ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

PIERRE MOLINO

Étude des feuilletages transversalement complets et applications

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 10, nº 3 (1977), p. 289-307

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1977_4_10_3_289_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 10, 1977, p. 289 à 307.

ÉTUDE DES FEUILLETAGES TRANSVERSALEMENT COMPLETS ET APPLICATIONS

PAR PIERRE MOLINO

Les structures différentiables considérées sont de classe C^∞.

Soient V une variété différentiable, $\mathscr{F}$ un feuilletage sur V. On dira que $\mathscr{F}$ est *transversalement complet* (§ 1) si, pour tout $x \in V$ et pour tout vecteur X_x tangent en ce point, il existe un champ de vecteurs feuilleté complet sur V prenant en x la valeur X_x. Tout feuilletage simple défini par une fibration localement triviale est de ce type. De même, si V est compacte et si $\mathscr{F}$ est un feuilletage transversalement parallélisable (L. Conlon [2]) ou un g-feuilletage de Lie (E. Fedida [5]).

Au paragraphe 2 on démontre pour ce type de feuilletage les propriétés suivantes :

THÉORÈME 1. — *Les adhérences des feuilles de $\mathscr{F}$ sont les fibres d'une fibration localement triviale $\pi : V \to W$. De plus il existe une algèbre de Lie réelle g telle que, sur chaque fibre de π, $\mathscr{F}$ induit un g-feuilletage de Lie.*

La première partie du théorème peut être déduite de résultats de H. Sussmann (*voir* [13]). Elle est démontrée ici par une méthode géométrique reposant sur l'étude préalable des feuilletages de Lie, pour lesquels on retrouve les résultats de E. Fedida.

La dimension de W (*dimension basique*) et l'algèbre de Lie g (*algèbre de Lie structurale*) sont des invariants du feuilletage. Le cas où $\mathscr{F}$ est défini par une fibration correspond à $g = \{ 0 \}$ et $\dim W = \operatorname{codim} \mathscr{F}$. Si $\dim W = 0$, $\mathscr{F}$ est un g-feuilletage de Lie à feuilles denses.

Ces résultats généralisent, simplifient et précisent les travaux antérieurs de L. Conlon et E. Fedida.

On voit apparaître un rapport étroit et quelque peu inattendu entre l'espace des feuilles d'un feuilletage transversalement complet et un G-fibré principal où G est un groupe de Lie d'algèbre de Lie opposée à g. Ce rapport est précisé au paragraphe 3 où l'on démontre (corollaire 1 du théorème 2) que si le centre de g est nul il existe un revêtement $\tilde{V}$ de V sur lequel le feuilletage relevé $\tilde{\mathscr{F}}$ est simple et admet pour espace des feuilles un G-fibré principal.

Au paragraphe 4 on donne deux applications géométriques de ces résultats. En premier lieu si $\mathscr{F}$ est un feuilletage à métrique quasi fibrée (B. Reinhart [12]) on observe que, si V est compacte, le feuilletage relevé dans le fibré des repères transverses orthonormés est transversalement complet. On en déduit (th. 3) un certain nombre de propriétés de ce type de feuilletages, en particulier la structure du quotient de V par les adhérences des feuilles.

En second lieu on applique les résultats précédents à l'étude des *algèbres de Lie transitives complètes* de champs de vecteurs sur une variété V. On démontre par exemple (th. 4) que si $\mathscr{A}$ est une telle algèbre, A son algèbre formelle (au sens de [7]), I (resp. $\mathscr{I}(\mathscr{A})$) l'idéal de A (resp. de $\mathscr{A}$) défini par un feuilletage $\mathscr{F}$ invariant par $\mathscr{A}$, si $\pi_1(V) = 0$ et si A/I n'a pas d'idéal abélien, l'algèbre $\mathscr{A}_W$ projetée de $\mathscr{A}$ sur la variété basique W de $\mathscr{F}$ est $\mathscr{A}/\mathscr{I}(\mathscr{A})$. Ce type de résultats intervient dans la recherche de suites de Jordan-Hölder globales pour un pseudogroupe de Lie transitif complet.

Une partie des résultats démontrés ici (th. 1 et 3) ont été indiqués brièvement dans une note antérieure ([10] *d*). H. Driessen, dans [3], a fait une étude partielle de la cohomologie basique des feuilletages transversalement complets. Je remercie C. Lamoureux pour d'utiles remarques, en particulier au sujet des feuilletages de Reinhart. Je remercie également le référé de cet article aux *Annales Scientifiques de l'E.N.S.* qui m'a indiqué plusieurs corrections utiles sur le manuscrit initial.

1. Définitions et exemples

1.1. FEUILLETAGES TRANSVERSALEMENT COMPLETS. — V est une variété différentiable de dimension n, $\mathscr{F}$ un feuilletage de codimension q de V. Soient $\mathscr{I}$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs tangents aux feuilles, $\mathscr{L}$ l'algèbre de Lie des automorphismes infinitésimaux de $\mathscr{F}$ (champs de vecteurs feuilletés). $\mathscr{L}$ est le normalisateur de $\mathscr{I}$ dans l'algèbre de tous les champs de vecteurs de V. La suite exacte d'algèbres de Lie :

$$0 \to \mathscr{I} \to \mathscr{L} \to l \to 0, \tag{1}$$

définit une algèbre de Lie quotient l que l'on peut considérer comme l'algèbre des automorphismes infinitésimaux de l'espace des feuilles $V/\mathscr{F}$ (« feuillage » au sens de [10] *c*).

Soient Aut (V, $\mathscr{F}$) le groupe des automorphismes du feuilletage (transformations de V qui laissent $\mathscr{F}$ invariant) et $\mathscr{L}_c$ la partie de $\mathscr{L}$ formée de champs de vecteurs complets. $\mathscr{F}$ est *transversalement complet* si pour tout x de V l'application d'évaluation en x :

$$\mathrm{ev}_x : \quad \mathscr{L}_c \to \mathrm{T}_x(\mathrm{V}) \tag{2}$$

est surjective. Sous cette hypothèse on voit que les orbites de Aut (V, $\mathscr{F}$) dans V sont ouvertes. Si l'on suppose V connexe, Aut (V, $\mathscr{F}$) opère transitivement sur V. On pourra dire alors qu'un tel feuilletage est de *type transitif*.

Il en résulte en particulier que :

(i) Les feuilles sont toutes difféomorphes entre elles,

(ii) les adhérences des feuilles forment une partition de V si il existe un ensemble minimal (en particulier si V compacte).

1.2. PREMIER EXEMPLE : FIBRATIONS LOCALEMENT TRIVIALES. — Soit $\pi : V \to W$ une fibration localement triviale. Le feuilletage simple (*voir* [11]) défini par π est transversalement complet : on construit des champs de vecteurs feuilletés complets en relevant, à l'aide d'une trivialisation locale, des champs de vecteurs sur W à support compact contenu dans l'ouvert trivialisant.

En revanche, il est facile de construire des exemples de feuilletages simples qui ne sont pas transversalement complets, par exemple en considérant la submersion induite sur un ouvert de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ par la projection sur le premier facteur.

1.3. DEUXIÈME EXEMPLE : FEUILLETAGES TRANSVERSALEMENT PARALLÉLISABLES COMPLETS. — Soient V une variété différentiable de dimension n, $\mathscr{F}$ un feuilletage de codimension q sur V. Un *parallélisme transverse* au feuilletage est déterminé par q champs de vecteurs feuilletés $X_1, \ldots, X_q$ qui engendrent en tout point un supplémentaire de l'espace tangent à la feuille (*voir* L. Conlon [2]).

La donnée du parallélisme transverse $\{X_1, \ldots, X_q\}$ est équivalente à la donnée d'une 1-forme α sur V à valeurs dans $\mathbf{R}^q$, de rang q en tout point, et *basique* c'est-à-dire localement projetable le long des feuilles. α est déterminée par les conditions :

$$(3)\qquad \begin{cases} \alpha^i(X_j) = \delta^i_j \text{ (symbole de Kronecker)}, & \text{si } i, j = 1, \ldots, q, \\ \alpha^i(Y) = 0, & \forall Y \in \mathscr{I}. \end{cases}$$

A cette 1-forme α on peut associer le sous-espace vectoriel $\mathscr{L}_\alpha$ de $\mathscr{L}$ formé des champs de vecteurs X sur V qui vérifient $\alpha(X) = $ constante. La correspondance $X \mapsto \alpha(X)$ définit alors une projection de $\mathscr{L}_\alpha$ sur $\mathbf{R}^q$, de noyau $\mathscr{I}$. On a donc la suite exacte d'espaces vectoriels :

$$(4)\qquad 0 \to \mathscr{I} \to \mathscr{L}_\alpha \to \mathbf{R}^q \to 0,$$

induite par (1) et qui permet de considérer $\mathbf{R}^q$ comme un sous-espace vectoriel de l.

Le parallélisme transverse est dit *complet* si la partie $\mathscr{L}_{\alpha c}$ de $\mathscr{L}_\alpha$ formée de champs de vecteurs complets vérifie pour tout $x \in V$:

$$(5)\qquad ev_x : \ \mathscr{L}_{\alpha c} \to T_x(V) \quad \text{est surjective.}$$

Cette condition est en particulier satisfaite si V est compacte. L. Conlon (article cité), a étudié ce type de feuilletage en codimension 2. Les résultats du présent travail généralisent les résultats de L. Conlon qui sont retrouvés comme cas particulier par des méthodes beaucoup plus élémentaires.

1.4. TROISIÈME EXEMPLE : FEUILLETAGES DE LIE COMPLETS. — Soit encore V une variété différentiable de dimension n. g étant une algèbre de Lie réelle de dimension q, un *g-feuil-*

letage de Lie au sens de Fedida [5], est défini par la donnée d'une 1-forme α sur V à valeurs dans g de rang q en tout point et vérifiant les équations de Maurer-Cartan :

$$d\alpha+\frac{1}{2}[\alpha, \alpha]=0. \tag{6}$$

Le noyau de α définit un champ d'éléments de contact qui est complètement intégrable d'après (6). Si $\mathscr{F}$ est le feuilletage correspondant, on vérifie immédiatement que la 1-forme α est *basique* (au sens indiqué dans l'exemple précédent) pour ce feuilletage. Donc $\mathscr{F}$ est transversalement parallélisable.

Comme dans l'exemple précédent, on notera $\mathscr{L}_\alpha$ le sous-espace de $\mathscr{L}$ formé des champs de vecteurs X sur V tels que $\alpha(X)$ = constante. La correspondance $X \rightarrow \alpha(X)$ définira alors une projection de $\mathscr{L}_\alpha$ sur g de noyau $\mathscr{I}$. Mais de plus, si $X, Y \in \mathscr{L}_\alpha$ on a :

$$d\alpha(X, Y)=X.\alpha(Y)-Y.\alpha(X)-\alpha([X, Y])=-\alpha([X, Y]).$$

Mais d'autre part d'après (6) :

$$d\alpha(X, Y)=-[\alpha(X), \alpha(Y)].$$

Ainsi la projection de $\mathscr{L}_\alpha$ sur g est un homomorphisme d'algèbres de Lie; on a donc la suite exacte *d'algèbres de Lie* :

$$0 \rightarrow \mathscr{I} \rightarrow \mathscr{L}_\alpha \rightarrow g \rightarrow 0, \tag{7}$$

induite par (1) et qui permet de considérer g comme une sous-algèbre de Lie de l.

Le feuilletage de Lie est dit *complet* si le parallélisme transverse associé l'est.

Les feuilletages de Lie complets jouent un rôle essentiel dans la théorie générale des feuilletages transversalement complets. La proposition suivante montre comment les feuilletages de Lie interviennent de façon naturelle dans cette théorie :

PROPOSITION 1 (*voir* [9] *bis*). — *Si $\mathscr{F}$ est un feuilletage transversalement complet admettant une feuille dense, alors c'est le feuilletage de Lie défini par une* 1-*forme* α *et de plus dans ce cas* $\mathscr{L}=\mathscr{L}_\alpha$.

Preuve. — Soit x_0 un point de la feuille dense.

X étant un champ de vecteurs feuilleté, s'il est tangent en x_0 à la feuille il appartient à $\mathscr{I}$. Par suite la dimension de $l=\mathscr{L}/\mathscr{I}$ est au plus égale à la codimension q de $\mathscr{F}$. C'est d'ailleurs exactement q car sinon $\mathscr{L}$ ne serait pas transitive sur V. Donc $\dim(l)=q$ et la projection $\mathscr{L} \rightarrow l$ définit sur V une 1-forme α à valeurs dans l vérifiant (6) et basique pour $\mathscr{F}$. D'où le résultat.

C. Q. F. D.

Remarque. — On notera que dans ce cas la structure de feuilletage de Lie est définie par le feuilletage lui-même. On dira que cette structure est *intrinsèque.*

Donnons par ailleurs une propriété générale des feuilletages de Lie complets qui sera utilisée par la suite. Soit $(V, \mathscr{F})$ muni d'une structure de g-feuilletage de Lie complet par la forme α. On considère le groupe de Lie connexe simplement connexe G d'algèbre de Lie g.

PROPOSITION 2 (Fedida). — *Il existe un revêtement galoisien* $\tilde{V}$ *de* V *tel que le feuilletage relevé* $\tilde{\mathscr{F}}$ *soit un feuilletage de Lie simple ayant pour espace des feuilles* G. *De plus les adhérences des feuilles de* $\mathscr{F}$ *sont les fibres d'une fibration* $\pi : V \to G/\overline{H}$ *où* $\overline{H}$ *est un sous-groupe de Lie fermé de* G.

Preuve. — Considérons le G-fibré principal trivial $V \times G$. Sur la section $V \times \{e\}$ de ce fibré la 1-forme α définit une 1-forme à valeurs dans g. Donc α détermine une connexion infinitésimale ω_α sur $V \times G$ qui, d'après (6), est sans courbure. Soient $x_0 \in V$ et H le groupe d'holonomie de la connexion au point (x_0, e). La nappe d'holonomie $\tilde{V}$ passant par ce point est un revêtement galoisien de V. Notons $\tilde{\mathscr{F}}$ le feuilletage relevé dans $\tilde{V}$. Soient $\tilde{\pi}$ la restriction à $\tilde{V}$ de la projection naturelle $V \times G \to G$ et $\tilde{p} : \tilde{V} \to V$ la projection du revêtement sur la base. Le fait que $\tilde{V}$ soit horizontale pour ω_α se traduit par

$$\tilde{\alpha} = \tilde{p}^* \alpha = -\tilde{\pi}^* \eta,$$

où η est la forme de Maurer-Cartan de G.

$\tilde{\alpha}$ définit sur $\tilde{\mathscr{F}}$ une structure de feuilletage de Lie complet (car le relevé sur $\tilde{V}$ d'un champ complet de V est complet). La relation précédente prouve alors que $\tilde{\mathscr{F}}$ est le feuilletage de Lie simple défini par la projection $\tilde{\pi}$.

Pour $\lambda \in g$, soit $\tilde{X}_\lambda$ un champ complet sur $\tilde{V}$ tel que $\tilde{\alpha}(\tilde{X}_\lambda) = -\lambda$. En intégrant les champs $\tilde{X}_\lambda$ on définit une action de G sur l'espace des feuilles $\tilde{V}/\tilde{\mathscr{F}}$. Les orbites de cette action étant ouvertes, elle est transitive. Comme elle correspond par $\tilde{\pi}$ à l'action à droite de G sur lui-même on en déduit $\tilde{V}/\tilde{\mathscr{F}} = G$, c'est-à-dire que la préimage par $\tilde{\pi}$ d'un point de G est connexe. D'ailleurs $\tilde{\pi}$ est une fibration localement triviale d'après un raisonnement classique du à Ehresmann ([4]).

H étant le groupe structural de la fibration $\tilde{p} : \tilde{V} \to V$, l'espace des feuilles $V/\mathscr{F}$ s'identifie à G/H. $G/\overline{H}$ est alors l'espace quotient de V par la relation d'équivalence définie par les adhérences des feuilles. Soit $\pi : V \to G/\overline{H}$ la projection naturelle. p désignant la fibration $G \to G/\overline{H}$, le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{V} & & G \\ {\scriptstyle\tilde{p}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ V & \xrightarrow{\pi} & G/\overline{H} \end{array}$$

commute et par suite π est elle-même une fibration.

C. Q. F. D.

Remarque. — H. Sussmann dans [13] démontre un résultat plus général pour les relations d'équivalence fermées dans les variétés qui admettent « assez » d'automorphismes infinitésimaux complets. Plutôt que d'utiliser ses résultats dans la suite on a préféré les redémontrer par une étude géométrique qui permettra de se ramener au cas des feuilletages de Lie complets.

2. Structure des feuilletages transversalement complets

Dans cette partie V désignera une variété différentiable de dimension n, $\mathscr{F}$ un feuilletage de codimension q transversalement complet sur V. On conserve les notations introduites en 1.1.

2.1. FEUILLETAGE BASIQUE. — U étant un ouvert de V *saturé* pour le feuilletage $\mathscr{F}$ (c'est-à-dire réunion de feuilles), une fonction différentiable $f : \mathrm{U} \rightarrow \mathbf{R}$ sera dite *basique* si elle est constante sur chaque feuille. On définit ainsi un *faisceau basique* $\mathscr{B}$ sur V pour la topologie définie par les ouverts saturés. On notera par exemple que si $\mathscr{F}$ possède une feuille dense les seuls ouverts saturés sont Ø et V et les seules fonctions basiques les constantes.

Soit $x \in \mathrm{V}$. Notons B_x le sous-espace de l'espace tangent $\mathrm{T}_x(\mathrm{V})$ formé des vecteurs annulés par les différentielles de toutes les fonctions basiques définies dans les voisinages ouverts saturés de x. La transitivité de Aut (V, $\mathscr{F}$) entraîne que la dimension de B_x est constante. De plus, par définition, le champ d'éléments de contact ainsi obtenu peut être localement défini par des différentielles totales exactes. C'est donc un champ d'éléments de contact différentiable et complètement intégrable. Le feuilletage correspondant $\mathscr{F}_b$ sera dit *feuilletage basique* de $\mathscr{F}$. Les feuilles de $\mathscr{F}_b$ sont réunions de feuilles du feuilletage $\mathscr{F}$.

Si $\mathrm{X} \in \mathscr{L}$ et si f est une fonction basique dans l'ouvert saturé U, $\mathrm{X}f$ est également basique. Par suite $\mathscr{L}$ est contenue dans l'algèbre de Lie $\mathscr{L}_b$ des automorphismes infinitésimaux du feuilletage basique. Donc *$\mathscr{F}_b$ est transversalement complet.*

La codimension q_b de $\mathscr{F}_b$ sera dite *dimension basique* du feuilletage $\mathscr{F}$. C'est un invariant structural du feuilletage. On a bien entendu $0 \leqq q_b \leqq q$.

PROPOSITION 3. — *Soient* F *une feuille de* $\mathscr{F}$ *et* F_b *la feuille de* $\mathscr{F}_b$ *qui contient* F. *Alors il existe un ouvert saturé U tel que l'adhérence de* F *dans U coïncide avec l'adhérence de* F *dans* $\mathrm{F}_b \cap \mathrm{U}$.

Preuve. — Soient $\overline{\mathrm{F}}_{\mathrm{U}}$ et $\tilde{\mathrm{F}}_{\mathrm{U}}$ les adhérences respectives de F dans U et $\mathrm{F}_b \cap \mathrm{U}$.

On peut trouver un tel voisinage ouvert saturé muni de fonctions basiques $f_1, \ldots, f_{q_b}$ de façon que dans U le feuilletage basique soit défini par $df_1 = \ldots = df_{q_b} = 0$. $\tilde{\mathrm{F}}_{\mathrm{U}}$ est fermé dans une plaque (*voir* [11]) du feuilletage basique dans U. Donc $\tilde{\mathrm{F}}_{\mathrm{U}}$ est fermé dans U. D'où le résultat.

C. Q. F. D.

Le cas où $q_b = q$ jouera un rôle essentiel dans la suite. Ce cas est élémentaire comme le prouve la proposition suivante :

PROPOSITION 4. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) les feuilles de $\mathscr{F}$ sont fermées dans un ouvert saturé;

(ii) $q_b = q$;

(iii) $\mathscr{F}$ est défini par une fibration à fibres connexes localement triviale $\pi : V \to W$.

Preuve. — (iii) $\Rightarrow$ (ii) est évident.

(ii) $\Rightarrow$ (i) résulte de la proposition 3.

(i) $\Rightarrow$ (iii) : soit F une feuille de $\mathscr{F}$ et choisissons $X_1, \ldots, X_q \in \mathscr{L}_c$ de façon qu'en chaque point de F ces champs engendrent un sous-espace supplémentaire au sous-espace tangent à F. On note $\varphi^1_{t_1}, \ldots, \varphi^q_{t_q}$ les groupes à un paramètre correspondant respectivement à $X_1, \ldots, X_q$. Soit Φ l'application différentiable de $\mathbf{R}^q \times F$ dans V définie par

$$\Phi(t_1, \ldots, t_q, x) = (\varphi^1_{t_1} \circ \varphi^2_{t_2} \circ \ldots \circ \varphi^q_{t_q})(x).$$

Fixons $x_0 \in F$. F étant fermée dans un ouvert saturé il existe un voisinage ouvert Ω de l'origine dans $\mathbf{R}^q$ tel que Φ induit un difféomorphisme de $\Omega \times \{ x_0 \}$ sur son image. Donc Φ induira un difféormorphisme de $\Omega \times F$ sur un ouvert saturé U de V. Comme ceci est vrai pour toute feuille, les feuilles sont fermées.

Soit π la projection $\Omega \times F \to \Omega$. L'application $\pi \circ \Phi^{-1} : U \to \Omega$ est une application basique. On en déduit que $q_b = q$ et par suite que l'espace des feuilles W est une variété (éventuellement non séparée). Montrons que W est séparée : si S est un voisinage compact de l'origine dans $\mathbf{R}^q$ contenu dans Ω, $\Phi(S \times F)$ est un voisinage fermé saturé de F dans V. Par suite W est séparée et le feuilletage $\mathscr{F}$ est défini par une submersion $\pi : V \to W$. Φ détermine une trivialisation locale de π et les fibres de π sont connexes, étant difféomorphes à F.

Remarques. — (*a*) Si l'on savait établir directement que le feuilletage basique du feuilletage $\mathscr{F}_b$ coïncide avec lui-même, on en déduirait immédiatement (ce qui sera démontré plus loin) que $\mathscr{F}_b$ est défini par une fibration. On voit qu'il suffirait de prouver que tout ouvert saturé pour $\mathscr{F}$ est saturé pour $\mathscr{F}_b$.

(*b*) La proposition 4 étudie le cas où $q_b = q$. Supposons au contraire que $q_b = 0$. Soit U un ouvert saturé de V muni d'un parallélisme transverse (l'existence d'un tel voisinage ouvert pour toute feuille F résulte de l'existence de champs de vecteurs $X_1, \ldots, X_q \in \mathscr{L}$ qui engendrent en chaque point de F un sous-espace supplémentaire du sous-espace tangent à la feuille). $\mathscr{L}(U)/\mathscr{I}(U)$ est un module libre de dimension q sur l'anneau des fonctions basiques dans U, donc un espace vectoriel réel de dimension q, les seules fonctions basiques étant les constantes. Donc, si $X \in \mathscr{L}$, l'ensemble des points où X est tangent aux feuilles est ouvert. Comme il est visiblement fermé, c'est V ou $\emptyset$. Par suite $l = \mathscr{L}/\mathscr{I}$ est de dimension q et le feuilletage est, comme dans le cas de la proposition 1, un feuilletage de Lie pour lequel $\mathscr{L} = \mathscr{L}_\alpha$. Donc c'est un feuilletage de Lie complet. D'après la proposition 2 les adhérences des feuilles forment un nouveau feuilletage $\overline{\mathscr{F}}$. Les automorphismes de $\mathscr{F}$ respectent $\overline{\mathscr{F}}$, donc $\overline{\mathscr{F}}$ est transversalement complet. Les feuilles étant fermées, d'après la proposition 4 c'est une fibration. Toute fonction basique pour $\overline{\mathscr{F}}$ est basique pour $\mathscr{F}$. $q_b = 0$ entraîne alors que la variété des feuilles de $\overline{\mathscr{F}}$ est réduite à un point, c'est-à-dire que les feuilles de $\mathscr{F}$ sont denses. On voit donc que si $q_b = 0$, *$\mathscr{F}$ est un feuilletage de Lie complet à feuilles denses.* On retrouvera dans la suite ce résultat comme cas particulier.

2.2. Théorème de structure. — Soient F une feuille de M, F_b la feuille correspondante du feuilletage basique. $\mathscr{F}$ induit sur F_b un feuilletage de codimension $r = q\text{-}q_b$. Notons $\mathscr{L}(F_b)$ l'algèbre des automorphismes infinitésimaux de $(F_b, \mathscr{F})$, $\mathscr{I}(F_b)$ l'idéal tangent aux feuilles.

Si $X \in \mathscr{L}$ est tangent à F_b en un point, il est tangent à F_b en tout point et induit donc $X_{F_b} \in \mathscr{L}(F_b)$. On notera $\mathscr{L}_{F_b}$ la sous-algèbre de $\mathscr{L}(F_b)$ ainsi définie. En utilisant dans $\mathscr{L}_{F_b}$ les champs induits par des champs de vecteurs $X \in \mathscr{L}_c$ on voit que *$\mathscr{F}$ induit sur F_b un feuilletage transversalement complet.*

Lemme. — *$(F_b, \mathscr{F})$ est muni d'une structure de feuilletage de Lie complet.*

Preuve. — Considérons $X_1, \ldots, X_q \in \mathscr{L}$ tels qu'en un point de F ils engendrent un supplémentaire de l'espace tangent à la feuille F. On peut supposer de plus que $X_1, \ldots, X_r$ sont tangents à F_b en x. Sous ces hypothèses $X_1, \ldots, X_r$ induisent sur F_b des champs de vecteurs $X_{1F_b}, \ldots, X_{rF_b}$. Soit U l'ensemble des points de V où $X_1, \ldots, X_q$ engendrent un supplémentaire de l'espace tangent à la feuille de $\mathscr{F}$. U est un ouvert saturé et $U_b = U \cap F_b$ est un ouvert de F_b saturé pour le feuilletage induit.

$\mathscr{L}(U)/\mathscr{I}(U)$ est un module libre sur l'anneau B (U) des fonctions basiques dans U. Donc pour tout $X \in \mathscr{L}$ on a dans U :

$$(8) \qquad X = \sum_{i=1}^{q} \varphi^i X_i + Y, \qquad \text{où} \quad Y \in \mathscr{I}(U) \quad \text{et} \quad \varphi^i \in B(U).$$

En particulier, dans U_b où les fonctions basiques sont constantes, on aura si X est tangent à F_b :

$$(9) \qquad X_{F_b} = \sum_{i=1}^{r} \lambda^i X_{iF_b} + Y_b, \qquad \text{où} \quad Y_b \in \mathscr{I}(U_b) \quad \text{et} \quad \lambda^i \in \mathbf{R}.$$

Donc, si $\mathscr{L}_{F_b}(U_b)$ est la restriction à U_b des champs de $\mathscr{L}_{F_b}$,

$$\frac{\mathscr{L}_{F_b}(U_b)}{(\mathscr{L}_{F_b}(U_b) \cap \mathscr{I}(U_b))}$$

est un espace vectoriel de dimension r. Comme à la remarque (b) du paragraphe 2.1, on en déduit que $g = \mathscr{L}_{F_b}/(\mathscr{L}_{F_b} \cap \mathscr{I}(F_b))$ est de dimension r, et par suite que $\mathscr{L}_{F_b}$ définit sur $(F_b, \mathscr{F})$ une structure de feuilletage de Lie complet.

C. Q. F. D.

Soit alors $\overline{F}$ l'adhérence de F dans F_b. Chaque feuille F_b du feuilletage basique est feuilletée, d'après la proposition 2, par ces adhérences. Donc V elle-même est feuilletée par ces adhérences. Soit $\overline{\mathscr{F}}$ le feuilletage ainsi défini. Il admet pour automorphismes tous les automorphismes de $\mathscr{F}$, donc il est transversalement complet. Mais, alors, d'après les propositions 3 et 4 $\overline{\mathscr{F}}$ est défini par une fibration localement triviale $\pi : \mathrm{V} \rightarrow \mathrm{W}$ à fibres connexes et sa dimension basique $\bar{q}_b$ coïncide avec sa codimension. En effet toute fonction basique pour $\overline{\mathscr{F}}$ l'est pour $\mathscr{F}$ d'où $q_b \geqq \bar{q}_b$. Comme par ailleurs les feuilles de $\overline{\mathscr{F}}$ sont contenues dans celles de $\mathscr{F}_b$ on a $q_b \leqq \bar{q}_b$, donc $q_b = \bar{q}_b$, c'est-à-dire que $\overline{\mathscr{F}}_b = \mathscr{F}_b$.

Ainsi F_b est munie par $\mathscr{F}$ d'un g-feuilletage de Lie complet à feuilles denses. Notons que si F'_b est une autre feuille du feuilletage basique il existe un automorphisme global de $(\mathrm{V}, \mathscr{F})$ qui transforme $(\mathrm{F}_b, \mathscr{F})$ en $(\mathrm{F}'_b, \mathscr{F})$. Donc l'algèbre de Lie g correspondant à la structure de feuilletage de Lie intrinsèque de $(\mathrm{F}_b, \mathscr{F})$ est un invariant structural du feuilletage $\mathscr{F}$. On l'appellera *algèbre de Lie structurale* de $(\mathrm{V}, \mathscr{F})$. En résumé :

THÉORÈME 1 (de structure). — *Si* $(\mathrm{V}, \mathscr{F})$ *est une variété feuilletée où* $\mathscr{F}$ *est transversalement complet, les adhérences des feuilles sont les fibres d'une fibration localement triviale* $\pi : \mathrm{V} \rightarrow \mathrm{W}$. *De plus il existe une algèbre de Lie réelle* g *telle que, sur chaque fibre de* π, $\mathscr{F}$ *induit un* g*-feuilletage de Lie.*

La variété W sera dite *variété basique* du feuilletage. On notera que la fibration π admet comme groupe structural le groupe $\mathrm{Aut}(\mathrm{F}_b, \mathscr{F})$ où F_b est une fibre de π munie du feuilletage induit par $\mathscr{F}$.

La première partie du théorème précédent résulte également des travaux cités de H. Sussmann ([13]).

2.3. ÉTUDE DES AUTOMORPHISMES INFINITÉSIMAUX. — On peut préciser la structure de l'algèbre de Lie $\mathscr{L}$ de la façon suivante : on a une projection naturelle de $\mathscr{L}$ dans l'algèbre de Lie $\mathscr{X}(\mathrm{W})$ des champs de vecteurs différentiables sur la variété basique W. Notons $\mathscr{E}_\mathrm{W}$ le noyau de cette projection.

Si $\mathscr{O}(\mathrm{W})$ est l'anneau des fonctions différentiables sur W, il s'identifie par pull-back à l'anneau des *fonctions basiques globales sur* V. Ceci étant, la projection $\mathscr{L} \rightarrow \mathscr{X}(\mathrm{W})$ est un morphisme de $\mathscr{O}(\mathrm{W})$-modules. Par suite son image est un sous-module de $\mathscr{X}(\mathrm{W})$. $\mathscr{L}$ étant transitive sur V il en résulte que cette projection est surjective, et par suite qu'on a une suite exacte de $\mathscr{O}(\mathrm{W})$-modules et d'algèbres de Lie :

$$0 \rightarrow \mathscr{E}_\mathrm{W} \rightarrow \mathscr{L} \rightarrow \mathscr{X}(\mathrm{W}) \rightarrow 0. \tag{10}$$

Le quotient de $\mathscr{E}_\mathrm{W}$ par $\mathscr{I}$ est le $\mathscr{O}(\mathrm{W})$-module des sections différentiables $\underline{\mathrm{E}}_\mathrm{W}$ du fibré E_W en algèbres de Lie dont la fibre en un point est l'algèbre de Lie structurale du feuilletage induit sur la fibre correspondante de π. Par passage au quotient à partir de (10) on obtient donc la suite exacte d'algèbres de Lie et de $\mathscr{O}(\mathrm{W})$-modules :

$$0 \rightarrow \underline{\mathrm{E}}_\mathrm{W} \rightarrow l \rightarrow \mathscr{X}(\mathrm{W}) \rightarrow 0. \tag{11}$$

Remarques. — (*a*) Soit G un groupe de Lie d'algèbre de Lie g^- opposée à g. Si $\mathrm{P}(\mathrm{W})$ est un G-fibré principal de base W et de groupe structural G, l'algèbre de Lie $l(\mathrm{P})$ des automorphismes infinitésimaux de P est une extension de $\mathscr{X}(\mathrm{W})$ par l'algèbre de Lie des sections du fibré en algèbres de Lie associé à P. On voit par (11) l'analogie étroite qui existe donc entre l'algèbre l des automorphismes infinitésimaux de $V/\mathscr{F}$ et une algèbre de type $l(P)$. Cette analogie trouvera plus loin son explication naturelle.

(*b*) A l'aide de partitions différentiables de l'unité sur W subordonnées à un recouvrement de W par des ouverts trivialisants pour la fibration π on peut construire des scissions de (11) pour les structures de $\mathcal{O}(W)$-modules. Par analogie avec le cas de $l(P)$ une telle scission sera dite *connexion sur l.*

(*c*) On remarquera que les classes caractéristiques du fibré en algèbres de Lie E_W fournissent des *invariants structuraux* du feuilletage, à valeurs dans la cohomologie de De Rham de W et par suite dans la *cohomologie basique* de $(V, \mathscr{F})$.

(*d*) $\mathscr{L}$ coïncide avec l'algèbre de Lie de *tous* les automorphismes infinitésimaux du fibré (V, π, W) qui respectent le feuilletage induit sur les fibres par $\mathscr{F}$, c'est-à-dire la structure de fibré à groupe structural $\mathrm{Aut}(F_b, \mathscr{F})$.

1.4. Cas particuliers. 1) *Montrons comment* le théorème de structure précédent permet de retrouver de façon élémentaire en les précisant les résultats de L. Conlon (*voir* [2]).

Soit V compacte munie d'un feuilletage $\mathscr{F}$ de codimension $q = 2$ *transversalement parallélisable.* Considérons $X_1, X_2 \in \mathscr{L}$ définissant le parallélisme transverse sur $(V, \mathscr{F})$. V étant compacte, $\mathscr{F}$ est transversalement complet. La dimension basique q_b vaudra 2, 1 ou 0.

Si $q_b = 2$ la fibration basique $\pi : V \to W$ définit une 2-variété quotient compacte et parallélisable. Donc $W = T^2$ et *$\mathscr{F}$ est défini par une fibration de* V *sur le tore* T^2.

Si $q_b = 1$ la variété basique est S_1. Sur les fibres de la *fibration basique* $\pi : V \to S^1$ le feuilletage $\mathscr{F}$ induit un feuilletage de codimension 1 à feuilles denses sans holonomie.

Si $q_b = 0$ les feuilles de $\mathscr{F}$ sont denses; *$\mathscr{F}$ est un g-feuilletage de Lie;* dans ce cas, au prix d'un changement linéaire sur le parallélisme transverse on se ramène à l'un des cas suivants :

$$[X_1, X_2] \in \mathscr{I} \qquad \text{ou bien} \qquad [X_1, X_2] - X_2 \in \mathscr{I}.$$

Plus généralement le théorème de structure permet de classifier à l'aide des invariants structuraux (q_b, g) les feuilletages transversalement parallélisables sur les variétés compactes, ou plus généralement les feuilletages transversalement parallélisables complets.

2) *Soit maintenant sur* $(V, \mathscr{F})$ une structure de *feuilletage de Lie complet* définie par une 1-forme α à valeurs dans l'algèbre de Lie g. Avec les notations de 1.4, la sous-algèbre $\mathscr{L}_\alpha$ de $\mathscr{L}$ définit une sous-algèbre de Lie de l isomorphe à g. Soit g_W la projection sur $\mathscr{X}(W)$ de cette sous-algèbre. La suite exacte (11) induit donc une suite exacte :

$$0 \to k \to g \to g_W \to 0, \tag{12}$$

et par construction g_W est une sous-algèbre de $\mathscr{X}(W)$ transitive sur W et complète. Si G est le groupe de Lie connexe simplement connexe d'algèbre de Lie g, G opère transitivement sur W. Soit H le groupe de stabilité d'un point $y \in W$. L'algèbre de Lie h de H est le noyau de l'application $g \to T_y(W)$ définie par l'évaluation en y du champ projeté. On notera que k est le plus grand idéal de g dans h.

Remarquons que l'algèbre de Lie g *n'est pas un invariant* du feuilletage. Seule l'algèbre de Lie structurale du feuilletage, c'est-à-dire h, est un invariant de $(V, \mathscr{F})$.

3. Espaces des feuilles et revêtement de type principal

3.1. STRUCTURE DE L'ESPACE DES FEUILLES. — Conservons les notations précédentes. On a vu que si F_b est la fibre-type de la fibration basique $\pi : V \to W$, $(F_b, \mathscr{F})$ est un feuilletage de Lie à feuilles denses dont l'espace des feuilles, d'après la proposition 2 et sa démonstration, est le quotient du groupe de Lie connexe simplement connexe G associé à g par un sous-groupe H dense et pseudo-discret (c'est-à-dire d'algèbre de Lie triviale dans g).

En utilisant des trivialisations locales de la fibrations basique on en déduit :

PROPOSITION 5. — *L'espace des feuilles* $V/\mathscr{F}$ *est un fibré localement trivial de fibre-type* G/H *et de base* W.

On pourra remarquer, en utilisant la notion de *Q-variété* due à R. Barre (*voir* [1]), que le résultat précédent s'énonce : l'espace des feuilles $V/\mathscr{F}$ est un fibré localement trivial en Q-variétés sur W. En particulier, $V/\mathscr{F}$ est lui-même une Q-variété.

3.2. MODÈLES DE FEUILLETAGES TRANSVERSALEMENT COMPLETS. — Donnons-nous *a priori* une variété différentiable W, un groupe de Lie G d'algèbre de Lie g^- opposée à g, un sous-groupe dense et pseudo-discret H de G et un G-fibré principal différentiable P (W, G). Notons P/H le quotient de P par l'action à droite de H. C'est un fibré localement trivial sur W ayant pour fibre-type la Q-variété G/H.

On se propose de construire un modèle de feuilletage transversalement complet admettant P/H comme espace de feuilles. Pour cela on se donne une variété différentiable N connexe, de revêtement universel $\tilde{N}$ et un homomorphisme surjectif :

(12) $$\rho : \pi_1(N) \to H, \quad (\textit{voir } [8] \text{ pour cette technique}).$$

Sur le produit cartésien $M = \tilde{N} \times P$ la projection sur le second facteur détermine un feuilletage simple $\mathscr{F}$. La relation d'équivalence dans M :

(13) $$(\tilde{x}, z) \sim (\tilde{x}\gamma, z\rho(\gamma)) \qquad \text{si} \quad \gamma \in \pi_1(N),$$

définit une variété quotient M_ρ sur laquelle $\mathscr{F}$ définit par projection un feuilletage $\mathscr{F}_\rho$. On vérifie alors que l'espace des feuilles $M_\rho/\mathscr{F}_\rho$ s'identifie à P/H. De plus $\mathscr{F}_\rho$ est transversalement complet et l'*algèbre de Lie* l_ρ des automorphismes infinitésimaux de l'espace des feuilles *s'identifie à l'algèbre de Lie* $l(P)$ des champs de vecteurs invariants à droite sur P.

3.3. PROBLÈME D'EXISTENCE D'UN REVÊTEMENT A FEUILLETAGE RELEVÉ SIMPLE. — Le modèle $(M_\rho, \mathscr{F}_\rho)$ construit au paragraphe précédent jouit de la propriété suivante : M_ρ admet un revêtement galoisien M tel que le feuilletage relevé $\mathscr{F}$ soit simple. De plus, l'espace des feuilles de ce feuilletage relevé est un fibré principal dont le groupe structural admet pour algèbre de Lie l'opposée de l'algèbre structurale de $\mathscr{F}_\rho$.

Il est naturel de se demander si cette propriété est vraie dans le cas général pour les feuilletages transversalement complets. Ce paragraphe et le suivant donneront des réponses partielles à cette question. Pour simplifier la terminologie, si $(V, \mathscr{F})$ est une variété feuilletée à feuilletage transversalement complet, $\tilde{V}$ un revêtement galoisien de V, $\tilde{\mathscr{F}}$ le feuilletage relevé, on dira que $(\tilde{V}, \tilde{\mathscr{F}})$ est un revêtement de $(V, \mathscr{F})$. Si le feuilletage $\tilde{\mathscr{F}}$ est simple, on dira que $(\tilde{V}, \tilde{\mathscr{F}})$ est un *revêtement simple* de $(V, \mathscr{F})$. Si de plus l'espace des feuilles $\tilde{V}/\tilde{\mathscr{F}}$ est un G-fibré principal, où le groupe de Lie G admet comme algèbre de Lie l'opposée de l'algèbre structurale g de $\mathscr{F}$, on dira que $(\tilde{V}, \tilde{\mathscr{F}})$ est *un revêtement simple de type principal* de $(V, \mathscr{F})$.

PROPOSITION 5. — $\mathscr{F}$ étant un feuilletage transversalement complet sur V, si $(V, \mathscr{F})$ admet un revêtement simple $(\tilde{V}, \tilde{\mathscr{F}})$, alors $(V, \mathscr{F})$ admet un revêtement universel de type principal.

Preuve. — Soit $(V, \hat{\mathscr{F}})$ le revêtement universel de $(V, \mathscr{F})$. On va montrer que c'est un revêtement simple de type principal.

Notons d'abord que $(\hat{V}, \hat{\mathscr{F}})$ est transversalement complet. Soit $\hat{\mathscr{L}}$ l'algèbre des champs de vecteurs sur $\hat{V}$ obtenus en relevant l'algèbre $\mathscr{L}$ des automorphismes infinitésimaux de $(V, \mathscr{F})$.

Si $\tilde{\pi} : \tilde{V} \to \tilde{P}$ est la fibration basique pour le feuilletage $\tilde{\mathscr{F}}$, $\dim \tilde{P} = \operatorname{codim} \mathscr{F} = q$. En composant $\tilde{\pi}$ avec la projection $\hat{V} \to \tilde{V}$ on obtient une fibration $\hat{V} \to \tilde{P}$ qui est basique (c'est-à-dire constante sur les feuilles de $\hat{\mathscr{F}}$). Il en résulte que la dimension basique de $\hat{\mathscr{F}}$ est égale à sa codimension. Donc $\hat{\mathscr{F}}$ est simple. Soit $\hat{\pi} : \hat{V} \to \hat{P}$ sa fibration basique. La suite exacte d'homotopie de cette fibration montre que $\hat{P}$ est *simplement connexe.*

Si de même $\pi : V \to W$ est la fibration basique pour $\mathscr{F}$, elle définit une fibration basique $\hat{V} \to W$ qui se factorise par $\hat{\pi}$ en une fibration $p : \hat{P} \to W$. Si $\hat{W}$ est le revêtement universel de W, p se factorise en une fibration à fibre connexe $\hat{p} : \hat{P} \to \hat{W}$.

$\hat{\mathscr{L}}$ se projette sur $\hat{P}$ en une algèbre de Lie de champs de vecteurs $\hat{l}$. Comme le noyau de la projection $\hat{\mathscr{L}} \to \hat{l}$ est le relevé $\hat{\mathscr{I}}$ de $\mathscr{I}$ sur $\hat{V}$, $\hat{l}$ est isomorphe à l. D'après 2.3, $\hat{l}$ se projette sur $\hat{W}$ suivant l'algèbre de Lie $\hat{\mathscr{X}}(W)$ des champs de vecteurs relevés de $\mathscr{X}(W)$. Pour des raisons de dimension, la restriction au-dessus d'un point de $\hat{W}$ du noyau $\hat{\underline{E}}_W$ de $\hat{l} \to \hat{\mathscr{X}}(W)$ est simplement transitive sur la fibre correspondante de $\hat{P}$ et définit donc sur cette fibre une algèbre de Lie simplement transitive de champs complets.

Soit $\hat{\xi}$ un vecteur tangent vertical en un point $\hat{z} \in \hat{P}$. $\hat{\xi}$ se prolonge localement de façon unique en un champ commutant avec $\hat{l}$ [1]. Comme $\hat{P}$ est simplement connexe, il en résulte

[1] On transporte $\hat{\xi}$ localement par les groupes à un paramètre associés à une base (locale) du $\mathcal{O}(W)$-module $\hat{l}$ adaptée au sous-module vertical $\hat{\underline{E}}_W$.

que les champs de vecteurs qui commutent avec $\hat{l}$ forment une algèbre de Lie de champs de vecteurs verticaux $\hat{g}$ simplement transitive sur les fibres de $\hat{P}$. $\hat{g}$ commute sur chaque fibre avec une algèbre transitive de champs complets. Donc $\hat{g}$ elle-même est formée de champs complets. Si G est le groupe de Lie connexe simplement connexe d'algèbre de Lie g, G agit à droite sur $\hat{P}$ transitivement sur les fibres. Le stabilisateur d'un point pour cette action est un sous-groupe discret, fermé et *invariant*. Ce dernier point résulte du fait que les champs invariants à droite sur G se projettent également sur $\hat{P}$. On notera que $\hat{g}$ est opposée à l'algèbre de Lie structurale de $\mathscr{F}$. D'où le résultat.

C.Q.F.D.

On voit que, pour savoir si (V, $\mathscr{F}$) admet un revêtement simple de type principal, il suffira de considérer le revêtement universel ($\hat{V}$, $\hat{\mathscr{F}}$). On a une fibration $\hat{V} \to \hat{W}$ de $\hat{V}$ sur le revêtement universel de la variété basique W. Soit $\hat{F}_b$ la fibre-type de cette fibration. C'est un revêtement de la fibre-type F_b de la fibration basique $\pi : V \to W$. Pour que ($\hat{V}$, $\hat{\mathscr{F}}$) soit simple il faut et il suffit que ($\hat{F}_b$, $\hat{\mathscr{F}}$) soit simple. En particulier :

COROLLAIRE 1. — *Si* $\pi_2(\hat{W}) = 0$, (V, $\mathscr{F}$) *admet un revêtement simple de type principal.*

Preuve. — La suite exacte d'homotopie de la fibration $\hat{V} \to \hat{W}$ donne $\pi_1(\hat{F}_b) = 0$ et compte tenu de la proposition 2 ceci entraîne que ($\hat{F}_b$, $\hat{\mathscr{F}}$) est simple.

Remarquons également que, d'après la proposition 2, tout feuilletage de Lie complet admet un revêtement simple. En particulier :

COROLLAIRE 2. — *Si* $q_b = 0$, (V, $\mathscr{F}$) *admet un revêtement simple de type principal.*

(C'est aussi un cas particulier du corollaire précédent.)

COROLLAIRE 3. — *Si* $q = 1$ ou 2 (V, $\mathscr{F}$) *admet un revêtement simple de type principal.*

Preuve. — Si $q = q_b$, $\mathscr{F}$ lui-même est simple. Si $q_b = 0$, on applique le corollaire précédent. Si $q_b = 1$ et $q = 2$, $\dim(\hat{W}) = 1$ et $\pi_2(W) = 0$ [2].

3.4. REVÊTEMENT DE TYPE PRINCIPAL. — Dans la démonstration de la proposition 5 l'argument principal est de remarquer que sur $\hat{P}$ l'algèbre de Lie $\hat{l}$ admet une algèbre commutante de champs de vecteurs transitive sur les fibres de $\hat{P} \to \hat{W}$. On peut encore remarquer que cette algèbre commutante provient par projection sur $\hat{P}$ de l'algèbre de Lie $\hat{\mathscr{C}}$ des champs de vecteurs sur $\hat{V}$ dont le crochet avec $\hat{\mathscr{L}}$ est dans $\hat{\mathscr{I}}$.

Ceci nous amène à introduire la notion suivante : si $\mathscr{F}$ est un feuilletage transversalement complet arbitraire sur V, sur un revêtement galoisien ($\tilde{V}$, $\tilde{\mathscr{F}}$) de (V, $\mathscr{F}$) on considère l'algèbre de Lie de champs de vecteurs :

$$\mathscr{C} = (\tilde{X}/[\tilde{X}, \tilde{Y}] \in \mathscr{I} \text{ pour } \tilde{Y} \in \tilde{\mathscr{L}}). \tag{14}$$

---

[2] *Note :* le cas $q = 2$ m'a été signalé par le référé.

Naturellement, si $\tilde{V} = V$ alors $\mathscr{C} = \tilde{\mathscr{I}} = \mathscr{I}$. Dans le cas général $\tilde{\mathscr{C}}$ est une algèbre de champs feuilletés pour $\tilde{\mathscr{F}}$ contenant $\tilde{\mathscr{I}}$. On dira que $(\tilde{V}, \tilde{\mathscr{F}})$ est un *revêtement de type principal* de $(V, \mathscr{F})$ si $\tilde{\mathscr{C}}$ est transitive sur les fibres de la fibration $\tilde{V} \to W$ sur la variété basique de $(V, \mathscr{F})$.

PROPOSITION 6. — *Pour tout feuilletage transversalement complet* $\mathscr{F}$ *sur* V, $(V, \mathscr{F})$ *admet un revêtement de type principal.*

Preuve. — Pour $x \in V$, soient E_x l'espace tangent en x à la feuille de $\mathscr{F}$, B_x l'espace tangent à la fibre de $\pi : V \to W$ et $\tau_x = B_x/E_x$. τ est un fibré vectoriel de rang $r = q - q_b$. Soit $\mathscr{E}_\tau$ son fibré principal de repères linéaires. $\mathscr{L}$ se relève de façon naturelle en une algèbre de Lie $\mathscr{L}_\tau$ d'automorphismes infinitésimaux de ce fibré principal. De plus, si $X \in \mathscr{L}$ est nul en x, X est tangent à la fibre $\pi^{-1}(y)$ en tout point de celle-ci ($y = \pi(x)$). En restriction à cette fibre, X est tangent à $\mathscr{F}$ en tout point (*voir* la démonstration de la proposition 1). Par suite le champ relevé X_τ est nul au-dessus de x. Donc $\mathscr{L}_\tau$ définit en chaque point de $\mathscr{E}_\tau$ un sous-espace horizontal. Soit ω_τ la connexion ainsi définie. Elle est sans courbure, car la distribution définie par $\mathscr{L}_\tau$ est par définition involutive. Soit $\tilde{V}$ une nappe d'holonomie de ω_τ. Par construction, sur $\tilde{V}$, le fibré vectoriel $\tilde{\tau}$ (préimage de τ sur $\tilde{V}$) admet une trivialisation globale invariante par $\tilde{\mathscr{L}}$. Cette trivialisation est définie par des sections globales $\tilde{X}_{\tau 1}, \ldots, \tilde{X}_{\tau r}$ de $\tilde{\tau}$. Représentons ces sections par des sections globales $\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_r$ du fibré vectoriel $\tilde{B}$ tangent aux fibres de la fibration $\tilde{V} \to W$. Par construction $\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_r$ appartiennent à $\tilde{\mathscr{C}}$, d'où le résultat.

C. Q. F. D.

Étudions maintenant la structure d'un revêtement de type principal $(\tilde{V}, \tilde{\mathscr{F}})$. La fibration $\tilde{V} \to W$ définit une fibration à fibres connexes $\tilde{V} \to \tilde{W}$ sur un revêtement de W. Soit $\tilde{F}$ l'une de ces fibres connexes.

Sur $\tilde{F}$ la restriction des champs de $\tilde{\mathscr{L}}$ tangents à $\tilde{F}$ définit une structure de g-feuilletage de Lie. Soit $\tilde{\mathscr{L}}_{\tilde{F}}$ l'algèbre de Lie obtenue par restriction. Le fait que $(\tilde{V}, \tilde{\mathscr{F}})$ est de type principal se traduit par la propriété suivante : $(\tilde{F}, \tilde{\mathscr{F}})$ admet un parallélisme transverse invariant par $\tilde{\mathscr{L}}_{\tilde{F}}$.

Reprenons la construction indiquée à la proposition 2. Sur $\tilde{F} \times G$ la structure de feuilletage de Lie définit une connexion $\tilde{\omega}$ sans courbe. Soit $\tilde{\tilde{F}}$ l'une de ses nappes d'holonomie. Le feuilletage relevé $\tilde{\tilde{\mathscr{F}}}$ sur $\tilde{\tilde{F}}$ est défini par la projection $\tilde{\tilde{F}} \to G$. Le parallélisme invariant transverse à $\tilde{\mathscr{F}}$ se relève en un parallélisme transverse à $\tilde{\tilde{\mathscr{F}}}$ qui se projettera sur G suivant un parallélisme qui commute avec les champs invariants à gauche, c'est-à-dire un parallélisme invariant à droite. Par suite le groupe d'holonomie $\tilde{H}$ de $\tilde{\omega}$ est nécessairement un sous-groupe de G dont l'action sur G (à gauche) laisse invariant un parallélisme invariant à droite. Donc $\tilde{H}$ opère trivialement dans g par la représentation adjointe. Il en sera de même de son adhérence. Par suite l'algèbre de Lie de cette adhérence est dans le centre de g. Comme cette algèbre de Lie est l'algèbre structurale de $(\tilde{F}, \tilde{\mathscr{F}})$, et par suite celle $(\tilde{V}, \tilde{\mathscr{F}})$ il vient :

THÉORÈME 2. — *Si $(\tilde{V}, \tilde{\mathscr{F}})$ est un revêtement de type principal de $(V, \mathscr{F})$, l'algèbre structurale de $(\tilde{V}, \tilde{\mathscr{F}})$ est dans le centre de celle de $(V, \mathscr{F})$.*

On en déduit immédiatement une condition suffisante d'existence d'un revêtement simple de type principal :

COROLLAIRE 1. — *Si le centre de l'algèbre de Lie structurale de $(V, \mathscr{F})$ est réduit à* 0, $(V, \mathscr{F})$ *admet un revêtement simple de type principal.*

COROLLAIRE 2. — *Si $\pi_1(V) = 0$, l'algèbre de Lie structurale de $(V, \mathscr{F})$ est abélienne.*

4. Applications géométriques

4.1. — FEUILLETAGES DE REINHART. — Soient V une variété de dimension *n compacte*, $\mathscr{F}$ un feuilletage de codimension q sur V. Une *métrique quasi fibrée* sur $(V, \mathscr{F})$ est une métrique sur le fibré vectoriel transverse au feuilletage *localement projetable suivant les feuilles*. Soit γ_T une telle métrique. $\mathscr{F}$, muni d'une telle métrique, sera dit feuilletage de Reinhart (*voir* [12]). Notons $e_T(V, O(q, \mathbf{R}))$ le fibré principal des repères transverses orthonormés pour la métrique γ_T. C'est une $O(q, \mathbf{R})$-structure feuilletée au sens de [10 *a*], ou transverse au sens de [2]. Sur e_T on a une forme fondamentale θ_T, 1-forme tensorielle à valeurs dans $\mathbf{R}_q$. Le *feuilletage relevé* $\mathscr{F}_T$ sur e_T peut être défini de la façon suivante : un vecteur X_T tangent à e_T en z_T est tangent à la feuille de $\mathscr{F}_T$ passant par z_T si et seulement si

$$(15) \qquad \theta_T(X_T) = 0 \qquad \text{et} \qquad d\theta_T(X_T, Y_T) = 0,$$

quel que soit Y_T tangent à e_T en z_T.

On peut encore interpréter ceci d'une autre manière : considérons une projection locale de V sur une sous-variété S transverse au feuilletage $\mathscr{F}$ (localement). γ_T est localement la préimage d'une métrique riemannienne γ_S sur S, e_T le pull-back local du fibré e_S des repères linéaires de S orthonormés pour γ_S. $\mathscr{F}_T$ coïncide alors (localement) avec le feuilletage simple défini par la submersion (locale) $e_T \to e_S$.

Si ω est une connexion infinitésimale sur e_T, sa torsion sera par définition la différentielle absolue $\Sigma = d\theta_T + \omega \wedge \theta_T$ de la forme fondamentale. Il existe sur e_T une *unique connexion sans torsion* ω_T. C'est le pull-back local de la connexion de Levi-Civita ω_S sur e_S. On la notera ω_T. C'est une *connexion transverse projetable* au sens de [10 *b*] (*voir* également [4]).

Considérons sur e_T la 1-forme à valeurs dans $O(q, \mathbf{R}) \oplus \mathbf{R}^q$:

$$(16) \qquad \alpha_T = \omega_T + \theta_T.$$

Cette 1-forme est un pull-back local, donc *est basique pour* $\mathscr{F}_T$. Elle définit sur $(e_T, \mathscr{F}_T)$ un *parallélisme transverse* qui est *complet* car e_T est compacte.

Notons $\pi_T : e_T \to W_T$ la fibration basique et g_T l'algèbre de Lie structurale de $(e_T, \mathscr{F}_T)$. La projection de e_T sur V envoie les fibres de π_T sur les adhérences des feuilles de $\mathscr{F}$ qui définissent donc une relation d'équivalence. D'autre part l'action à droite de $O(q, \mathbf{R})$ sur e_T se projette par π_T en une action de $O(q, \mathbf{R})$ sur W_T. L'espace $W_T \diagdown O(q, \mathbf{R})$ des orbites de cette action coïncidera alors avec l'espace quotient $V/\overline{\mathscr{F}}$ de V par la relation d'équivalence définie par les adhérences des feuilles; ici $\overline{\mathscr{F}}$ n'est plus en général un feuilletage.

Soient $\mathscr{L}_T$ l'algèbre de Lie des automorphismes infinitésimaux de $(e_T, \mathscr{F}_T)$ et z_T un point, choisi une fois pour toutes, dans e_T. Notons $\mathscr{V}_T$ la sous-algèbre de $\mathscr{L}_T$ formée des champs qui sont verticaux en z_T pour la fibration π_T. La correspondance :

(17) $$X_T \to [\alpha_T(X_T)](z_T),$$

définit une application de $\mathscr{V}_T$ dans $O(q, \mathbf{R}) \oplus \mathbf{R}^q$. Comme le noyau de cette application contient l'idéal $\mathscr{I}_T$ des champs tangents à $\mathscr{F}_T$, elle se factorise en une injection :

(18) $$\alpha_{T, z_T} : \quad g_T \hookrightarrow O(q, \mathbf{R})' \oplus \mathbf{R}^q$$

et on identifiera g_T à son image par cette injection. Pour étudier le crochet dans g_T on peut se contenter de considérer dans $\mathscr{V}_T$ les champs X_T pour lesquels $\alpha_T(X_T)$ est constante. Ceci étant, si X_T et Y_T sont deux tels champs, les équations de la connexion ω_T donneront (*voir* [9]) :

(19) $$\begin{cases} - \text{ si } \quad \theta_T(X_T) = \theta_T(Y_T) = 0, \\ \qquad \text{alors} \quad \alpha_T([X_T, Y_T]) = \omega_T([X_T, Y_T]) = [\omega_T(X_T), \omega_T(Y_T)], \\ - \text{ si } \quad \omega_T(X_T) = 0 \quad \text{et} \quad \theta_T(Y_T) = 0, \\ \qquad \text{alors} \quad \alpha_T([X_T, Y_T])|_{\mathbf{R}^q} = \theta_T([X_T, Y_T]) = \omega_T(Y_T).\theta_T(X_T). \end{cases}$$

Ces équations se traduisent de la façon suivante : soit :

$$h_{T, z_T} = \alpha_{T, z_T}(g_T) \cap O(q, \mathbf{R}) \qquad \text{et soit} \quad \mu_{T, z_T} = [O(q, \mathbf{R}) + \alpha_{T, z_T}(g_T)] \cap \mathbf{R}^q.$$

Sur h_{T, z_T} le crochet induit par g_T coïncide avec celui de sous-algèbre de $O(q, \mathbf{R})$. μ_{T, z_T} est un sous-espace de $\mathbf{R}^q$ invariant par h_{T, z_T}. Si m_{T, z_T} est un supplémentaire de h_{T, z_T} dans $\alpha_{T, z_T}(g_T)$ invariant par le crochet de h_{T, z_T} (l'existence d'un tel supplémentaire résulte du fait que h_{T, z_T} est une sous-algèbre de l'algèbre de Lie compacte du groupe orthogonal), μ_{T, z_T} est la projection de m_{T, z_T} sur $\mathbf{R}^q$ et l'action (adjointe) de h_{T, z_T} sur m_{T, z_T} correspond à l'action naturelle de h_{T, z_T} sur le sous-espace μ_{T, z_T} de $\mathbf{R}^q$ qui est donc h_{T, z_T}-invariant. En résumé :

THÉORÈME 3. — *Étant donnée sur* $(V, \mathscr{F})$ *une métrique quasi fibrée, soient* e_T le $O(q, \mathbf{R})$-fibré des repères transverses orthonormés, $\mathscr{F}_T$ le feuilletage relevé de $\mathscr{F}$ dans e_T. $(e_T, \mathscr{F}_T)$ est muni d'un parallélisme transverse complet. Si $\pi_T : e_T \to W_T$ est la fibration basique et g_T l'algèbre de Lie structurale de $(e_T, \mathscr{F})$, on a :

(i) les adhérences des feuilles de $\mathscr{F}$ définissent une relation d'équivalence dont l'ensemble quotient $V/\overline{\mathscr{F}}$ s'identifie à l'espace $W_T \diagdown O(q, \mathbf{R})$ des orbites de l'action naturelle de $O(q, \mathbf{R})$ sur W_T;

(ii) $g_T = h_T \oplus m_T$ avec $[h_T, m_T] \subset m_T$, où h_T s'identifie à une sous-algèbre de l'algèbre $O(q, \mathbf{R})$, m_T à un sous-espace de $\mathbf{R}^q$ invariant par h_T, l'action adjointe de h_T dans m_T étant induite par l'action naturelle de $O(q, \mathbf{R})$ sur $\mathbf{R}^q$.

EXEMPLE D'APPLICATION. — Étudions le cas où $q = 2$. La codimension q_T de $\mathscr{F}_T$ est alors 3. La dimension basique q_{Tb} de $\mathscr{F}_T$ est donc 0, 1, 2 ou 3.

→ Si $q_{Tb} = 0$, les feuilles de $\mathscr{F}_T$ sont dense dans e_T. Donc les *feuilles de $\mathscr{F}$ sont denses dans* V. $(e_T, \mathscr{F}_T)$ est un feuilletage de Lie d'algèbre de Lie structurale g_T isomorphe à $so(3, \mathbf{R})$ (comme on le vérifie par les équations de structure de la connexion ω_T, qui ne peut être sans courbure).

→ Si $q_{Tb} = 1$, g_T est de dimension 2. h_T est alors nécessairement réduite à 0, c'est-à-dire qu'en chaque point de e_T la fibre de π_T est transverse à l'orbite de $O(2, \mathbf{R})$. Sur $W_T = S^1$ les orbites de $O(2, \mathbf{R})$ sont ouvertes. Donc là aussi *les feuilles de $\mathscr{F}$ sont denses*. La différence avec le cas précédent est que cette fois, au besoin en passant au revêtement à 2 feuillets d'orientation transverse, on est ramené au cas d'un feuilletage transversalement parallélisable à feuilles denses.

→ Si $q_{Tb} = 3$ toutes *les feuilles de $\mathscr{F}_T$ sont compactes*, donc toutes les feuilles de $\mathscr{F}$ le sont également et ont une *holonomie finie*.

→ Si $q_{Tb} = 2$ g_T est de dimension 1. W_T est une surface. Les feuilles compactes sont à holonomie infinie et isolées. Comme elles correspondent aux orbites singulières de $O(2, \mathbf{R})$ sur W_T, on voit que les seules possibilités sont les suivantes :

(*a*) il n'y a pas de feuilles compactes. Les adhérences des feuilles sont alors les feuilles d'un feuilletage de codimension 1 sur W et les fibres d'une fibration $\pi : V \to S^1$;

(*b*) si $\mathscr{F}$ est transversalement orientable et s'il y a des feuilles compactes, il y en a 2. On a une application $\pi : V \to [0,1]$, où $\pi^{-1}(t)$ est l'adhérence d'une feuille, les feuilles compactes correspondant à $t = 0$ ou 1;

(*c*) si $\mathscr{F}$ n'est pas transversalement orientable et s'il y a des feuilles compactes il n'y en a qu'une; on a une application $\pi : V \to S^1$ où $\pi^{-1}(t)$ est l'adhérence d'une feuille. La feuille compacte correspond à une singularité de π.

4.2. — ÉTUDE DES ALGÈBRES DE LIE TRANSITIVES COMPLÈTES DE CHAMPS DE VECTEURS. — Soit V une variété différentiable de dimension n. Considérons une algèbre de Lie $\mathscr{A} \subset \mathscr{X}(V)$ de champs de vecteurs sur V. Notons $\mathscr{A}_c$ la partie de $\mathscr{A}$ formée de champs de vecteurs complets. On suppose :

(i) que pour tout $x \in V$ l'application d'évaluation en x $ev_x : \mathscr{A}_c \to T_x(V)$ est surjective;

(ii) que si $\mathscr{G}$ est le groupe de transformations de V engendré par les groupes à un paramètre associés aux champs de vecteurs appartenant à $\mathscr{A}_c$, $\mathscr{A}$ est invariante par $\mathscr{G}$, c'est-à-dire que pour tout $\varphi \in \mathscr{G}$ et pour tout $X \in \mathscr{A}$, $\varphi_* X \in \mathscr{A}$.

En considérant alors les jets infinis en un point des champs de vecteurs de $\mathscr{A}$ on définit *l'algèbre formelle* A de $\mathscr{A}$ qui, d'après (ii), est indépendante à isomorphisme près du point choisi. On impose alors la condition supplémentaire :

(iii) l'algèbre formelle de $\mathscr{A}$ coïncide avec l'ensemble des jets infinis (au point considéré) des champs de vecteurs de $\mathscr{A}_c$.

On dira alors que l'algèbre de Lie $\mathscr{A}$ est une *algèbre transitive complète* de champs de vecteurs.

Soit $\mathscr{F}$ un feuilletage de codimension $q \neq 0$ sur V. $\mathscr{F}$ sera dit *$\mathscr{A}$-invariant* si $\mathscr{A}$ est contenue dans l'algèbre de Lie $\mathscr{L}$ des automorphismes infinitésimaux de $\mathscr{F}$. Un tel feuilletage sera donc nécessairement *transversalement complet.* Notons $\mathscr{I}(\mathscr{A})$ l'idéal de $\mathscr{A}$ formé des champs tangents aux feuilles. Avec les notations de 1.1 on a donc :

$$\mathscr{I}(\mathscr{A}) = \mathscr{I} \cap \mathscr{A}, \tag{20}$$

$\mathscr{I}(\mathscr{A})$ définit un idéal I de A.

On déduit des résultats antérieurs :

THÉORÈME 4. — (i) *Les adhérences des feuilles de $\mathscr{F}$ définissent une fibration $\mathscr{A}$-invariante $\pi : V \to W$. Soit $\mathscr{A}_W$ l'algèbre de Lie transitive définie par projection de $\mathscr{A}$ sur* W.

(ii) Si $\pi_1(V) = 0$ la fibration π est non triviale (W n'est pas réduite à un point).

(iii) Si $\pi_1(V) = 0$ et si A/I n'a pas d'idéal abélien, alors le noyau de la projection $\mathscr{A} \to \mathscr{A}_W$ est $\mathscr{I}(\mathscr{A})$.

Preuve. — (i) résulte immédiatement du théorème 1.

(ii) Si $\pi_1(V) = 0$ et si la variété W était réduite à un point, $\mathscr{F}$ serait un feuilletage de Lie simple, d'où $\dim W = q \neq 0$, ce qui donne une contradiction.

(iii) Sous les hypothèses $\pi_1(V) = 0$ et A/I n'a pas d'idéal abélien, notons $\mathscr{E}_W(\mathscr{A})$ le noyau de la projection $\mathscr{A} \to \mathscr{A}_W$. Avec les notations de 2.3, $\mathscr{E}_W(\mathscr{A}) = \mathscr{E}_W \cap \mathscr{A}$.

Comme $\pi_1(V) = 0$, le corollaire 2 du théorème 2 montre que l'algèbre de Lie structurale g de (V, $\mathscr{F}$) est abélienne. Par suite, avec les notations de 2.3, l'algèbre de Lie E_W sera abélienne, donc

$$[\mathscr{E}_W, \mathscr{E}_W] \subset \mathscr{I}, \quad \text{et par conséquent } [\mathscr{E}_W(\mathscr{A}), \mathscr{E}_W(\mathscr{A})] \subset \mathscr{I}(\mathscr{A}).$$

L'idéal $\mathscr{E}_W(\mathscr{A})$ de $\mathscr{A}$ est formé des vecteurs verticaux pour la fibration $\mathscr{G}$-invariante π. Donc cet idéal est $\mathscr{G}$-invariant. Les valeurs en chaque point des champs appartenant à cet idéal définiront donc sur V un champ d'éléments de contact complètement intégrable et par suite un feuilletage $\mathscr{F}_1$ dont les feuilles sont verticales pour la fibration π et sont réunions de feuilles de $\mathscr{F}$. Si $\mathscr{F}_1$ était différent de $\mathscr{F}$, l'idéal J de A défini par $\mathscr{E}_W(\mathscr{A})$ serait un idéal abélien non trivial de A/I ce qui est impossible. Donc $\mathscr{F}_1 = \mathscr{F}$ et il en résulte $\mathscr{E}_W(\mathscr{A}) = \mathscr{I}(\mathscr{A})$

C.Q.F.D.

On en déduit par exemple le corollaire élémentaire suivant :

COROLLAIRE. — *Si $\mathscr{A}$ est une algèbre de Lie transitive complète de champs de vecteurs sur la sphère* S^4, *$\mathscr{A}$ est irréductible (ne laisse aucun feuilletage invariant).*

En effet d'après le théorème précédent (ii) on aurait une fibration de S^4, ce qui est impossible. Notons qu'un feuilletage sur S^4 est nécessairement de codimension 2.

Remarque. — Le théorème précédent permettrait également de construire dans certains cas des suites de Jordan-Hölder « globales » pour un pseudo-groupe de Lie : un pseudo-groupe de Lie Γ sur V sera dit *complet* si les Γ-champs globaux complets engendrent en chaque point l'algèbre formelle du pseudo-groupe (*voir* [7] pour ces notions). Tout feuilletage invariant par Γ sera alors transversalement complet.

Supposons par exemple que l'algèbre formelle L de Γ admette une suite de Jordan-Hölder généralisée (au sens de V. Guillemin [6]) ne comportant aucun quotient de type abélien. Un idéal dans la suite correspond à un feuilletage invariant dans un espace de prolongement. En passant au besoin à un revêtement, les adhérences des feuilles définiront alors une *fibration invariante* et la projection basique associée correspondra, dans l'algèbre formelle, au passage au quotient par l'idéal considéré.

On voit que, là comme dans le problème d'équivalence, la difficulté dans la construction de suites de Jordan-Hölder globales sera liée à la présence de *quotients abéliens* dans la suite de Jordan-Hölder généralisée de l'algèbre formelle.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. Barre, *De quelques aspects de la théorie des Q-variétés* (*Ann. Inst. Fourier*, XXIII (3), 1973, p. 227-312).
[2] L. Conlon, *Transversally parallelisable foliations* (*Trans. Amer. Math. Society*, 194, 1974, p. 79-102).
[3] H. Driessen, *Cohomologie basique des feuilletages de Lie* (*Thèse* 3^e *cycle*, Montpellier, 1976).
[4] Ch. Ehresmann, *Structures feuilletées* (*Proc.* 5^e *Can. Math.*, 1961, p. 109).
[5] E. Fedida, *Feuilletage de Lie* (*Thèse*, Strasbourg, 1972).
[6] V. Guillemin, *A Jordan-Hölder decomposition for a certain class of infinite dimensional Lie algebras* (*J. Differential Geometry*, 2, 1968, p. 313-345).
[7] V. Guillemin and S. Sternberg, *An algebraic model of transitive differential geometry* (*Bull. of Amer. Math. Soc.*, 70, 1964, p. 16-47).
[8] A. Haefliger, *Variétés feuilletées* (*Annali Sc. Norm. Sup.*, Pisa, 16, 1964, p. 367-397).
[9] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Fundations of differential geometry* Interscience Publishers, 1963.
[9] *bis* J. Leslie, *A remark on the group of automorphisms of a foliatlon having a dense leaf*, (*J. Differentil Geometry*, 7, 1972, pp. 597-601).
[10] P. Molino, (*a*) *Connexions et G-structures sur les variétés feuilletées* (*Bull. Sc. Math.*, Paris, 92, 1968, p. 59-63); (*b*) *Propriétés cohomologiques et propriétés topologiques des feuilletages à C.T.P.* (Topology, 12, 1973, p. 317-325); (*c*) *Sur la géométrie transverse des feuilletages* (*Ann. Inst. Fourier*, XXV, 1975, p. 279-284); (*d*) *Feuilletages transversalement parallélisables et feuilletages de Lie* (*C.R. Acad. Sc.*, Paris, t. 282, série A, 1976, p. 99-101).
[11] G. Reeb, *Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées*, Hermann, Paris, 1952.
[12] B. Reinhart, *Foliated manifolds with bundle-like metrics* (*Annals of Maths.*, 69, 1959, p. 119-132
[13] H. Sussmann, *A generalization of the closed subgroup theorem to quotients of arbitrary manifolds* (*J. of Differential Geometry*, 10, (1), 1975, p. 151-166).

(Manuscrit reçu le 5 janvier 1977.)

Pierre Molino,
Département de Mathématiques,
Université des Sciences
et Techniques du Languedoc,
place Eugène-Bataillon,
34060 Montpellier.