ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

J. COLLET

Conditions d'intégrabilité des équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre, et renfermant un nombre quelconque de variables indépendantes

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série, tome 5 (1876), p. 49-82

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1876_2_5__49_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1876, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

CONDITIONS D'INTÉGRABILITÉ

DES ÉQUATIONS SIMULTANÉES

AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE,

ET RENFERMANT

UN NOMBRE QUELCONQUE DE VARIABLES INDÉPENDANTES,

PAR M. J. COLLET.

Supposons que l'on propose de déterminer les solutions communes à un système de m équations

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \ldots, \quad f_m = 0,$$

dans lesquelles $f_1, f_2, \ldots, f_m$ désignent des fonctions quelconques de n variables indépendantes $q_1, q_2, \ldots, q_n$ et des dérivées partielles $p_1, p_2, \ldots, p_n$, prises par rapport à ces variables, d'une fonction inconnue qui, d'ailleurs, n'entre pas dans ces diverses équations.

Pour que le problème soit possible, on sait que, si l'on pose, pour plus de simplicité, le symbole (f_i, f_k), égal à l'expression suivante :

$$\sum_{h=1}^{h=n} \left(\frac{df_i}{dq_h} \frac{df_k}{dp_h} - \frac{df_i}{dp_h} \frac{df_k}{dq_h} \right),$$

il est nécessaire et suffisant que les fonctions qui forment les premiers membres des équations proposées satisfassent, prises deux à deux de toutes les manières possibles, à des conditions de la forme $(f_i, f_k) = 0$. Les conditions précédentes doivent être satisfaites soit identiquement, soit en vertu des équations proposées. Si cela n'a pas lieu, le problème est impossible à résoudre dans la généralité avec laquelle il est posé; mais il peut néanmoins admettre des solutions plus particulières, en établissant de nouvelles relations entre les dérivées partielles de la fonction cherchée et les variables indépendantes, ce qui diminue la généralité du problème.

Voici comment on opère pour cela :

Si la fonction (f_i, f_k) ne s'annule pas, on l'égale néanmoins à zéro, ce qui donne une nouvelle équation qui, jointe aux proposées, devra, comme elles, être satisfaite par toute solution commune. Le nombre des équations à intégrer simultanément augmente ainsi d'autant d'unités qu'il y a de conditions non satisfaites par les équations proposées.

On traitera le nouveau système comme l'ancien, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on arrive à un système d'équations satisfaisant toutes aux conditions d'intégrabilité.

Si le nombre des équations de ce dernier système se trouve inférieur ou égal à n, le problème est possible; mais le contraire a lieu si ce nombre est supérieur à n.

On voit que l'on peut arrêter les calculs quand le nombre des équations distinctes est égal à n, et, si alors elles ne satisfont pas toutes aux conditions énoncées, le problème est impossible.

Mais, pour décider de la possibilité ou de l'impossibilité du problème, il ne faut conserver que les équations distinctes ; et, pour les distinguer de celles qui ne le sont pas, il faudrait connaître les relations qui peuvent exister *a priori* entre les fonctions que l'on obtient en faisant ainsi une application réitérée de l'opération désignée par le symbole (f_i, f_k), soit aux fonctions proposées, soit à celles qui résultent déjà de cette opération; et, en suivant cette voie de recherches, on est conduit à se demander si le nombre des fonctions distinctes que l'on peut déduire d'une série donnée de fonctions, par l'opération répétée dont nous nous occupons, est limité ou illimité. Cette question a, d'ailleurs, son importance pratique; car, si elle se résolvait par l'affirmative, tous les systèmes seraient intégrables lorsque le nombre des variables dépasserait pour chacun d'eux une limite assignable.

La résolution de ces diverses questions fait l'objet de ce Mémoire, et, comme il ne sera fait aucune hypothèse particulière sur la forme des fonctions, les résultats auxquels on parviendra se présenteront avec toute la généralité désirable.

§ I. — *Définitions et notations.*

Si l'on considère deux fonctions φ et ψ de $2n$ variables $q_1, q_2, \ldots, q_n$; $p_1, p_2, \ldots, p_n$, qui se correspondent deux à deux, p_k à q_k, nous désignerons sous le nom de *combinaison différentielle* de ces deux fonctions l'opération indiquée par la formule suivante :

$$(1) \qquad \sum_{h=1}^{h=n} \left(\frac{d\varphi}{dq_h} \frac{d\psi}{dp_h} - \frac{d\varphi}{dp_h} \frac{d\psi}{dq_h} \right),$$

et nous représenterons par le symbole (φ, ψ) le résultat de cette opération.

Si l'on donne une suite $f_1, f_2, \ldots, f_m$ de fonctions analogues aux précédentes φ et ψ, on pourra les combiner deux à deux; puis les résultats obtenus pourront être de nouveau combinés soit aux fonctions données, soit entre eux, et ainsi de suite. Les fonctions nouvelles ainsi obtenues seront désignées sous le nom de *fonctions complexes*, par opposition avec les proposées qui seront dites *simples*.

Quant au mode de notation à employer pour désigner ces fonctions complexes, nous représenterons par le symbole $(\varphi, \psi, \lambda, \ldots)$ la fonction obtenue en combinant φ et ψ, puis le résultat de cette opération avec λ, et ainsi de suite.

Parmi les fonctions complexes que l'on peut déduire d'une série donnée de fonctions simples, nous distinguerons particulièrement celles qui ne sont formées que de fonctions simples, comme $(f_i, f_k, f_h, \ldots)$. La considération de ces fonctions est importante; car, dans la suite, nous prouverons que toutes les autres fonctions complexes sont des fonctions linéaires de fonctions de cette espèce particulière. Aussi, pour plus de simplicité, les désignerons-nous sous le nom de *fonctions canoniques*. Le nombre des fonctions simples entrant dans l'une de ces fonctions sera l'*ordre* de cette fonction. Enfin on pourra les représenter en remplaçant les fonctions simples par leurs indices respectifs dans le symbole adopté pour la représentation des fonctions complexes. Nous ajouterons à ces définitions quelques remarques évidentes.

D'après la définition même de l'opération qui nous occupe, il résulte que, dans une fonction complexe $(\varphi, \psi, \lambda, \ldots)$, on peut considérer comme effectuée la combinaison d'un nombre quelconque de fonctions successives en commençant par la gauche, et que, réciproquement, la première fonction à gauche, si elle est complexe, peut être remplacée par ses fonctions composantes; que l'on a identiquement

$$(\varphi, \psi) = -(\psi, \varphi),$$

ou, plus généralement, que l'on change le signe d'une fonction en changeant l'ordre de ses deux premières fonctions constituantes, c'est-à-dire que l'on a

$$(2) \qquad (\varphi, \psi, \lambda, \ldots) = -(\psi, \varphi, \lambda, \ldots);$$

et enfin que, si φ est une somme de fonctions telle que $\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots$, on a identiquement

$$(3) \qquad (\varphi, \psi) = (\varphi_1, \psi) + (\varphi_2, \psi) + \ldots$$

et aussi

$$(\psi, \varphi) = (\psi, \varphi_1) + (\psi, \varphi_2) + \ldots.$$

§ II. — *Développement des fonctions complexes quelconques en fonctions canoniques.*

Nous nous proposons d'établir la proposition générale suivante :

Théorème. — *Si $\varphi, \psi, \theta, \ldots, \mu$ sont des fonctions quelconques, simples ou complexes, la fonction $(\varphi, \psi, \theta, \ldots, \mu)$ s'exprime linéairement en fonctions canoniques.*

La démonstration de ce théorème est basée sur le lemme suivant dû à Jacobi :

Lemme. — *Si φ, ψ, θ désignent trois fonctions quelconques de $q_1, q_2, \ldots, q_n; p_1, p_2, \ldots, p_n$, on a identiquement*

$$(4) \qquad (\varphi, \psi, \theta) + (\theta, \varphi, \psi) + (\psi, \theta, \varphi) = 0.$$

Si l'on pose

$$(\varphi, \psi) = \sum_h \left(\frac{d\varphi}{dq_h} \frac{d\psi}{dp_h} - \frac{d\varphi}{dp_h} \frac{d\psi}{dq_h} \right),$$

on aura

$$
\begin{aligned}
\psi, \theta) &= \sum_k \left[\frac{d(\varphi, \psi)}{dq_k}\frac{d\theta}{dp_k} - \frac{d(\varphi, \psi)}{dp_k}\frac{d\theta}{dq_k}\right] \\
&= \sum_{k, h}\Bigg[\left(\frac{d\varphi}{dq_h}\frac{d^2\psi}{dp_h dq_k} - \frac{d\varphi}{dp_h}\frac{d^2\psi}{dq_h dq_k}\right)\frac{d\theta}{dp_k} - \left(\frac{d\varphi}{dq_h}\frac{d^2\psi}{dp_h dp_k} - \frac{d\varphi}{dp_h}\frac{d^2\psi}{dq_h dp_k}\right)\frac{d\theta}{dq_k} \\
&\qquad - \left(\frac{d\psi}{dq_h}\frac{d^2\varphi}{dp_h dq_k} - \frac{d\psi}{dp_h}\frac{d^2\varphi}{dq_h dq_k}\right)\frac{d\varphi}{dp_k} + \left(\frac{d\psi}{dq_h}\frac{d^2\varphi}{dp_h dp_k} - \frac{d\psi}{dp_h}\frac{d^2\varphi}{dq_h dp_k}\right)\frac{d\theta}{dq_k}\Bigg].
\end{aligned}
$$

On obtiendra les développements de (θ, φ, ψ) et de (ψ, θ, φ) en remplaçant, dans la formule précédente, les lettres φ, ψ, θ successivement par les suivantes θ, φ, ψ, puis par ψ, θ, φ. On peut alors démontrer l'identité (4) en faisant voir que tous les termes qu'elle contient se détruisent deux à deux. Considérons, par exemple, les termes en $d^2\psi$. Pour prouver que ces termes s'entre-détruisent, il suffit de remarquer que les fonctions (φ, ψ, θ) et (ψ, θ, φ) renferment seules des termes de l'espèce considérée; que les termes en question entrant dans la première de ces deux expressions sont les mêmes en valeur absolue que ceux qui entrent dans la seconde, et enfin que les signes des termes semblables sont contraires dans les deux expressions. Cette dernière assertion résulte de cette remarque que, dans la valeur qui précède (φ, ψ, θ), un terme contenant une dérivée seconde de φ est positif si les deux variables par rapport auxquelles on différentie sont de même espèce, négatif dans le cas contraire, et que l'inverse a lieu pour les termes en $d^2\psi$. Comme, dans l'expression (ψ, θ, φ), ψ a précisément la place de φ dans la première expression considérée, ce que nous avons avancé se trouve pleinement justifié.

Comme on raisonnerait de même pour les termes en $d^2\varphi$ et en $d^2\theta$, le lemme énoncé est donc complétement démontré.

Cela posé, revenons au théorème proposé.

Nous étudierons en premier lieu le cas d'*une fonction composée de deux fonctions canoniques, φ et ψ.*

Pour trouver une loi, nous étudierons d'abord deux cas particuliers.

1° Supposons que la fonction ψ soit du second ordre,

$$\psi = (f_i, f_h),$$

on aura

$$(\psi, \varphi) = (f_i, f_h, \varphi).$$

Mais, d'après le lemme qui précède, on a

$$(f_i, f_h, \varphi) + (\varphi, f_i, f_h) + (f_h, \varphi, f_i) = 0;$$

d'où l'on tire, en tenant compte de la formule (2),

$$(5) \qquad (f_i, f_h, \varphi) \text{ ou } (\psi, \varphi) = (\varphi, f_h, f_i) - (\varphi, f_i, f_h),$$

ce qui est conforme au théorème énoncé.

2° Supposons que ψ soit du troisième ordre,

$$\psi = (f_i, f_h, f_k).$$

Posons

$$\psi = (\psi_1, f_k), \quad \psi_1 = (f_i, f_h),$$

on aura, d'après la formule (4),

$$(\psi_1, f_k, \varphi) + (\varphi, \psi_1, f_k) + (f_k, \varphi, \psi_1) = 0,$$

d'où l'on tire

$$(6) \qquad (\psi_1, f_k, \varphi) \text{ ou } (\psi, \varphi) = (\varphi, f_k, \psi_1) - (\varphi, \psi_1, f_k).$$

Mais

$$(\varphi_1, f_k, \psi_1) = -[\psi_1, (\varphi, f_k)] \quad \text{ou} \quad -[f_i, f_h, (\varphi, f_k)],$$

les fonctions composantes mises entre parenthèses devant être préalablement combinées. D'ailleurs, si dans la formule (5) on remplace φ par (φ, f_k), on obtiendra la valeur de $[f_i, f_h, (\varphi, f_k)]$, et par suite la suivante:

$$(7) \qquad (\varphi, f_k, \psi_1) = -(\varphi, f_k, f_h, f_i) + (\varphi, f_k, f_i, f_h).$$

D'autre part, par un calcul semblable, on trouve

$$(\varphi, \psi_1) = -(f_i, f_h, \varphi) = -(\varphi, f_h, f_i) + (\varphi, f_i, f_h);$$

d'où, d'après la formule (3),

$$(8) \qquad (\varphi, \psi_1, f_k) = -(\varphi, f_h, f_i, f_k) + (\varphi, f_i, f_h, f_k).$$

Portant maintenant les valeurs (7) et (8) dans l'égalité (6), on aura

$$(9) \qquad \left\{ \begin{aligned} (\psi, \varphi) \text{ ou } (f_i, f_h, f_k, \varphi) = {} & (\varphi, f_h, f_i, f_k) - (\varphi, f_k, f_h, f_i) \\ & - (\varphi, f_i, f_h, f_k) + (\varphi, f_k, f_i, f_h), \end{aligned} \right.$$

ce qui est encore conforme au théorème énoncé.

De la comparaison des formules (5) et (9) on peut déjà déduire une loi pour la formation des termes du développement de la fonction (ψ, φ), dans le cas où ψ et φ sont canoniques, loi que l'on démontrera ensuite être applicable à tous les cas.

Un terme quelconque du développement est caractérisé par son signe et par l'ordre des indices des fonctions qui entraient dans la composition de ψ.

Si l'on compare, comme on l'a dit, les formules (5) et (9), on reconnaît tout de suite que *les permutations des indices qui répondent aux termes de la formule* (9) *peuvent se déduire de celles des termes de la formule* (5), *en les faisant successivement suivre ou précéder de l'indice k qui n'y entre pas, le signe de chaque terme étant conservé dans le premier cas et changé dans le second.*

La formule (5) pourrait elle-même se déduire, en suivant la même loi, de l'identité $(f_i, \varphi) = -(\varphi, f_i)$.

Nous allons démontrer que *cette loi est générale*. Pour cela, nous prouverons que, si elle a lieu quand la fonction ψ est du $n^{ième}$ ordre, elle a encore lieu quand cette fonction est d'ordre $n+1$.

Soit ψ une fonction canonique d'ordre $n+1$; si f_α est la dernière fonction entrant dans sa composition, on pourra poser $\psi = (\psi_1, f_\alpha)$, ψ_1 étant une fonction du $n^{ième}$ ordre. On aura, d'après les formules (5) et (2),

$$(\psi, \varphi) = (\psi_1, f_\alpha, \varphi) = (\psi_1, \varphi, f_\alpha) - [\psi_1, (\varphi, f_\alpha)], \tag{10}$$

attendu que l'on devrait avoir

$$(\psi_1, f_\alpha, \varphi) = (\varphi, f_\alpha, \psi_1) - (\varphi, \psi_1, f_\alpha),$$

et que

$$(\varphi, f_\alpha, \psi_1) = -[\psi_1, (\varphi, f_\alpha)] \quad \text{et} \quad (\varphi, \psi_1, f_\alpha) = -(\psi_1, \varphi, f_\alpha).$$

Or les termes du développement de $(\psi_1, \varphi, f_\alpha)$ sont ceux de (ψ_1, φ), que l'on doit successivement combiner à f_α en conservant les signes; en d'autres termes, les permutations des indices dans les différents termes de $(\psi_1, \varphi, f_\alpha)$ se déduisent de celles de (ψ_1, φ) en les faisant simplement suivre de α, sans changer les signes correspondants.

D'un autre côté, les termes du développement de $-[\psi_1, (\varphi, f_\alpha)]$ sont obtenus en développant $-(\psi_1, \varphi_1)$ et remplaçant ensuite φ_1 par (φ, f_α).

Or les permutations des indices du terme de (ψ_1, φ_1) sont les mêmes que celles des termes de (ψ_1, φ). En rétablissant (φ, f_α) à la place de φ_1, on fera précéder chacune des permutations précédentes de l'indice α. D'ailleurs, les termes de $-[\psi_1, (\varphi, f_\alpha)]$ seront de signe contraire avec ceux du développement de (ψ_1, φ).

Nous pourrons donc conclure, en rapprochant les résultats relatifs aux deux groupes de termes qui précèdent, que *la loi énoncée a lieu quand ψ est d'ordre quelconque.*

D'après cela, le développement de la fonction composée (ψ, φ) peut facilement être obtenu, φ et ψ étant des fonctions canoniques. Ce développement se compose d'une suite de termes formés des fonctions qui composent φ, suivies des fonctions qui composent ψ, ces dernières étant permutées d'une façon convenable. Pour effectuer le développement, il suffit donc de connaître la permutation des indices des fonctions de ψ, et les signes répondent aux diverses permutations. Ces permutations, avec leurs signes respectifs, seront, pour simplifier le langage, désignées sous le nom de *permutations canoniques* des indices de la fonction ψ, et nous conviendrons de donner à chaque permutation un signe contraire de celui du terme correspondant dans le développement.

Soit, par exemple,

$$\psi = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5).$$

On formera successivement les permutations de 2, 3,... indices à partir du premier à gauche, chacun des groupes de permutations se déduisant du précédent en suivant la loi de développement qui vient d'être établie.

On aura ainsi, pour les permutations des deux premiers indices,

$$+(1, 2), \quad -(2, 1);$$

puis, pour les trois premiers,

$$+(1, 2, 3), \quad -(2, 1, 3), \quad -(3, 1, 2), \quad +(3, 2, 1),$$

et ainsi de suite. Donc enfin les permutations canoniques des indices de ψ seront les suivantes :

$$\begin{array}{llll}
+(1,2,3,4,5), & -(2,1,3,4,5), & -(3,1,2,4,5), & +(3,2,1,4,5), \\
-(5,1,2,3,4), & +(5,2,1,3,4), & +(5,3,1,2,4), & -(5,3,2,1,4), \\
-(4,1,2,3,5), & +(4,2,1,3,5), & +(4,3,1,2,5), & -(4,3,2,1,5), \\
+(5,4,1,2,3), & -(5,4,2,1,3), & -(5,4,3,1,2), & +(5,4,3,2,1).
\end{array}$$

Le développement de la fonction (ψ, φ) sera alors le suivant :

$$\begin{aligned}(\psi, \varphi) = &- (\varphi f_1 f_2 f_3 f_4 f_5) + (\varphi f_2 f_1 f_3 f_4 f_5) + (\varphi f_3 f_1 f_2 f_4 f_5) - (\varphi f_3 f_2 f_1 f_4 f_5)\\ &+ (\varphi f_5 f_1 f_2 f_3 f_4) - (\varphi f_5 f_2 f_1 f_3 f_4) - (\varphi f_5 f_3 f_2 f_1 f_4) + (\varphi f_5 f_3 f_2 f_1 f_4)\\ &+ (\varphi f_4 f_1 f_2 f_3 f_5) - (\varphi f_4 f_2 f_1 f_3 f_5) - (\varphi f_4 f_3 f_1 f_2 f_5) + (\varphi f_4 f_3 f_2 f_1 f_5)\\ &- (\varphi f_5 f_4 f_1 f_2 f_3) + (\varphi f_5 f_4 f_2 f_1 f_3) + (\varphi f_5 f_4 f_3 f_1 f_2) - (\varphi f_5 f_4 f_3 f_2 f_1)\end{aligned}$$

Le *nombre des termes* du développement de la fonction (ψ, φ), où ψ et φ sont des fonctions canoniques quelconques, s'obtient immédiatement en remarquant qu'il ne dépend que de l'ordre de la fonction ψ, et qu'il double lorsque cet ordre augmente d'une unité. Ce nombre étant 2 quand ψ est du second ordre, *le nombre des termes sera* 2^{n-1} *si* n *est l'ordre de la fonction* ψ.

Tout ce qui précède subsiste, quel que soit l'ordre de la fonction ψ. Si nous supposons que cet ordre soit égal à l'unité, c'est-à-dire que φ soit une fonction simple, le premier membre du développement sera une fonction canonique qui sera alors développée en fonctions de la même espèce. Ces développements constituent alors des relations entre des fonctions canoniques de même ordre.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Toute fonction canonique peut s'exprimer linéairement en fonctions canoniques du même ordre.

On verra plus loin quelle est l'importance de ces développements.

Pour ce qui concerne les permutations canoniques, comme elles jouent un rôle très-important dans la suite de ce travail, nous étudierons leurs principales propriétés dans le paragraphe suivant. Quant à présent, pour compléter la démonstration du théorème concernant le développement des fonctions complexes, il reste à prouver qu'il s'étend à des *fonctions quelconques, en nombre quelconque*.

Cela est d'abord évident pour une fonction composée seulement de fonctions canoniques; car, si $(\psi, \varphi, \theta, \ldots)$ est une telle fonction, on développera d'abord la fonction (ψ, φ), puis on combinera chacun des termes obtenus avec la fonction θ, et l'on développera de nouveau, et l'on continuera ainsi jusqu'à ce que l'on ait épuisé toutes les fonctions canoniques qui entrent dans la composition de la fonction proposée.

Pour passer de là aux fonctions complexes quelconques, il suffit de remarquer que les fonctions composantes de ces dernières, si elles ne sont canoniques, résulteront de la combinaison d'autres fonctions qui, à leur tour, si elles ne sont pas canoniques, proviendront de la combinaison de fonctions plus simples. En continuant ainsi, on finira par trouver des fonctions canoniques qui, combinées entre elles, puis avec d'autres successivement, reproduiront la fonction considérée.

On pourra donc enfin conclure que *toutes les fonctions complexes sont des fonctions linéaires de celles que nous avons appelées* canoniques. Mais ces dernières ne sont pas elles-mêmes toutes distinctes, et nous aurons à étudier dans la suite les relations qu'elles présentent entre elles.

§ III. — *Propriétés des permutations canoniques.*

Si, en suivant la règle donnée à cet effet, on forme les permutations canoniques d'un arrangement quelconque d'indices, $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots, \lambda)$, par exemple, on remarque que, *dans chacune d'elles, à partir de α et en allant à droite ou à gauche, les indices se succèdent toujours dans l'ordre où ils se trouvent dans l'arrangement primitif*, et il est évident qu'on a toutes les permutations satisfaisant à cette condition. D'ailleurs, d'après la règle donnée, le signe change autant de fois qu'un nouvel indice est placé à gauche de α; et, la permutation qui commence par α étant positive, *une permutation quelconque sera positive ou négative, suivant que le nombre des indices placés à gauche de α sera pair ou impair*.

Si, pour plus de généralité, on suppose que l'arrangement primitif donné soit précédé du signe $+$ ou du signe $-$, on dira qu'*une permutation quelconque est de même signe ou de signe contraire, suivant que le nombre des indices placés à gauche de α est pair ou impair*.

Cette remarque peut servir de définition aux permutations canoniques d'un arrangement primitif donné et fournir une nouvelle loi pour leur composition.

Si l'arrangement primitif, supposé positif, est, par exemple, le suivant : $+(\alpha, 1, 2, 3, 4, 5)$, la première permutation sera $+(\alpha, 1, 2, 3, 4, 5)$. Formons maintenant toutes les permutations qui n'ont qu'un indice à gauche de α : elles seront toutes négatives, et il suffira pour les obtenir de faire passer à gauche de α successivement et isolément chacun des indices qui le suivent. On aura ainsi la suite

$$-(1,\alpha,2,3,4,5),\quad -(2,\alpha,1,3,4,5),\quad -(3,\alpha,1,2,4,5),$$
$$-(4,\alpha,1,2,3,5),\quad -(5,\alpha,1,2,3,4).$$

Pour composer les permutations qui contiennent deux indices à gauche de α, lesquelles seront toutes positives, on transportera isolément à gauche de chacune des permutations qu'on vient d'obtenir ceux des indices qui suivent α, et qui, dans l'arrangement primitif, sont à droite de celui qui est à gauche de α dans la permutation considérée.

On aura ainsi les groupes suivants, au nombre de quatre seulement, la dernière permutation déjà obtenue n'en donnant pas de nouvelles :

$$+(2,1,\alpha,3,4,5),\quad +(3,2,\alpha,1,4,5),\quad +(4,3,\alpha,1,2,5),\quad +(5,4,\alpha,1,2,3),$$
$$+(3,1,\alpha,2,4,5),\quad +(4,2,\alpha,1,3,5),\quad +(5,3,\alpha,1,2,4),$$
$$+(4,1,\alpha,2,3,5),\quad +(5,2,\alpha,1,3,4),$$
$$+(5,1,\alpha,2,3,4).$$

On continue ainsi successivement. Chaque permutation obtenue en donne un groupe de nouvelles, en portant à sa gauche successivement ceux des indices qui sont à droite de α et qui, dans l'arrangement primitif, suivent aussi l'indice qui commence la permutation considérée, les nouvelles permutations étant d'un signe opposé à celui de la permutation dont on les déduit.

On voit facilement que cette loi de formation donne bien toutes les permutations possibles satisfaisant aux conditions énoncées plus haut; qu'elles sont toutes distinctes, et que, par suite, cette nouvelle loi pour la formation des permutations canoniques d'un arrangement primitif proposé peut être considérée comme définissant ces permutations.

Comme vérification nous formerons, en suivant l'une et l'autre loi, le tableau complet des permutations canoniques de l'arrangement $+(\alpha, 1, 2, 3, 4, 5)$.

La première loi de formation donne

$$+(\alpha,1,2,3,4,5)\ -(1,\alpha,2,3,4,5),\ -(2,\alpha,1,3,4,5)\ +(2,1,\alpha,3,4,5),$$
$$-(3,\alpha,1,2,4,5)\ +(3,1,\alpha,2,4,5),\ +(3,2,\alpha,1,4,5)\ -(3,2,1,\alpha,4,5),$$
$$-(4,\alpha,1,2,3,5)\ +(4,1,\alpha,2,3,5),\ +(4,2,\alpha,1,3,5)\ -(4,2,1,\alpha,3,5),$$
$$+(4,3,\alpha,1,2,5)\ -(4,3,1,\alpha,2,5),\ -(4,3,2,\alpha,1,5)\ +(4,3,2,1,\alpha,5),$$

$$
\begin{aligned}
&-(5,\alpha,1,2,3,4)\ +(5,1,\alpha,2,3,4),\ +(5,2,\alpha,1,3,4)\ -(5,2,1,\alpha,3,4),\\
&+(5,3,\alpha,1,2,4)\ -(5,3,1,\alpha,2,4),\ -(5,3,2,\alpha,1,4)\ +(5,3,2,1,\alpha,4),\\
&+(5,4,\alpha,1,2,3)\ -(5,4,1,\alpha,2,3),\ -(5,4,2,\alpha,1,3)\ +(5,4,2,1,\alpha,3),\\
&-(5,4,3,\alpha,1,2)\ +(5,4,3,1,\alpha,2),\ +(5,4,3,2,\alpha,1)\ -(5,4,3,2,1,\alpha);
\end{aligned}
$$

la nouvelle donne à son tour :

$$
\begin{aligned}
&+(\alpha,1,2,3,4,5),\\
&-(1,\alpha,2,3,4,5),\ -(2,\alpha,1,3,4,5),\ -(3,\alpha,1,2,4,5),\ -(4,\alpha,1,2,3,5),\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -(5,\alpha,1,2,3,4),\\
&+(2,1,\alpha,3,4,5),\ +(3,2,\alpha,1,4,5),\ +(4,3,\alpha,1,2,5),\ +(5,4,\alpha,1,2,3),\\
&+(3,1,\alpha,2,4,5),\ +(4,2,\alpha,1,3,5),\ +(5,3,\alpha,1,2,4),\\
&+(4,1,\alpha,2,3,5),\ +(5,2,\alpha,1,3,4),\\
&+(5,1,\alpha,2,3,4),\\
&-(3,2,1,\alpha,4,5),\ -(4,3,2,\alpha,1,5),\ -(5,4,3,\alpha,1,2),\\
&-(4,2,1,\alpha,3,5),\ -(5,3,2,\alpha,1,4),\\
&-(5,2,1,\alpha,3,4),\\
&-(4,3,1,\alpha,2,5),\ -(5,4,2,\alpha,1,3),\\
&-(5,3,1,\alpha,2,4),\\
&-(5,4,1,\alpha,2,3),\\
&+(4,3,2,1,\alpha,5),\ +(5,4,3,2,\alpha,1),\\
&+(5,3,2,1,\alpha,4),\\
&+(5,4,2,1,\alpha,3),\\
&+(5,4,3,1,\alpha,2),\\
&-(5,4,3,2,1,\alpha);
\end{aligned}
$$

et il est facile de constater que les deux tableaux qui précèdent renferment les mêmes termes.

Des règles données pour la formation des permutations canoniques on déduit immédiatement les deux théorèmes qui suivent.

THÉORÈME I. — *A une permutation quelconque il en répond une seconde, dans laquelle les indices sont en sens inverse, dans le même ordre que pour la première, les signes de ces deux permutations étant différents ou identiques, suivant que le nombre des indices est pair ou impair.*

Ce théorème, dont la démonstration pourrait facilement se déduire de la première loi de développement, résulte plus simplement encore de la seconde.

Il est évident, en effet, que les termes dont les indices sont, en sens inverse, dans le même ordre dans l'un et dans l'autre, seront obtenus en permutant un même arrangement primitif. Il reste à déterminer quels seront leurs signes.

Soit α le premier indice de l'arrangement primitif. Si le nombre des indices est impair, les nombres qui expriment combien il y en a avant et après α, dans une permutation quelconque, seront en même temps pairs ou impairs; donc, dans la permutation d'ordre inverse par rapport à celle que l'on considère, le nombre des indices qui précèdent α est aussi pair ou impair en même temps que dans la première. Donc, dans le cas où le nombre des indices est impair, les signes des deux permutations d'ordre inverse seront les mêmes.

Le contraire aura lieu si le nombre des indices est pair; car, si dans une permutation le nombre de ceux qui précèdent α est impair, le nombre de ceux qui le suivent, c'est-à-dire le nombre de ceux qui précèdent α dans la permutation inverse est pair, et, par suite, les deux permutations correspondantes seront alors de signes contraires.

Théorème II. — *Si les indices qui composent l'arrangement primitif sont respectivement α, β, γ,..., μ, ν, dont le nombre est n, les nombres de permutations qui commencent par ces différents indices sont respectivement égaux aux suivants :*

$$1,\ 1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3,\ldots,\ 2^{n-2}.$$

Il est d'abord évident qu'il y a des permutations commençant par chacun des indices α, β,..., ν.

D'ailleurs, d'après la loi de formation, chaque nouvel indice pouvant être placé devant toutes les permutations qui commencent par les indices qui le précèdent dans l'arrangement primitif, aussi bien qu'à la suite de ces permutations, il en résulte que le nombre des permutations commençant par un indice quelconque sera égal au nombre de celles qui commencent par les indices qui le précèdent. Comme une seule permutation commence par le premier indice, et que, d'ailleurs, chacun des nombres de la suite $1, 1, 2, 2^2,\ldots, 2^{n-2}$ se trouve égal à la somme de ceux qui le précèdent, le théorème énoncé se trouve démontré.

Remarque. — On peut déduire de là le *nombre des permutations ca-*

noniques d'un arrangement de n indices. Ce nombre est égal à

$$1 + 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-2} = 2^{n-1},$$

résultat déjà obtenu.

Dans tout ce qui précède nous nous sommes occupé de la composition des permutations canoniques d'un arrangement primitif donné; mais le problème inverse peut être considéré, et nous nous proposons de le résoudre, parce que sa solution est nécessaire pour la suite de ce travail.

Ce problème peut s'énoncer ainsi :

Problème. — *Étant donné un arrangement d'indices quelconques, déterminer le nombre et la forme des arrangements primitifs dont il pourrait être déduit par des permutations canoniques.*

Soit $(\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \delta, \varkappa, \iota, \ldots, \lambda)$ un arrangement de $(m+1)$ indices, et considérons ceux des arrangements primitifs cherchés qui commencent par l'indice $\varkappa$, qui occupe le $n+1^{\text{ième}}$ rang dans l'arrangement proposé.

Un arrangement quelconque de ce groupe se compose de l'indice $\varkappa$ suivi des $m-n$ indices $\iota, \ldots, \lambda$, dont l'ordre relatif est conservé, et entre lesquels les n indices $\delta, \ldots, \gamma, \beta, \alpha$ sont intercalés de telle façon qu'ils conservent aussi leur ordre relatif à partir de $\varkappa$. Si l'on choisit, d'une manière quelconque, les n positions parmi les m places qui doivent être occupées par les indices qui seront placés à la suite de $\varkappa$, on ne pourra disposer que d'une seule façon, dans ces n positions, les n indices $\delta, \ldots, \gamma, \beta, \alpha$, et les autres indices occuperont ensuite successivement, en suivant leur ordre, les places restées libres. On n'aura donc qu'une permutation primitive répondant au choix de n positions à la suite de $\varkappa$.

Si l'on désigne par C_m^n le nombre des combinaisons de m objets pris n à n, on peut faire de C_m^n façons différentes le choix de ces n positions; donc le nombre des arrangements primitifs commençant par l'indice $\varkappa$ est égal à C_m^n, et ce qui précède indique comment on les composerait. Tous ces arrangements donnant le proposé par les mêmes transpositions d'indices à gauche de α seront de même signe, positifs si n est pair, négatifs si n est impair, l'arrangement proposé étant supposé positif.

Si l'on donne maintenant à n successivement les valeurs $1, 2, 3, \ldots, m$, et que l'on ajoute les résultats obtenus en convenant que $C_m^0 = 1$, on aura le nombre total des arrangements dont le proposé peut être déduit, les signes de ces arrangements étant convenablement choisis. Ce nombre sera

$$C_m^0 + C_m^1 + C_m^2 + \ldots + C_m^m = 2^m.$$

Le problème proposé étant ainsi résolu pour le cas simple où les indices ne sont astreints à satisfaire à aucune condition, nous considérerons actuellement un cas plus complexe, mais très-important : c'est celui dans lequel *l'arrangement cherché est astreint à la condition de pouvoir être déduit canoniquement d'un autre arrangement primitif donné des mêmes indices.*

Cherchons d'abord quelles sont les conditions de possibilité d'un pareil problème. Pour cela nous étudierons d'abord les relations qui doivent exister entre un arrangement primitif donné et les permutations déduites de ses propres permutations.

Soient, pour fixer les idées,

$(\alpha, a, b, c, d, f, g, h, l)$ l'arrangement primitif donné,
$(g, d, a, \alpha, b, c, f, h, l)$ une de ses permutations commençant par l'un quelconque de ses indices,
$(l, h, b, f, g, d, a, \alpha, c)$ une permutation quelconque de la précédente.

Dans la permutation intermédiaire les indices sont, par rapport à α, dans le même ordre que dans la première ; dans la dernière ils sont, par rapport à g, dans le même ordre que dans la seconde d'où elle est déduite ; donc, dans la dernière, d'où l'on devrait partir pour trouver la seconde, pour chacun des groupes séparés par g, les indices sont, par rapport à α ou par rapport à celui des indices du groupe qui, dans l'arrangement primitif, est le plus voisin de α, dans le même ordre relatif que dans cet arrangement. D'ailleurs g est un terme commun à chacun de ces deux groupes ; il doit donc, dans l'arrangement primitif proposé, occuper un rang plus éloigné de α que chacun des indices qui sont immédiatement à côté de lui, à moins qu'il ne soit lui-même, dans l'un des groupes, le terme le moins éloigné de α, auquel cas la permutation proposée a tous ses indices, par rapport à α, dans l'ordre de l'arrangement primitif donné.

Les conditions qui précèdent sont nécessaires pour que, la première et la troisième permutation étant données, on puisse en trouver une, telle que la seconde, qui puisse être déduite de la première, et soit susceptible de donner la troisième par des permutations canoniques.

Ces conditions sont suffisantes.

En effet, si elles sont remplies par la permutation proposée $(l, h, b, f, g, d, a, \alpha, c)$ relativement à l'un des indices g, on pourra toujours, sans changer l'ordre des indices par rapport à g, intercaler les indices qui précèdent cette lettre entre ceux qui la suivent, de façon qu'ils soient aussi, par rapport à α, dans l'ordre où ils se trouvent dans l'arrangement primitif donné.

Cette intercalation pourra se faire *de deux façons différentes, si les indices ne sont pas dans l'ordre de l'arrangement primitif, et d'une seule dans le cas contraire.*

Considérons d'abord *le premier cas.*

Si α est à la droite de g, on commencera par l'indice de gauche qui est le plus voisin de α dans l'arrangement primitif. Cet indice pourra toujours se placer soit à droite, soit à gauche de α, après les indices qui le précèdent dans l'ordre relatif à α; après quoi les positions des autres indices seront déterminées, puisqu'ils doivent conserver l'ordre dans lequel ils se trouvent par rapport à g dans la permutation proposée. On trouvera ainsi, pour l'exemple considéré, les deux permutations $(g, f, d, a, \alpha, b, c, h, l)$ et $(g, f, d, b, a, \alpha, c, h, l)$, qui, abstraction faite du signe, satisfont aux conditions du problème.

Si α est à gauche, on le placera soit à droite, soit à gauche de l'indice de droite, qui, dans l'arrangement primitif, est le plus voisin de lui, et, les autres indices se plaçant ensuite en suivant leur rang, on trouvera encore deux permutations.

Quant aux signes, il est évident que les deux permutations obtenues dans l'un ou l'autre cas sont de signes contraires. La permutation proposée devant se déduire de l'une ou de l'autre par le même nombre de transpositions d'indices, les résultats obtenus seront identiques, mais de signes contraires. Par suite, *une seule des deux per-*

mutations obtenues répond au problème posé; l'autre conduit à une permutation qui est de signe contraire de la proposée.

Nous remarquerons enfin que, dans le cas que nous venons d'étudier, où les indices ne sont pas, par rapport à α, dans le même ordre que dans l'arrangement primitif donné, il ne peut exister qu'un seul indice, tel que g, satisfaisant aux conditions énoncées. Donc, dans ce cas, *si le problème est possible, il n'est susceptible que d'une solution.*

Dans le *second cas,* qui est celui *où les indices sont, par rapport à α, dans le même ordre que dans l'arrangement primitif donné,* les conditions sont évidemment satisfaites par rapport à chacun des indices de la permutation; mais l'intercalation ne peut plus se faire que d'une seule façon. Le problème admet donc, dans ce cas, autant de solutions qu'il y a d'indices, si, toutefois, on fait abstraction des signes. Quant à ces derniers, si l'on remarque que la permutation proposée, à ne considérer que ses indices, pourrait se déduire de l'arrangement primitif, et qu'en la permutant elle donne une permutation identique à elle-même, on conclura que *le problème n'est possible qu'autant que la permutation proposée a le même signe que celui qu'elle aurait si elle était déduite directement de l'arrangement primitif donné, et, dans ce cas, le problème admet autant de solutions qu'il y a d'indices dans la permutation.*

Nous appliquerons ce qui précède au théorème qui suit.

On sait que *les permutations canoniques d'un arrangement donné* (α, a, b, c, d, f, g, h, l) *forment deux catégories, suivant qu'elles commencent ou finissent par l'indice* l. On sait, en outre, qu'à une permutation quelconque du premier groupe en correspond une du second, qui est formée des mêmes indices se succédant en ordre inverse, les signes de ces deux permutations étant différents ou identiques, suivant que le nombre des indices est pair ou impair. Cela posé, nous démontrerons le théorème suivant :

Théorème III. — *Si l'on permute canoniquement les termes de l'un ou de l'autre des deux groupes suivant lesquels on peut classer les permutations d'un arrangement donné, on obtient pour résultat toutes les permutations canoniques de cet arrangement.*

Considérons d'abord un terme $+(l, g, c, b, \alpha, a, d, f, h)$ du premier groupe. En le permutant canoniquement, on aura d'abord les deux suivants: $+(l, g, c, b, \alpha, a, d, f, h)$ et $+(h, f, d, a, \alpha, b, c, g, l)$, de même signe, parce que le nombre des indices est impair, qui, avec leurs analogues déduits des autres termes du premier groupe, formeront le tableau complet des permutations de l'arrangement primitif $(\alpha, a, b, c, d, f, g, h, l)$. Il reste à démontrer que toutes les autres permutations, déduites des termes du premier groupe, seront deux à deux identiques et de signes contraires.

Dans toutes ces permutations, l'indice l occupant une position intermédiaire aux deux extrêmes, l'ordre des indices ne peut être, par rapport à α, le même que dans l'arrangement primitif donné. Soit $+(h, a, \alpha, c, l, g, b, d, f)$ une permutation du terme considéré $+(l, g, c, b, \alpha, a, d, f, h)$; si l'on cherche les termes du premier groupe capables de la fournir, abstraction faite du signe, les conditions de possibilité de ce problème étant évidemment satisfaites par rapport à l, on trouve le terme considéré $+(l, g, c, b, \alpha, a, d, f, h)$ et le suivant $-(l, g, c, \alpha, a, b, d, f, h)$, qui, par les mêmes transpositions d'indices que le premier, conduirait à une permutation identique, mais de signe contraire, avec celle que l'on a déduite du premier terme. D'ailleurs, ce second terme $-(l, g, c, \alpha, a, b, d, f, h)$ existe réellement dans le groupe des permutations commençant par l; par conséquent, la permutation $+(h, a, \alpha, c, l, g, b, d, f)$ disparaîtra du résultat, et, comme il en serait de même pour toutes celles qui ne commencent ni ne finissent par l, le théorème énoncé est démontré pour le premier groupe.

Une démonstration semblable peut se faire pour les termes du second groupe, en remarquant que, dans l'une quelconque des permutations qui doivent disparaître, les conditions de possibilité du problème, qui consiste à chercher quels sont les termes du second groupe qui auraient pu donner cette permutation, sont satisfaites par rapport à un seul indice qui n'est plus l, mais celui qui doit commencer le terme cherché.

Le théorème énoncé est donc complétement démontré.

Corollaire. — Si l'on permute canoniquement toutes les permutations d'un arrangement donné, on retrouve deux fois ces mêmes permutations.

Remarque. — Toutes les propriétés qu'on vient d'établir concernant les permutations canoniques ne cessent pas d'avoir lieu lorsqu'on suppose que les indices d'une même permutation ne soient pas tous distincts.

Pour terminer cette étude, nous vérifierons le théorème qu'on a démontré ci-dessus, en prenant un exemple quelconque.

Soit l'arrangement $(1, 2, 3, 4, 5)$. En le permutant canoniquement, on obtient les termes suivants :

$$\begin{array}{l}
+(1,2,3,4,5)-(2,1,3,4,5)-(3,1,2,4,5)+(3,2,1,4,5)\\
-(4,1,2,3,5)+(4,2,1,3,5)+(4,3,1,2,5)-(4,3,2,1,5)\\
-(5,1,2,3,4)+(5,2,1,3,4)+(5,3,1,2,4)-(5,3,2,1,4)\\
+(5,4,1,2,3)-(5,4,2,1,3)-(5,4,3,1,2)+(5,4,3,2,1)
\end{array}$$

Considérons les termes des deux dernières lignes, par exemple, et permutons-les canoniquement. On obtiendra ainsi le tableau suivant :

$$\begin{array}{l}
+(5,1,2,3,4)-(1,5,2,3,4)-(2,5,1,3,4)+(2,1,5,3,4)\\
-(3,5,1,2,4)+(3,1,5,2,4)+(3,2,5,1,4)-(3,2,1,5,4)\\
-(4,5,1,2,3)+(4,1,5,2,3)+(4,2,5,1,3)-(4,2,1,5,3)\\
+(4,3,5,1,2)-(4,3,1,5,2)-(4,3,2,5,1)+(4,3,2,1,5)\\
-(5,2,1,3,4)+(2,5,1,3,4)+(1,5,2,3,4)-(1,2,5,3,4)\\
+(3,5,2,1,4)-(3,2,5,1,4)-(3,1,5,2,4)+(3,1,2,5,4)\\
+(4,5,2,1,3)-(4,2,5,1,3)-(4,1,5,2,3)+(4,1,2,5,3)\\
-(4,3,5,2,1)+(4,3,2,5,1)+(4,3,1,5,2)-(4,3,1,2,5)\\
-(5,3,1,2,4)+(3,5,1,2,4)+(1,5,3,2,4)-(1,3,5,2,4)\\
+(2,5,3,1,4)-(2,3,5,1,4)-(2,1,5,3,4)+(2,1,3,5,4)\\
+(4,5,3,1,2)-(4,3,5,1,2)-(4,1,5,3,2)+(4,1,3,5,2)\\
-(4,2,5,3,1)+(4,2,3,5,1)+(4,2,1,5,3)-(4,2,1,3,5)\\
+(5,3,2,1,4)-(3,5,2,1,4)-(2,5,3,1,4)+(2,3,5,1,4)\\
-(1,5,3,2,4)+(1,3,5,2,4)+(1,2,5,3,4)-(1,2,3,5,4)\\
-(4,5,3,2,1)+(4,3,5,2,1)+(4,2,5,3,1)-(4,2,3,5,1)\\
+(4,1,5,3,2)-(4,1,3,5,2)-(4,1,2,5,3)+(4,1,2,3,5)\\
-(5,4,1,2,3)+(4,5,1,2,3)+(1,5,4,2,3)-(1,4,5,2,3)\\
+(2,5,4,1,3)-(2,4,5,1,3)-(2,1,5,4,3)+(2,1,4,5,3)\\
+(3,5,4,1,2)-(3,4,5,1,2)-(3,1,5,4,2)+(3,1,4,5,2)\\
-(3,2,5,4,1)+(3,2,4,5,1)+(3,2,1,5,4)-(3,2,1,4,5)
\end{array}$$

$$
\begin{array}{l}
+(5,4,2,1,3)-(4,5,2,1,3)-(2,5,4,1,3)+(2,4,5,1,3)\\
-(1,5,4,2,3)+(1,4,5,2,3)+(1,2,5,4,3)-(1,2,4,5,3)\\
-(3,5,4,2,1)+(3,4,5,2,1)+(3,2,5,4,1)-(3,2,4,5,1)\\
+(3,1,5,4,2)-(3,1,4,5,2)-(3,1,2,5,4)+(3,1,2,4,5)\\
+(5,4,3,1,2)-(4,5,3,1,2)-(3,5,4,1,2)+(3,4,5,1,2)\\
-(1,5,4,3,2)+(1,4,5,3,2)+(1,3,5,4,2)-(1,3,4,5,2)\\
-(2,5,4,3,1)+(2,4,5,3,1)+(2,3,5,4,1)-(2,3,4,5,1)\\
+(2,1,5,4,3)-(2,1,4,5,2)-(2,1,3,5,4)+(2,1,3,4,5)\\
-(5,4,3,2,1)+(4,5,3,2,1)+(3,5,4,2,1)-(3,4,5,2,1)\\
+(2,5,4,3,1)-(2,4,5,3,1)-(2,3,5,4,1)+(2,3,4,5,1)\\
+(1,5,4,3,2)-(1,4,5,3,2)-(1,3,5,4,2)+(1,3,4,5,2)\\
-(1,2,5,4,3)+(1,2,4,5,3)+(1,2,3,5,4)-(1,2,3,4,5)
\end{array}
$$

Si, dans ce tableau, on supprime les termes qui se détruisent, il ne reste que le premier terme de chaque ligne de rang $(4n+1)$ et le dernier de chaque ligne de rang $4n$, et ces termes sont précisément les permutations de l'arrangement proposé.

On pourrait obtenir une vérification semblable en prenant les termes qui forment la première ligne des permutations de cet arrangement.

§ IV. — *Application des propriétés qui précèdent au développement des fonctions complexes.*

Les propriétés qu'on vient de découvrir concernant les permutations canoniques servent à démontrer les théorèmes suivants, sur le développement des fonctions complexes:

Théorème I. — *Si l'on développe une fonction (φ, ψ), où φ et ψ sont canoniques, le résultat reste le même si l'on remplace préalablement la fonction φ par son développement en fonctions canoniques.*

Quand on développe la fonction (φ, ψ), on obtient une suite de termes composés de la fonction ψ suivie des fonctions simples entrant dans φ et disposées dans les différents termes suivant l'ordre indiqué par les permutations canoniques des indices de ces fonctions, le signe de chaque terme étant contraire de celui de la permutation correspondante.

Si, au lieu de cela, on suppose que la fonction φ soit préalablement remplacée par son développement, on aura autant de développements analogues au précédent qu'il y a de termes dans celui de la fonction φ.

Or les permutations d'indices qui caractérisent les différents termes du développement de φ sont obtenues en permutant les indices de φ, le dernier excepté, puis faisant précéder chacune de ces permutations par ce dernier indice et changeant les signes des différents termes. Plus simplement, cela revient à dire que ces permutations forment l'un des deux groupes en lesquels les permutations canoniques de tous les indices de φ peuvent être classées, celles qui commencent par le dernier indice de cette fonction.

Cette simple remarque rend évident le théorème proposé, puisqu'on a prouvé (théorème III, § III) qu'en permutant les termes de l'un des deux groupes en question on reproduit seulement les permutations canoniques de l'arrangement primitif formé par les indices de la fonction φ.

Remarque. — La même chose n'a pas lieu pour la fonction ψ dans (φ, ψ); car, si l'on remplace cette fonction par son développement $\Sigma_k \psi_k$, on aura $(\varphi, \psi) = \Sigma_k(\varphi, \psi_k)$, ce qui donnera une suite de développements ne différant entre eux que par la fonction ψ_k qui commence tous les termes d'un même développement. Le résultat sera donc différent de celui qu'on aurait obtenu si la fonction ψ n'avait pas été développée. Mais si, dans ce dernier cas, on remplace ψ, dans le résultat obtenu, par son développement, on retombe sur le résultat obtenu dans le premier cas.

On peut donc remplacer ψ par son développement, soit avant, soit après l'opération, sans changer le résultat; mais ce résultat est différent de celui qu'on obtient lorsque ψ n'est pas remplacé par son développement.

Corollaire. — Le développement de la fonction complexe (φ, ψ, θ), où φ est une fonction canonique, reste le même si l'on remplace la fonction φ par son développement en fonctions canoniques.

THÉORÈME II. — *Si φ, ψ, F sont trois fonctions canoniques, le développement de (φ, ψ, F) ne renferme aucun terme dans lequel les fonctions* *simples de* φ *soient interposées entre celles de* ψ *ou inversement, les fonctions simples de* ψ *entre celles de* φ.

Pour démontrer ce théorème, cherchons d'abord la forme du développement de (φ, ψ, F).

Pour obtenir ce développement, il faudra d'abord former celui de (φ, ψ), qui comprendra une suite de termes composés de la fonction ψ, suivie des fonctions simples de φ, dans un ordre qui, pour les différents termes, est indiqué par les diverses permutations canoniques des indices de φ, le signe de chaque terme étant contraire de celui qui répond à la permutation correspondante. Le développement de (φ, ψ, F) s'obtiendra ensuite en développant les combinaisons de chaque terme du développement précédent avec la fonction F.

Soit $\pm\theta_r$ un terme quelconque de (φ, ψ). Les indices des fonctions simples qui composent ce terme sont ceux de la fonction ψ, dans l'ordre où ils se trouvent dans cette fonction, suivis d'une permutation négative ou positive des indices de φ, suivant que le terme considéré est positif ou négatif. Ce terme $\pm\theta_r$ donnera, dans le développement de (φ, ψ, F), une série de termes formés de la fonction F, suivie des fonctions simples de φ et de ψ, dans un ordre qui est indiqué, pour les différents termes, par les permutations des indices de $\pm\theta_r$, chaque terme étant d'un signe opposé ou conforme à celui de θ_r, suivant que la permutation correspondante des indices est positive ou négative.

Cela étant posé, en se reportant à la règle de composition des permutations d'un arrangement donné, on voit facilement :

1° Que, dans les diverses permutations des indices de θ_r, les indices de la fonction φ ne seront jamais intercalés entre ceux de ψ;

2° Que dans ces permutations entrent toutes celles des indices de ψ;

3° Que tous les termes qui renferment une même permutation des indices de ψ pourraient être obtenus en permutant canoniquement un arrangement formé de celui de $\pm\theta_r$, en y remplaçant le groupe des indices de la fonction ψ par une seule lettre a, cette lettre étant ultérieurement remplacée, dans les résultats, par la permutation des indices de ψ, qui est commune à tous les termes considérés, le signe de chaque permutation étant $+$ ou $-$, suivant que la permutation des indices de ψ qu'elle renferme et la permutation correspondante, déduite de l'arrangement, formé, comme on l'a dit, avec les indices de θ_r, sont de même signe ou de signes contraires; le terme correspondant sera, comme on l'a dit, d'un signe contraire ou conforme à celui de θ_r, suivant que sa permutation sera positive ou négative.

4° On voit enfin que la règle qui précède peut donner tout le développement de (φ, ψ, F), en remplaçant a successivement par toutes les permutations canoniques des indices de ψ.

Les remarques qui précèdent rendent évident le théorème énoncé. Il suffit de prouver, en effet, que les fonctions simples de ψ ne sont, dans aucun terme du développement de (φ, ψ, F), intercalées entre celles de φ.

Si l'on considère pour cela que les indices des termes, tels que $\pm\theta_r$, après que la lettre a a été substituée aux indices de la fonction ψ, représentent celles qui commencent par a des permutations obtenues de l'arrangement qui serait formé des indices de φ suivis de a, il résulte du théorème III, § III, que, si l'on permute canoniquement ces groupes d'indices, on retrouvera les mêmes permutations jointes à celles qui compléteraient le tableau des permutations de l'arrangement qu'on vient de former, lesquelles se terminent toutes par a. Donc, en composant les termes du développement de (φ, ψ, F), comme il vient d'être dit, on voit que ce développement ne contiendra aucun terme dans lequel les fonctions simples de ψ soient intercalées entre celles de φ, ce qui, joint à la première remarque que nous avons faite ci-dessous, démontre le théorème énoncé.

Les termes du développement pourront donc être obtenus de la façon suivante. On formera toutes les permutations canoniques des indices de l'arrangement formé d'une lettre quelconque a, précédée des indices de φ. Dans chacune des permutations de ce tableau on remplacera a successivement par chacune des permutations des indices de ψ, en conservant ou changeant le signe, suivant que la permutation considérée de ψ est positive ou négative. Les permutations ainsi obtenues sont celles qui répondent aux différents termes de (φ, ψ, F), chaque terme étant d'un signe contraire de celui de la permutation correspondante.

Corollaire. — On peut encore énoncer d'une autre façon la règle qui précède pour la composition des permutations d'indices répondant aux différents termes de (φ, ψ, F). Si l'on considère que chaque permutation, déduite de l'arrangement formé des indices de φ suivis de a, est de signe contraire avec la permutation qu'on obtiendrait en supprimant cette lettre a, on pourra dire que *les permutations relatives au développement de* (φ, ψ, F) *peuvent se former, en faisant successivement précéder et suivre chaque permutation des indices de* ψ *de l'une des permutations des indices de* φ*, le signe du résultat étant dans le premier cas* $+$ *ou* $-$*, suivant que les deux permutations considérées sont de signes semblables ou différents, et le contraire dans le second cas, le signe de chaque terme étant d'ailleurs contraire de celui de la permutation correspondante.*

Théorème III. — *Si* F *est une fonction canonique et* θ *une combinaison de deux fonctions canoniques, le développement de la fonction* (θ, F) *sera le même, que l'on remplace* θ *par l'un ou l'autre des deux développements dont cette fonction est susceptible.*

Ce théorème, qui est une généralisation du théorème I, est une conséquence immédiate de celui qui précède.

Si l'on suppose que l'on ait $\theta = (\varphi, \psi) = -(\psi, \varphi)$, il suffit de prouver que les deux fonctions (φ, ψ, F) et $-(\psi, \varphi, F)$ ont des développements identiques. Si l'on considère, en effet, les indices d'un terme quelconque du premier développement, ils sont formés d'une permutation des indices de φ, précédée ou suivie d'une permutation des indices de ψ, le signe étant $+$ ou $-$, suivant que les deux permutations sont de même signe ou de signes contraires, quand les indices de φ précèdent ceux de ψ, et l'inverse dans le cas contraire. Or le développement de (ψ, φ, F) donnera une fois le même arrangement d'indices, mais avec un signe opposé, puisque l'ordre des deux fonctions φ et ψ est maintenant renversé.

Donc les développements des fonctions (φ, ψ, F) et $-(\psi, \varphi, F)$ sont bien identiques.

Vérification. — Nous vérifierons ce théorème, ainsi que le précédent, en formant directement les développements des fonctions (φ, ψ, F) et $-(\psi, \varphi, F)$, dans l'hypothèse particulière où l'on a, par exemple,

$$\varphi = (f_1, f_2, f_3), \quad \psi = (f_4, f_5).$$

Il suffit de vérifier que les permutations canoniques des indices des termes du développement de (φ, ψ) sont bien les mêmes que celles des termes de $-(\psi, \varphi)$.

Les permutations répondant aux termes du premier développement sont

$$(4, 5, 1, 2, 3) - (4, 5, 2, 1, 3) - (4, 5, 3, 1, 2) + (4, 5, 3, 2, 1),$$

celles du second

$$-(1, 2, 3, 4, 5) + (1, 2, 3, 5, 4).$$

Si l'on permute chacun des arrangements composant le premier des deux groupes qui précèdent, on obtient le tableau suivant :

$$\begin{array}{l}
+(4,5,1,2,3)-(5,4,1,2,3)-(1,4,5,2,3)+(1,5,4,2,3)\\
-(2,4,5,1,3)+(2,5,4,1,3)+(2,1,4,5,3)-(2,1,5,4,3)\\
-(3,4,5,1,2)+(3,5,4,1,2)+(3,1,4,5,2)-(3,1,5,4,2)\\
+(3,2,4,5,1)-(3,2,5,4,1)-(3,2,1,4,5)+(3,2,1,5,4)\\
-(4,5,2,1,3)+(5,4,2,1,3)+(2,4,5,1,3)-(2,5,4,1,3)\\
+(1,4,5,2,3)-(1,5,4,2,3)-(1,2,4,5,3)+(1,2,5,4,3)\\
+(3,4,5,2,1)-(3,5,4,2,1)-(3,2,4,5,1)+(3,2,5,4,1)\\
-(3,1,4,5,2)+(3,1,5,4,2)+(3,1,2,4,5)-(3,1,2,5,4)\\
-(4,5,3,1,2)+(5,4,3,1,2)+(3,4,5,1,2)-(3,5,4,1,2)\\
+(1,4,5,3,2)-(1,5,4,3,2)-(1,3,4,5,2)+(1,3,5,4,2)\\
+(2,4,5,3,1)-(2,5,4,3,1)-(2,3,4,5,1)+(2,3,5,4,1)\\
-(2,1,4,5,3)+(2,1,5,4,3)+(2,1,3,4,5)-(2,1,3,5,4)\\
+(4,5,3,2,1)-(5,4,3,2,1)-(3,4,5,2,1)+(3,5,4,2,1)\\
-(2,4,5,3,1)+(2,5,4,3,1)+(2,3,4,5,1)-(2,3,5,4,1)\\
-(1,4,5,3,2)+(1,5,4,3,2)+(1,3,4,5,2)-(1,3,5,4,2)\\
+(1,2,4,5,3)-(1,2,5,4,3)-(1,2,3,4,5)+(1,2,3,5,4);
\end{array}$$

et, en opérant de même pour le second, on obtient le tableau qui suit :

$$\begin{array}{l}
-(1,2,3,5,4)+(2,1,3,4,5)+(3,1,2,4,5)-(3,2,1,4,5)\\
+(4,1,2,3,5)-(4,2,1,3,5)-(4,3,1,2,5)+(4,3,2,1,5)\\
+(4,1,2,3,5)-(5,2,1,3,4)-(5,3,1,2,4)+(5,3,2,1,4)\\
-(5,4,1,2,3)+(5,4,2,1,3)+(5,4,3,1,2)-(5,4,3,2,1)\\
+(1,2,3,5,4)-(2,1,3,5,4)-(3,1,2,5,4)+(3,2,1,5,4)\\
-(5,1,2,3,4)+(5,2,1,3,4)+(5,3,1,2,4)-(5,3,2,1,4)\\
-(4,1,2,3,5)+(4,2,1,3,5)+(4,3,1,2,5)-(4,3,2,1,5)\\
+(4,5,1,2,3)-(4,5,2,1,3)-(4,5,3,1,2)+(4,5,3,2,1),
\end{array}$$

Dans chacun de ces deux tableaux on voit que les termes pour lesquels les indices de ψ sont intercalés entre ceux de φ, ou inversement, se détruisent deux à deux, ce qui vérifie le théorème II; puis, lorsque ces réductions sont effectuées, on constate que les deux tableaux restent composés des mêmes termes, ce qui vérifie le théorème III.

§ V. — *Relations entre les fonctions canoniques.*

Nous avons prouvé que toutes les fonctions complexes s'exprimaient linéairement en fonctions canoniques; mais ces dernières ne sont pas toutes distinctes. Nous avons, en effet, déjà vu qu'une fonction canonique quelconque se développait linéairement en fonction de la même espèce. En outre, d'après la définition de l'opération représentée par le symbole (φ, ψ), il résulte que l'on a, entre deux fonctions quelconques, φ et ψ, l'*identité binôme*

$$(\varphi, \psi) + (\psi, \varphi) = 0 \tag{11}$$

et entre trois fonctions quelconques, φ, ψ, θ, l'*identité trinôme*

$$(\varphi, \psi, \theta) + (\theta, \varphi, \psi) + (\psi, \theta, \varphi) = 0. \tag{12}$$

Les relations déduites de la formule (11) peuvent être considérées comme exprimant l'égalité entre les deux développements dont la fonction (φ, ψ) ou $-(\psi, \varphi)$ est susceptible.

Si l'on développe en fonctions canoniques chacun des termes des formules qui précèdent, on obtiendra de nouvelles relations entre des fonctions canoniques toutes les fois que le résultat ne sera pas identique.

Remarquons dès à présent que l'on peut considérer les relations fournies par le développement des fonctions canoniques comme données par l'identité binôme (11), en supposant que φ soit une fonction quelconque et ψ une fonction simple.

Aux relations qui précèdent il faut adjoindre celles qu'on obtiendrait en combinant toutes les fonctions qui entrent dans une même relation avec une ou plusieurs fonctions nouvelles. A chacun des groupes de relations données par les formules (11) et (12) on adjoindra donc les relations nouvelles qui seraient déduites de celles de chaque groupe par l'opération qu'on vient d'indiquer. C'est dans ce sens que nous dirons que toutes les relations sont fournies par les identités (11) et (12). Leur nombre sera assez considérable pour qu'il y ait lieu de se demander si, à partir d'un certain rang, toutes les fonctions obtenues ultérieurement ne sont pas fonctions des précédentes ou simplement déterminées; ou, en d'autres termes, si les diverses fonctions qu'on peut déduire d'un groupe donné de fonctions, par l'opération réitérée dont nous nous occupons, ne forment pas un cycle fermé.

Nous nous proposons de démontrer que cela n'a pas lieu, et, pour cela, nous devons rechercher les liaisons qui rattachent entre elles les relations diverses qu'on peut déduire des identités (11) et (12). C'est ce que nous ferons par les théorèmes qui suivent.

THÉORÈME I. — *Si l'on suppose que certaines des fonctions considérées dans les identités* (11) *et* (12) *ne soient pas canoniques, les relations déduites de ces identités ne sont pas distinctes; elles résultent des relations qu'on obtient quand toutes les fonctions qui y entrent sont canoniques.*

Supposons, en effet, que la fonction φ ne soit pas canonique : elle se développera en fonctions de cette denière espèce, et l'on aura

$$\varphi = \Sigma_k \varphi_k,$$

les diverses fonctions φ_k étant canoniques et prises avec un signe convenable.

L'identité (11) peut alors s'écrire

$$\Sigma_k[(\varphi_k, \psi) + (\psi, \varphi_k)] = 0,$$

et comme, pour toutes les valeurs de k, on a

$$(\varphi_k, \psi) + (\psi, \varphi_k) = 0, \tag{13}$$

le théorème est démontré pour l'identité binôme, si ψ est une fonction canonique. Si le contraire a lieu, on raisonnera comme précédemment sur chacune des identités (13), en remplaçant ψ par son développement.

Si l'on considère l'identité (12), elle devient aussi

$$\Sigma_k[(\varphi_k, \psi, \theta) + (\theta, \varphi_k, \psi) + (\psi, \theta, \varphi_k)] = 0,$$

et les conséquences sont les mêmes que pour la première identité.

Remarque. — Il résulte de ce théorème que, pour déduire des formules (11) et (12) toutes les relations qu'elles peuvent fournir entre des fonctions canoniques, il suffit de supposer que toutes les fonctions qui y sont considérées soient elles-mêmes canoniques.

Mais on sait qu'une fonction canonique peut être égalée à un développement convenable de fonctions de la même espèce, et l'on doit se demander si les relations déduites des identités (11) et (12) restent les mêmes quand une fonction canonique y est remplacée par son développement.

Considérons d'abord la formule (11). Si l'on suppose que la fonction φ y soit remplacée par son développement en fonctions canoniques, d'après le théorème I, § IV, le développement de (φ, ψ) ne sera pas changé. Quant à celui de (ψ, φ), il ne restera pas le même; mais il est facile de voir que, néanmoins, la relation obtenue n'est pas distincte de celle que l'on a quand la fonction φ n'est pas préalablement remplacée par son développement. En effet, chaque terme de ce dernier développement de (φ, ψ) est remplacé par un groupe de termes qui seraient obtenus du terme considéré en y remplaçant φ successivement par les différents termes de son développement. Or l'égalité de ce terme et du développement par lequel il est remplacé fait l'objet d'une relation déjà établie et dont on peut se servir pour la transformation des relations ultérieures.

Quant à la formule (12), comme, dans la suite, nous ne nous proposerons de conserver, parmi les relations qui s'en déduisent, que celles qui ne pourraient être fournies par la formule (11), nous pourrons, dans l'étude des relations que donne la formule (12), employer comme moyen de transformation toutes celles qui dérivent de la première formule.

En remplaçant dans (12) la fonction φ par son développement, celui du terme (φ, ψ, θ) ne sera pas modifié (théorème I, § IV). Comme, d'après ce qui précède, on peut remplacer, dans (θ, φ), la fonction φ par son développement, celui de (θ, φ, ψ), lorsque φ est développée, résultera du développement que l'on a dans le cas contraire, et cela en vertu de relations antérieurement établies. La même chose a lieu pour le terme (ψ, θ, φ).

Donc, en restant dans l'ordre d'idées où nous nous sommes placé, on pourra, dans les formules (11) et (12), remplacer les fonctions canoniques qui y entrent par leurs développements en fonctions canoniques, sans obtenir des relations distinctes des précédentes.

Nous nous proposons de chercher maintenant quelles sont les relations distinctes que peuvent donner les formules (11) et (12).

Théorème II. — *La formule* (12) *ne peut donner qu'une seule relation entre trois fonctions données, quel que soit l'ordre suivant lequel ces fonctions sont introduites dans cette formule.*

Entre ces trois fonctions φ, ψ, θ il ne peut exister que les deux identités suivantes :

$$(\varphi, \psi, \theta) + (\theta, \varphi, \psi) + (\psi, \theta, \varphi) = 0, \tag{14}$$

$$(\psi, \varphi, \theta) + (\theta, \psi, \varphi) + (\varphi, \theta, \psi) = 0, \tag{15}$$

puisqu'il n'y a que six permutations ordinaires entre ces trois fonctions, et que deux identités trinômes deviennent conformes l'une à l'autre aussitôt qu'elles ont un terme commun.

Cela posé, d'après le théorème III, § IV, les développements des termes de la formule (14) seront respectivement identiques à ceux des fonctions suivantes :

$$-(\psi, \varphi, \theta), \quad -(\varphi, \theta, \psi), \quad -(\theta, \psi, \varphi),$$

et les développements des formules (14) et (15) seront identiques.

Théorème III. — *Toute relation déduite de l'identité trinôme, en supposant que l'une des fonctions soit simple et les autres canoniques, est aussi donnée par l'identité binôme* (11) *entre deux fonctions canoniques convenablement choisies.*

Soit l'identité

$$(f, \psi, \varphi) + (\varphi, f, \psi) + (\psi, \varphi, f) = 0. \tag{16}$$

Pour développer le premier terme de cette formule, on aura d'abord

$$(f, \psi) = -(\psi, f),$$

et l'on devra, par suite, développer la fonction $-(\psi, f, \varphi)$.

Mais, d'après la règle posée, le développement de $-(\psi, f, \varphi)$ se compose de deux séries de termes que l'on déduit du développement de $-(\psi, \varphi)$: les premiers, en plaçant la lettre f à la suite des lettres qui composent chaque terme de ce développement, les signes étant conservés; les seconds, en plaçant dans chaque terme du premier développement la lettre f immédiatement après φ et changeant tous les signes.

Le second groupe de termes est le développement de $+[\psi, (\varphi, f)]$. Quant au premier, il est *égal* à $-(\psi, \varphi, f)$, mais *non pas identique* au développement de cette fonction; car, après avoir placé la lettre f à la suite de celles qui composent chacun des termes du développement de (ψ, φ), on devrait, pour obtenir le développement de la fonction $-(\psi, \varphi, f)$, remplacer les termes obtenus, quoique canoniques, par leurs développements en fonctions de la même nature; mais, comme ces égalités entre chaque fonction canonique et son développement constituent des relations déjà fournies par les identités binômes, on pourra s'en servir pour les transformations actuelles, et supposer que le groupe de termes dont l'ensemble est simplement égal à la fonction $-(\psi, \varphi, f)$ soit remplacé par le développement de cette fonction.

Il résulte de là que le développement du premier terme de la formule (16) est égal au développement de $[\psi, (\varphi, f)]$ diminué de celui de (ψ, φ, f).

Substituant dans la formule (16), on conclura que la relation déduite de cette formule est la même que celle que donnerait la relation binôme suivante :

$$[\psi, (\varphi, f)] + [(\varphi, f), \psi] = 0. \tag{17}$$

La démonstration précédente subsiste dans le cas où il entre plusieurs fonctions simples dans l'identité trinôme.

Corollaire. — La formule (12) ne pourra conduire à des relations distinctes que dans le cas où aucune des trois fonctions canoniques ψ, θ, φ n'est simple.

THÉORÈME IV. — *Si φ et ψ sont deux fonctions canoniques quelconques, la relation fournie par l'identité $(\varphi, \psi) + (\psi, \varphi) = 0$ n'est pas changée si l'on détache la dernière fonction simple entrant dans la composition de φ pour la combiner à la fonction ψ ou réciproquement.*

Soit $\varphi = (\varphi_1, f)$. On sait que les deux identités trinômes

$$(\varphi_1, f, \psi) + (\psi, \varphi_1, f) + (f, \psi, \varphi_1) = 0,$$
$$(\psi, f, \varphi_1) + (\varphi_1, \psi, f) + (f, \varphi_1, \psi) = 0$$

donnent respectivement les mêmes relations que les identités binômes

$$[(\varphi_1, f), \psi] + [\psi, (\varphi_1, f)] = 0,$$
$$[(\psi, f), \varphi_1] + [\varphi_1, (\psi, f)] = 0.$$

Or, d'après le théorème II, les deux identités trinômes donnent la même relation; donc il en doit être ainsi des deux identités binômes qui leur correspondent.

On déduit de ce théorème la conséquence importante qui suit :

THÉORÈME V. — *On obtient toutes les relations distinctes que peut donner la formule* (11), *en supposant que l'une des fonctions qui y entrent soit simple, et l'autre une fonction canonique quelconque.*

Car, d'après le théorème qui précède, on peut, sans changer la relation correspondante, détacher une à une les fonctions simples de φ pour les combiner à ψ, et cela jusqu'à ce que φ soit réduite à une fonction simple.

De tout ce qui précède il résulte que l'*on aura toutes les relations qui existent entre les fonctions canoniques :*

1° De l'identité binôme (11), en supposant que l'une des fonctions qui y entrent soit simple, et l'autre canonique, ou, ce qui revient au même, en exprimant l'égalité entre chaque fonction canonique et son développement en fonctions de la même espèce ;

2° De l'identité trinôme (12) si aucune des fonctions canoniques qui y entrent ne se réduit à une fonction simple;

3° Enfin en combinant les termes des diverses relations ainsi obtenues avec une ou plusieurs fonctions simples, les mêmes dans le même ordre pour tous les termes d'un même développement.

Le nombre des relations du troisième groupe peut être réduit au moyen du théorème suivant :

Théorème VI. — *Les relations du troisième groupe, déduites de celles du premier, ne sont pas distinctes : elles résultent d'autres relations de ce premier groupe.*

Considérons, en effet, la relation qu'on obtient en égalant une fonction canonique φ à son développement et combinant les différents termes de cette égalité à une fonction simple f.

On sait (théorème I, § IV) que, si l'on développe tous les termes de la nouvelle relation qu'on vient d'obtenir, on doit arriver à une identité. Or l'égalité entre chaque terme de cette relation et son développement constitue une relation du premier groupe; donc la nouvelle relation n'est pas une relation distincte, mais bien la conséquence d'autres relations du premier groupe.

Remarque. — Dans les applications, les relations de l'espèce considérée ne devront pas être rejetées; car, étant plus simples que celles du même ordre dans le premier groupe, il y a avantage à s'en servir pour écarter un nombre égal de relations de ce groupe.

Théoriquement, on se bornera aux relations des deux premiers groupes et à celles du troisième qui résultent de celles du second.

Mais *ces diverses relations ne sont pas encore toutes distinctes.*

Il en doit être ainsi *a priori*, puisque le premier des trois groupes qui précèdent donnerait à lui seul autant de relations entre les fonctions canoniques d'un ordre quelconque qu'il y a de fonctions de cet ordre.

Aussi, dans la pratique, on développera toutes les relations des trois groupes qui précèdent, et, par des éliminations très-simples, eu égard à la forme des relations, il sera toujours facile de déterminer quelles sont celles qui sont distinctes.

On pourrait même se proposer de déterminer d'une manière générale ces dernières relations; mais cela étendrait outre mesure les dimensions de ce travail, et, d'ailleurs, pour le but que nous nous sommes surtout proposé d'atteindre, à savoir que les fonctions déduites des proposées ne forment pas, en général, un cycle fermé, il suffirait d'établir que, *parmi les fonctions d'un ordre quelconque, il en est toujours un certain nombre qui peuvent être considérées comme n'étant fonction d'aucune autre.*

Si de telles fonctions existent, les relations qui leur correspondent dans le premier groupe doivent se réduire à des identités.

Proposons-nous donc de résoudre le problème suivant :

PROBLÈME. — *Chercher s'il existe des fonctions canoniques dont le développement se réduise à la fonction développée elle-même.*

Remplaçons, pour plus de simplicité, les fonctions simples par leurs indices respectifs, et soit $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots, \lambda, \omega)$ une fonction canonique quelconque où α est nécessairement différent de β.

Si l'on développe cette fonction, tous les termes obtenus commencent par ω; donc l'identité ne peut exister qu'autant que $\omega = \alpha$. Supposons que cela ait lieu, et considérons le seul terme du développement où β soit, comme dans la fonction proposée, au second rang. Ce terme, qui est le suivant, $+(\omega, \beta, \alpha, \gamma, \delta, \ldots, \lambda)$, est le seul qui, sans hypothèse particulière sur β, puisse être identique au proposé. Mais cette identité exige encore que l'on ait

$$\gamma = \alpha, \quad \delta = \gamma, \quad \ldots, \quad \omega = \lambda,$$

et, comme $\omega = \alpha$, on aura

$$\alpha = \gamma = \delta = \ldots = \lambda = \omega.$$

Il est d'ailleurs évident que, si ces conditions sont remplies, tous les autres termes du développement deviennent identiquement nuls.

Les fonctions de la forme $(\alpha, \beta, \alpha, \alpha, \ldots, \alpha)$, où β et α sont quelconques, mais différents, résoudront donc le problème proposé.

Il faut encore se demander si ces fonctions peuvent entrer dans le développement d'une autre fonction. Cette fonction, si elle existe, ne renferme qu'un indice égal à β, tous les autres étant égaux à α; il n'y aura donc que la fonction considérée et la suivante $(\beta, \alpha, \alpha, \ldots, \alpha)$ qui satisfassent à cette condition; donc cette dernière fonction peut seule satisfaire à la dernière question posée. D'ailleurs, en appliquant la règle du développement à cette fonction, on trouve la relation

$$(\beta, \alpha, \alpha, \alpha, \ldots, \alpha) + (\alpha, \beta, \alpha, \alpha, \alpha, \ldots, \alpha) = 0, \tag{18}$$

tous les autres termes étant identiquement nuls.

Enfin il est évident que les fonctions de la forme considérée ne peuvent se rencontrer dans les relations du second groupe.

On devra donc considérer les fonctions de la forme $(f_\alpha, f_\beta, f_\alpha, \ldots, f_\alpha)$ comme n'étant fonction d'aucune autre. Les seules relations, telles que l'équation (18), où elles puissent entrer seront considérées comme donnant la valeur, en fonction des précédentes, des fonctions de la forme $(f_\beta, f_\alpha, \ldots, f_\alpha)$, lesquelles, d'ailleurs, n'entrent dans aucune autre relation.

Si donc m est le nombre des fonctions simples, le nombre des fonctions canoniques d'un ordre quelconque qui ne s'expriment pas en fonction des autres est égal à $m(m-1)$.

On pourra donc énoncer la conclusion suivante : *Le nombre des fonctions distinctes que l'on peut déduire d'un groupe de fonctions données, par des combinaisons successives, est, en général, illimité.*