie dans le paragraphe 2 les opérations holomorphes $\varphi : \mathbf{C} \times V \to V$ de $\mathbf{C}$ sur une variété algébrique affine complexe V telle que, pour tout $t \in \mathbf{C}$, φ_t soit un automorphisme algébrique de V, où $\varphi_t(x) = \varphi(t, x)$. Une telle opération φ sera dite *quasi-algébrique*. On montrera tout d'abord par le passage à l'espace dual de l'espace des fonctions sur V (2), que toute opération quasi-algébrique de $\mathbf{C}$ sur V provient d'une opération de type exponentiel ψ sur un espace vectoriel complexe de dimension finie, c'est-à-dire $\psi_t = \exp t A$, A étant une matrice constante (§ 2, th. 1). Dans le même paragraphe, on trouve le résultat suivant (th. 2) : *Toute opération quasi-algébrique de* $\mathbf{C}$ *sur le plan affine complexe* $\mathbf{C}^2$ *à coordonnées* x, y, *est algébriquement équivalente à l'une des opérations suivantes* : 1° opérations dégénérées (i. e., opérations laissant invariantes les droites $x = \text{Cte}$); 2° opérations de type exponentiel : $t \circ (x, y) = \exp t A$, où A est une (2,2)-matrice à coefficients dans $\mathbf{C}$; 3° opérations de la forme $t \circ (x, y) = (x e^{\lambda t}, (y + t x^m) e^{m \lambda t})$, où m est un entier $\geqq 0$ et $\lambda \in \mathbf{C}^* = \mathbf{C} - \{ 0 \}$.

Dans le paragraphe 3, on étudie les opérations holomorphes de $\mathbf{C}$ sur l'espace $\mathbf{C}^2$ de deux variables complexes x, y *à orbites propres* (*cf.* le n° 6), et on montre, à l'aide du théorème de Mlle H. Saito [9], *qu'une telle opération* φ *est analytiquement équivalente à l'une des opérations suivantes* : 1° opérations dégénérées; 2° opérations de type exponentiel

(1) Une partie des résultats de cet article est annoncé dans [15].

(2) *Cf.* R. W. Richardson [8]. L'auteur doit cette idée à M. D. I. Lieberman que je voudrais remercier ici.

$t \circ (x, y) = (x e^{\lambda t}, y e^{\mu t})$ avec λ, $\mu \in \mathbf{C}^*$ et $\mu/\lambda \in \mathbf{Q}$; 3° opérations de la forme $t \circ (x, y) = (x e^{n\lambda(z) t}, y e^{-m\lambda(z) t})$, où $m, n \in \mathbf{N} - \{0\}$, $z = x^m y^n$ et λ est une fonction entière d'une variable; 4° opérations de la forme $\alpha^{-1} \circ \rho_t \circ \alpha$, où $\alpha(x, y) = (x, x^l y + a(x))$, $l \in \mathbf{N} - \{0\}$, $a(x)$ est un polynôme en x de degré $\leqq l-1$ tel que $a(0) \neq 0$ et ρ est une opération de type 3° ci-dessus telle que $\lambda(z)$ ait un zéro d'ordre $\geqq l/m$ en $z = 0$.

En combinant ce résultat avec le théorème de [14], on obtient le corollaire suivant : *Toute opération holomorphe du groupe multiplicatif complexe* $\mathbf{C}^*$ *sur l'espace* $\mathbf{C}^2$ *est analytiquement équivalente à une opération de la forme* $s \circ (x, y) = (s^m x, s^n y)$, *où* $s \in \mathbf{C}^*$, $(x, y) \in \mathbf{C}^2$ *et* $m, n \in \mathbf{Z}$.

Dans le paragraphe 4, on étudie les applications holomorphes *de type algébrique* (*cf.* le n° 8 pour la définition); on obtient d'abord une formule sur les indices le long des fibres critiques (*voir* la proposition 2 et son corollaire du n° 9); puis, on établit une proposition sur la finitude des valeurs critiques de ces applications (proposition 3 du n° 10), qui nous permet de généraliser le théorème de Nishino sur les fonctions entières de la classe (A) à notre cas (théorème N de la fin du n° 10). Ces résultats du paragraphe 4 sont utilisés dans les paragraphes 2 et 3.

I. — Généralités

1. Équivalences algébriques ou analytiques. — Soit $\varphi : \mathbf{C} \times \mathrm{V} \to \mathrm{V}$ une opération holomorphe du groupe additif complexe $\mathbf{C}$ sur un espace analytique V. On désignera par φ_t pour chaque $t \in \mathbf{C}$ l'automorphisme analytique de V défini par $\varphi_t(x) = \varphi(t, x)$, où $x \in \mathrm{V}$. Par définition, on a $\varphi_0 = \mathrm{id}$, $\varphi_{s+t} = \varphi_s \circ \varphi_t$, quels que soient s, $t \in \mathbf{C}$. Si V est une variété algébrique (complexe) et que chaque φ_t est un automorphisme algébrique de V, on dira que φ est *quasi-algébrique*. φ sera dite *algébrique*, si l'application $\varphi : \mathbf{C} \times \mathrm{V} \to \mathrm{V}$ est algébrique (régulière).

Deux opérations holomorphes (resp. quasi-algébriques) φ et ψ seront dites analytiquement (resp. algébriquement) *équivalentes* l'une à l'autre, s'il existe un automorphisme analytique (resp. algébrique) α de V tel que l'on ait $\psi_t = \alpha^{-1} \circ \varphi_t \circ \alpha$ pour tout $t \in \mathbf{C}$.

2. Types d'orbites, types d'opérations. — Si $x \in \mathrm{V}$ n'est pas un point fixe de φ, son orbite $\mathrm{C}_x = \{ \varphi_t(x) \mid t \in \mathbf{C} \}$ par φ est isomorphe, en tant que variété analytique abstraite, à $\mathbf{C}$, à $\mathbf{C}^* = \mathbf{C} - \{0\}$, ou bien à un tore complexe de dimension un; pour chacun de ces trois cas, on dira que C_x est *de type* $\mathbf{C}$, *de type* $\mathbf{C}^*$ ou *de type* T, respectivement. Comme on l'a vu dans [14], presque toutes les orbites sont d'un même type (topologique); précisément, il existe un sous-ensemble e de V de capacité logarithmique nulle, invariant par φ et tel que toutes les orbites dans $\mathrm{V} - e$ soient d'un même type. On dira que φ est *de type* $\mathbf{C}$, *de type* $\mathbf{C}^*$ ou *de type* T, si les orbites dans $\mathrm{V} - e$ le sont. Lorsque V est une variété de Stein, φ n'a évidemment aucune orbite de type T.

Théorème [14]. — *Soit* φ *une opération holomorphe de* $\mathbf{C}$ *sur un espace de Stein* V. *Alors, pour toute* φ*-orbite* C *de type* $\mathbf{C}^*$, *l'adhérence* $\overline{\mathrm{C}}$ *dans* V *de* C *est une courbe analytique* (*complexe*) *dans* V. ($\overline{\mathrm{C}} - \mathrm{C}$ consiste donc en un seul point, ou bien est vide).

N.B. — σ étant l'ensemble des points singuliers de $\hat{\varphi}$ (codim $\sigma \geqq 2$), dans [14] on a dit seulement que : l'adhérence dans $V-\sigma$ de C est une courbe analytique. Mais, en suivant la même idée de raisonnement que dans [14], on peut en fait montrer le théorème énoncé ici.

II. — Opérations quasi-algébriques

3. LINÉARISATION. — Soit $\overline{V}$ un espace analytique complexe compact, normal et irréductible, D un sous-ensemble analytique de $\overline{V}$ purement 1-codimensionel et posons $V = \overline{V} - D$. Soit A (V) l'espace vectoriel complexe (ou l'algèbre) des fonctions holomorphes sur V qui sont méromorphes sur $\overline{V}$, $\varphi : \mathbf{C} \times V \to V$ une opération holomorphe de $\mathbf{C}$ sur V telle que $f \circ \varphi_t \in A(V)$ pour tous $f \in A(V)$ et $t \in \mathbf{C}$. On a alors :

LEMME 1. — *Quelle que soit* $f \in A(V)$, *le sous-espace vectoriel* E_f *de* A (V) *engendré par l'ensemble* $\{f \circ \varphi_t \mid t \in \mathbf{C}\}$ *est de dimension finie sur* $\mathbf{C}$.

En effet, soit P un point régulier de D; prenons un système de coordonnées locales $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, y$ dans un voisinage U de P de façon que $D \cap U$ soit définie par l'équation $y = 0$ et que l'image de U dans l'espace $\mathbf{C}_n$ des variables $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, y$ soit de la forme $\Delta \times [\,|y| < 1]$, où Δ est un ouvert dans l'espace (x), où $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$. Considérons le développement de Laurent :

$$f \circ \varphi_t(x, y) = \sum_{-\infty < k < \infty} a_k(x, t)\, y^k$$

de la fonction $f \circ \varphi_t$ dans $\Delta \times [\,|y| < 1]$. On désignera par e_m ($m \in \mathbf{N}$) l'ensemble des points $t \in \mathbf{C}$ tels que $a_k(x, t) = 0$ sur Δ pour tout $k < -m$. On a alors,

$$\bigcup_{m \in \mathbf{N}} e_m = \mathbf{C},$$

puisque $f \circ \varphi_t \in A(V)$ pour chaque $t \in \mathbf{C}$. Par suite, il existe un entier positif M tel que e_m soit non-dénombrable, de sorte que e_M possède au moins un point d'accumulation. Or, $a_k(x, t)$ pour $k < -M$ est holomorphe sur $\Delta \times \mathbf{C}$ et s'annule sur $\Delta \times e_M$; on a donc, $a_k \equiv 0$ pour $k < -M$, ce qui dit que les diviseurs $\nu(f \circ \varphi_t)$ définis par les fonctions $f \circ \varphi_t$ sont $\geqq -M \cdot D$ au voisinage de P.

Comme D n'a qu'un nombre fini de composantes irréductibles, on peut donc trouver un entier $k_0 \in \mathbf{N}$ tel que $\nu(f \circ \varphi_t) \geqq -k_0 \cdot D$ (sur $\overline{V}$) pour tout $t \in \mathbf{C}$. Il en résulte que E_f est dans l'espace vectoriel complexe des fonctions $h \in A(V)$ telles que $\nu(h) \geqq -k_0 \cdot D$, qui est de dimension finie, (d'après K. Kodaira [3] et H. Cartan-J.-P. Serre [2]). Donc, E_f est aussi de dimension fini.

C.Q.F.D.

THÉORÈME 1. — *Soit* $\varphi : \mathbf{C} \times V \to V$ *une opération quasi-algébrique de* $\mathbf{C}$ *sur une variété algébrique affine complexe* V. *Il existe alors une application algébrique régulière et injective*

$\delta : V \to \mathbf{C}^m$ *pour un certain* $m \in \mathbf{N}$ *et une* (m, m)*-matrice* A *à coefficients complexes, de façon que l'on ait* $\delta \circ \varphi_t = (\exp t\,A) \circ \delta$ *pour tout* $t \in \mathbf{C}$.

En effet, soit V un sous-ensemble algébrique de $\mathbf{C}^n$ dont les coordonnées sont $x_1, x_2, \ldots, x_n$, A (V) l'espace des fonctions algébriques régulières sur V. Alors, d'après le lemme 1, le sous-espace vectoriel $E(x_i)$ de A (V) engendré par $\{ x_i \circ \varphi_t \mid t \in \mathbf{C} \}$ est de dimension finie pour chaque $i \in \{ 1, 2, \ldots, n \}$; par suite, la dimension m de $E = \sum_{i=1}^{n} E\ (x_i)$ est aussi finie.

On définit sur E une opération holomorphe μ de $\mathbf{C}$, en posant

$$\mu_t(f) = f \circ \varphi_t$$

pour $f \in E$, $t \in \mathbf{C}$. Chaque μ_t est linéaire. Soit E^* l'espace dual de E, μ^* la $\mathbf{C}$-opération sur $E^* \cong \mathbf{C}^m$ induite de μ par dualité :

$$\mu_t^*(z)(f) = z(\mu_t(f)),$$

où $z \in E^*, f \in E$; on a $\mu^* \in GL(m, \mathbf{C})$ pour tout $t \in \mathbf{C}$. Il existe donc une (m, m)-matrice A à coefficients dans $\mathbf{C}$ tel que l'on ait $\mu^* = \exp t\,A$ pour tout $t \in \mathbf{C}$.

Soit maintenant $\delta : V \to E^*$ l'application définie par $\delta(x) f = f(x)$, où $x \in V$ et $f \in E$. Puisque E contient les fonctions coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de $\mathbf{C}_n$ ($\supset$ V), δ est injective. On vérifie aisément

$$\delta \circ \varphi_t = \mu_t^* \circ \delta = (\exp t\,A) \circ \delta.$$

Remarque et notations. — Après un changement de coordonnées linéaire dans $\mathbf{C}^m$, on peut supposer que la matrice A est de la forme canonique de Jordan :

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_r \end{bmatrix},$$

où A_i est de la forme

$$\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & 0 & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & \lambda_i & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{bmatrix}, \qquad \lambda_i \in \mathbf{C}.$$

On désignera par E_i le sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}^m$ correspondant au facteur A_i ($\mathbf{C}^m = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i$); par $\delta_i : V \to E_i$ l'application composée de δ et de la projection canonique $\mathbf{C}^m \to E_i$. On a

$$\delta_i \circ \varphi_t = (\exp t\,A_i) \circ \delta_i.$$

Or, $\exp t\,A_i = e^{\lambda_i t} F_{m_i}(t)$, où $m_i = \dim E_i$ et $F_k(t)$ est (k, k)-matrice de la forme :

$$F_k(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{k-1}}{k-1} \\ & 1 & t & \cdots & \frac{t^{k-2}}{k-2} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & t \\ & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Si $u_{i1}, u_{i2}, \ldots, u_{im_i}$ sont les coordonnées de E_i, toute orbite dans E_i-(l'axe u_{i1}) de la C-opération $\mu_i = (\exp t\,A_i)_{t \in \mathbf{C}}$ est de type C. On désignera l'axe u_{i1} par L_i. L'opération μ_t restreinte à L_i est de la forme : $t.u_{i1} = e^{\lambda_i t} u_{i1}$. Par conséquent, une orbite C non-triviale de la C-opération $\mu = (\exp t\,A)_{t \in \mathbf{C}}$ sur $\mathbf{C}^m$ est de type $\mathbf{C}^*$ si, et seulement s'il existe un sous-ensemble Λ de $\{1, 2, \ldots, r\}$ tel que $C \subset \bigoplus_{i \in \Lambda} L_i$ $(\subset \mathbf{C}^m)$ et que l'on ait $\lambda_i/\lambda_j \in \mathbf{Q}$ pour toute paire $i, j \in \Lambda$ avec $\lambda_j \neq 0$. En particulier, toute μ-orbite de type $\mathbf{C}^*$ est une courbe algébrique. Comme $\delta : V \to \mathbf{C}^m$ est algébrique, il en résulte que :

COROLLAIRE 1. — *Toute orbite de type* $\mathbf{C}^*$ *d'une* $\mathbf{C}$*-opération quasi-algébrique sur une variété algébrique affine est une courbe algébrique.*

4. OPÉRATIONS DE TYPE C*.

COROLLAIRE 2. — *A toute* $\mathbf{C}$*-opération quasi-algébrique* φ *de type* $\mathbf{C}^*$ *sur une variété algébrique affine* V, *il correspond une* $\mathbf{C}^*$*-opération algébrique* ψ *sur* V *et un nombre complexe* k $(\neq 0)$ *tels que l'on ait*

$$\varphi_t = \psi_{\exp k.t}$$

pour tout $t \in \mathbf{C}$. *En particulier,* φ *n'a pas d'orbite de type* $\mathbf{C}$.

En effet, en utilisant les notations du numéro précédent, on a $\delta_i(V) \subset L_i$ pour tout i; l'application $\delta = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_r) : V \to \bigoplus_{i=1}^{r} L_i \cong \mathbf{C}^r$ satisfait à $\delta \circ \varphi_t = \mu_t \circ \delta$, où $\mu_t(z_1, z_2, \ldots, z_r) = (e^{\lambda_1 t} z, e^{\lambda_2 t} z, \ldots, e^{\lambda_r t} z)$. Si φ n'est pas triviale, il existe un $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ tel que $\lambda_i \neq 0$. Soit $\lambda_1 \neq 0$ pour fixer les idées. En supposant $\delta_i(V) \neq \{0\}$, on a $\lambda_i/\lambda_1 = n_i/n_1$ $(n_i \in \mathbf{Z},\ n_1 \in \mathbf{Z}-\{0\})$, car φ est de type $\mathbf{C}^*$. Soit $k = \lambda_1/n_1$ $(= \lambda_i/n_i)$. On a alors, $\varphi_{[t+(2\pi i/k)]} = \varphi_t$ pour $t \in \mathbf{C}$; par suite, en associant, à chaque $s \in \mathbf{C}^*$, $\psi_s = \varphi_{[(1/k)\log s]}$, on obtient une $\mathbf{C}^*$-opération ψ qui satisfait aux conditions demandées.

C.Q.F.D.

COROLLAIRE 3. — *Si* ψ *est une* $\mathbf{C}^*$*-opération quasi-algébrique sur une variété algébrique affine* V, *il existe une application algébrique régulière et injective* $\delta : V \to \mathbf{C}^r$ $(r \in \mathbf{N})$ *telle* *que l'on ait* $\delta \circ \psi_s = \mu_s \circ \delta$ *pour tout* $s \in \mathbf{C}^*$, *où*

$$\mu_s(z_1, z_2, \ldots, z_r) = (s^{n_1} z_1, s^{n_2} z_2, \ldots, s^{n_r} z_r)$$

et $n_1, n_2, \ldots, n_r \in \mathbf{Z}$. *En particulier,* ψ *est algébrique.*

On tire ce résultat de la preuve du corollaire 2 ci-dessus.

5. Opérations quasi algébrique de $\mathbf{C}$ sur le plan affine complexe. — Soit $E = \mathbf{C}^2$ le plan affine complexe, dont les coordonnées sont x, y. Commençons par donner quelques exemples de $\mathbf{C}$-opérations typiques sur E :

(1) *Opérations dégénérées.* — Si les droites définies par : $x = c$ ($c \in \mathbf{C}$) sont invariantes par une $\mathbf{C}$-opération holomorphe φ sur E, on a alors, comme on le vérifie aisément,

$$(\alpha) \ldots \varphi_t(x, y) = (x, y + a(x)\, t),$$

ou bien

$$(\beta) \ldots \varphi_t(x, y) = (x, e^{\lambda(x)\, t}(y - b(x)) + b(x)),$$

où $a(x)$, $\lambda(x)$ sont des fonctions entières d'une variable x et $b(x)$ est une fonction méromorphe de x telle que $\lambda(x) \cdot b(x)$ soit holomorphe sur le plan $|x| < \infty$. Ces deux types d'opérations seront dites *dégénérées.* Pour que (α) [resp. (β)] soit *quasi-algébrique,* il faut et il suffit que $a(x)$ [resp. $b(x)$] soit un polynôme de x (et que $\lambda \equiv$ Cte).

(2) *Opérations de type exponentiel.* — Une $\mathbf{C}$-opération holomorphe φ sur $\mathbf{C}^2$ telle que $\varphi_t(x, y) = (x, y) \exp t\,A$ [où $t \in \mathbf{C}$ et A est une (2,2)-matrice non-nulle à coefficients dans $\mathbf{C}$] se réduit, par une transformation linéaire de coordonnées, à une opération de la forme :

$$(\gamma)\ t \circ (x, y) = (e^{\lambda t} x, e^{\mu t} y);$$

ou bien

$$(\delta)\ t \circ (x, y) = (e^{\lambda t} x, e^{\lambda t}(y + tx)),$$

où $\lambda \in \mathbf{C}^* = \mathbf{C} - \{0\}$, $\mu \in \mathbf{C}$.

(3) *Opérations de la forme :*

$$(\delta_n)\ t \circ (x, y) = (e^{\lambda t} x, e^{n\lambda t}(y + tx^n)),$$

où $\lambda \in \mathbf{C}^*$, $n \in \mathrm{N}$ (= l'ensemble des entiers $\geqq 0$).

Théorème 2. — *Toute opération quasi-algébrique* $\varphi : \mathbf{C} \times E \to E$ *de* $\mathbf{C}$ *sur le plan affine complexe* E *est algébriquement équivalente* (*cf.* le n° 1) *à une opération dégénérée* (α) *ci-dessus avec* $a \in \mathbf{C}[X]$, *ou bien à l'une des opérations* (γ) *et* (δ_n) *ci-dessus* ($n = 0, 1, 2, \ldots$).

On commence par faire quelques remarques dont on aura besoin dans la preuve de ce théorème.

Lemme 2. — *L'ensemble des valeurs critiques d'une application polynômiale* $\alpha : \mathbf{C}^m \to \mathbf{C}^n$ *est un sous ensemble algébrique de* $\mathbf{C}^n$ [*on dit qu'un point* $z \in \mathbf{C}^n$ *est valeur critique de* α, *s'il n'existe aucun voisinage* U *de* z *tel que* α^{-1} (U) *soit même topologiquement un espace fibré trivial sur* U *par rapport à la projection* $\alpha|_{\alpha^{-1}(U)}$].

LEMME 3. — *Si une application polynômiale* $\alpha : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ *est injective*, α *est alors surjective et birégulière* (*i. e. l'application inverse est aussi polynômiale*).

LEMME 4. — *Soient* (M, p, S) *une famille holomorphe de courbes analytiques complexes irréductibles et d'ordre un sur un espace analytique* S [*i. e.* $p : M \to S$ *est une application holomorphe surjective et de rang constant* 1 *telle que* $p^{-1}(z)$ *soit irréductible et d'ordre un pour tout* $z \in S$], $f : M \to R$ *une application holomorphe de* M *dans une courbe analytique complexe* R *et enfin* $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ *une suite de points de* S *tendant vers un point* $z_0 \in S$ *telle que* $f|_{p^{-1}(z_n)}$ *soit injective pour tout* $n \in \mathbf{N}$. *Alors, si* $f_0 = f|_{p^{-1}(z_0)}$ *est non-constante*, f_0 *est injective* (*Théorème de Hurwitz*).

LEMME 5 [12]. — *Soit* $P(x, y) \in \mathbf{C}[x, y]$ *un polynôme irréductible de deux variables complexes* x, y *tel que la courbe définie par* : $P = 0$ *dans* $\mathbf{C}^2$ *soit non-singulière et simplement connexe. Alors, toute courbe définie par* : $P = \mathrm{Cte}$ *dans* $\mathbf{C}^2$ *est irréductible, non-singulière et simplement connexe. De plus, on peut trouver un autre polynôme* $Q(x, y) \in \mathbf{C}[x, y]$ *tel que l'application* : $x' = P(x, y)$, $y' = Q(x, y)$ *soit un automorphisme algébrique de* $\mathbf{C}^2$.

Nous allons maintenant montrer le théorème 2 :

1° Commençons par examiner le cas particulier suivant : on suppose qu'il existe deux polynômes non-constants $f, g \in \mathbf{C}[x, y]$ tels que l'on ait

$$f \circ \varphi_t = e^{\lambda t} f, \tag{1}$$

$$g \circ \varphi_t = e^{m\lambda t}(g + t f^m), \tag{2}$$

où $\lambda \in \mathbf{C}$ et $m \in \mathbf{N}$. Alors, φ est algébriquement équivalente à une opération de la forme (α) (dans le cas $\lambda = 0$), ou bien à une opération de la forme (δ_n) (dans le cas $\lambda \neq 0$), où $n \in \mathbf{N}$. En effet :

— *le cas* $\lambda = 0$: f est constante sur chaque orbite de φ [d'après (1)] et ces orbites dans $E - f^{-1}(0)$ sont de type $\mathbf{C}$ [d'après (2)]. Soit $f_0 \in \mathbf{C}[x, y]$ le polynôme primitif associé à f (*voir* le n° 8 du paragraphe 4). Il existe alors un polynôme $\xi \in \mathbf{C}[z]$ tel que $f = \xi(f_0)$; compte tenu du lemme 5, on a $f_0^{-1}(z) \approx \mathbf{C}$ pour tout $z \in \mathbf{C}$. Donc, d'après le lemme 5, il existe un polynôme $g_0 \in \mathbf{C}[x, y]$ tel que l'application $\alpha = (f_0, g_0) : E \to \mathbf{C}^2$ soit birégulière. La $\mathbf{C}$-opération $(\alpha \circ \varphi_t \circ \alpha^{-1})_{t \in \mathbf{C}}$ sur $\mathbf{C}^2$ est dégénérée, donc de type (α) ci-dessus.

— *le cas* $\lambda \neq 0$: comme toute orbite dans $\mathbf{C}^* \times \mathbf{C}$ de l'opération μ définie par $\mu_t(z, w) = (e^{\lambda t} z, e^{m\lambda t}(w + tz^m))$ est une courbe *non-algébrique*, l'application $\psi = (f, g) : E \to \mathbf{C}^2$ n'a pas de valeur critique dans $\mathbf{C}^* \times \mathbf{C}$ (d'après le lemme 2 ci-dessus); $E - f^{-1}(0)$ est par suite un revêtement fini de $\mathbf{C}^* \times \mathbf{C}$ par rapport à la projection ψ. Soit ν le nombre de feuillets de ce revêtement. Alors, $f_0 = \sqrt[\nu]{f}$ est régulier sur E, donc un polynôme. Les fibres $f_0^{-1}(z)$ de f_0 sont irréductibles, non-singulières et isomorphes à $\mathbf{C}$, y compris $f^{-1}(0)$, compte tenu du lemme 5. Si g est constante $\equiv b$ sur la fibre $F_0 = f_0^{-1}(0)$ $(= f^{-1}(0))$, on a $b = 0$, d'après (2). Soit k l'ordre de zéro de g sur F_0. Alors, le polynôme $g_0 = g/f_0^k$ est non-constant sur F_0 et de degré un sur chaque fibre

$f_0^{-1}(z)$ pour $z \in \mathbf{C}^*$. Donc, d'après le lemme 4 et le lemme 3, l'application

$$\alpha = (f_0, g_0) : \mathrm{E} \to \mathbf{C}^2$$

est birégulière.

On vérifie aisément :

$$(\alpha \circ \varphi_t \circ \alpha^{-1})(z, w) = (e^{\lambda' t} z, e^{n\lambda' t}(w + tz^n)),$$

où $\lambda' = \lambda/\nu$, $n = m\nu - k$. φ est donc algébriquement équivalente à une opération de type (δ_n).

2° Revenons maintenant au cas général : φ est une opération quasi-algébrique de $\mathbf{C}$ sur E. D'après le théorème 1, il existe une application polynômiale injective δ de E dans $\mathbf{C}^m$ ($m < \infty$) et une (m, m)-matrice constante A telle que $\delta \circ \varphi_t = (\exp t\mathrm{A}).\delta$ pour tout $t \in \mathbf{C}$.

On peut supposer :

(★) qu'il n'existe aucun sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}^m$ de codimension > 0, invariant par $\exp t\mathrm{A}$ pour tout $t \in \mathbf{C}$ et contenant l'image $\delta(\mathrm{E})$;

et que A est de la forme canonique de Jordan. On utilisera les notations introduites dans la remarque du théorème 1 (n° 3) : λ_i, A_i, E_i, δ_i, u_{ij}, etc. ($i = 1, 2, \ldots, r$; $j = 1, 2, \ldots, m_i$, où $m_i = \dim \mathrm{E}_i$). On posera $f_{ij} = u_{ij} \circ \delta_i$; ce sont des fonctions polynômiales sur E. Comme le sous-espace vectoriel de E_i défini par : $u_{im_i} = 0$ est invariant par $\exp t\mathrm{A}_i$, on a, d'après l'hypothèse (★), $f_{im_i} \not\equiv 0$ pour chaque i.

(i) Le cas où $m_i \geqq 2$ et $f_{im_i} \not\equiv \mathrm{Cte}$ pour un i. L'application

$$\psi = (f_{im_i}, f_{im_i - 1}) : \mathrm{E} \to \mathbf{C}^2$$

satisfait à $\psi \circ \varphi_t = \mu_t \circ \psi$ pour tout $t \in \mathbf{C}$, où μ est une $\mathbf{C}$-opération de la forme (δ_1). Donc, comme on l'a vu dans le cas 1°, φ est algébriquement équivalente à une opération de la forme (α), ou bien (δ_n), où $n \in \mathrm{N}$.

(ii) Le cas où $m_i \geqq 2$ et $f_{im_i} = a\ (\neq 0)$ pour un i. On a $\lambda_i = 0$. La fonction $g = f_{im_i - 1}$ satisfait à $g \circ \varphi_t = g + at$ pour tout $t \in \mathbf{C}$. Il en résulte que $g : \mathrm{E} \longrightarrow \mathbf{C}$ est une fibration analytique triviale sur $\mathbf{C}$; en effet, l'application $h : \mathbf{C} \times g^{-1}(0) \longrightarrow \mathrm{E}$ définie par $h(t, p) = \varphi_t(p)$ est un isomorphisme analytique. Donc, chaque fibre $g^{-1}(w)$ ($w \in \mathbf{C}$) est isomorphe à $\mathbf{C}$.

Or, si les λ_j ($j = 1, 2, \ldots, r$) sont tous nuls, $\exp t\mathrm{A}$ est un polynôme en t [à valeurs dans les (m, m)-matrices]; comme $\delta : \mathrm{E} \longrightarrow \mathbf{C}^m$ algébrique et injective, il en résulte que $\varphi : \mathbf{C} \times \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{E}$ est aussi algébrique régulière; sa restriction h à $\mathbf{C} \times g^{-1}(0)$ l'est aussi; h est donc un isomorphisme algébrique de $\mathbf{C} \times g^{-1}(0)$ sur E. On vérifie aisément : $(h^{-1} \circ \varphi_t \circ h)(z, w) = (z + t, w)$, où $t, z \in \mathbf{C}$, $w \in g^{-1}(0) \approx \mathbf{C}$. Donc, φ est algébriquement équivalente à une opération de la forme (α).

S'il existe un $\lambda_j \neq 0$ ($i \neq j$), l'application $\psi = (f_{jm_j}, g) : \mathrm{E} \longrightarrow \mathbf{C}^2$ satisfait à $\psi \circ \varphi_t = \mu_t \circ \psi$ pour l'opération μ de la forme (δ_0) avec $\lambda = \lambda_j$. Donc, d'après ce qu'on a vu dans le cas 1°, φ est algébriquement équivalente à une opération de la forme (δ_n), $n \in \mathrm{N}$.

(iii) Il ne reste donc qu'à examiner le cas où $\dim E_i = 1$ pour tout i. Remarquons d'abord que, dans ce cas, toute orbite de type $\mathbf{C}$ de l'opération $\exp t\,A$, ainsi que de l'opération φ, est une courbe *non-algébrique* (s'il en existe). Puis, si l'on factorise un $f_i = f_{i1}$ en un produit $g_1^{\nu_1} g_2^{\nu_2} \ldots g_n^{\nu_n}$ de polynômes irréductibles $g_k \in \mathbf{C}[x, y]$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, les courbes C_k définies par $g_k = 0$ dans E [les composantes irréductibles de $F_i = f_i^{-1}(0)$] sont invariantes par chaque φ_t $(t \in \mathbf{C})$, puisque F_i l'est. (Rappeler : $f_i \circ \varphi_t = e^{\lambda_i t} f_i$). Par suite, on a $g_k \circ \varphi_t = a_k(t).g_k$ pour chaque $t \in \mathbf{C}$, où a_k est une fonction holomorphe de t à valeurs dans $\mathbf{C}^*$. Comme $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$, on a $a_k(t)\, a_k(s) = a_k(t+s)$ pour tous s, $t \in \mathbf{C}$. On a donc, $a_k(t) = e^{\lambda'_k t}$, de sorte que $g_k \circ \varphi_t = e^{\lambda'_k t} g_k$, où $\lambda'_k \in \mathbf{C}$. Ainsi, en remplaçant chaque f_i par ses facteurs irréductibles, on peut supposer que *les f_i sont tous irréductibles.*

Voyons maintenant qu'il existe au moins un point fixe pour φ. En effet, si φ n'est pas triviale, les λ_i ne sont pas tous nuls; soit $\lambda_1 \neq 0$ et $f = f_1$ pour fixer les idées. Alors, l'application $f : E \to \mathbf{C}$ n'a pas de valeur critique dans $\mathbf{C}^* = \mathbf{C} - \{0\}$, car on a pour chaque point c de $\mathbf{C}^*$ et un voisinage simplement connexe U de c dans $\mathbf{C}^*$ un isomorphisme analytique $h : U \times f^{-1}(c) \to f^{-1}(U)$ défini par $h(t, p) = \varphi_t(p)$ en vertu de $f \circ \varphi_t = e^{\lambda t} f$ $(\lambda \neq 0)$. On a donc, d'après le corollaire de la proposition 2 (n° 9), $\chi(f^{-1}(0)) - \chi(f^{-1}(c)) = 1 - \chi(f^{-1}(c))$, de sorte que $\chi(f^{-1}(0)) = 1$, où $\chi(\bigstar)$ est la caractéristique d'Euler de $\bigstar$. Or, si φ n'a pas de point fixe sur la fibre $f^{-1}(0)$, celle-ci est une orbite non-triviale et algébrique de φ; on a donc, comme on l'a remarqué ci-dessus, $f^{-1}(0) \approx \mathbf{C}^*$, de sorte que $\chi(\mathbf{C}^*) = 1$, ce qui est absurde. Donc, φ possède au moins un point fixe [sur la fibre $f^{-1}(0)$].

Supposons que l'origine $x = y = 0$ est un point fixe de φ. Évidemment, $f_i(0, 0) = 0$ pour tout i. Comme $\delta = (f_1, f_2, \ldots, f_r) : E \to \mathbf{C}^r$ est injective, il existe un couple (i, j) d'indices telle que le déterminant fonctionnel

$$\left| \frac{\partial(f_i, f_j)}{\partial(x, y)} \right| \neq 0$$

en l'origine $x = y = 0$. On suppose que φ n'est pas triviale et que $\lambda_i \neq 0$. Nous allons montrer que l'application $\alpha = (f_i, f_j) : E \to \mathbf{C}^2$ est un isomorphisme algébrique. On posera $f = f_i$, $g = f_j$; $\lambda = \lambda_i$, $\mu = \mu_j$. Comme l'opération φ restreinte à la fibre $G = g^{-1}(0)$, irréductible dans E et non-singulière en l'origine $x = y = 0$, est une $\mathbf{C}$-opération holomorphe non-triviale, G est non-singulière dans E et isomorphe à $\mathbf{C}$. Donc, d'après le lemme 5 ci-dessus, on peut supposer que : $g \equiv y$, i. e. G = l'axe x.

— Le cas où $\mu = 0$. Les fibres de g (= les droites : y = Cte) sont invariantes par φ. φ est donc dégénérée et équivalente à l'opération de la forme (γ) avec $\mu = 0$.

— Le cas où $\mu \neq 0$. D'après le même raisonnement que celui qu'on a fait pour G, on voit que $F = f^{-1}(0)$ est aussi non-singulière et isomorphe à $\mathbf{C}_w$ = le plan $|w| < \infty$ d'une variable complexe w. On suppose que l'origine $(0, 0) \in F$ correspond à $w = 0$. Comme $F \cap G = (0, 0)$ et que F et G sont transversales l'une à l'autre en l'origine $(0, 0)$, la fonction $g \equiv y$ restreinte à F (= un polynôme en w) s'annule seulement en $w = 0$ et à l'ordre un; par suite, $g|_F$ est un polynôme en w de degré un. F est donc une section régulière de $g : E \to \mathbf{C}$. Par conséquent, $f|_{y = \mathrm{Cte}}$ sont des polynômes en x de degré un;

l'application $\alpha = (f, g) : E \to E$ et donc injective et birégulière. Par cette automorphisme α, l'opération φ se transforme en l'opération de la forme (γ) : $t \circ (x, y) = (e^{\lambda t} x, e^{\mu t} y)$, où $t \in \mathbf{C}$.

La démonstration du théorème 2 est achevée.

COROLLAIRE. — *Toute opération (quasi-) algébrique ψ de $\mathbf{C}^*$ sur le plan affine complexe* E *est algébriquement équivalente à une opération de la forme* : $s \circ (x, y) = (s^m x, s^n y)$, *où* $s \in \mathbf{C}^*$, $(x, y) \in E$ *et* $m, n \in \mathbf{Z}$.

En effet, parmi les opérations (α), (γ) et (δ_n) du théorème 2, seule (γ) avec $\mu/\lambda \in \mathbf{Q}$ est de type $\mathbf{C}^*$; donc, en appliquant le théorème 2 à la $\mathbf{C}$-opération φ définie par : $\varphi_t = \psi_{\exp t}$, on obtient un automorphisme algébrique α de E tel que $(\alpha \circ \psi_s \circ \alpha^{-1})(x, y) = (s^\lambda x, s^\mu y)$; on a $\lambda, \mu \in \mathbf{Z}$.

III. — Opérations holomorphes à orbites propres

6. INTÉGRALES PREMIÈRES. — Soient $\varphi : \mathbf{C} \times M \to M$ une opération holomorphe non-triviale de $\mathbf{C}$ sur une variété analytique complexe M de dimension complexe 2, Σ l'ensemble des points fixes de φ [ou les zéros du champ de vecteurs holomorphe $V(\varphi)$ associé à φ]. Un point P de M sera appelé *point régulier* de φ, s'il existe une fonction holomorphe h au voisinage de P telle que $(1/h) V(\varphi)$ soit holomorphe et non-nulle en P. Un point non-régulier de φ sera appelé *point singulier* de φ. L'ensemble σ des points singuliers de φ est discret et inclu dans Σ. De plus, on a un feuilletage analytique complexe $\mathscr{F}(\varphi)$ de dimension 1 de $M - \sigma$ tel que les feuilles soient invariantes par chaque φ_t, $(t \in \mathbf{C})$.

Remarque 1. — Lorsque M est une variété de Stein, les feuilles de $\mathscr{F}(\varphi) \mid M - \Sigma$ (les orbites non-triviales de φ) sont isomorphes à $\mathbf{C}$, ou à $\mathbf{C}^* = \mathbf{C} - \{0\}$; donc, d'après le lemme 5 de [13] et le lemme 6 du n° 9, toute feuille de $\mathscr{F}(\varphi)$ est analytiquement isomorphe ou bien à $\mathbf{C}$, ou bien à $\mathbf{C}^*$.

Soient C_x l'orbite d'un point $x \in M - \Sigma$ par φ, $j : \mathbf{C} \to C_x$ l'application définie par $j(t) = \varphi_t(x)$ et $K_1, K_2, \ldots, K_n, \ldots$ une suite de sous-ensembles compacts de C_x telle que $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = C_x$. On appellera

$$\omega(C_x) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{C_x - j(K_n)}$$

ensemble limite de C_x, où $\overline{\bigstar}$ est l'adhérence dans M de $\bigstar$. On dira que C_x est *propre*, si $\omega(C_x)$ est discret; si cela est le cas, l'adhérence $\overline{C_x}$ est une courbe analytique dans M.

Une fonction méromorphe f sur M sera appelée *intégrale première* de φ, si elle est invariante par φ, c'est-à-dire $f \circ \varphi_t = f$ pour tout $t \in \mathbf{C}$. Comme dim M = 2, s'il existe une intégrale première méromorphe non-constante de φ sur M, toute orbite de φ est propre. Réciproquement, en tenant compte de la remarque 1 ci-dessus, on a, d'après le théorème II de [13],

THÉORÈME 3. — *Si* M *est une variété de Stein de dimension complexe* 2, *toute* $\mathbf{C}$-*opération holomorphe* φ *sur* M, *à orbites propres, admet une intégrale première méromorphe non-*

constante sur M. *Plus précisément, on peut trouver une surface de Riemann* R, *une application holomorphe* $f: \mathrm{M}-\sigma \to \mathrm{R}$, *surjective et invariante par* φ, *et un sous-ensemble* e *de* R *de capacité logarithmique nulle tels que, pour tout* $z \in \mathrm{R}-e$, $f^{-1}(z)$ *consiste en une seule feuille de* $\mathscr{I}(\varphi)$.

Ce couple (R, f) sera appelée *l'espace de base des intégrales premières* (méromorphes) de φ ou de $\mathscr{I}(\varphi)$.

7. Opérations holomorphes de **C** sur $\mathbf{C}^2$ a orbites propres. — Dans tout ce qui suit, on supposera que φ est une **C**-opération holomorphe sur l'espace E de deux variables complexes x, y telle que toute son orbite soit *propre*.

Soit σ l'ensemble des points singuliers de φ; (R, f) l'espace de base des intégrales premières méromorphes de φ. $f: \mathrm{E}-\sigma \to \mathrm{R}$ est une application primitive (*cf.* le n° 8 du paragraphe 4). D'après la remarque du n° 8, R est isomorphe à **C**, ou bien à CP^1 (= la sphère de Riemann). On peut donc considérer f comme une fonction holomorphe ou méromorphe sur E suivant que $\mathrm{R} \approx \mathbf{C}$ ou $\mathrm{R} \approx \mathrm{CP}^1$, en tenant compte du fait que σ est discret.

Soit τ l'ensemble des points d'indétermination de f. Comme pour tout ouvert non-compact δ de R l'image réciproque $f^{-1}(\delta)$ dans $\mathrm{E}_0 = \mathrm{E}-\tau$ est une variété de Stein, on peut appliquer le théorème de Nishino [5 III] : si l'ensemble des points $z \in \mathrm{R}$ tels que l'une des surfaces premières (dans E_0) de f à valeurs z soit analytiquement isomorphe à **C** est de capacité logarithmique non-nulle, alors toute surface première de f est analytiquement isomorphe à **C**. Dans ce cas, on dira que f est *de type* **C**. Dans l'autre cas, on dira que f est *de type* $\mathbf{C}^*$, car presque toutes les surfaces premières de f sont alors analytiquement isomorphes à $\mathbf{C}^*$.

1° *Le cas où f est de type* **C**. f n'a pas de point d'indétermination (dans E). D'après le théorème N′ du n° 11, il existe un automorphisme analytique α de E tel que $f' = f \circ \alpha$ soit une fonction rationnelle (primitive) de x, y; par suite, d'après le corollaire de la proposition 2 (n° 9), on a

$$0 \leqq \sum_i \chi_i(f) = 1-\chi(\mathrm{R}).$$

Comme $\chi(\mathrm{CP}^1) = 2$, on a $\mathrm{R} \neq \mathrm{CP}^1$. On peut donc supposer : $\mathrm{R} = \mathbf{C}$, de sorte que f' est un polynôme (de type **C**). D'après le lemme 5 (§ 2), il existe un automorphisme algébrique β de E tel que $f' \circ \beta \equiv x$. Comme f est une intégrale première de φ, l'opération transformée

$$\varphi'_t = (\alpha \circ \beta)^{-1} \circ \varphi_t \circ (\alpha \circ \beta), \qquad t \in \mathbf{C},$$

laisse invariantes les droites : $x = \mathrm{Cte}$. φ' est donc l'une des opérations (α), (β) introduites au début du n° 5.

2° *Le cas où f est de type* $\mathbf{C}^*$. On a le :

Théorème de H. Saito. — *Toute fonction méromorphe primitive f de type* $\mathbf{C}^*$ *sur l'espace* E *de deux variables complexes* x, y *se réduit par un automorphisme analytique de* E *à une* *fonction composée* $\xi(f_0)$ *d'une fonction rationnelle* ξ *de degré un, et de*

$$f_0 = x^m [x^l y + P_l(x)]^n,$$

où $m, n \in \mathbf{Z} - \{0\}$, $l \in \mathbf{N}$ *et* $P_l(x)$ *est un polynôme de* x *de degré* $\leqq l-1$ [*si* $l = 0$, *on suppose que* $P_l(x) = 0$].

Ce théorème dû à M^lle^ H. Saito a été démontré dans [9] pour le cas où f est une fonction entière de x, y. Nous allons donc le démontrer ci-dessous en supposant que f est essentiellement méromorphe, c'est-à-dire $f : E_0 \to CP^1$ est surjective, où $E_0 = E - \sigma$ et σ est l'ensemble des points d'indétermination de f. Soit q le nombre des points de σ. On a $q \leqq 1$, puisque f est de type $\mathbf{C}^*$. En vertu du théorème N' du n° 11, il suffit de montrer le théorème en supposant que f est une fonction rationnelle (primitive).

(i) *le cas où* $q = 1$. On a, d'après le corollaire de la proposition 2 (n° 9) :

$$\sum_i \chi_i(f) = 1 - q = 0,$$

de sorte que $\chi_i(f) = 0$ pour tout i. Par suite, d'après la proposition 1 (n° 9), toute fibre $F_z = f^{-1}(z)$ $(z \in CP^1)$ dans E_0 est non-singulière, irréductible et isomorphe à $\mathbf{C}^*$. Son adhérence $\overline{F}_z$ passe par le point d'indétermination σ. Soit $P(x, y)$ [resp. $Q(x, y)$] $\in \mathbf{C}[x, y]$ le polynôme irréductible s'annulant sur $\overline{F}_0$ (resp. $\overline{F}_\infty$); on a $f = P^m/Q^n$, où $m, n \in \mathbf{N} - \{0\}$. Si l'on désigne par h_z pour chaque z une application holomorphe bijective du plan $\mathbf{C}_{(t)}$: $|t| < \infty$ sur $\overline{F}_z$ telle que $h_z(0) = \sigma$, l'application composée :

$$\mathbf{C}_{(t)} \xrightarrow{h_z} \overline{F}_z \xrightarrow{P^m} \mathbf{C} \qquad (\text{resp. } \mathbf{C}_{(t)} \xrightarrow{h_z} \overline{F}_z \xrightarrow{Q^n} \mathbf{C})$$

pour $z \neq 0$ (resp. $z \neq \infty$) est un polynôme de t s'annulant seulement en $t = 0$; par suite, il est de la forme $a.t^k$, où $a \in \mathbf{C}^*$, $k \in \mathbf{N} - \{0\}$. Par conséquent, si l'on désigne par $\mu : E \to \mathbf{C}_{(u, v)}$ l'application définie par

$$u = P^m(x, y), \qquad v = Q^n(x, y),$$

chaque F_z $(z \in CP^1)$ est un revêtement fini de $L_z^* = L_z$ — l'origine par la projection $\mu|_{F_z}$, où L_z est la droite définie dans $\mathbf{C}^2_{(u, v)}$ par : $v = zu$. On peut donc définir sur E une $\mathbf{C}^*$-opération quasi-algébrique $\psi = (\psi_s)_{s \in \mathbf{C}^*}$ satisfaisant à $\mu \circ \psi_s = \rho_s \circ \mu$ pour $s \in \mathbf{C}^*$, où $\rho_s(u, v) = (s^k u, s^k v)$ et k = le nombre des feuillets de E sur $\mathbf{C}^2_{(u, v)}$ par rapport à la projection μ $(k < \infty)$. D'après le corollaire du théorème 2 (§ 2), il existe un automorphisme algébrique α de E par lequel φ se réduit à une opération de la forme $s \circ (x, y) = (s^\lambda x, s^\nu y)$, où $s \in \mathbf{C}^*$ et $\lambda, \nu \in \mathbf{Z} - \{0\}$. Compte tenu du fait que f est une intégrale première primitive de φ, il en résulte que

$$(f \circ \alpha)(x, y) = \xi(x^\nu y^\lambda),$$

où ξ est une fonction rationnelle de degré 1.

(ii) *Le cas où* $q = 0$. Comme on a, d'après le lemme 7 du n° 10,

$$\operatorname{rang} H_1(\mathbf{C}^2 - f^{-1}(z)) \leqq \operatorname{rang} H_1(\mathbf{C}^*) + \operatorname{rang} H_1(CP^1 - z) = 1,$$

$F_z = f^{-1}(z)$ est donc irréductible pour tout $z \in \mathrm{CP}^1$. D'après le corollaire de la proposition 2 (n° 9), il existe un seul $c \in \mathrm{CP}^1$ tel que $\chi_c(f) = 1$; par suite F_c est homéomorphe à **C**. Comme le nombre de Milner d'un germe irréductible de courbe analytique complexe dans $\mathbf{C}^2$ est paire, F_c est non-singulière. Il existe donc, d'après le lemme 5 (§ 2), un automorphisme algébrique α de E tel que $\alpha(F_c)$ soit l'axe : $x = 0$. On posera $g = f \circ \alpha^{-1}$.

Pour chaque $z \in \mathrm{CP}^1 - \{ c \}$, la fibre $g^{-1}(z)$ est une courbe algébrique non-singulière et isomorphe à $\mathbf{C}^*_{(t)} : 0 < |t| < \infty$; $x|_{g^{-1}(z)}$ est une fonction rationnelle non-constante de t qui ne prend ni zéro ni pôle sur $0 < |t| < \infty$, par suite, de la forme $a.t_k$, où $a \in \mathbf{C}^*$ et $k \in \mathbf{Z} - \{ 0 \}$. $g^{-1}(z)$ est donc un revêtement fini de $\mathbf{C}^*_{(x)} : 0 < |x| < \infty$ par la projection canonique sur le plan x. Par conséquent, à chaque courbe continue fermée c sur $\mathbf{C}^*_{(x)}$ à point de base a, il correspond un automorphisme analytique de monodromie

$$\theta_c : \mathrm{L}_a \to \mathrm{L}_a$$

pour le feuilletage définie par les fibres $g^{-1}(z)$ dans E – (l'axe y), où L_a est la droite : $x = a$. On considèrera y comme une fonction de coordonnée de L_a; alors, $\theta_c(y)$ est un polynôme de y de degré 1.

Or, θ_c possède un (et un seul) point fixe. En effet, si non, $\theta_c(y)$ est de la forme $y+b$ $(b \neq 0)$; les points $\{ (a, nb) \mid n = 1, 2, \dots \}$ sont tous sur la fibre de g passant par le point (a, b), qui est un revêtement fini de $\mathbf{C}^*_{(x)}$; ceci est absurde.

On désignera par $\eta(a)$ la y-coordonnée du point fixe de θ_c. Alors, le graphe $G = \{ (a, \eta(a)) \mid a \in \mathbf{C}^* \}$ de la fonction η forme un fibre $g^{-1}(c')$ de g $(c' \neq c)$. $\eta(x)$ est donc une fonction rationnelle de x ayant un pôle unique en $x = 0$; on a

$$\mu(x) = \frac{\mathrm{P}_l(x)}{x^l} + \mathrm{Q}(x),$$

où $l \in \mathbf{N} - \{ 0 \}$, $\mathrm{P}_l(x)$, $\mathrm{Q}(x) \in \mathbf{C}[x]$, $\mathrm{P}_l(0) \neq 0$ et le degré de $\mathrm{P}_l(x)$ est $\leqq l-1$. Faisons un changement de coordonnées

$$\beta : \quad x = x', \qquad y = y' + \mathrm{Q}(x').$$

Alors, la fonction transformée $f' = f \circ \alpha \circ \beta$ prend la valeur c seulement sur l'axe $x' = 0$ et la valeur c' seulement sur la courbe : $(x')^l y' - \mathrm{P}_l(x') = 0$. On a donc, $f' = \xi(f_0)$, où $\xi(z) = (z-c)/(z-c')$ et f_0 est la fonction rationnelle de la forme demandée.

C.Q.F.D.

Revenons maintenant à notre problème : soit φ une **C**-opération holomorphe sur E admettant une intégrale première f de la forme

$$f(x, y) = x^m (x^l y - \mathrm{P}_l(x))^n,$$

avec $m \in \mathbf{Z} - \{ 0 \}$, $n \in \mathbf{N} - \{ 0 \}$, et $(m, n) = 1$. Considérons l'application birégulière

$$\alpha : \quad u = x, \qquad v = x^l y - \mathrm{P}_l(x),$$

du domaine $\mathrm{U} : 0 < |x| < \infty$, $|y| < \infty$ sur le domaine $\mathrm{U}' : 0 < |u| < \infty$, $|v| < \infty$ dans l'espace (u, v). Soit φ' l'opération de **C** sur U' induite de φ par α : $\varphi'_t = \alpha \circ \varphi_t \circ \alpha^{-1}$.

Considérons un point (u_0, v_0) de U′. On peut représenter la φ'-orbite de (u_0, v_0) par

$$u(s) = u_0 s^n, \qquad v(s) = v_0 s^{-m},$$

où s parcourt le plan pointé $\mathbf{C}^*$. Comme toute opération holomorphe de $\mathbf{C}$ sur $\mathbf{C}^*$: $0 < |s| < \infty$ est de la forme : $t \circ s = e^{\lambda t} s$, il existe un $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}(u_0, v_0) \in \mathbf{C}$ tel que

$$\begin{aligned}\varphi'_t(u(s), v(s)) &= (u(e^{\bar{\lambda} t} s), v(e^{\bar{\lambda} t} s))\\ &= (u(s)\, e^{n\bar{\lambda} t}, v(s)\, e^{-m\bar{\lambda} t});\end{aligned}$$

en particulier, pour $s = 1$, $\varphi'_t(u_0, v_0) = (u_0\, e^{n\bar{\lambda} t}, v_0\, e^{-m\bar{\lambda} t})$. De ces formules, on voit que $\bar{\lambda}(u, v)$ est une fonction holomorphe sur U′ et constante sur chaque φ'-orbite : $u^m v^n = \mathrm{Cte}$. On a donc une fonction entière λ d'une variable complexe telle que l'on ait $\bar{\lambda}(u, v) = \lambda(u^m v^n)$ sur U′. Ainsi, on a

$$\varphi'_t(u, v) = (u e^{n\lambda(z) t}, v e^{-m\lambda(z) t}), \qquad \text{où} \quad z = u^m v^n.$$

Or, pour que $\varphi_t = \alpha^{-1} \circ \varphi'_t \circ \alpha$ soit holomorphe sur tout l'espace E : $|x| < \infty$, $|y| < \infty$, il faut et il suffit, comme on le vérifie aisément, que :

1° dans le cas où $m < 0$, $\lambda(z)$ soit holomorphe sur la sphère de Riemann $|z| \leqq \infty$, i. e. $\lambda(z) \equiv \lambda$ (Cte);

2° dans le cas où $m > 0$, $\lambda(z)$ ait un zéro d'ordre $\geqq l/m$ en $z = 0$. On arrive donc au résultat suivant :

THÉORÈME 4. — *Toute $\mathbf{C}$-opération holomorphe, à orbites propres sur l'espace $\mathbf{C}^2$ de deux variables complexes x, y est analytiquement équivalente à l'une des opérations suivantes* :

— *opérations dégénérées* (α), (β) *définies au début du n° 5;*

— *opérations de la forme* (γ) : $t \circ (x, y) = (x e^{n\lambda t}, y e^{m\lambda t})$ *telle que* $\lambda \in \mathbf{C}^*$ *et* $n, m \in \mathbf{N} - \{0\}$;

— *opérations de la forme* (γ') : $t \circ (x, y) = (x e^{n\lambda(z) t}, y e^{-m\lambda(z) t})$ *où* $n, m \in \mathbf{N} - \{0\}$, $z = x^m y^n$ *et* λ *est une fonction entière d'une variable*;

— *opérations de la forme* $\alpha^{-1} \circ \rho_t \circ \alpha$, *où* $\alpha(x, y) = (x, x^l y + \mathrm{P}_l(x))$, $l \in \mathbf{N} - \{0\}$, $\mathrm{P}_l(x)$ *est un polynôme de* x *de degré* $\leqq l-1$ *tel que* $\mathrm{P}_l(0) \neq 0$ *et où* ρ *est une opération de la forme* (γ') *ci-dessus telle que* $\lambda(z)$ *ait un zéro d'ordre* $\geqq l/m$ *en* $z = 0$.

En combinant ce résultat avec le théorème 1 de [14] cité au n° 2, on obtient le :

THÉORÈME 5. — *Toute opération holomorphe du groupe multiplicatif complexe $\mathbf{C}^*$ sur l'espace $\mathbf{C}^2$ est analytiquement équivalente à une opération de la forme* $s \circ (x, y) = (s^m x, s^n y)$, *où* $s \in \mathbf{C}^*$, $(x, y) \in \mathbf{C}^2$ *et* m, $n \in \mathbf{Z}$.

IV. — Applications algébroïdes

On supposera dans tout ce qui suit que M est une variété analytique complexe connexe de dimension (complexe) 2 et que R est une surface de Riemann (i. e., une variété analytique complexe de dimension 1) connexe.

8. Fibres génériques. — Soit $f: \mathrm{M} \to \mathrm{R}$ une application holomorphe non-constante de M dans R. Chaque composante irréductible d'une fibre $f^{-1}(z)$, $z \in \mathrm{R}$, sera appelée *surface première de f à valeurs z* (T. Nishino). On dira que $f: \mathrm{M} \to \mathrm{R}$ est une *application algébroïde* ou *de type algébrique*, si les deux conditions suivantes sont remplies :

(★) chaque surface première de f est analytiquement isomorphe à une courbe analytique complexe compacte pointée d'un nombre fini de points (i. e., à un ouvert de Zariski non-vide d'une courbe analytique complexe compacte);

(★★) tout point z de R possède un voisinage $\delta = \delta(z)$ tel que $f^{-1}(\delta)$ soit une variété de Stein.

Pour chaque application holomorphe non-constante $f: \mathrm{M} \to \mathrm{R}$, on peut trouver, d'après K. Stein [10], une surface de Riemann R_0 et une application holomorphe *surjective* $f_0: \mathrm{M} \to \mathrm{R}_0$ telles que toute application holomorphe $g: \mathrm{M} \to \mathrm{R}'$ analytiquement dépendante f se décompose sous la forme : $g = g' \circ f_0$, où g' est une application holomorphe de R_0 dans R'. Ce couple (R_0, f_0) est déterminé de façon unique à isomorphisme analytique près, et appelé *espace de base* (Komplexer Basisraum [11]) de f. On dira qu'une application holomorphe $f: \mathrm{M} \to \mathrm{R}$ est *primitive*, si (R, f) est l'espace de base de f.

Remarque. — Soit f une fonction méromorphe non-constante sur une variété analytique complexe *simplement connexe* M; τ l'ensemble des points d'indétermination de f; (R_0, f_0) l'espace de base de l'application holomorphe $f: \mathrm{M}-\tau \to \mathrm{CP}^1$. Alors, R_0 est aussi simplement connexe, de sorte que $\mathrm{R}_0 \approx \mathrm{CP}^1$, $\mathbf{C}$ ou bien le disque $|z| < 1$ dans le plan d'une variable complexe z, puisque $\mathrm{M}-\tau$ est aussi simplement connexe et que, si R_0 ne l'était pas, il existerait sur R_0 et sur $\mathrm{M}-\tau$ une fonction analytique multiforme. De plus, si f est holomorphe, R_0 n'est pas compacte, puisqu'on a une fonction holomorphe f' sur R telle que $f = f' \circ f_0$. On peut donc considérer f_0 comme une fonction méromorphe (ou holomorphe, si f est holomorphe) sur M, en tenant compte du fait que codim $\tau \geqq 2$. On appellera donc f_0 *fonction primitive associée à f.*

Théorème (T. Nishino [5 IV], *voir* aussi [13]). — *Si $f: \mathrm{M} \to \mathrm{R}$ est une application algébroïde primitive, il existe alors un sous-ensemble e de* R *de capacité logarithmique nulle tel que les fibres $f^{-1}(z)$ pour $z \in \mathrm{R}-e$ soient irréductibles, d'ordre* 1, *et homéomorphes les unes aux autres.*

On appellera $f^{-1}(z)$ pour $z \in \mathrm{R}-e$ *fibre générique* de f et $z \in \mathrm{R}-e$ *valeur générique* de f. (L'ensemble e des valeurs non-génériques est une réunion dénombrable de fermés, mais n'est pas nécessairement fermé.)

9. Valeurs critiques, applications de type fini. — Soit $f: \mathrm{M} \to \mathrm{R}$ une application holomorphe. Un point z de R sera appelé *valeur régulière* de f, s'il existe un voisinage U de z tel que l'image réciproque $f^{-1}(\mathrm{U})$ soit topologiquement un espace fibré trivial sur U par rapport à la projection $f|_{f^{-1}(\mathrm{U})}$. Les autres points de R seront appelés *valeurs critiques* de f. On dira qu'une application holomorphe surjective $f: \mathrm{M} \to \mathrm{R}$ est *de type fini*, si les deux conditions suivantes sont remplies :

(1) M et R, ainsi que les fibres $f^{-1}(z)$, $z \in \mathrm{R}$, sont de type homologique fini sur **R** [c'est-à-dire, les groupes d'homologie $\mathrm{H}(\mathrm{M}; \mathbf{Q})$, $\mathrm{H}(\mathrm{R}; \mathbf{Q})$ et $\mathrm{H}(f^{-1}(z); \mathbf{Q})$ sont de dimension finie sur **Q**];

(2) l'ensemble K des valeurs critiques de f est fini.

On vérifie aisément qu'une application holomorphe $f: \mathrm{M} \to \mathrm{R}$ de type fini est primitive, si et seulement si une fibre régulière $f^{-1}(z)$, $z \in \mathrm{R}-\mathrm{K}$, est connexe.

Soit $\mathrm{K} = \{z_1, z_2, \ldots, z_p\}$ l'ensemble des valeurs critiques d'une application holomorphe $f: \mathrm{M} \to \mathrm{R}$ de type fini; $z \in \mathrm{R}-\mathrm{K}$ une valeur régulière. On posera : $\mathrm{F} = f^{-1}(z)$, $\mathrm{F}_i = f^{-1}(z_i)$, $(i = 1, 2, \ldots, p)$. On appellera

$$\chi_i(f) = \chi(\mathrm{F}_i) - \chi(\mathrm{F})$$

indice de f le long de la fibre F_i, où $\chi(\bigstar)$ est la caractéristique d'Euler de $\bigstar$.

PROPOSITION 1. — *Si f est primitive et qu'il existe un voisinage* U *de* z_i *tel que* $f^{-1}(\mathrm{U})$ *soit une variété de Stein, on a alors* $\chi_i(f) \geqq 0$. *De plus, si* $\chi_i(f) = 0$, F_i *est non-singulière, irréductible et homéomorphe à* F.

Comme F est connexe et non-compacte, il suffit, pour vérifier la première assertion de la proposition, de montrer le lemme suivant :

LEMME 6. — *Soit* $f: \mathrm{M} \to \mathrm{U}$ *une application holomorphe d'une variété de Stein* M *de dimension complexe* 2 *sur un ouvert* U *de* **C**; $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ *une suite de points de* U *tendant vers un point* $z_0 \in \mathrm{U}$. *On a alors*

$$b^1(\mathrm{F}_0) \leqq \varliminf_{n\to\infty} b^1(\mathrm{F}_n),$$

où $\mathrm{F}_0 = f^{-1}(z_0)$, $\mathrm{F}_n = f^{-1}(z_n)$ *et* $b^1(\bigstar)$ *est le premier nombre de Betti de* $\bigstar$.

Preuve. — On prend une fonction de classe C^2 strictement plurisousharmonique et propre $\eta: \mathrm{M} \to \mathbf{R}^+ = [0, +\infty[$. On désignera, pour chaque $r < \infty$, par Q_r la partie compacte de M définie par $\eta \leqq r$. On posera : $\Delta_0^r = \mathrm{F}_0 \cap \mathrm{Q}_r$, $\Delta_n^r = \mathrm{F}_n \cap \mathrm{Q}_r$. Prenons un $s \in \mathbf{R}^+$ tel que le contour $\partial\Delta_0^s$ soit non-singulier. Il existe alors un entier $\mathrm{N} > 0$ et une application continue $g_n: \Delta_n^s \to \Delta_0^s$ pour chaque $n \geqq \mathrm{N}$ tels que $\Delta_n^s - g_n^{-1}(\sigma)$ soit un revêtement fini de $\Delta_0^s - \sigma$ par rapport à la projection g_n, où σ est l'ensemble des points singuliers de Δ_0^s. Les homomorphismes $(g_n)_*: \mathrm{H}_1(\Delta_n^s) \to \mathrm{H}_1(\Delta_0^s)$ induits par les g_n sont surjectifs. Par suite, $b^1(\Delta_0^s) \leqq \varliminf_{n\to\infty} b^1(\Delta_n^s)$.

Or, $\eta|_{\mathrm{F}_n}$ étant sousharmonique pour tout $n \geqq 0$, $\mathrm{F}_n - \Delta_n^s$ ne possède aucune composante simplement connexe (en vertu du principe de maximum), de sorte que l'homomorphisme : $\mathrm{H}_1(\Delta_n^s) \to \mathrm{H}_1(\mathrm{F}_n)$ induit par l'inclusion est injectif. On a donc

$$b^1(\mathrm{F}_0) = \lim_{s\to\infty} b^1(\Delta_0^s) \leqq \lim_{s\to\infty} \varliminf_{n\to\infty} b^1(\Delta_n^s) \leqq \varliminf_{n\to\infty} b^1(\mathrm{F}_n).$$

La deuxième assertion de la proposition 1 est vérifiée par le fait que, avec les notations ci-dessus, si σ n'est pas vide, le rang du noyau de $(g_n)_*$ (= la somme des nombres de Milner des points singuliers $x_i \in \sigma$ du diviseur (F_0) compte tenu des ordres de zéros de $f - z_0$) est > 0.

PROPOSITION 2. — *Soit* $f: \mathrm{M} \to \mathrm{R}$ *une application algébroïde de type fini*; $z_1, z_2, \ldots, z_p$ *ses valeurs critiques. Alors, on a*

$$\sum_{i=1}^{p} \chi_i(f) = \chi(\mathrm{M}) - \chi(\mathrm{R})\chi(\mathrm{F}),$$

où F *est une fibre régulière de* f *et* $\chi(\bigstar)$ *est la caractéristique d'Euler de* $\bigstar$.

En effet, il existe, d'après T. Nishino [5 V] [le théorème (NV) du n° suivant], une variété analytique complexe connexe $\tilde{\mathrm{M}}$ de dimension 2, munie d'une projection holomorphe *propre* $\tilde{f}: \tilde{\mathrm{M}} \to \mathrm{R}$, et une application holomorphe injective Φ de M dans $\tilde{\mathrm{M}}$ telles que l'on ait $f = \tilde{f} \circ \Phi$. $\mathrm{A} = \tilde{\mathrm{M}} - \Phi(\mathrm{M})$ est alors un sous-ensemble analytique de $\tilde{\mathrm{M}}$ (de codimension pure 1). On peut supposer de plus que l'ensemble des valeurs critiques de $\tilde{f}$ coïncide avec celui de f (donc fini). On peut donc munir le compactifié d'Aleksandrov $\hat{\mathrm{M}} = \mathrm{M} \cup \{\infty\}$ d'une structure de CW-complexe de façon que les $\mathrm{F}_i \cup \{\infty\}$ en soient des sous-complexes, où $\mathrm{F}_i = f^{-1}(z_i)$, $(i = 1, 2, \ldots, p)$. En tenant compte de

$$\chi\left(\bigcup_{i=1}^{p} \mathrm{F}_i \cup \{\infty\}\right) = 1 + \sum_{i=1}^{p} \chi(\mathrm{F}_i),$$

on a

$$1 + \sum_{i=1}^{p} \chi(\mathrm{F}_i) = \chi(\hat{\mathrm{M}}) - \chi\left(\hat{\mathrm{M}}, \bigcup_{i=1}^{p} \mathrm{F}_i \cup \{\infty\}\right).$$

Comme M et $\mathrm{M}_0 = \mathrm{M} - \bigcup_{i=1}^{p} \mathrm{F}_i$ sont des variétés orientables de dimension réelle paire et régulières à l'infini (en vertu de $\tilde{\mathrm{M}}$ et de Φ), on a

$$\chi(\hat{\mathrm{M}}) = 1 + \chi(\mathrm{M});$$

$$\chi\left(\hat{\mathrm{M}}, \bigcup_{i=1}^{p} \mathrm{F}_i \cup \{\infty\}\right) = \chi(\hat{\mathrm{M}}_0) - 1 = \chi(\mathrm{M}_0).$$

en utilisant la dualité de Poincaré-Lefschetz. Or, M_0 est topologiquement un espace fibré localement trivial de $\mathrm{R} - \bigcup_{i=1}^{p} z_i$ à fibre F, de sorte que

$$\chi(\mathrm{M}_0) = \chi(\mathrm{F}) \cdot \chi\left(\mathrm{R} - \bigcup_{i=1}^{p} z_i\right) = \chi(\mathrm{F}) \cdot [\chi(\mathrm{R}) - p].$$

On a donc,

$$\sum_{i=1}^{p} (\chi(\mathrm{F}_i) - \chi(\mathrm{F})) = \chi(\mathrm{M}) - \chi(\mathrm{F}) \cdot \chi(\mathrm{R}).$$

C.Q.F.D.

Considérons comme exemple une fonction rationnelle non-constante f sur $\mathbf{C}^2$. Soient $\tau = \{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_q\}$ l'ensemble des points d'indétermination de f et R l'image $f(\mathbf{C}^2 - \tau)$ dans $\mathbf{CP}^1$. Évidemment, $f: \mathbf{C}^2 - \tau \to \mathrm{R}$ est une application algébrique (régulière) de type fini; $\mathrm{R} = \mathbf{CP}^1$ ou bien $\mathbf{CP}^1 - \{\text{un point}\}$. Comme $\chi(\mathbf{C}^2 - \tau) = 1 - q$, on a

COROLLAIRE. — (1) *si* $\mathrm{R} = \mathbf{CP}^1$, *alors* $\sum_{i=1}^{p} \chi_i(f) = 1 - q - 2\chi(\mathrm{F})$;

(2) *si f est un polynôme, on a* $\sum_{i=1}^{p} \chi_i(f) = 1-\chi(\mathrm{F}) = \mathrm{rang}\ \mathrm{H}_1(\mathrm{F})$ (le théorème 2 de [12]).

10. Finitude de l'ensemble des valeurs critiques. — Le but de cette section est de démontrer la proposition suivante :

Proposition 3. — *Soit* M *une variété analytique complexe de dimension complexe* 2 *telle que* $\mathrm{H}_1(\mathrm{M}; \mathbf{Z})$ *soit de type fini* (en tant que **Z**-module) *et que* $\mathrm{H}_2(\mathrm{M}; \mathbf{Q})$ *soit de dimension finie sur* **Q**; $f : \mathrm{M} \to \mathrm{R}$ *une application algébroïde primitive. Alors f est de type fini.*

Commençons par citer quelques résultats de T. Nishino ([5 IV, V] et [6]) :

Théorème (N IV). — *Soit* $f : \mathrm{M} \to \mathrm{R}$ *une application algébroïde telle que toute fibre* $f^{-1}(z)$, $z \in \mathrm{R}$, *soit irréductible. Alors :* 1° *toute valeur générique de f est régulière et l'ensemble k des valeurs critiques de f est de capacité logarithmique nulle;* 2° *il existe une variété analytique complexe* $\tilde{\mathrm{M}}_0$ *de dimension complexe* 2 *munie d'une projection holomorphe* propre (*sans valeur critique*) $\tilde{f}$ *de* $\tilde{\mathrm{M}}_0$ *sur* $\mathrm{R}-k$, *un sous-ensemble analytique* A *de* $\tilde{\mathrm{M}}_0$ *de codimension pure* 1 *et un isomorphisme analytique* Φ *de* $\mathrm{M}_0 = \mathrm{M}-f^{-1}(k)$ *sur* $\tilde{\mathrm{M}}_0-\mathrm{A}$ *tels que l'on ait* $\tilde{f} \circ \Phi = f$.

Théorème (N V). — *Soit* $f : \mathrm{M} \to \mathrm{R}$ *une application algébroïde primitive telle que l'ensemble k des valeurs critiques de f soit discret et que chaque fibre critique* $f^{-1}(z)$ $(z \in k)$ *n'ait qu'un nombre fini de composantes irréductibles. Alors, il existe une variété analytique complexe* $\tilde{\mathrm{M}}$ *de dimension complexe* 2, *munie d'une projection holomorphe* propre $\tilde{f} : \tilde{\mathrm{M}} \to \mathrm{R}$, *un sous-ensemble analytique* A *de* $\tilde{\mathrm{M}}$ *et un isomorphisme analytique* $\Phi : \mathrm{M} \to \tilde{\mathrm{M}}-\mathrm{A}$ *tels que l'on ait* $f = \tilde{f} \circ \Phi$. *Si de plus* R *est de type algébrique* (*i. e. un ouvert de Zariski d'une surface de Riemann compacte* $\overline{\mathrm{R}}$) *et si k est fini, il existe alors une variété analytique complexe* compacte $\overline{\mathrm{M}}$ *de dimension complexe* 2 *munie d'une projection holomorphe* $\bar{f} : \overline{\mathrm{M}} \to \overline{\mathrm{R}}$, *un sous-ensemble analytique* B *de* $\overline{\mathrm{M}}$ *et un isomorphisme analytique* $\Psi : \mathrm{M} \to \overline{\mathrm{M}}-\mathrm{B}$ *tels que l'on ait* $f = \bar{f} \circ \Psi$.

Théorème (N [6]). — *Soit* $f : \mathrm{M} \to \mathrm{U}$ *une application holomorphe propre de* M *sur un ouvert* U *de* **C** *telle que* $f^{-1}(z_0)$ *soit de genre* $\geqq 2$ *pour une valeur régulière* $z_0 \in \mathrm{U}$ *de f. Soit k un sous-ensemble fermé de* U *de capacité logarithmique nulle. Alors, toute section holomorphe* $s : \mathrm{U}-k \to \mathrm{M}$ *de f se prolonge par continuité en une section holomorphe* $\bar{s} : \mathrm{U} \to \mathrm{M}$ *de f.*

En utilisant ces théorèmes, nous allons montrer quelques lemmes dont nous avons besoin pour démontrer la proposition 3.

Section algébroïde d'une application. — Soit $f : \mathrm{M} \to \mathrm{R}$ une application holomorphe non-constante; x_0 un point de M tel que $f^{-1}(f(x_0))$ soit régulière en x_0. On peut alors tracer dans un voisinage U de x_0 une courbe analytique complexe non-singulière Γ qui est transversale aux fibres de f.

Prenons un voisinage δ de $f(x_0)$ tel que

$$f|_{\Gamma \cap f^{-1}(\delta)} : \Gamma \cap f^{-1}(\delta) \to \delta$$

soit propre. On appellera $\Gamma(\delta) = \Gamma \cap f^{-1}(\delta)$ *section algébroïde régulière de* f *sur* δ.

LEMME 7. — *Si* $f : \mathrm{M} \to \mathrm{R}$ *est une application algébroïde primitive et* $\mathrm{F} = f^{-1}(z_0)$ *une fibre générique de* f, *alors la suite*

$$\mathrm{H}_1(\mathrm{F}; \mathbf{Q}) \xrightarrow{j_*} \mathrm{H}_1(\mathrm{M}; \mathbf{Q}) \xrightarrow{f_*} \mathrm{H}_1(\mathrm{R}; \mathbf{Q}) \to 0$$

est exacte, où $\mathbf{Q}$ *est le corps des nombres rationnels et* f_* (resp. j_*) *est l'homomorphisme induit par* f (resp. *par l'inclusion* $j : \mathrm{F} \to \mathrm{M}$).

En effet, f_* est surjective, puisqu'on peut trouver un recouvrement $\{\delta_i\}$ de R par des ouverts δ_i munis d'une section algébroïde $\Gamma(\delta_i)$ de f sur δ_i et que les fibres $f^{-1}(z)$ sont connexes pour les valeurs génériques z qui sont denses sur R. Puis, le fait que $f_* \circ j_* = 0$ est évident. On va donc montrer : $\mathrm{Ker} f_* \subset \mathrm{Im}\, j_*$ ($\mathrm{Ker}\, f_* \equiv f_*^{-1}(0)$). Il suffit de le montrer pour le cas où R n'est pas compact.

(i) Considérons d'abord le cas particulier suivant : soit $\Gamma = \Gamma(\delta)$ une section algébroïde régulière et simplement connexe de f telle que $f^{-1}(\delta)$ soit de Stein. Voyons que, pour chaque fibre générique $\mathrm{F} = f^{-1}(b)$, $b \in \delta$,

$$\mathrm{H}_1(\mathrm{F}; \mathbf{Q}) \xrightarrow{j_*} \mathrm{H}_1(f^{-1}(\delta); \mathbf{Q})$$

est surjectif. En effet, soit E la réunion dans $f^{-1}(\delta)$ des surfaces premières de f ne passant pas par Γ et à valeur dans δ; $\Sigma = f^{-1}(\delta) - \mathrm{E}$ est alors un domaine pseudo-convexe de $f^{-1}(\delta)$; celui-ci étant une variété de Stein, Σ l'est aussi. Les fibres de $f|_\Sigma$ sont évidemment irréductibles. Par suite, d'après le théorème (N IV) ci-dessus, l'ensemble k des valeurs critiques de $f|_\Sigma$ est de capacité nulle. De plus, de la même manière qu'au n° 3 du chapitre V de [5 IV], on voit que $\mathrm{E} \cap f^{-1}(\delta - k)$ est un sous-ensemble analytique de $f^{-1}(\delta - k)$. Donc, on peut déformer tout 1-cycle c de $f^{-1}(\delta)$ continûment en un 1-cycle $c' \subset \Sigma' = \Sigma \cap f^{-1}(\delta - k)$. Maintenant, soit $(\tilde{\Sigma}', \tilde{f}, \Gamma')$ l'espace fibré topologique sur $\Gamma' = \Gamma(\delta - k)$ induit par $f|_{\Gamma'} : \Gamma' \to \delta - k$ de l'espace fibré topologique $(\Sigma', f|_{\Sigma'}, \delta - k)$. $\tilde{\Sigma}'$ est un revêtement fini de Σ'; on désignera par μ la projection $\tilde{\Sigma}' \to \Sigma'$. On a alors, un 1-cycle $\tilde{c}'$ dans $\tilde{\Sigma}'$ tel que $\mu(\tilde{c}') = m.c'$, où $m \in \mathbf{N} - \{0\}$. Comme $\tilde{\Sigma}'$ est un fibré topologique sur Γ' ayant une section continue Γ', on a

$$\tilde{c}' \sim \tilde{c}_1 + \tilde{c}_2 \quad \text{dans } \tilde{\Sigma}',$$

où $\tilde{c}_1 \subset \Gamma'$ et $\tilde{c}_2 \subset \tilde{\mathrm{F}} = \mu^{-1}(\mathrm{F})$. Or, $\tilde{c}_1 \sim 0$ sur Γ, puisque Γ est simplement connexe. Par suite, $m.c' \sim \mu(\tilde{c}_2)$ ($\subset \mathrm{F}$) dans $f^{-1}(\delta)$; j_* est donc surjective.

(ii) Prenons maintenant une suite de section algébroïdes régulières et simplement connexes $\Gamma_i = \Gamma(\delta_i)$, ($i = 1, 2, \ldots$), de f vérifiant les conditions suivantes: 1° $z_0 \in \delta_1$; 2° $f^{-1}(\delta_i)$ est de Stein; 3° $\mathrm{R} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \delta_i$; 4° si l'on pose $\Delta_n = \bigcup_{i=1}^{n} \delta_i$, on a $H_1(\Delta_n \cap \delta_{n+1}) = 0$ ([3]) pour tout n $(= 1, 2, \ldots)$. On posera

$$\Delta_0 = \{ z_0 \}, \qquad \tilde{\Delta}_n = f^{-1}(\Delta_n), \qquad \tilde{\delta}_n = f^{-1}(\delta_n)$$

et désignera par

$$j_n : H_1(\Delta_n) \to H_1(R) \qquad [\text{resp. } \tilde{j}_n : H_1(\tilde{\Delta}_n) \to H_1(M)]$$

l'homomorphisme induit par l'inclusion $\Delta_n \to R$ (resp. $\tilde{\Delta}_n \to M$). Soit $c \in \operatorname{Ker} f_*$.

Comme $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{\Delta}_n$, on a un $c_n \in H_1(\tilde{\Delta}_n)$ tel que $\tilde{j}_n(c_n) = c$; ce c_n se trouve dans le $\operatorname{Ker}(f|_{\tilde{\Delta}_n})_*$, puisque j_n est injective (d'après la condition 4°). Nous allons en déduire qu'il existe un $c_{n-1} \in \operatorname{Ker}(f|_{\tilde{\Delta}_{n-1}})_*$ tel que $\tilde{j}_{n-1}(c_{n-1}) = c$. En effet, considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & H_1(\tilde{\Delta}_{n-1} \cap \delta_n) \arrow[r, "(\theta, -\theta')"] \arrow[d] & H_1(\tilde{\Delta}_{n-1}) \oplus H_1(\tilde{\delta}_n) \arrow[r, "\varphi+\psi"] \arrow[d] & H_1(\tilde{\Delta}_n) \arrow[r, "\tilde{\partial}"] \arrow[d] & H_0(\tilde{\Delta}_{n-1} \cap \tilde{\delta}_n) \arrow[r] \arrow[d, "(1)"] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & H_1(\Delta_{n-1} \cap \delta_n) \arrow[r] & H_1(\Delta_{n-1}) \oplus H_1(\delta_n) \arrow[r] & H_1(\Delta_n) \arrow[r, "\partial"] & H_0(\Delta_{n-1} \cap \delta_n) \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

où les lignes horizontales sont les suites exactes de Mayer-Vietoris et les flèches verticales sont les homomorphismes induits par f. Comme $f^{-1}(\alpha)$ est connexe pour chaque composante connexe α de $\Delta_{n-1} \cap \delta_n$, la flèche (1) est un isomorphisme; par suite, on a $\tilde{\partial}(c_n) = 0$; il existe donc un $c'_{n-1} \in H_1(\tilde{\Delta}_{n-1})$ et un $c'_n \in H_1(\tilde{\delta}_n)$ tels que $\varphi(c'_{n-1}) + \psi(c'_n) = c_n$. On désignera par θ (resp. θ') l'homomorphisme : $H_1(\tilde{\Delta}_{n-1} \cap \tilde{\delta}_n) \to H_1(\tilde{\Delta}_{n-1})$ [resp. $H_1(\tilde{\delta}_n)$] induit par l'inclusion. D'après ce qu'on a vu dans (i), il existe un $\beta \in H_1(\tilde{\Delta}_{n-1} \cap \tilde{\delta}_n)$ tel que $\theta'(\beta) = c'_n$; on a donc $\varphi(c'_{n-1} + \theta(\beta)) = c_n$. De plus, comme $H_1(\Delta_{n-1} \cap \delta_n)$ et $H_1(\delta_n)$ sont nuls, on a $(f|_{\tilde{\Delta}_{n-1}})_*(c'_{n-1} + \theta(\beta)) = 0$. Donc, $c_{n-1} = c'_{n-1} + \theta(\beta)$ est l'élément voulu.

On voit ainsi, par induction descendante sur n, que $c \in j_0(\operatorname{Ker}(f|_{\tilde{\Delta}_0})_*) = j_*(H_1(F))$. On a donc $\operatorname{Ker} f_* \subset \operatorname{Im} j_*$.

C.Q.F.D.

LEMME 8. — *Supposons que* $H^2(M, \mathbf{Q})$ *est de dimension finie sur* $\mathbf{Q}$ *et que* $f : M \to R$ *est une application algébroïde primitive. Soit* $\Gamma = \Gamma(\Delta)$ *une section algébroïde régulière de* f *telle que* $D = f^{-1}(\Delta)$ *soit de Stein. Alors, la famille* $\varepsilon = \varepsilon(\Gamma)$ *des surfaces premières de* f *dans* D *ne passant pas par* Γ *est finie.*

En effet, par l'absurde, supposons que ε contienne une suite infinie de surfaces premières $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ de f. En remplaçant cette suite $\{ S_n \}$ par une de ses suites partielles (s'il est nécessaire), on peut supposer que l'image $\{ f(S_n) \}_{n=1,2,\ldots}$ a au plus un seul point d'accumulation dans Δ. Soit $L(D)$ [resp. $L(M)$] le groupe des diviseurs dans D (resp. M);

([3]) Jusqu'à la fin de la démonstration, les groupes d'homologie seront à coefficients dans $\mathbf{Q}$.

G le sous-groupe de L(D) engendré par les diviseurs $\{ S_n \}_{n=1,2,\ldots}$ Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} L(D) & \xrightarrow{\delta} & H^2(D, \mathbf{Z}) \\ \uparrow{\scriptstyle j} & & \uparrow{\scriptstyle j'} \\ L(M) & \xrightarrow{\delta'} & H^2(M, \mathbf{Z}) \end{array}$$

où δ (resp. δ') est l'homomorphisme qui fait correspondre à chaque diviseur $C \in L(D)$ [resp. $L(M)$] la classe de Chern du fibré en droites complexes sur D (resp. M) associé à C; j et j' sont les homomorphismes induits par la restriction. Comme $H^2(M, \mathbf{Z})$ est de rang fini sur $\mathbf{Z}$ et que $G \subset \operatorname{Im} j$, $\delta(G)$ est de rang fini. Or, D étant une variété de Stein, δ est injective; donc, G est aussi de rang fini (sur $\mathbf{Z}$), i. e., $G \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} \mathbf{Q}$ est de dimension fini (sur $\mathbf{Q}$). Soit $S_{n_1}, S_{n_2}, \ldots, S_{n_r}$ une suite partielle fini de $\{ S_n \}$ telle que $\{ S_{n_i} \otimes 1 \}_{i=1,2,\ldots,r}$ engendre $G \times \mathbf{Q}$ sur $\mathbf{Q}$. Comme D est une variété de Stein, il existe pour chaque n $(\neq n_1, n_2, \ldots, n_r)$ une fonction méromorphe h_n sur D telle que le diviseur (h_n) défini par h_n soit de la forme

$$(h_n) = m_n S_n - \sum_{i=1}^{r} m_n^{(i)} S_{n_i},$$

où $m_n \in \mathbf{N} - \{ 0 \}$ et $m_n^{(i)} \in \mathbf{Z}$. Chaque h_n est holomorphe sur $D - \bigcup_{i=1}^{r} S_{n_i}$ et s'annule seulement sur S_n (d'ordre m_n). Prenons sur chaque S_n un point régulier x_n; on peut tracer au voisinage de x_n un 1-cycle c_n dans $D_1 = D - \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n}$ de façon que

$$h_n^*(c_n) = m_n; \qquad h_i^*(c_n) = 0 \qquad \text{pour} \quad i \neq n,$$

où h_n^* est l'homomorphisme : $H_1(D_1; \mathbf{Z}) \to H_1(\mathbf{C}^*; \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}$ induit par

$$h_n : D_1 \to \mathbf{C}^* = \mathbf{C} - \{0\}.$$

Ces cycles $\{ c_n; n \neq n_1, n_2, \ldots, n_r \}$ sont linéairement indépendants dans $H_1(D_1; \mathbf{Z})$ sur $\mathbf{Z}$. On a donc

$$\dim H_1(D; \mathbf{Q}) = \operatorname{rang}_{\mathbf{Z}} H_1(D; \mathbf{Z}) = \infty,$$

ce qui est absurde, car, d'après le lemme 7, $H_1(F; \mathbf{Q}) \to H_1(D_1; \mathbf{Q})$ est surjective pour une fibre générique F de $f|_{D_1}$, $H_1(\Delta)$ étant nul. Donc, $\varepsilon = \varepsilon(\Gamma)$ ne contient qu'un nombre fini de surfaces premières de f.

LEMME 9. — *Soit* $f : M \to \Delta$ *une application algébroïde d'une variété de Stein connexe* M *de dimension complexe* 2 *sur un disque* $\Delta : |z| < 1$ *dans le plan* z *telle que les fibres* $F_z = f^{-1}(z)$, $z \in \Delta$, *soient irréductibles. On suppose que* $F_0 = f^{-1}(0)$ *est une fibre générique de* f. *Si l'homomorphisme* $j_* : H_1(F_0; \mathbf{Q}) \to H_1(M; \mathbf{Q})$ *induit par l'inclusion* $j : F_0 \to M$ *est injectif, alors l'ensemble* k *des valeurs critiques de* f *est discret.*

Démonstration. — 1° Considérons d'abord le cas où il existe une section holomorphe $s : \Delta \to M$ de f et une fonction holomorphe t sur un voisinage U de $s(\Delta)$ s'annulant sur $s(\Delta)$ et telle que l'application

$$\xi = (f, t) : U \to \Delta \times [\,|t| < 2\,]$$

soit un isomorphisme analytique. Soient S une surface de Riemann compacte, s une coordonnée locale sur S et δ (resp. δ') le disque sur S défini par $|s| < 1$ (resp. $|s| < 1/2$). Considérons la réunion

$$M' = (M - \xi^{-1}(\Delta \times [\,|t| < 1\,])) \cup (\Delta \times (S - \delta'))$$

en identifiant la partie $\xi^{-1}(\Delta \times [1 < |t| < 2])$ avec $\Delta \times (\delta - \delta')$ par

$$z = f(x), \qquad s = \frac{1}{t(x)},$$

où $x \in \xi^{-1}(\Delta \times [1 < |t| < 2])$. Alors, M' est une variété analytique complexe munie d'une projection holomorphe algébroïde $f' : M' \to \Delta$ telle que $f'|_{M-U} = f|_{M-U}$. On vérifie aisément que : 1° M' est une variété de Stein; 2° l'homomorphisme $j'_* : H_1(F'_0; \mathbf{Q}) \to H_1(M'; \mathbf{Q})$ est injectif, où $F'_0 = f'^{-1}(0)$; 3° l'ensemble k' des valeurs critiques de f' coïncide avec k. De plus, on peut prendre S et s de façon : (★) *que* F'_0 *soit de genre* $\geqq 2$ *et que le groupe des automorphismes analytiques de* $\overline{F}'_0$ *soit trivial* (i. e. $= \{\mathrm{id}\}$), où $\overline{F}'_0$ est la surface de Riemann compacte contenant F'_0 [4]. On supposera donc dans ce qui suit que cette condition (★) est satisfaite pour F_0.

On utilisera les notations introduites dans le théorème (N IV) : k, M_0, $\tilde{M}_0$, $\tilde{f}$ et Φ; k est de capacité logarithmique nulle. On posera $\overline{F}_z = \tilde{f}^{-1}(z)$ pour $z \in \Delta - k$.

Comme M_0 (resp. $\tilde{M}_0$) est topologiquement un espace fibré localement trivial de $\Delta - k$ par la projection f (resp. $\tilde{f}$), on peut faire correspondre à chaque chemin c sur $\Delta - k$ d'origine 0 et d'extrémité z un isomorphisme

$$\theta_c : H_1(F_0) \to H_1(F_z) \qquad (\text{resp. } \overline{\theta}_c : H_1(\overline{F}_0) \to H_1(\overline{F}_z))$$

dépendant continûment de c et de z par rapport à la topologie compacte-ouverte de l'espace des chemins dans $\Delta - k$. Alors, j_* étant injective (d'après l'hypothèse), on a

$$\theta_c = \mathrm{id}$$

pour tout chemin fermé c dans $\Delta - k$ à point de base 0; par conséquent, il en est de même pour $\overline{\theta}_c$.

Soit $g\,(\geqq 2)$ le genre de F_0 ou de $\overline{F}_0$; $(A_1, A_2, \ldots, A_g; B_1, B_2, \ldots, B_g)$ un système de 1-cycles de base, sur $\overline{F}_0$ (i. e., $A_i . B_j = \delta_{ij}$, $A_i . A_j = 0$); $\omega_1(z)$, $\omega_2(z)$, $\ldots$, $\omega_g(z)$

[4] L'auteur doit à M. H. Yamaguchi l'idée de ce type de modification pour augmenter le genre de fibre.

la base de l'espace des 1-formes holomorphes sur $\bar{F}_z$, $z \in \Delta - k$, vérifiant

$$\int_{\bar{\theta}_c(A_j)} \omega_i(z) = \delta_{ij},$$

où c est un chemin dans $\Delta - k$ d'origine 0 et d'extrémité z. Alors, la (g, g)-matrice $\pi(z) = (\pi_{ij}(z))$ définie par

$$\pi_{ij}(z) = \int_{\bar{\theta}_c(B_j)} \omega_i(z)$$

est holomorphe sur Δ-k; uniforme puisque $\bar{\theta}_c = \mathrm{id}$, pour tout chemin fermé c dans $\Delta - k$. Comme k est de capacité logarithmique nulle, cette application holomorphe $\pi : \Delta - k \to H_g$, à valeurs dans le demi-plan supérieur de Siegel H_g de genre g, se prolonge par continuité en une application holomorphe $\bar{\pi} : \Delta \to H_g$.

Soit Γ_g le groupe modulaire de Siegel; $\mathfrak{S}_g = H_g/\Gamma_g$. Alors, d'après W. L. Baily [1], on a une variété analytique complexe projective $\mathscr{I}$ munie d'une projection holomorphe propre $\lambda : \mathscr{I} \to \varepsilon$ sur l'espace $\varepsilon\ (\subset \mathfrak{S}_g)$ des modules des surfaces de Riemann de genre g, de façon que, pour tout $u \in \varepsilon$, $\lambda^{-1}(\mu)$ soit l'espace quotient d'une surface de Riemann R_μ de genre g et de module μ par le groupe des automorphismes analytiques de R_μ. Considérons l'application composée

$$\psi : \Delta \xrightarrow{\pi} H_g \xrightarrow{\text{projection}} \mathfrak{S}_g.$$

Soit $\psi^* \mathscr{I}$ l'image réciproque de $\mathscr{I}$ par ψ, c'est-à-dire

$$\psi^* \mathscr{I} = \{(z, w) \in \Delta \times \mathscr{I} \mid \psi(z) = \lambda(w)\}.$$

On désignera par λ_* la projection canonique $\psi^* \mathscr{I} \to \Delta$, par $h : \bar{M}_0 \to \mathscr{I}$ l'application holomorphe qui fait correspondre à chaque $x \in \bar{F}_z$, $z \in \Delta - k$, la classe

$$h(x) \in \lambda^{-1}(\psi(x)) \approx \bar{F}_z/\sim$$

à laquelle appartient le point x et par $\Psi : M_0 \to \psi^* \mathscr{I}$ l'application holomorphe définie par

$$\Psi(x) = (f(x),\ h(\Phi(x))) \in \psi^* \mathscr{I}, \qquad \text{où} \quad x \in M_0.$$

On a

$$f = \lambda_* \circ \Psi.$$

Or, d'après l'hypothèse (★), $h|_{F_0} : F_0 \to \lambda^{-1}(\psi(0)) \approx \lambda_*^{-1}(0)$ est un isomorphisme, de sorte que $\lambda_*^{-1}(0)$ est de genre g ($\geqq 2$). Par conséquent, si l'on désigne par s_α pour chaque $|\alpha| < 2$ la section holomorphe $\Delta \to U$ ($\subset M$) de $f|_U$ définie par l'équation $t = \alpha$ (i. e., $s_\alpha(\Delta) = \{x \in U \mid t(x) = \alpha\}$), alors la section holomorphe

$$\tau_\alpha = \Psi \circ s_\alpha|_{\Delta - k}$$

de λ_* sur $\Delta - k$ se prolonge, d'après le théorème de T. Nishino [6] cité plus haut, en une section holomorphe $\bar{\tau}_\alpha : \Delta \to \psi^* \mathscr{I}$ de λ_* sur Δ, k étant de capacité logarithmique nulle.

Ψ est donc holomorphe sur U. D'après le théorème d'Hartogs, on a donc une application holomorphe $\tilde{\Psi}$ de M dans $\Psi^* \mathscr{I}$ telle que $\tilde{\Psi}|_{M_0} = \Psi$. (M et $\psi^* \mathscr{I}$ sont pseudoconvexes). On désignera par $\Psi_z : F_z \to \psi^* \mathscr{I}$ l'application restreinte $\tilde{\Psi}|_{F_z}$.

L'ensemble e des points $z \in \Delta$ tels que $\lambda_*^{-1}(z)$ soit de genre $< g$ est discret; pour chaque $z \in \Delta - (k \cup e)$, $h|_{F_z} : F_z \to \lambda^{-1}(\psi(z))$ est un isomorphisme analytique, de sorte que $\Psi_z : F_z \to \psi^* \mathscr{I}$ est injective pour $z \in \Delta - (k \cup e)$. Soit e' l'ensemble des $z \in \Delta$ tels que Ψ_z soit constante, qui est évidemment discret. Comme les fibres de f et de λ_* sont d'ordre 1 et que $\Delta - (k \cup e)$ est dense sur Δ, Ψ_z est injective, d'après le théorème d'Hurwitz, pour tout $z \in \Delta - e'$. L'application $\Psi' = \tilde{\Psi}|_{M'}$ de $M' = M - f^{-1}(e')$ dans $\psi^* \mathscr{I}$ est donc injective.

$\tilde{\Psi}(M')$ est un domaine pseudoconvexe de $\psi^* \mathscr{I}$; si l'on pose

$$A = \lambda_*^{-1}(\Delta - e') - \tilde{\Psi}(M'), \qquad A \cap \lambda_*^{-1}(z)$$

consiste en un nombre fini de points pour tout $z \in \Delta - e'$; par suite, d'après le théorème d'Hartogs, A est un sous-ensemble analytique de $\psi^* \mathscr{I}$ de (co-) dimension pure 1. Comme j_*; $H_1(F_0) \to H_1(M)$ est injective (d'après l'hypothèse), A se décompose en un nombre fini de sections holomorphes de λ_* sur $\Delta - e'$ (disjointes les unes des autres); ces sections se prolongent d'après le théorème I de T. Nishino [5 V], en des sections holomorphes sur Δ (car $g \geqq 2$), de sorte que l'adhérence $\bar{A}$ de A est un sous-ensemble analytique de $\psi^* \mathscr{I}$. L'ensemble k des valeurs critiques de f est donc inclus dans $e \cup e'$, qui est discret.

2° Lorsqu'il existe une fibre $F_a = f^{-1}(a)$ $(a \in \Delta)$ d'ordre > 1, prenons une section algébroïde régulière $\Gamma = \Gamma(\delta)$ de f sur un voisinage δ de a. Le problème étant local, il suffit de montrer que k est discret dans δ. Soit $\mathscr{D}_\Gamma$ le normalisé du sous-ensemble analytique $\{(x, y) \in f^{-1}(\delta) \times \Gamma \mid f(x) = f(y)\}$, $\pi : \mathscr{D}_\Gamma \to f^{-1}(\delta)$ et $f' : \mathscr{D}_\Gamma \to \Gamma$ ses projections canoniques. $\mathscr{D}_\Gamma$ est une variété de Stein.

On désignera par $\tilde{\Gamma}$ la diagonale $\{(x, x) \in \mathscr{D}_\Gamma \mid x \in \Gamma\}$. Soit E la réunion dans $\mathscr{D}_\Gamma$ des surfaces premières de f' ne passant pas par $\tilde{\Gamma}$; $D(\Gamma) = \mathscr{D}_\Gamma - E$ est un domaine pseudoconvexe sur $\mathscr{D}_\Gamma$. Comme $\mathscr{D}_\Gamma$ est une variété de Stein, $D(\Gamma)$ est aussi de Stein (d'après le théorème d'Oka). Posons $\tilde{f} = f'|_{D(\Gamma)}$. Chaque fibre $\tilde{F}_x = \tilde{f}^{-1}(x)$ $(x \in \Gamma)$ est un revêtement fini de $F_{f(x)}$; $\tilde{F}_{x_0}$ (où $f(x_0) = 0$) est isomorphe à F_0 par la projection π. L'homomorphisme

$$\tilde{j}_* : H_1(\tilde{F}_{x_0}) \to H_1(D(\Gamma))$$

induit par l'inclusion est injectif, puisque $j_* = \pi_* \circ \tilde{j}_* \circ (\pi|_{\tilde{F}_{x_0}})_*^{-1}$ est injectif (par l'hypothèse). Donc, comme on l'a vu dans la partie 1°, l'ensemble $\tilde{k}$ des valeurs critiques de $\tilde{f}$ est discret. On vérifie aisément que $k \cap \delta \subset \tilde{k} \cup m$, où m est l'ensemble des $z \in \delta$ tels que F_z soit d'ordre > 1; $k \cap \delta$ est donc discret.

C.Q.F.D.

LEMME 10. — *Soit* $f : M \to \Delta$ *une application algébroïde primitive d'une variété de Stein (connexe)* M *de type homologique fini sur* $\mathbf{Q}$, *sur le disque* $\Delta : |z| < 1$ *dans le plan* z, *n'ayant* *aucune valeur critique dans la couronne* $r < |z| < 1$. *On suppose de plus qu'il existe une section algébroïde régulière* $\Gamma = \Gamma(\Delta)$ *de* f *sur* Δ *et que* $\chi(M) = \chi(F)$, *où* $\chi(\bigstar)$ *est la caractéristique d'Euler de* $\bigstar$ *et* F *une fibre générique de* f. *Alors, toute fibre* $F_z = f^{-1}(z)$, $z \in \Delta$, *est irréductible, non-singulière et isomorphe à* F. *De plus, si* F *n'est isomorphe ni à* **C**, *ni à* **C***, f *n'a pas de valeur critique dans* Δ.

En effet, M étant de Stein, on a $H_n(M) = 0$ pour $n \geqq 3$ et $H_n(F) = 0$ pour $n \geqq 2$; il résulte donc, de l'hypothèse $\chi(M) = \chi(F)$, compte tenu de la suite exacte du lemme 7, que l'homomorphisme

$$j_* : H_1(F; \mathbf{Q}) \to H_1(M; \mathbf{Q})$$

est un isomorphisme, et $H_2(M, \mathbf{Q}) = 0$. Il en résulte que, d'après le lemme 9, l'ensemble k des valeurs critiques de f est dicret, donc fini. D'après le lemme 8, chaque fibre $f^{-1}(z)$, $(z \in k)$, n'a qu'un nombre fini de composantes irréductibles (car $H^2(M; Q) \cong H_2(M; Q)$). L'application $f : M \to \Delta$ est donc de type fini.

Supposons maintenant que k ne soit pas vide : $k = \{z_1, z_2, \ldots, z_p\}$. On a alors, d'après la proposition 2,

$$\sum_{i=1}^{p} \chi_i(f) = \chi(M) - \chi(F).\chi(\Delta) = 0.$$

Par suite, d'après la proposition 1, on a $\chi_i(f) = 0$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$ et chaque fibre $F_i = f^{-1}(z_i)$ est non-singulière et homéomorphe à F. F_i est donc, d'après le théoréme (N IV), d'ordre > 1. On définit $\mathcal{D}_\Gamma$, $\pi : \mathcal{D}_\Gamma \to M$ et $\tilde{f} : \mathcal{D}_\Gamma \to \Gamma$ de la même façon que dans la partie 2° de la démonstration du lemme 9. Alors, pour chaque $y \in \Gamma$ tel que $f(y) \in \Delta - k$, la fibre $\tilde{f}^{-1}(y)$ est isomorphe à $F_{f(y)}$; pour un $y_i \in \Gamma$ tel que $f(y_i) = z_i$, $\tilde{F}_i = \tilde{f}^{-1}(y_i)$ est un revêtement de F_i, à m_i feuillets, par la projection $\pi|_{\tilde{F}_i}$, où m_i = l'ordre de zéros de $f - z_i$ sur $F_i > 1$. On a donc

$$\chi(\tilde{F}_i) = m_i.\chi(F_i) = m_i.\chi(F).$$

Or, d'après la proposition 1, on a

$$\chi(\tilde{F}_i) \geqq \chi(\tilde{f}(y)) = \chi(F),$$

où $f(y) \in \Delta - k$. On a donc, $\chi(F) \geqq 0$, de sorte que $F \approx \mathbf{C}$ ou bien **C***.

C.Q.F.D.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer la proposition 3 :

(1) D'après le lemme 7 et l'hypothèse sur $H_1(M; \mathbf{Z})$, on a $\dim . H_1(R; \mathbf{Q}) < \infty$.

(2) Comme $\dim H^2(M; \mathbf{Q}) = \dim H_2(M; \mathbf{Q}) < \infty$, l'ensemble K des valeurs critiques de $f : M \to R$ est, d'après le lemme 8 et le théorème (N IV), de capacité logarithmique nulle.

(3) Voyons ensuite que, pour tout ouvert non-compact U de R, on a $H_3(f^{-1}(U)) = 0$ [5]. En effet, on prend une suite d'ouverts $\{\delta_i\}_{i=1,2,\ldots}$ de U vérifiant les conditions

[5] Pour les groupes d'homologie à coefficients dans **Z**, on n'écrira pas le coefficient.

suivantes : 1° $f^{-1}(\delta_i)$ est de Stein; 2° $(\partial\delta_i) \cap K = \emptyset$; 3° $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} \delta_i$; 4° si l'on pose $\Delta_n = \bigcup_{i=1}^{n} \delta_i$, chaque composante connexe de $\Delta_n \cap \delta_{n+1}$ est contractile et ne contient aucun point de K. Alors, d'après la condition 1°, on a $H_3(f^{-1}(\Delta_1)) = H_3(f^{-1}(\delta_i)) = 0$. Supposons que $H_3(f^{-1}(\Delta_n)) = 0$ pour un entier $n > 0$. Considérons la suite exacte de Mayer-Vietoris :

$$\ldots \to H_3(f^{-1}(\Delta_n)) \oplus H_3(f^{-1}(\delta_{n+1})) \to H_3(f^{-1}(\Delta_{n+1})) \to H_2(f^{-1}(\Delta_n \cup \delta_{n+1})) \to \ldots$$

D'après l'hypothèse et la condition 1°, le premier terme écrit est nul; d'après la condition 4°, $f^{-1}(\Delta_n \cap \delta_{n+1})$ est topologiquement un espace fibré trivial sur $\Delta_n \cap \delta_{n+1}$ à fibres $\approx$ F, par suite $H_2(f^{-1}(\Delta_n \cap \delta_{n+1})) = [H_2(F)]_k = 0$, où k est le nombre des composantes connexes de $\Delta_n \cap \delta_{n+1}$. On a donc $H_3(f^{-1}(\Delta_{n+1})) = 0$. Par induction sur n, on obtient $H_3(f^{-1}(\Delta_n)) = 0$ pour tout n, donc, $H_3(f^{-1}(U)) = 0$.

En particulier, si R n'est pas compacte, on a $H_3(M) = 0$. Si R est compacte, on prend un recouvrement fini $\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m\}$ de R vérifiant les conditions 1°, 2° ci-dessus pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, la condition 4° pour $n \leqq m-2$ et la condition : 5° $\Delta_{m-1} \cap \delta_m$ est homéomorphe à la couronne $1/2 < |z| < 1$ dans le plan z et ne contient aucun point de K. D'après le même raisonnement que ci-dessus, on a $H_3(f^{-1}(\Delta_{m-1})) = 0$ et

$$\operatorname{rang} H_3(M) \leqq \operatorname{rang} H_2(f^{-1}(\Delta_{m-1} \cap \delta_m)) \leqq b_1(F) < \infty,$$

où $b_1(F)$ est le premier nombre de Betti d'une fibre régulière F de f. M est donc de type homologique fini sur **Q**.

(4) Supposons maintenant que K contienne m points : $z_1, z_2, \ldots, z_m$ $(0 < m < \infty)$. Comme R est homéomorphe à $\bar{R} - \{n \text{ points}\}$, $\bar{R}$ étant une surface orientable compacte (réelle) et que K est un fermé de capacité logarithmique nulle, on peut trouver $m+n$ ouverts $\{U_i\}_{1 \leqq i \leqq m+n}$ de $\bar{R}$, disjoints les uns des autres et vérifiant les conditions suivantes :

1° pour chaque $i \leqq m$, U_i est un voisinage de z_i tel qu'il existe une section algébroïde régulière $\Gamma_i = \Gamma(U_i)$ de f sur U_i et que $f^{-1}(U_i)$ soit de Stein;

2° $R - \bigcup_{i=m+1}^{m+n} U_i$ est compact;

3° $U = \bigcup_{i=1}^{m+n} U_i$ contient K;

4° le bord ∂U_i de U_i consiste en une seule courbe simple et fermée de Jordan (pour tout i).

Soit $\Sigma = f^{-1}(U)$. Alors, $M - \Sigma$ est topologiquement un espace fibré localement trivial sur $R - U$ à fibres $\approx$ F; on peut donc munir $M - \Sigma$ d'une structure de CW-complexe de façon que $\partial\Sigma = f^{-1}(\partial U)$ en soit un sous-complexe. Puisque $R - U$ et F sont de type topologique fini, on a

$$\operatorname{rang} H_k(M, \bar{\Sigma}) \underset{\text{(excision)}}{\cong} \operatorname{rang} H_k(M - \Sigma, \partial\Sigma) < \infty,$$

pour tout $k \geqq 0$. D'après la suite exacte

$$\ldots \to H_k(M) \to H_k(M, \bar{\Sigma}) \xrightarrow{\partial} H_{k-1}(\bar{\Sigma}) \to H_{k-1}(M) \to \ldots$$

on a rang $H_k(\bar{\Sigma}) < \infty$ pour tout $k \geqq 0$. On peut donc calculer la caractéristique d'Euler de $\bar{\Sigma}$ comme suit :

$$\begin{aligned}\chi(M)-\chi(\bar{\Sigma}) = \chi(M, \bar{\Sigma}) &\underset{\text{(excision)}}{=} \chi(M-\Sigma, \partial\Sigma)\\ &= \chi(M-\Sigma)-\chi(\partial\Sigma)\\ &= \chi(F).\chi(R-U)-\chi(F).\chi(\partial U)\\ &= \chi(F).[\chi(\bar{R})-(m+n)],\end{aligned}$$

où $\chi(\bigstar)$ est la caractéristique d'Euler de $\bigstar$. Les $\bar{\Sigma}_i = f^{-1}(\bar{U}_i)$ étant disjoints les uns les autres, on a

$$\sum_{i=1}^{m+n} [\chi(\bar{\Sigma}_i)-\chi(F)] = \chi(M)-\chi(F).\chi(\bar{R}).$$

D'après la condition 3°, $(\partial U_i) \cap K = \emptyset$; donc $H_k(\bar{\Sigma}_i) \cong H_k(\Sigma_i)$ pour tout $k \geqq 0$. Comme on l'a vu à l'étape (3) ci-dessus, $H_k(\Sigma_i) = 0$ pour $k \geqq 3$ et tout i. On a donc

$$\begin{aligned}\chi'_i &\equiv \chi(\bar{\Sigma}_i)-\chi(F)\\ &= [\operatorname{rang} H_1(F)-\operatorname{rang} H_1(\Sigma_i)]+\operatorname{rang} H_2(\Sigma_i).\end{aligned}$$

Or, de la suite exacte du lemme 7, on tire

$$\chi'_i \geqq 0 \qquad \text{pour} \qquad 1 \leqq i \leqq m,$$

$$\chi'_i \geqq -1 \qquad \text{pour} \quad m+1 \leqq i \leqq m+n.$$

Par suite,

$$\sum_{i=1}^{m} \chi'_i \leqq \chi(M)-\chi(F).\chi(\bar{R})+n.$$

On désignera par m_0 le terme à droite de cette inégalité ($m_0 < \infty$).

(a) Le cas où F n'est isomorphe ni à **C**, ni à **C*** : d'après le lemme 10, on a $\chi'_i > 0$ pour $i \leqq m$, de sorte que $m \leqq m_0$. Donc, K contient au plus m_0 points.

(b) Le cas où $F \approx \mathbf{C}$ ou $\mathbf{C}^*$: soit K_0 l'ensemble des points $z \in R$ tels que $f^{-1}(z)$ ne soit pas analytiquement isomorphe à F. D'après le lemme 10 et l'inégalité ci-dessus, on voit que K_0 contient au plus m_0 points. Soit $K_0 = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$.

Pour $z \in K' = K-K_0$, la fibre $f^{-1}(z)$ est irréductible, analytiquement isomorphe à F et d'ordre > 1. K', ainsi que K, est donc discret.

Supposons par l'absurde, que K' consiste en une infinité de points : $a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_{m+n}, \ldots$ K' étant discret, R n'est pas compacte. Prenons pour chaque a_n ($n = 1, 2, \ldots$) une section algébroïde régulière $\Gamma_n = \Gamma(\delta_n)$ ($\subset\subset M$) de f sur un voisinage δ_n de a_n de façon que : 1° l'adhérence $\bar{\Gamma}_n$ soit homéomorphe au disque fermé $|t| \leqq 1$ dans le plan **C** (à coordonnée t); 2° $\bar{\delta}_n \cap K = \{a_n\}$; 3° $\bar{\delta}_n \cap \bar{\delta}_m = \emptyset$ pour $n \neq m$. On écrit : $\Sigma_n = f^{-1}(\delta_n)$. On a alors

$$H_2(\bar{\Sigma}_n, \partial\Sigma_n) = \mathbf{Z}[\bar{\Gamma}_n, \partial\Gamma_n] \qquad \text{pour} \quad n \geqq m+1,$$

où $[\bar{\Gamma}_n, \partial\Gamma_n]$ est l'élément de $H_2(\bar{\Sigma}_n, \partial\Sigma_n)$ défini par le couple $(\bar{\Gamma}_n, \partial\Gamma_n)$. En effet, tout 2-cycle du couple $(\bar{\Sigma}_n, \partial\Sigma_n)$ est homologue à un cycle de la forme : $k.(\bar{\Gamma}_n, \partial\Gamma_n)+c$, où $k \in \mathbf{Z}$ et c est un 2-cycle de $(\bar{\Sigma}_n, \partial\Sigma_n)$ dont le support est dans $\bar{\Sigma}_n - f^{-1}(a_n)$. Or, $\partial\Sigma_n$ est un rétracte par déformation continue de $\bar{\Sigma}_n - f^{-1}(a_n)$; par suite, $c \sim 0$. $[\bar{\Gamma}_n, \partial\Gamma_n]$ est donc un générateur de $H_2(\bar{\Sigma}_n, \partial\Sigma_n)$.

En plus, on vérifie aisément : $H_1(\bar{\Sigma}_n, \partial\Sigma_n) = 0$, pour tout n.

On posera $\delta = \bigcup_{n=1}^{\infty} \delta_n$, $\Sigma = f^{-1}(\delta)$. Comme toute $\mathbf{C}$ (resp. C*)-fibration topologique localement triviale sur $R-\delta$ est triviale, compte tenu de $H^2(R-\delta, \mathbf{Z}) = 0$ pour le cas de $\mathbf{C}^*$-fibration, on a $M-\Sigma \approx (R-\delta)\times F$. (Rappeler $F \approx \mathbf{C}$ ou $\mathbf{C}^*$). Posons

$$\delta_0 = \bigcup_{n=1}^{m} \delta_n, \qquad \delta' = \delta - \delta_0, \qquad \Sigma_0 = \bigcup_{n=1}^{m} \Sigma_n \qquad \text{et} \qquad \Sigma' = \Sigma - \Sigma_0.$$

Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_2(M, M-\Sigma') \arrow[r, "\partial"] & H_1(M-\Sigma', \bar{\Sigma}_0) \arrow[r, "j_*"] & H_1(M, \bar{\Sigma}_0) \arrow[r] & \cdots \\
 & & H_1(M-\Sigma, \partial\Sigma_0) \arrow[u, "\wr\ (\text{excision})"'] & & \\
 & H_2(\bar{\Sigma}', \partial\Sigma') \arrow[uu, "\wr\ (\text{excision})"'] & H_1((R-\delta)\times F, (\partial\delta_0)\times F) \arrow[u, "\wr"'] & & \\
 & \bigoplus_{n=m+1}^{\infty} \mathbf{Z}[\bar{\Gamma}_n, \partial\Gamma_n] \arrow[u, "\wr"'] \arrow[r, "\oplus\partial_n"] & \bigoplus_{n=m+1}^{\infty} \mathbf{Z}[(\partial\delta_n)\times b] \arrow[u, "\lambda_*"'] \arrow[r] & \bigoplus_{n=m+1}^{\infty} \operatorname{Coker}(\partial_n) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où $b \in F$ et $[(\partial\delta_n)\times b]$ est l'élément de $H_1((R-\delta)\times F, (\partial\delta_0)\times F)$ défini par le 1-cycle $(\partial\delta_n)\times b$; les deux suites horizontales sont exactes. Comme R n'est pas compacte, λ_* est injective. On déduit donc, de ce diagramme, qu'il existe un homomorphisme injectif

$$\bigoplus_{n=m+1}^{\infty} \operatorname{Coker}(\partial_n) \to H_1(M, \bar{\Sigma}_0).$$

Or, $\partial_n[\bar{\Gamma}_n, \partial\Gamma_n] = m_n.[(\partial\delta_n)\times b]$, où $m_n =$ l'ordre de f sur la fibre $f^{-1}(a_n)$ est > 1; donc, $\bigoplus_{n=m+1}^{\infty} \operatorname{Coker}(\partial_n) \cong \bigoplus_{n=m+1}^{\infty} \mathbf{Z}/m_n\mathbf{Z}$, ainsi que $H_1(M, \bar{\Sigma}_0)$, contient une infinité d'éléments d'ordre fini. D'autre part, par hypothèse, $H_1(M)$ est de type fini en tant que $\mathbf{Z}$-module; le nombre des composantes connexes de $\bar{\Sigma}_0$ est égal à m $(< \infty)$; par suite, $H_1(M, \bar{\Sigma}_0)$ est aussi de type fini, ce qui est absurde. $K = K_0 \cup K'$ est donc fini, ce qui achève la démonstration de la proposition 3.

En combinant ce résultat avec le théorème (NV) cité plus haut, on obtient le :

THÉORÈME N. — *Soit* M *une variété analytique complexe connexe de dimension complexe* 2 *telle que* $H_1(M; \mathbf{Z})$ *soit de type fini en tant que* $\mathbf{Z}$*-module et* $H_2(M; \mathbf{Z})$ *de rang fini sur* $\mathbf{Z}$; $f : M \to R$ *une application algébroïde primitive de* M *sur une surface de Riemann* R.

Il existe alors, une variété analytique complexe $\tilde{M}$ *de dimension complexe* 2 *munie d'une projection holomorphe propre* $\tilde{f} : \tilde{M} \to R$ *et un isomorphisme analytique* Φ *de* M *sur un ouvert* $\Phi(M)$ *de* $\tilde{M}$ *tels que* $f = \tilde{f} \circ \Phi$. *Si en outre* R *est de type algébrique i. e. un ouvert de Zariski d'une surface de Riemann compacte* $\overline{R}$, *on peut alors trouver une variété analytique compacte* $\overline{M}$ *de dimension complexe* 2 *munie d'une projection holomorphe* $\overline{f} : \overline{M} \to \overline{R}$ *et un isomorphisme analytique* Ψ *de* M *sur un ouvert* $\Psi(M)$ *de* $\overline{M}$ *tels que* $f = \overline{f} \circ \Psi$. *Dans les deux cas,* $\tilde{M} - \Phi(M)$ [*resp.* $\overline{M} - \Psi(M)$] *est un sous-ensemble analytique de* $\tilde{M}$ (*resp. de* $\overline{M}$) *de (co-) dimension pure* 1.

11. FONCTIONS DE TYPE ALGÉBRIQUE SUR $\mathbf{C}^2$. — Soit f une fonction méromorphe non-constante *de type algébrique* sur l'espace $\mathbf{C}^2$ des deux variables complexes x, y; c'est-à-dire, τ étant l'ensemble des points d'indétermination de f, l'application $f : \mathbf{C}^2 - \tau \to \mathbf{CP}^1$ est algébroïde au sens du n° 8. Soit (R, f_0) l'espace de base de f. Comme $\mathbf{C}^2 - \tau$ est simplement connexe, R est, d'après la Remarque du n° 8, analytiquement isomorphe à $\mathbf{C}$ ou à $\mathbf{CP}^1$, compte tenu du fait qu'il n'existe aucune fonction holomorphe bornée et non-constante sur $\mathbf{C}^2 - \tau$. On peut donc considérer f_0 comme une fonction holomorphe ou méromorphe de type algébrique sur $\mathbf{C}^2$; on l'appellera *fonction primitive associée à* f. *On a une fonction méromorphe* ξ *sur* R (= $\mathbf{C}$ *ou* $\mathbf{CP}^1$) *telle que* $f = \xi(f_0)$. *Si* f *est rationnelle,* f_0 *et* ξ *sont aussi rationnelles.*

Supposons maintenant que f est primitive (i. e. $f_0 = f$). Comme une fibre générique de f est irréductible, de type algébrique et passe par tous les points de τ, τ consiste en un nombre fini de points. Donc, d'après le théorème N ci-dessus, il existe une surface analytique complexe compacte V munie d'une projection holomorphe $\overline{f} : V \to \mathbf{CP}^1$ et une application holomorphe injective Ψ de $\mathbf{C}^2 - \tau$ dans V telles que $f = \overline{f} \circ \Psi$. Soit Q une boule $|x|^2 + |y|^2 < r$ dans $\mathbf{C}^2$ contenant τ. On peut alors contracter les courbes analytiques compactes dans l'adhérence $\overline{\Psi(Q - \tau)}$. Désignons par V_* l'espace analytique (normal) obtenu par cette modification. Alors, l'application composée

$$\mathbf{C}^2 - \tau \xrightarrow{\Psi} V \xrightarrow{\text{projection}} V_*$$

se prolonge par continuité en une application holomorphe injective $\Psi_* : \mathbf{C}^2 \to V_*$. Par suite, V_* (normal) est non-singulier. Comme $V_* - \Psi_*(\mathbf{C}^2)$ est un sous-ensemble analytique de codimension 1, le premier nombre de Betti de V_* est nul. Par suite, d'après K. Kodaira [4], V_* est une surface complexe rationnelle. Évidemment $f \circ \Psi_*^{-1}$ est méromorphe sur V_*. Donc, de façon tout à fait analogue au cas traité par T. Nishino [5 V], on a, d'après J. A. Morrow, une application birationnelle φ de V_* à $\mathbf{CP}^2$ qui envoie $\Psi_*(\mathbf{C}^2)$ sur $\mathbf{C}^2$ ($\subset \mathbf{CP}^2$) binnivoquement. On obtient ainsi un automorphisme analytique $\alpha = \varphi \circ \Psi_* : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$ tel que $f \circ \alpha^{-1}$ soit méromorphe sur $\mathbf{CP}^2$, c'est-à-dire rationnelle. On a donc :

THÉORÈME N'. — *Si* f *est une fonction méromorphe primitive de type algébrique sur l'espace* $\mathbf{C}^2$ *de deux variables complexes* x, y, *il existe alors une fonction rationnelle primitive* φ *de* x, y *et un automorphisme analytique* α *de* $\mathbf{C}^2$ *tels que* $f = \varphi \circ \alpha$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] W. J. BAILY, *On the Theory of* θ*-Fonctions, the Moduli of Abelian Varieties and the Moduli of Curves* (*Ann. Math.*, vol. 75, 1962, p. 342-381).

[2] H. CARTAN-J.-P. SERRE, *Un théorème de finitude concernant les variétés analytiques complexes* (*C.R. Acad. Sc. Paris*, t. 237, 1953, p. 128-130).

[3] K. KODAIRA, *On Cohomology Groups of Compact Analytique Varieties with Coefficients in Somes Analytic Faisceaux* (*Proc. Nat. Acad. Sc. U.S.A.*, vol. 39, 1953, p. 865-868).

[4] K. KODAIRA, *Holomorphic Mappings of Polydiscs into Compact Complexe Manifolds* (*J. Diff. Geom.*, vol. 6, 1971, p. 33-46).

[5] T. NISHINO, *Nouvelles recherches sur les fonctions entières de plusieurs variables complexes*, III, IV, V (*J. Math. Kyoto Univ.*, vol. 10, 1970, p. 245-271; vol. 13, 1973, p. 217-272 et vol. 15, 1975, p. 527-553).

[6] T. NISHINO, *Continuations analytiques au sens de Riemann* (à paraître).

[7] R. RENTSCHLER, *Opérations du groupe additif sur le plan affine* (*C.R. Acad. Sc. Paris*, t. 267, 1968, p. 384-387).

[8] R. W. RICHARDSON, *Principal Orbit Type for Reductive Groups Acting on Stein Manifolds* (*Math, Ann.*, vol. 208, 1974, p. 323-331).

[9] H. SAITO, *Fonctions entières qui se réduisent à certains polynômes* (1) (*Osaka J. Math.*, vol. 9, 1972, p. 293-332).

[10] K. STEIN, *Analytishe Projection komplexer Magnifoltihkeiten* (*Colloque* Bruxell, 1953, p. 87-107).

[11] K. STEIN, *Die Existenz komplexer Basen zu holomorphen Abbildungen* (*Math. Ann.*, vol. 136, 1958, p. 1-8).

[12] M. SUZUKI, *Propriétés topologiques des polynômes de deux variables complexes, et automorphismes algébriques de l'espace* $\mathbf{C}^2$ (*J. Math. Soc. Japan*, vol. 26, 1974, p. 241-257).

[13] M. SUZUKI, *Sur les intégrales premières de certains feuilletages analytiques complexes* (*Séminaire F. Norguet*, 1975-1976, Springer, p. 31-57).

[14] M. SUZUKI, *Sur les opérations holomorphes de* $\mathbf{C}$ *et de* $\mathbf{C}^*$ *sur un espace de Stein* (*Séminaire F. Norguet*, 1975-1976, Springer, p. 58-66).

[15] M. SUZUKI, *Note sur les opérations holomorphes de* $\mathbf{C}$ *sur* $\mathbf{C}^2$ [*Séminaire de R. Gérard et J.-P. Ramis.*, Springer (à paraître)].

(Manuscrit reçu le 21 juin 1977)

Masakazu SUZUKI,
Faculté de Technologie,
Université de Kyushu,
Hakozaki, Higashi-ku,
Fukuoka 812,
Japon.