ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

JEAN-LOUIS LODAY

K-théorie algébrique et représentations de groupes

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 9, nº 3 (1976), p. 309-377

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1976_4_9_3_309_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4ᵉ série, t. 9, 1976, p. 309 à 377.

K-THÉORIE ALGÉBRIQUE ET REPRÉSENTATIONS DE GROUPES

PAR JEAN-LOUIS LODAY

INTRODUCTION

La notion de produit en K-théorie algébrique a été étudiée en détail par Milnor [20] en basses dimensions. En dimensions supérieures, de nombreuses questions font appel à son existence, notamment en topologie différentielle et en théorie des nombres (*cf.* [32], p. 294; [12], p. 312; [20], p. 67). Cependant, faute d'une formulation satisfaisante de ce produit, on n'a pu jusqu'à présent en utiliser des propriétés spécifiques.

Dans ce travail, nous précisons une telle formulation dans le cadre de la K-théorie de Quillen. Le produit ainsi défini généralise les notions déjà connues en basses dimensions. Il permet de construire un inverse à gauche de l'opérateur de projection (généralisé) de Bass :

$$K_n(A[t, t^{-1}]) \to K_{n-1}(A),$$

propriété conjecturée par Gersten dans [7], p. 219. De plus, nous l'interprétons simplement en termes d'homologie des groupes dans deux cas particuliers.

Le point de vue adopté ici s'adapte, *mutatis mutandis*, en K-théorie hermitienne. En particulier, l'analogue de la conjecture de Gersten citée plus haut permet à Karoubi d'achever la démonstration des théorèmes de périodicité en K-théorie hermitienne.

Nous exploitons cette notion de produit et les techniques qui y conduisent essentiellement dans deux directions :

– *l'étude du groupe de Whitehead supérieur* $Wh_2(G)$. Ce groupe, qui intervient dans les problèmes de pseudo-isotopie, n'a été calculé que dans un nombre restreint de cas. Nous le comparons ici au deuxième groupe d'homotopie stable de l'espace classifiant du groupe discret G et au groupe $K_2(\mathbf{Z}[G])$. Grâce à un théorème de Waldhausen ([31], p. 1), nous en déduisons qu'il est nul pour une large classe de groupes G, en particulier dans le cadre d'une conjecture de Laudenbach ([16], p. 5);

– *la dualité et les représentations de groupes discrets.* Considérés comme des foncteurs en G les groupes $K_n(A[G])$ définissent ce qu'on pourrait appeler une théorie d'homologie généralisée des groupes. Sachant l'intérêt d'une théorie de cohomologie en dualité avec la théorie d'homologie, cette remarque motive la recherche d'une théorie de cohomologie des groupes en K-théorie. Nous montrons que les représentations linéaires permettent la construction de tels groupes (K-théorie équivariante) et nous précisons leurs rapports avec la K-théorie des algèbres de groupes A [G]. Une étude analogue en K-théorie hermitienne s'obtient en substituant les représentations quadratiques aux représentations linéaires. Nous précisons les liens qui existent entre les groupes de chirurgie de Wall de G, l'anneau des représentations quadratiques de G et d'autres invariants de G comme l'homologie et la cohomologie rationnelles. Nous appliquons ces résultats à une minoration du rang des groupes de chirurgie dans certains cas particuliers. Enfin, nous faisons le lien entre ces travaux et la conjecture sur l'invariance homotopique des hautes signatures de Novikov [24]. En particulier, nous donnons un énoncé précis à la « formule de Hirzebruch dans le cas non simplement connexe » en toutes dimensions et montrons comment cette formule ouvre la voie à une démonstration de la conjecture de Novikov.

Ce travail est divisé en cinq chapitres et un appendice dont nous allons maintenant détailler le contenu.

Le chapitre I contient essentiellement la construction de l'espace BGL $(A)^+$ et la démonstration de ses propriétés. Ces résultats ne sont pas nouveaux, mais à notre connaissance il n'en existe pas encore de rédaction complète dans la littérature; c'est pourquoi nous avons jugé bon de leur consacrer un chapitre. De plus nous établissons un théorème (1.3.7) qui permet de décrire l'application

$$\delta_* : \quad [S^1 \wedge X, BG_3^+] \to [X, BG_1^+]$$

lorsqu'on a une fibration homotopique

$$BG_1^+ \to BG_2^+ \to BG_3^+$$

associée à certaines suites exactes de groupes

$$1 \to G_1 \to G_2 \to G_3 \to 1$$

et à certains espaces X.

L'objet du chapitre II est l'étude du produit en K-théorie algébrique. Pour tout couple d'anneaux A et A′ nous construisons une application continue

$$\hat{\gamma} : \quad BGL(A)^+ \wedge BGL(A')^+ \to BGL(A \otimes A')^+$$

jouissant de bonnes propriétés formelles. C'est cette application qui nous permet de définir le produit

$$K_n(A) \times K_p(A') \to K_{n+p}(A \otimes A').$$

Nous montrons que si $n = 1$, $p = 1$, ce produit coïncide au signe près avec celui défini par Milnor [20]. Puis, pour $n = 1$, $p = 2$, nous explicitons ce produit en termes d'homologie des groupes par une application bilinéaire

$$H_1(GL(A); \mathbf{Z}) \times H_2(E(A); \mathbf{Z}) \to H_3(St(A); \mathbf{Z}).$$

A l'aide de l'application γ, nous construisons pour tout anneau A un spectre $\mathbf{K}_A$ dont les groupes d'homotopie sont les groupes de K-théorie K_n (A). Il résulte du théorème 1.3.7 que ce spectre est un Ω-spectre. En conséquence, si SA désigne la suspension de l'anneau A, le produit induit un isomorphisme de $K_n(A) = K_n(A) \otimes K_1(S\,\mathbf{Z})$ dans $K_{n+1}(SA)$. Nous terminons ce chapitre avec la définition des théories d'homologie et de cohomologie généralisées $h_*(-\,;\,\mathbf{K}_A)$ et $h^*(-\,;\,\mathbf{K}_A)$ associées au spectre $\mathbf{K}_A$.

Le chapitre III est la transposition des résultats précédents en K-théorie hermitienne $\overline{W}_*(-)$. Dans le cas linéaire, les théories associées au spectre $\mathbf{K}_A$ sont peu connues; en revanche dans le cas hermitien, les théories associées au spectre $\overline{\mathbf{W}}_{\mathbf{Z}[1/2]}$ sont la KO-théorie homologique et la KO-théorie cohomologique (à la 2-torsion près). Nous en déduisons un homomorphisme

$$l(G): \quad KO_*(BG) \otimes \mathbf{Z}[1/2] \to L^s_*(G) \otimes \mathbf{Z}[1/2]$$

pour tout groupe discret G; malheureusement, nous ne savons pas si $l(G)$ coïncide avec un homomorphisme analogue défini par Wall ([33], p. 263).

Le chapitre IV est essentiellement consacré à l'étude du groupe de Whitehead supérieur $Wh_2(G)$. Nous définissons tout d'abord un homomorphisme naturel

$$\lambda^A_n(G): \quad h_n(BG;\, \mathbf{K}_A) \to K_n(A[G]).$$

Il est facile de vérifier que $Wh_0(G) = \operatorname{Coker} \lambda^{\mathbf{Z}}_0(G)$ et que $Wh_1(G) = \operatorname{Coker} \lambda^{\mathbf{Z}}_1(G)$. Nous montrons que $Wh_2(G) = \operatorname{Coker} \lambda^{\mathbf{Z}}_2(G)$ avec la définition de $Wh_2(G)$ due à Hatcher et Wagoner [8]. En fait, ce résultat s'interprète à l'aide de l'homotopie stable de BG; plus précisément, la suite

$$\pi^s_2(BG) \to \tilde{K}_2(\mathbf{Z}[G]) \to Wh_2(G) \to 0$$

est exacte. D'un résultat de Waldhausen [31] affirmant que pour certains groupes G l'application $\lambda^{\mathbf{Z}}_2(G)$ est un isomorphisme, nous déduisons la trivialité de leurs groupes de Whitehead $Wh_2(G)$.

Dans le chapitre V, nous introduisons le groupe de Grothendieck $K^0_G(A)$ de la catégorie des A-modules projectifs de type fini munis d'une G-action (ou « K-théorie algébrique équivariante »). Nous construisons un « produit de Kronecker » :

$$\varphi: \quad K^0_G(A) \times K_0(A'[G]) \to K_0(A \otimes A')$$

ainsi qu'un homomorphisme naturel

$$\theta: \quad K^0_G(A) \to h^0(BG;\, \mathbf{K}_A)$$

tels que

$$(\bigstar) \qquad \langle \theta(\rho), x \rangle = \varphi(\rho, \lambda(x)),$$

où $x \in h_0(BG;\, \mathbf{K}_A)$ et où $\rho \in K^0_G(A)$. La formule d'adjonction ($\bigstar$) est encore valable en dimensions supérieures et en K-théorie hermitienne. Nous l'utilisons pour comparer l'homologie rationnelle de G et les groupes de chirurgie $L^s_n(G) \otimes \mathbf{Q}$. Le dernier paragraphe est consacré à la formule des hautes signatures et à la conjecture de Novikov.

Certains résultats des chapitres I et II ont été annoncés dans une note aux *Comptes rendus* [17]. Les résultats du chapitre IV ont été résumés dans [38].

Notations et conventions. — Nous désignons par *anneau* tout anneau unitaire et par *pseudo-anneau* tout anneau sans élément unité. Les morphismes d'anneaux respectent l'élément unité. Si M et M' sont deux A-modules, on note $M \underset{A}{\otimes} M'$ leur produit tensoriel; si $A = \mathbf{Z}$, on note simplement $M \otimes M'$. Le groupe de Grothendieck de la catégorie des A-modules projectifs de type fini est noté $K_0(A)$. Les notations de K-théorie hermitienne diffèrent d'un auteur à l'autre, pour notre part, nous avons adopté ici celles de Karoubi [12] en indiquant les correspondances avec les groupes de chirurgie.

Nous travaillerons en général dans la catégorie des CW-complexes pointés et applications continues pointées. Une homotopie entre deux applications continues qui ne respecte pas le point-base est appelée homotopie libre. On note $[X, Y]$ les classes d'homotopie d'applications continues pointées de X dans Y. En général, le point-base de X (resp. Y, ...) est noté x_0 (resp. y_0, ...). Le bouquet (« wedge ») de X et Y est l'espace $X \vee Y = X \cup Y/x_0 = y_0$ ($\cup$ est le réunion disjointe). Le produit réduit (« smash ») est l'espace

$$X \wedge Y = X \times Y/X \vee Y.$$

Remarquons qu'on a une surjection canonique $X \times Y \rightarrow X \wedge Y$.

Pour tout groupe discret G, BG désigne l'espace classifiant de G. C'est un espace d'Eilenberg-MacLane de type K (G, 1), bien défini à homotopie près. On choisira pour $B\mathbf{Z}$ le cercle S^1.

Le signe □ indique la fin ou l'absence d'une démonstration.

Qu'il me soit permis de remercier ici M. Karoubi dont la compétence et le dévouement ont permis la réalisation de ce travail. Je remercie aussi P. Cartier et M. Kervaire pour les stimulantes conversations que j'ai pu avoir avec eux.

Par 48° 35′ N et 7° 48′ E, le 6 février 1976.

TABLE DES MATIÈRES

Pages

Introduction 309

Chapitre I : *La K-théorie de Quillen* 313
- 1.1. La construction « + » 313
- 1.2. L'espace $BGL(A)^+$. Les foncteurs K_n 319
- 1.3. Groupes à somme directe et fibrations 323
- 1.4. Applications : calcul de $K_3(A)$, délaçage de $BGL(A)^+$ 326

Chapitre II : *Structure multiplicative en K-théorie algébrique* 331
- 2.1. Le produit $K_n(A) \times K_p(A') - K_{n+p}(A \otimes A')$ 331
- 2.2. Les produits $K_1 \times K_1 \rightarrow K_2$ et $K_1 \times K_2 \rightarrow K_3$ 336
- 2.3. Le spectre $\mathbf{K}_A$ et l'isomorphisme $K_n(A) \overset{\approx}{\rightarrow} K_{n+1}(SA)$ 341
- 2.4. Propriétés multiplicatives du spectre $\mathbf{K}_A$ 345

Chapitre III : *Structure multiplicative en K-théorie hermitienne* 347
- 3.1. La ${}_\varepsilon L$-théorie et le spectre ${}_\varepsilon \mathbf{L}_A$ 347
- 3.2. La ${}_\varepsilon W$-théorie, la KO-théorie et les groupes de chirurgie 351
- 3.3. K-théorie hermitienne des algèbres de groupes 353

Pages

CHAPITRE IV : *K-théorie algébrique des algèbres de groupes* 355
4.1. L'homomorphisme $\lambda_n^{\wedge}$ (G) 355
4.2. Les groupes de Whitehead Wh_n (G), $n = 0,1$ et 2 357
4.3. Comparaison de $H_2(\Gamma; \mathbf{Z})$ et de K_2 (A) pour $\Gamma \subset A^*$ 359
4.4. Applications et compléments 364

CHAPITRE V : *Représentations linéaires et quadratiques des groupes discrets* 365
5.1. Représentations linéaires des groupes discrets 365
5.2. Représentations quadratiques des groupes discrets 369
5.3. Application au calcul du rang de $L_n^{\times}$ (G) 370
5.4. La conjecture des hautes signatures de Novikov 372

Appendice 373

Bibliographie 376

CHAPITRE I

La K-théorie de Quillen

Le but essentiel de ce chapitre est de construire l'espace BGL $(A)^+$, dont les groupes d'homotopie sont les groupes de K-théorie algébrique K_n (A) et de montrer ses principales propriétés.

Les démonstrations ne font appel qu'à des résultats classiques de topologie algébrique.

Les résultats présentés ici sont dus à Quillen [25] (pour les paragraphes 1.1 et 1.2) et Wagoner [30] (pour les paragraphes 1.3 et 1.4) ainsi qu'à Gersten et Kervaire. A ma connaissance, le théorème 1.3.7 est nouveau.

1.1. LA CONSTRUCTION « + ».

THÉORÈME 1.1.1. — *Soient* X *un complexe cellulaire connexe pointé et* N *un sous-groupe distingué parfait* ($N = [N, N]$) *de* $\pi = \pi_1(X, x_0)$. *Il existe un espace* X^+ *et une application continue pointée*

$$i : X \subsetneq X^+$$

tels que

(1) $\pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X^+, x_0)$ *s'identifie à la projection* $\pi \to \pi/N$;

(2) *pour tout système de coefficients locaux* $\mathscr{L}$ *sur* X^+, *l'application* i *induit un isomorphisme*

$$H_*(X; i^*\mathscr{L}) \xrightarrow{\sim} H_*(X^+; \mathscr{L}).$$

Démonstration. — Soit A un sous-ensemble de N dont l'enveloppe normale (i. e. le plus petit sous-groupe distingué contenant A) dans π soit N. Pout tout $\alpha \in A$, on choisit une application continue $a_\alpha : S^1 \to X$ dont la classe d'homotopie dans $\pi_1(X)$ soit α. Ces applications permettent d' « attacher » à X des 2-cellules e_α^2. On note

$$X_1 = X \cup \bigcup_{\alpha \in A} e_\alpha^2.$$

D'après le théorème de van Kampen $\pi_1(X_1) = \pi_1(X)/N = \pi/N$ et l'inclusion $i_1 : X \hookrightarrow X_1$ induit sur le groupe fondamental la surjection $\pi \to \pi/N$. On note $\tilde{X}_1$ le revêtement universel de X_1. Dans le diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} \hat{X} \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d] & \tilde{X}_1 \arrow[d] \\ X \arrow[r, hook, "i_1"] & X_1 \end{tikzcd}$$

l'espace $\hat{X}$ est la partie de $\tilde{X}_1$ qui est « au-dessus » de X. Remarquons que les deux flèches verticales ont la même fibre : $\pi_1(X_1) = \pi/N$. La suite exacte d'homotopie de la fibration de gauche

$$0 \to \pi_1(\hat{X}) \to \pi_1(X) \to \pi/N \to 0$$

nous montre que $\pi_1(\hat{X}) = N$.

Considérons la suite exacte d'homologie à coefficients entiers et la suite exacte d'homotopie de la paire $(\tilde{X}_1, \hat{X})$:

$$\begin{tikzcd} \pi_2(X_1) = \pi_2(\tilde{X}_1) \arrow[r] \arrow[d, "\rho"'] & \pi_2(\tilde{X}_1, \hat{X}) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1(\hat{X}) = N \arrow[d] \\ H_2(\tilde{X}_1) \arrow[r, "j"] & H_2(\tilde{X}_1, \hat{X}) \arrow[r] & H_1(\hat{X}) = 0 \end{tikzcd}$$

On vient de montrer que $\pi_1(\hat{X}) = N$. On sait que $H_1(\hat{X}) = N/[N, N]$; le groupe N est parfait par hypothèse, on a donc $H_1(\hat{X}) = 0$. Il s'en suit que l'homomorphisme j est surjectif. L'homomorphisme de Hurewicz ρ est un isomorphisme car l'espace $\tilde{X}_1$ est simplement connexe. Le groupe abélien $H_2(X_1, X)$ est un groupe abélien libre ayant un élément de base par 2-cellule ajoutée à X pour construire X_1. Le groupe $H_2(\tilde{X}_1, \hat{X})$ est donc un $\mathbf{Z}[\pi/N]$-module libre de base $\{e_\alpha^2\}_{\alpha \in A}$. L'homomorphisme j est surjectif et ρ est un isomorphisme. On peut donc trouver des applications continues $b_\alpha : S^2 \to X_1$, $\alpha \in A$, telles que $j \circ \rho[b_\alpha] = \{e_\alpha^2\}$. Ces applications continues nous permettent d'attacher à X_1 des 3-cellules. On obtient ainsi l'espace

$$X^+ = X_1 \cup \bigcup_{\alpha \in A} e_\alpha^3.$$

Il est clair que l'inclusion $i : X \hookrightarrow X^+$ induit sur le groupe fondamental la projection $\pi \to \pi/N$. On note $\tilde{X}^+$ le revêtement universel de X^+; la partie de $\tilde{X}^+$ au-dessus de X_1 s'identifie au revêtement universel $\tilde{X}_1$ et on a le carré cartésien

$$\begin{tikzcd} \hat{X} \arrow[r, hook] \arrow[d] & \tilde{X}^+ \arrow[d] \\ X \arrow[r] & X^+ \end{tikzcd}$$

Le complexe de chaînes cellulaires de la paire $(\tilde{X}^+, \hat{X})$ est

$$\ldots \to 0 \to C_3(\tilde{X}^+, \tilde{X}_1) \xrightarrow{d} C_2(\tilde{X}_1, \hat{X}) \to 0 \to \ldots$$

En effet

$$C_3(\tilde{X}^+, \tilde{X}_1) = C_3(\tilde{X}^+, \hat{X})$$

car $\tilde{X}_1$ et $\hat{X}$ ont les mêmes 3-cellules;

$$C_2(\tilde{X}_1, \hat{X}) = C_2(\tilde{X}^+, \hat{X})$$

car $\tilde{X}_1$ et $\tilde{X}^+$ ont les mêmes 2-cellules. Les complexes cellulaires de $\tilde{X}^+$ et $\tilde{X}_1$ (resp. $\tilde{X}_1$ et $\hat{X}$) ne diffèrent qu'au niveau des 3-(resp. 2-) cellules, donc

$$C_3(\tilde{X}^+, \tilde{X}_1) = H_3(\tilde{X}^+, \tilde{X}_1) \quad [\text{resp. } C_2(\tilde{X}_1, \hat{X}) = H_2(\tilde{X}_1, \hat{X})].$$

L'opérateur d est le composé

$$H_3(\tilde{X}^+, \tilde{X}_1) \xrightarrow{\partial} H_2(\tilde{X}_1) \xrightarrow{j} H_2(\tilde{X}_1, \hat{X}).$$

On a la formule

$$d(e^3_\alpha) = j \circ \partial(e^3_\alpha) = j \circ \rho(b_\alpha) = e^2_\alpha.$$

L'homomorphisme d établit une bijection entre les bases des $\mathbf{Z}[\pi/N]$-modules $C_3(\tilde{X}^+, \tilde{X}_1)$ et $C_2(\tilde{X}_1, \hat{X})$; c'est donc un isomorphisme de $\mathbf{Z}[\pi/N]$-modules.

Soit L un $\mathbf{Z}[\pi/N]$-module. L'homologie de la paire (X^+, X) à coefficients dans le $\mathbf{Z}[\pi/N]$-module L est l'homologie du complexe $C_*(\tilde{X}^+, \hat{X}) \underset{\mathbf{Z}[\pi/N]}{\otimes} L$. On voit donc que $H_*(X^+, X; \mathscr{L}) = 0$, où $\mathscr{L}$ est le système de coefficients locaux défini par le $\mathbf{Z}[\pi/N]$-module L. La longue suite exacte d'homologie à coefficients locaux de la paire (X^+, X) nous permet alors d'affirmer que l'application $H_*(X; i^*\mathscr{L}) \to H_*(X^+; \mathscr{L})$ est un isomorphisme. □

PROPOSITION 1.1.2. — *Avec les hypothèses du théorème* 1.1.1, *le couple* (X^+, i) *est universel à homotopie près parmi les couples* (Y, f) *où* Y *est un espace connexe et* $f: X \to Y$ *une application continue vérifiant* $\pi_1(f)(N) = 0$.

Plus précisément, pour une telle application continue f il existe une application continue unique à homotopie près $f^+: X^+ \to Y$ qui rende le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "f"'] & & X^+ \arrow[dl, "f^+"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

commutatif à homotopie près.

Démonstration. — Il est aisé de définir f^+ sur le 1-squelette de X^+. Pour étendre cette application aux squelettes de dimensions supérieures, les obstructions sont dans les groupes $H^{n+1}(X^+, X; \pi_n(Y))$, $n = 2, 3, \ldots$, où la structure de $\mathbf{Z}[\pi/N]$-module de $\pi_n(Y)$ est induite par f *cf.* [28]. [Notons que c'est ici que l'on utilise l'hypothèse $\pi_1(f)(N) = 0$.] Comme le complexe de $\mathbf{Z}[\pi/N]$-modules $C_*(\tilde{X}^+, \hat{X})$ est acyclique, ces groupes de cohomologie sont nuls. On en déduit l'existence de l'application continue f^+ cherchée.

Si f_1^+ et f_2^+ sont deux telles applications, elles coïncident à homotopie près sur le 1-squelette de X et les obstructions à l'existence d'une homotopie entre elles sont dans les groupes $H^n(X^+, X; \pi_n(Y))$, $n = 2, 3, \ldots$, qui sont nuls. □

COROLLAIRE 1.1.3. — *La construction « + » est fonctorielle à homotopie près.* □

Plus précisément, soient X′ un complexe cellulaire, N′ un sous-groupe distingué parfait de $\pi_1(X')$ et $f : X \to X'$ une application continue qui envoie N dans N′. Dans ces conditions, il existe une application continue (unique à homotopie près) $f^+ : X^+ \to X'^+$ qui rende commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X' \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i'} \\ X^+ & \xrightarrow{f^+} & X'^+ \end{array}$$

Remarque. — Ce corollaire implique que le type d'homotopie de l'espace X^+ est indépendant du choix du point-base de X (car X est connexe par arcs). De même la proposition 1.1.2 est encore valable sans l'hypothèse f pointée.

PROPOSITION 1.1.4. — *Soient* X (*resp.* Y) *un complexe cellulaire connexe et* N (*resp.* N′) *un sous-groupe distingué parfait du groupe* $\pi_1(X)$ [*resp.* $\pi_1(Y)$]. *La construction « + » possède alors les propriétés suivantes :*

(i) *l'application* $(X \times Y)^+ \to X^+ \times Y^+$ *est une équivalence d'homotopie;*

(ii) *soit* $f : X \to Y$ *une application continue telle que* $\pi_1(f)(N) = N'$. *Si* $\pi_1(X)$ *est parfait et égal à* N, *alors la somme amalgamée* $Z = X^+ \cup_X Y$ *est homotopiquement équivalente à* Y^+;

(iii) *si* $\hat{X}$ *est le revêtement de* X *associé au sous-groupe* N, *alors* $\hat{X}^+$ *est, à homotopie près, le revêtement universel de* X^+.

Démonstration :

(i) les projections $X \times Y \twoheadrightarrow X$ et $X \times Y \twoheadrightarrow Y$ induisent des applications $(X \times Y)^+ \to X^+$ et $(X \times Y)^+ \to Y^+$ dont le produit donne $(X \times Y)^+ \to X^+ \times Y^+$. Cette application est une équivalence d'homotopie, car ces deux espaces sont solutions du même problème universel;

(ii) les applications $Y \to Y^+$ et $X^+ \to Y^+$ nous permettent de construire une application $h : Z \to Y^+$. D'autre part, le théorème de van Kampen nous dit que $\pi_1(Z) = \pi_1(Y)/N'$ car X^+ est simplement connexe et $\pi_1(f)(N) = N'$. L'application $Y \to Z$ se factorise donc à travers Y^+ à homotopie près. L'application $h' : Y^+ \to Z$ qu'on en déduit est l'inverse de h à homotopie près, car Y^+ et Z sont tous deux solutions d'un même problème universel;

(iii) cette assertion est un cas particulier de la précédente. □

Exemples :

(*a*) *Les sphères d'homologie.* — Soit M une sphère d'homologie de dimension $n \geqq 2$ [i. e. $H_k(M; Z) = 0$ si $k \neq 0, n$ et $H_k(M; Z) = Z$ si $k = 0, n$]. Le groupe $\pi = \pi_1(M)$

est parfait car $\pi/[\pi, \pi] = H_1(M; Z) = 0$. La construction de Quillen avec $N = [\pi, \pi]$ permet de construire M^+ et on a la :

PROPOSITION 1.1.5. — *L'espace* M^+ *a le type d'homotopie de la sphère* S^n.

Démonstration. — L'espace M^+ est simplement connexe car $\pi_1(M^+) = \pi/[\pi, \pi] = 0$. Or $H_k(M^+; Z) \approx H_k(M; Z) = 0$ pour $0 < k < n$ et $H_n(M^+; Z) \approx H_n(M; Z) = Z$. D'après le théorème d'Hurewicz, on a donc $\pi_k(M^+) = 0$ pour $0 < k < n$ et $\pi_n(M^+) = Z$. Soit $f : S^n \to M^+$ une application continue dont la classe d'homotopie engendre $\pi_n(M^+)$. Il est clair que f induit un isomorphisme en homologie. Les deux espaces S^n et M^+ étant simplement connexes, l'application continue f est une équivalence d'homotopie d'après le théorème classique de J. H. C. Whitehead. □

(*b*) *Les espaces classifiants* $BG = K(G, 1)$ *où* G *est un groupe discret.*

1.1.6. Soit G un groupe (discret) tel que $N = [G, G]$ soit parfait (on dira que G est « *quasi parfait* »). On peut alors appliquer la construction de Quillen à l'espace classifiant BG du groupe G, relativement à N. On note BG^+ l'espace ainsi construit.

PROPOSITION 1.1.7. — *L'espace* $B[G, G]^+$ *est le revêtement universel de* BG^+ (*à homotopie près*).

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate de 1.1.4 (iii). □

DÉFINITION DE LA CONJUGAISON 1.1.8. — *Deux homomorphismes de groupes* $f, f' : G_1 \to G_2$ *sont dits conjugués s'il existe un élément* $h \in G_2$ *tel que pour tout* $g \in G_1$,

$$f'(g) = hf(g)h^{-1}.$$

On notera $f' = f^h$.

PROPOSITION 1.1.9. — *Soit* G *un groupe « quasi parfait » et* Γ *un groupe quelconque. Soient* f *et* f' *deux homomorphismes de* Γ *dans* G *conjugués par un élément* $h \in [G, G]$. *Alors les applications continues* f^+ *et* f'^+ *de* $B\Gamma$ *dans* BG^+ *sont homotopes.*

Démonstration. — Les applications continues Bf et Bf' de $B\Gamma$ dans BG sont homotopes librement (*cf.* appendice, lemme A.3). Il en est donc de même de f^+ et f'^+. L'image du point-base de $B\Gamma$ dans BG^+ par cette homotopie est le lacet défini par $h \in G$. Or ce lacet de BG^+ est homotopiquement trivial puisque $h \in [G, G]$. Donc l'homotopie libre entre f^+ et f'^+ peut être transformée en une homotopie (pointée). □

NOTATION. — Si Γ est un groupe quasi parfait, les applications f^+ et f'^+ se factorisent à travers $B\Gamma^+$ en des applications homotopes, qu'on note encore f^+ et f'^+ lorsqu'il n'y a pas de confusion possible.

Exemples de quelques groupes quasi parfaits.

1.1.10. *Le groupe linéaire.* — Soit $GL_n(A)$ le groupe des $n \times n$-matrices inversibles à coefficients dans l'anneau A.

On note $E_n(A)$ le sous-groupe de $GL_n(A)$ engendré par les matrices élémentaires e_{ij}^{λ}, $1 \leqq i \neq j \leqq n$, $\lambda \in A$, soit

$$(e_{ij}^{\lambda})_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l, \\ \lambda & \text{si } i = k \text{ et } j = l, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \qquad e_{ij}^{\lambda} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} & & j & & \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 1 & & \vdots & & \\ & 1 & \lambda & \cdots & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ i. \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Le groupe $E_n(A)$ est parfait dès que $n \geqq 3$ car $e_{ij}^{\lambda} = [e_{ik}^{\lambda}, e_{kj}^{1}]$. Soit $GL(A)$ le groupe $\varinjlim GL_n(A)$ où l'application $GL_n(A) \to GL_{n+1}(A)$ est l'inclusion

$$M \mapsto \left[\begin{array}{c|c} M & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0 \ \dots \ 0 & 1 \end{array}\right].$$

Le sous-groupe des commutateurs de $GL(A)$ est $E(A) = \varinjlim E_n(A)$, qui est parfait; donc $GL(A)$ est quasi parfait. On peut ainsi appliquer la construction «+» de Quillen à l'espace $BGL_n(A)$, $n \geqq 3$ [resp. $BGL(A)$] par rapport à la clôture normale de $E_n(A)$ [resp. $E(A)$] pour obtenir l'espace $BGL_n(A)^+$ [resp. $BGL(A)^+$]. Il est clair que $\varinjlim BGL_n(A)^+ = BGL(A)^+$.

1.1.11. *Le groupe de permutations.* — Posons $\Sigma_\infty = \varinjlim_n \Sigma_n$ où Σ_n est le groupe des permutations de n éléments. Son sous-groupe des commutateurs est le groupe alterné infini $A_\infty = \varinjlim_n A_n$. Le groupe A_∞ est parfait, on peut donc définir l'espace de Quillen $B\Sigma_\infty^+$. L'espace $\mathbf{Z} \times B\Sigma_\infty^+$ a même type d'homotopie que l'espace $\Omega^\infty S^\infty = \varinjlim_n \Omega^n S^n$ (*cf.* [1]).

1.1.12. *Le groupe de Steinberg.* — Soit A un anneau (avec élément unité). Notons $St(A)$ le groupe de Steinberg de A [20]. Rappelons qu'il est défini par les générateurs x_{ij}^{λ}, $1 \leqq i \neq j \geqq 1$, $\lambda \in A$ et les relations

$$[x_{ij}^{\lambda}, x_{kl}^{\mu}] = \begin{cases} 1 & \text{si } j \neq k, \quad i \neq l, \\ x_{il}^{\lambda\mu} & \text{si } j = k, \quad i \neq l, \end{cases}$$

$$x_{ij}^{\lambda} . x_{ij}^{\mu} = x_{ij}^{\lambda+\mu}.$$

Comme dans [20], on notera $w_{ij}(\lambda) = x_{ij}^{\lambda} x_{ji}^{-\lambda^{-1}} x_{ij}^{\lambda}$ et $h_{ij}(\lambda) = w_{ij}(\lambda) w_{ij}(-1)$ pour $\lambda \in A^*$. Le groupe $St(A)$ est parfait, et on peut donc construire l'espace $B\,St(A)^+$.

1.1.13. *Le groupe orthogonal.* — Soit A un anneau muni d'une anti-involution $a \to \bar{a}$ (antiautomorphisme de carré égal à l'identité). On note ${}_{\varepsilon}O_{n,n}(A)$ le groupe des automorphismes de $A^n \oplus A^n$ qui laissent invariante la forme ε-quadratique $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$, où ε appartient au centre de A et vérifie $\varepsilon\bar{\varepsilon} = 1$ (exemples $\varepsilon = +1$ ou -1). L'inclusion naturelle ${}_{\varepsilon}O_{n,n}(A) \subsetneq {}_{\varepsilon}O_{n+1,n+1}(A)$ nous permet de définir

$${}_{\varepsilon}O(A) = \varinjlim {}_{\varepsilon}O_{n,n}(A).$$

Wall et Wasserstein ont montré (*cf.* [34]) que ${}_{\varepsilon}O(A)$ est quasi parfait d'où l'espace $B_{\varepsilon}O(A)^+$.

Lorsque $A = \mathbf{Z}[G]$, les groupes $\pi_n(B_{\varepsilon}O(A)^+) = {}_{\varepsilon}L_n(\mathbf{Z}[G])$ sont en relation étroite avec les groupes de Wall (groupes de chirurgie) $L_n^s(G)$, $L_n^h(G)$, etc. On précisera ces liens au paragraphe 3.2.

1.2. L'ESPACE $BGL(A)^+$. LES FONCTEURS K_n. — D'après le théorème 1.1.1, l'espace $BGL(A)^+$ est connexe et a pour groupe fondamental $GL(A)/E(A)$. Ce groupe abélien a été noté $K_1(A)$ par Bass [2]. D'autre part, Milnor [20] a étudié un groupe $K_2(A)$ dont l'une des définitions est $H_2(E(A); \mathbf{Z})$.

PROPOSITION 1.2.1. — *Le groupe* $\pi_2(BGL(A)^+)$ *est isomorphe au groupe* $K_2(A)$ *de Milnor.*

Démonstration. — Cette proposition résulte des égalités

$$\begin{array}{lll}
\pi_2(BGL(A)^+) & = \pi_2(BE(A)^+) & \text{(conséquence de 1.1.7),} \\
\pi_2(BE(A)^+) & = H_2(BE(A)^+; \mathbf{Z}) & [\text{car } BE(A)^+ \text{ est simplement connexe}], \\
H_2(BE(A)^+; \mathbf{Z}) & = H_2(BE(A); \mathbf{Z}) & \text{(th. 1.1.1),} \\
H_2(BE(A); \mathbf{Z}) & = H_2(E(A); \mathbf{Z}) & \\
H_2(E(A); \mathbf{Z}) & = K_2(A) & \text{(Milnor).} \quad \square
\end{array}$$

Les identifications $\pi_1(BGL(A)^+) = K_1(A)$ et $\pi_2(BGL(A)^+) = K_2(A)$ ont amené Quillen [25] à poser :

DÉFINITION 1.2.2 (Quillen). — $K_n(A) = \pi_n(BGL(A)^+)$, $n \geqq 1$.

Il est facile de voir qu'on a ainsi défini des foncteurs covariants K_n ($n \geqq 1$) de la catégorie $\mathscr{A}nn$ des anneaux dans la catégorie $\mathscr{A}b$ des groupes abéliens.

PROPOSITION 1.2.3. — *Soient* A *et* B *deux anneaux, on a alors :*

$$K_n(A \times B) = K_n(A) \times K_n(B), \qquad n \geqq 1.$$

Démonstration. — Puisque $GL(A \times B) = GL(A) \times GL(B)$, il suffit d'appliquer la proposition 1.1.4 (i). $\square$

1.2.4. On peut étendre la définition de ces foncteurs à la catégorie des anneaux avec ou sans élément unité (pseudo-anneaux) de la manière suivante :

Pour tout pseudo-anneau A, on munit le groupe abélien $A \times \mathbf{Z}$ de la structure produit

$$(a, n)(a', n') = (aa' + na' + n' a, nn').$$

$A \times \mathbf{Z}$ est alors un anneau unitaire $\bar{A}$, d'augmentation $\varepsilon : (a, n) \to n$.

Tout foncteur $F : \mathscr{A}nn \to \mathscr{A}b$ (ou $\mathscr{G}r$) respectant le produit, s'étend à la catégorie des pseudo-anneaux. Il suffit de poser

$$F(A) = \operatorname{Ker}(F(\bar{A}) \to F(\mathbf{Z})).$$

Si le pseudo-anneau A possède un élément unité, l'homomorphisme $(a, n) \mapsto (a+n.1, n)$ est un isomorphisme d'anneaux de $\bar{A}$ sur l'anneau produit $A \times \mathbf{Z}$. Puisque le foncteur F respecte le produit, les deux définitions de F (A) coïncident.

Le reste de cette section est consacré à la structure de H-espace de $BGL(A)^+$.

Soient $\alpha \in GL(A)$ et $\beta \in GL(A)$. On définit $\alpha \oplus \beta \in GL(A)$ par les formules

$$(\alpha \oplus \beta)_{ij} = \begin{cases} \alpha_{kl} & \text{si } i = 2k-1, \quad j = 2l-1, \\ \beta_{kl} & \text{si } i = 2k, \quad j = 2l, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Schématiquement, on a

$$\alpha = \begin{bmatrix} \star & \star & \star & \\ \star & \star & \star & \\ \star & \star & \star & \\ & & & \end{bmatrix},$$

$$\beta = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \\ \times & \times & \times & \\ \times & \times & \times & \\ & & & \end{bmatrix}, \qquad \alpha \oplus \beta = \begin{bmatrix} \star & 0 & \star & 0 & \star & 0 & \\ 0 & \times & 0 & \times & 0 & \times & \\ \star & 0 & \star & 0 & \star & 0 & \\ 0 & \times & 0 & \times & 0 & \times & \\ \star & 0 & \star & 0 & \star & 0 & \\ 0 & \times & 0 & \times & 0 & \times & \\ & & & & & & \end{bmatrix}.$$

Lemme et définition 1.2.5. — *L'application* $\oplus$: $GL(A) \times GL(A) \to GL(A)$ *est un homomorphisme de groupes, appelé « somme directe ».* □

Remarque. — Soient $\alpha \in GL_n(A)$ et $\beta \in GL_m(A)$. On a alors $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \in GL_{m+n}(A)$. Notons $\alpha^s \left[\text{resp. } \beta^s, \text{ resp. } \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}^s\right]$ l'image de $\alpha \left[\text{resp. } \beta, \text{ resp. } \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\right]$ dans GL (A). Les homomorphismes $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha^s \oplus \beta^s$ et $(\alpha, \beta) \to \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}^s$ ne sont pas égaux, mais sont conjugués par un élément de GL (A). Il résulte en particulier que $\alpha^s \oplus (\alpha^{-1})^s$ est un élément de E (A) puisqu'il en est ainsi de $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}^s$.

Soit k^{-1} une équivalence d'homotopie inverse de l'application

$$k: \quad \mathrm{B}(\mathrm{GL}(\mathrm{A}) \times \mathrm{GL}(\mathrm{A}))^+ \to \mathrm{BGL}(\mathrm{A})^+ \times \mathrm{BGL}(\mathrm{A})^+$$

étudiée en 1.1.4. L'application composée

$$\mathrm{BGL}(\mathrm{A})^+ \times \mathrm{BGL}(\mathrm{A})^+ \xrightarrow{k^{-1}} \mathrm{B}(\mathrm{GL}(\mathrm{A}) \times \mathrm{GL}(\mathrm{A}))^+ \xrightarrow{\oplus^+} \mathrm{BGL}(\mathrm{A})^+$$

sera noté $+$.

THÉORÈME 1.2.6. — *L'application* $+ : \mathrm{BGL}(\mathrm{A})^+ \times \mathrm{BGL}(\mathrm{A})^+ \to \mathrm{BGL}(\mathrm{A})^+$ *munit l'espace* $\mathrm{BGL}(\mathrm{A})^+$ *d'une structure de* H-*groupe.*

La démonstration de ce théorème sera faite à la fin du paragraphe. □

La « pseudo-conjugaison ». — Soit $u : \mathrm{N}^* \to \mathrm{N}^*$ une injection sur les entiers positifs. On définit un homomorphisme de groupes $u_. : \mathrm{GL}(\mathrm{A}) \to \mathrm{GL}(\mathrm{A})$ par les formules

$$(u_.(\alpha))_{ij} = \begin{cases} \alpha_{kl} & \text{si} \quad (i, j) = (u(k), u(l)), \\ \delta_{ij} & \text{(symbole de Kronecker) sinon.} \end{cases}$$

LEMME 1.2.7. — *Pour toute injection u de* N^* *dans lui-même, l'application* $u_.^+$ *est une équivalence d'homotopie de* $\mathrm{BGL}(\mathrm{A})^+$.

Démonstration. — Le sous-groupe E (A) de GL (A) est stable par $u_.$ et la restriction de $u_.$ à E (A) est notée $u'_.$.

Soient $g_1, \ldots, g_n \in \mathrm{E}(\mathrm{A})$. Il est clair qu'il existe $c \in \mathrm{E}(\mathrm{A})$ tel que $cg_i c^{-1} = u'_.(g_i)$ pour $i = 1, \ldots, n$. Soit $x \in \mathrm{H}_n(\mathrm{BE}(\mathrm{A}))$ la classe d'un cycle $\sum_i n_i (g_1^i, \ldots, g_n^i)$. L'élément $(u'_.)_* (x)$ est représenté par

$$\sum n_i (u'_.(g_1^i, \ldots, g_n^i)) = \sum n_i (cg_1^i c^{-1}, \ldots, cg_n^i c^{-1}),$$

où c est choisi en fonction des g_j^i. Comme la conjugaison induit l'identité sur l'homologie, on en conclut que $(u'_.)_* = \mathrm{id}_{\mathrm{H}_*(\mathrm{BE}(\mathrm{A}))}$. Par conséquent $u'^+_.$ induit un isomorphisme en homologie. Puisque l'espace $\mathrm{BE}(\mathrm{A})^+$ est simplement connexe, l'application $u'^+_.$ est une équivalence d'homotopie.

La comparaison des fibrés homotopiques ci-dessous

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}(\mathrm{A})/\mathrm{E}(\mathrm{A}) & = & \mathrm{GL}(\mathrm{A})/\mathrm{E}(\mathrm{A}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{BE}(\mathrm{A})^+ & \xrightarrow{u'^+_.} & \mathrm{BE}(\mathrm{A})^+ \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{BGL}(\mathrm{A})^+ & \xrightarrow{u^+_.} & \mathrm{BGL}(\mathrm{A})^+ \end{array}$$

montre, en appliquant le résultat précédent, que $u_.^+$ est une équivalence d'homotopie. □

LEMME 1.2.8. — *Le groupe de Grothendieck du monoïde* M *des injections de* $\mathbf{N}^*$ *dans lui-même est trivial.*

Démonstration. — On note $[u]$ la classe de $u \in \mathrm{M}$ dans le groupe de Grothendieck $\hat{\mathrm{M}}$ de M. Si u a un nombre infini de points fixes, on peut trouver une injection i telle que $u \circ i = i$. [prendre $i(n)$ = le n-ième point fixe de u]. Donc, dans le groupe $\hat{\mathrm{M}}$, on a $[u][i] = [i]$ et par suite $[u] = 1$. Soit v une injection de $\mathbf{N}^*$, on va montrer qu'il existe une injection u ayant un nombre infini de points fixes et telle que $v \circ u$ ait aussi un nombre infini de points fixes. Il est clair qu'on aura $[v] = 1$ pour toute injection v.

Soit $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathbf{N}^*$ une partition de $\mathbf{N}^*$ en deux sous-ensembles infinis telle que $\mathrm{A} \subset \mathrm{Im}\, v$. On note $\{p, q\}$ l'ensemble des entiers compris entre p et q. Soit $\mathrm{E}_1 = \{1, e_1\} \subset \mathbf{N}^*$ tel que E_1 contienne au moins un élément a_1 de A, son image réciproque $v^{-1}(a_1)$ et deux éléments b_1 et b'_1 de B. On pose

$$u(a_1) = v^{-1}(a_1),$$

$$u(b_1) = b_1 \qquad \text{si} \quad b_1 \neq v^{-1}(a_1)$$

ou

$$u(b'_1) = b'_1 \qquad \text{sinon [possible car alors } b'_1 \neq v^{-1}(a_1)].$$

L'injection u est définie sur deux éléments de E_1 et leur image est encore dans E_1. Il est clair que l'on peut étendre la définition de u à tout E_1 de telle manière que $u(\mathrm{E}_1) = \mathrm{E}_1$. On recommence le procédé à partir d'un ensemble $\mathrm{E}_2 = \{e_1 + 1, e_2\} \subset \mathbf{N}^*$ contenant au moins un élément de A, son inverse et deux éléments de B (ce qui est toujours possible car A et B sont infinis), etc.

On construit ainsi une injection u de $\mathbf{N}^*$ qui a un nombre infini de points fixes (les b_i ou b'_i) et pour laquelle $v \circ u$ a un nombre infini de points fixes (les a_i). □

PROPOSITION 1.2.9. — *Pour toute injection u de* $\mathbf{N}^*$ *dans lui-même, l'application* $u_{\bullet}^{+} : \mathrm{BGL}(\mathrm{A})^+ \to \mathrm{BGL}(\mathrm{A})^+$ *est homotope à l'identité.*

Démonstration. — L'application $u \mapsto [u_{\bullet}^{+}]$ définit un homomorphisme du monoïde M dans le groupe des classes d'homotopie d'équivalences d'homotopie de $\mathrm{BGL}(\mathrm{A})^+$. Cet homomorphisme se factorise à travers le groupe de Grothendieck de M. Or celui-ci est trivial; donc $[u_{\bullet}^{+}] = [\mathrm{id}]$. □

DÉFINITION 1.2.10. — *Soit* G *un groupe quelconque. Deux homomorphismes f et g* $\mathrm{G} \to \mathrm{GL}(\mathrm{A})$ *sont dits « pseudo-conjugués » s'il existe une injection u de* $\mathbf{N}^*$ *telle que g et $u_{\bullet} \circ f$ ou bien $u_{\bullet} \circ g$ et f soient conjugués.*

COROLLAIRE 1.2.11. — *Si les deux homomorphismes f et g sont pseudo-conjugués alors les applications continues f^+ et g^+ :* $\mathrm{BG} \to \mathrm{BGL}(\mathrm{A})^+$ *sont homotopes.*

Démonstration. — D'après 1.2.9, on a

$$[u_{\bullet}^{+} \circ f^+] = [f^+] = [(f \oplus 1)^+] \qquad \text{et} \qquad [g^+] = [(g \oplus 1)^+].$$

De $g = (u. \circ f)^{\alpha}$ on déduit $g \oplus 1 = (u. \circ f \oplus 1)^{\beta}$ avec $\beta = \alpha \oplus \alpha^{-1} \in \mathrm{E}(\mathrm{A})$. Il suffit alors d'appliquer 1.1.9. □

Démonstration du théorème 1.2.6. — Soit u l'injection de $\mathbf{N}^*$ définie par $u(n) = 2n-1$. Il est immédiat que $u.(\alpha) = \alpha \oplus 1$ pour tout $\alpha \in \mathrm{GL}(\mathrm{A})$. De même, si on pose $v(n) = 2n$, on a $v.(\alpha) = 1 \oplus \alpha$.

L'application $+$ restreinte au premier (resp. second) facteur coïncide à homotopie près avec $u_.^+$ (resp. $v_.^+$), qui est homotope à l'identité de $\mathrm{BGL}(\mathrm{A})^+$ d'après la proposition 1.2.9. D'autre part, il est facile de construire une bijection w (resp. w') de $\mathbf{N}^*$ telle que

$$\forall x, \quad \forall y \in \mathrm{GL}(\mathrm{A}), \quad x \oplus y = w.(y \oplus x),$$

$$\forall x, \quad \forall y, \quad \forall z \in \mathrm{GL}(\mathrm{A}), \quad (x \oplus y) \oplus z = w'_.(x \oplus (y \oplus z)).$$

On en déduit que le H-espace $\mathrm{BGL}(\mathrm{A})^+$ est associatif et commutatif à homotopie près à l'aide du corollaire 1.2.11. Puisqu'il est connexe, c'est un H-groupe. □

Si $\mathrm{A} \to \mathrm{A}'$ est un homomorphisme d'anneaux, l'application $\mathrm{BGL}(\mathrm{A})^+ \to \mathrm{BGL}(\mathrm{A}')^+$ est un homomorphisme de H-espaces.

Les espaces $\mathrm{B}\Sigma_{\infty}^+$, $\mathrm{BE}(\mathrm{A})^+$, $\mathrm{B\,St}(\mathrm{A})^+$, $\mathrm{B}_{\varepsilon}\mathrm{O}(\mathrm{A})^+$ sont aussi des H-espaces associatifs et commutatifs à homotopie près. Les démonstrations faites pour $\mathrm{BGL}(\mathrm{A})^+$ s'adaptent aisément à ces autres cas.

1.3. GROUPES A SOMME DIRECTE ET FIBRATIONS. — La notion de groupe à somme directe généralise le cas $(\mathrm{GL}(\mathrm{A}), \oplus)$.

1.3.1. Soit G un groupe quasi parfait et $(g_1, g_2) \mapsto g_1 \oplus g_2$ un homomorphisme de groupes $\mathrm{G} \times \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ satisfaisant aux conditions suivantes :

(i) pour tout ensemble fini $g_1, \ldots, g_n \in [\mathrm{G}, \mathrm{G}]$ et $g \in \mathrm{G}$, il existe $h \in [\mathrm{G}, \mathrm{G}]$ tel que $g g_i g^{-1} = h g_i h^{-1}$ pour $1 \leqq i \leqq n$;

(ii) pour tout ensemble fini $g_1, \ldots, g_n \in \mathrm{G}$, il existe des éléments c et $d \in \mathrm{G}$ tels que $c(g_i \oplus 1)c^{-1} = d(g_i \oplus 1)d^{-1} = g_i$.

DÉFINITION 1.3.2 (Wagoner [30]). — *Tout couple* $(\mathrm{G}, \oplus)$ *satisfaisant aux conditions précédentes est appelé un groupe à somme directe.*

Un morphisme de groupes à somme directe est un homomorphisme de groupes $f : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ tel que, pour tout $g_1, g_2 \in \mathrm{G}$, on a $f(g_1 \oplus g_2) = f(g_1) \oplus f(g_2)$.

Exemples :

(*a*) $\mathrm{G} = \mathrm{GL}(\mathrm{A})$ avec la somme directe définie en 1.2.5. Les sous-groupes $\mathrm{E}(\mathrm{A})$ et Σ_{∞} de $\mathrm{GL}(\mathrm{A})$ sont stables pour la somme directe, ce sont donc aussi des groupes à somme directe.

(*b*) $\mathrm{G} = \mathrm{St}(\mathrm{A})$ (*cf.* 1.1.12). La somme directe est donnée par la formule

$$(1.3.3) \qquad \left(\prod_{i=1}^{n} x_{\alpha_i \beta_i}^{\lambda_i}\right) \oplus \left(\prod_{j=1}^{m} x_{\alpha'_j \beta'_j}^{\lambda'_j}\right) = \prod_{i=1}^{n} x_{2\alpha_i - 1,\, 2\beta_i - 1}^{\lambda_i} \prod_{j=1}^{m} x_{2\alpha'_j,\, 2\beta'_j}^{\lambda'_j}.$$

L'homomorphisme $\varphi : \mathrm{St}(\mathrm{A}) \to \mathrm{E}(\mathrm{A})$, $x_{ij}^{\lambda} \mapsto e_{ij}^{\lambda}$ est un morphisme de groupes à somme directe, dont le noyau $\mathrm{Ker}\,\varphi$ est isomorphe à $\mathrm{K}_2(\mathrm{A})$ (*cf.* 1.4.3).

(*c*) G = groupe abélien. On prend pour somme directe la loi du groupe.

(*d*) $\mathrm{G} = {}_{\varepsilon}\mathrm{O}(\mathrm{A})$ (*cf.* 1.1.13). Tout élément $\alpha \in {}_{\varepsilon}\mathrm{O}(\mathrm{A})$ peut s'écrire $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ où a, b, c, d sont des éléments de GL (A). On pose alors :

$$\alpha \oplus \alpha' = \begin{pmatrix} a \oplus a' & b \oplus b' \\ c \oplus c' & d \oplus d' \end{pmatrix}.$$

1.3.4 *Structure de* H-*espace de* BG^+. — Pour tout groupe à somme directe G, l'application naturelle $k : \mathrm{B}(\mathrm{G} \times \mathrm{G})^+ \to \mathrm{BG}^+ \times \mathrm{BG}^+$ est une équivalence d'homotopie (1.1.4). Par la méthode de Wagoner [30], on munit BG^+ d'une structure de H-espace de la manière suivante. L'application composée $\oplus^+ \circ k^{-1} : \mathrm{BG}^+ \times \mathrm{BG}^+ \to \mathrm{BG}^+$ restreinte au premier (resp. second) facteur est une équivalence d'homotopie; notons r (resp. l) l'équivalence d'homotopie réciproque. L'application $\oplus^+ \circ k^{-1} \circ (l \times r)$ définit une structure de H-espace sur BG^+.

L'axiome (i) sert à montrer que l'espace BG^+ est simple. L'axiome (ii) et le fait que BG^+ est simple indiquent que l'homomorphisme $g \mapsto g \oplus 1$ induit une équivalence d'homotopie $\mathrm{BG}^+ \to \mathrm{BG}^+$. Dans le cas G = GL (A) (ainsi que dans les cas E (A), St (A), ${}_{\varepsilon}\mathrm{O}(\mathrm{A})$, Σ_{∞}), on a montré que cette équivalence d'homotopie est homotope à l'identité. Par suite, on peut prendre r et l égales à l'identité de $\mathrm{BGL}(\mathrm{A})^+$, ce qui améliore le résultat de Wagoner. Rappelons maintenant un théorème dû aussi à Wagoner [30].

THÉORÈME 1.3.5. — *Soit* $1 \to \mathrm{G}_1 \xrightarrow{i} \mathrm{G}_2 \xrightarrow{r} \mathrm{G}_3 \to 1$ *une suite exacte de groupes à somme directe tels que :*

(1) G_3 *est parfait;*

(2) G_3 *opère trivialement sur l'homologie de* G_1.

Dans ces conditions, la suite $\mathrm{BG}_1^+ \xrightarrow{i^+} \mathrm{BG}_2^+ \xrightarrow{r^+} \mathrm{BG}_3^+$ *est une fibration homotopique.*

Le théorème 1.3.5 a pour corollaire immédiat que pour tout espace pointé X la suite ci-dessous est exacte

$$(\bigstar\bigstar) \quad \ldots \to [\mathrm{S}^1 \wedge \mathrm{X}, \mathrm{BG}_2^+] \xrightarrow{r_*^+} [\mathrm{S}^1 \wedge \mathrm{X}, \mathrm{BG}_3^+] \xrightarrow{\delta_*} [\mathrm{X}, \mathrm{BG}_1^+] \xrightarrow{i_*^+} [\mathrm{X}, \mathrm{BG}_2^+] \to \ldots$$

1.3.6. On se propose d'expliciter l'élément $\delta_*[\hat{\psi}^+]$ lorsque l'espace X est le classifiant $\mathrm{B}\,\Gamma$ d'un groupe discret quelconque Γ et lorsque l'application continue $\hat{\psi}^+ : \mathrm{S}^1 \wedge \mathrm{B}\,\Gamma \to \mathrm{BG}_3^+$ est obtenue à partir d'un homomorphisme $\psi : \mathbf{Z} \times \Gamma \to \mathrm{G}_3$ de la manière suivante. Notons $\psi_{\mathbf{Z}}$ (resp. ψ_{Γ}) l'homomorphisme $\mathbf{Z} \times \Gamma \to \mathrm{G}_3$ qui est le composé de la projection de $\mathbf{Z} \times \Gamma$ sur $\mathbf{Z}$ (resp. Γ) avec la restriction $\psi_{|\mathbf{Z}}$ de ψ à $\mathbf{Z}$ (resp. $\psi_{|\Gamma}$ de ψ à Γ).

Puisque l'espace BG_3^+ est un H-groupe, l'application $\psi^+ - \psi_{\mathbf{Z}}^+ - \psi_{\Gamma}^+$ de $\mathrm{S}^1 \times \mathrm{B}\,\Gamma$ dans BG_3^+ est homotopiquement triviale sur le bouquet $\mathrm{S}^1 \vee \mathrm{B}\,\Gamma$. Cette application définit alors, de manière unique à homotopie près, une application continue pointée que l'on note $\hat{\psi}^+ : \mathrm{S}^1 \wedge \mathrm{B}\,\Gamma \to \mathrm{BG}_3^+$.

THÉORÈME 1.3.7. — *Soit* $1 \to G_1 \xrightarrow{i} G_2 \xrightarrow{r} G_3 \to 1$ *une suite exacte de groupes à somme directe telle que la suite* $BG_1^+ \xrightarrow{i^+} BG_2^+ \xrightarrow{r^+} BG_3^+$ *soit une fibration homotopique de* H-*groupes. On suppose que l'homomorphisme* $\psi : \mathbf{Z} \times \Gamma \to G_3$ *satisfait aux conditions suivantes :*

(i) *il existe un homomorphisme* $\rho : \Gamma \to G_2$ *tel que* $r \circ \rho = \psi_{|\Gamma}$;

(ii) *il existe un homomorphisme* $\chi : \mathbf{Z} \to G_2$ *tel que* $r \circ \chi = \psi_{|\mathbf{Z}}$;

(iii) *il existe deux homomorphismes* σ *et* $\sigma' : \Gamma \to G_1$ *et un élément* $u \in G_1$ *tels que :*

$$(i \circ \sigma) \oplus \rho^{\chi(1)} = ((i \circ \sigma') \oplus \rho)^{i(u)}.$$

Dans ces conditions, on a la formule

$$\delta_* [\hat{\psi}^+] = [\sigma'^+ - \sigma^+] \in [B\Gamma, BG_1^+].$$

Démonstration. — L'homomorphisme $(i \circ \sigma) \oplus \rho : \Gamma \to G_2$ et la conjugaison par $i(u^{-1})(1 \oplus \chi(1))$ définissent une application $\tilde{f} : I \times B\Gamma \to BG_2^+$ (*cf.* lemme A.3 en appendice). L'application $\tilde{f}$ possède les propriétés suivantes :

(P1) $$\tilde{f}(0, -) = (i \circ \sigma)^+ + \rho^+ \quad (\textit{cf. } \text{lemme A.3}).$$

(P2) $$\tilde{f}(1, -) = (i \circ \sigma')^+ + \rho^+.$$

En effet, d'après la condition (iii), on a

$$((i \circ \sigma) \oplus \rho)^{i(u^{-1})(1 \oplus \chi(1))} = ((i \circ \sigma) \oplus \rho^{\chi(1)})^{i(u^{-1})} = ((i \circ \sigma') \oplus \rho).$$

D'où, d'après A.3, on déduit

$$\tilde{f}(1, -) = (((i \circ \sigma) \oplus \rho)^{i(u^{-1})(1 \oplus \chi(1))})^+ = ((i \circ \sigma') \oplus \rho)^+ = (i \circ \sigma')^+ + \rho^+.$$

(P 3) $\tilde{f}$ est un relèvement de $f = (1 \oplus \psi)^+ : S^1 \times B\Gamma \to BG_3^+$.

En effet

$$r((i \circ \sigma) \oplus \rho) = 1 \oplus r \circ \rho = 1 \oplus \psi_{|\Gamma} \quad \text{d'après (i)}$$

et

$$r(i(u^{-1})(1 \oplus \chi(1))) = 1 \oplus r \circ \chi(1) = 1 \oplus (\psi_{|\mathbf{Z}})(1) \quad \text{d'après (ii)}.$$

Donc $r^+ \circ \tilde{f}$ se factorise à travers $S^1 \times B\Gamma$ et l'application $S^1 \times B\Gamma \to BG_3^+$ qui en résulte est

$$((1 \oplus \psi_{|\mathbf{Z}}) . (1 \oplus \psi_{|\Gamma}))^+ = (1 \oplus \psi)^+ \quad (\textit{cf. } \text{lemme A.4}).$$

Le théorème 1.3.7 est alors une application directe de la proposition suivante qui sera montrée en appendice.

PROPOSITION 1.3.8. — *Soit* $F \xrightarrow{i^+} E \xrightarrow{r^+} B$ *une fibration de* H-*groupes. Soient* $f : S^1 \times X \to B$ *une application continue pointée et* $\tilde{f} : I \times X \to E$ *un relèvement de* f *tel que*

$$\tilde{f}(0, x_0) = \tilde{f}(1, x_0) = e_0$$

point-base de E.

On suppose qu'il existe une application continue pointée $g : X \to F$ *et une homotopie* $H : X \times [0, 1] \to E$ *vérifiant :*

(*a*) $H(x, 0) = \tilde{f}(1, x)$, $H(x_0, -) = e_0$;

(*b*) $H(x, 1) = i^+ \circ g(x) + \tilde{f}(0, x)$;

(*c*) $\forall u \in [0, 1]$, $r^+ \circ H(x, u) = f_{|X}(x)$.

Dans ces conditions, on a la formule (avec les notations de 1.3.6) *:*

$$\delta_*[\hat{f}] = [g] \in [X, F].$$

Suite de la démonstration de 1.3.7. — On pose évidemment $F = BG_1^+$, $E = BG_2^+$, $B = BG_3^+$ et $X = B\Gamma$. Posons $g = \sigma'^+ - \sigma^+ : B\Gamma \to BG_1^+$. Il existe une homotopie $h : B\Gamma \times [0, 1] \to BG_1^+$ telle que

$$h(-, 0) = \sigma'^+, \qquad h(-, 1) = \sigma'^+ - \sigma^+ + \sigma^+ = g + \sigma^+ \qquad \text{et} \qquad h(x_0, -) = e_0.$$

Posons

$$H(x, u) = i^+ \circ h(x, u) + \rho^+(x).$$

On calcule

$$H(x, 0) = i^+ \circ h(x, 0) + \rho^+(x) = i^+ \circ \sigma'^+(x) + \rho^+(x) = \tilde{f}(1, x) \quad \text{d'après (P2)},$$

$$H(x, 1) = i^+ \circ h(x, 1) + \rho^+(x)$$

$$= i^+ \circ g(x) + i^+ \circ \sigma^+(x) + \rho^+(x) = i^+ \circ g(x) + \tilde{f}(0, x) \quad \text{d'après (P1)},$$

$$r^+ \circ H(-, u) = r^+ \circ i^+ \circ h(-, u) + r^+ \circ \rho^+ = 0 + (r \circ \rho)^+$$

$$= (1 \oplus r \circ \rho)^+ = (1 \oplus \psi_{|\Gamma})^+ = f_{|B\Gamma} \quad \text{d'après (P3)}.$$

Les conditions de la proposition 1.3.8 sont ainsi remplies et on a

$$\delta_*[\hat{f}] = [g] = [\sigma'^+ - \sigma^+].$$

Or, d'après (P 3), on a $f = (1 \oplus \psi)^+$, d'où

$$[\hat{f}] = [\widehat{(1 \oplus \psi)^+}] = [\hat{\psi}^+]. \quad \square$$

1.4. Applications : Calcul de $K_3(A)$, Délaçage de $BGL(A)^+$. — La suite exacte

$$(\bigstar) \qquad 1 \to \operatorname{Ker}\varphi \hookrightarrow \mathrm{St}(A) \xrightarrow{\varphi} E(A) \to 1$$

est une extension centrale universelle (*cf.* [15], [20]). Le groupe Ker φ est donc abélien; munissons-le de la somme directe égale à la loi du groupe. Le lemme suivant montre que l'inclusion $\operatorname{Ker}\varphi \hookrightarrow \mathrm{St}(A)$ est un morphisme de groupes à somme directe.

Lemme 1.4.1. — *Soient* $\alpha, \alpha' \in \operatorname{Ker}\varphi \subset \mathrm{St}(A)$. *Dans* St (A) *on a l'identité*

$$\alpha \oplus \alpha' = \alpha . \alpha'.$$

Démonstration. — Pour tout $\alpha \in \mathrm{St}(A)$ il existe $u \in \mathrm{St}(A)$ tel que $\alpha \oplus 1 = u.\alpha.u^{-1}$. Comme $\alpha \in \operatorname{Ker}\varphi$ et que $\operatorname{Ker}\varphi$ est central dans $\mathrm{St}(A)$, les éléments α et u commutent, donc $\alpha \oplus 1 = \alpha$. De même, comme $\alpha' \in \operatorname{Ker}\varphi$ on a $1 \oplus \alpha' = \alpha'$. On en déduit

$$\alpha \oplus \alpha' = (\alpha \oplus 1).(1 \oplus \alpha') = \alpha.\alpha'. \quad \square$$

THÉORÈME 1.4.2. — $K_3(A) = H_3(\mathrm{St}(A); \mathbf{Z})$.

Démonstration (Comparer avec [6]). — La suite (★) est une suite exacte de groupes à somme directe. Le groupe $E(A)$ est parfait et opère trivialement sur $\operatorname{Ker}\varphi$ puisque l'extension est centrale. On applique le théorème 1.3.5, qui affirme que la suite

$$B\operatorname{Ker}\varphi \to B\,\mathrm{St}(A)^+ \to BE(A)^+$$

est une fibration.

De la longue suite exacte d'homotopie

$$\begin{array}{ccccccccc} \ldots \to & \pi_3(B\operatorname{Ker}\varphi) & \to & \pi_3(B\,\mathrm{St}(A)^+) & \to & \pi_3(BE(A)^+) & \to & \pi_2(B\operatorname{Ker}\varphi) & \to \ldots \\ & \| & & & & & & \| & \\ & 0 & & & & & & 0 & \end{array}$$

on extrait l'isomorphisme

$$\pi_3(B\,\mathrm{St}(A)^+) \xrightarrow{\approx} \pi_3(BE(A)^+).$$

D'autre part on sait que $H_1(\mathrm{St}(A); \mathbf{Z}) = H_2(\mathrm{St}(A), \mathbf{Z}) = 0$ donc en appliquant le théorème 1.1.1 et le théorème d'Hurewicz on montre que

$$\begin{aligned} K_3(A) = \pi_3(BE(A)^+) &\overset{\approx}{-} \pi_3(B\,\mathrm{St}(A)^+) \\ &\overset{\approx}{-} H_3(B\,\mathrm{St}(A)^+; \mathbf{Z}) \overset{\approx}{-} H_3(B\,\mathrm{St}(A); \mathbf{Z}) \overset{\approx}{-} H_3(\mathrm{St}(A); \mathbf{Z}). \quad \square \end{aligned}$$

REMARQUE 1.4.3. — L'isomorphisme $H_2(E(A); \mathbf{Z}) \to \operatorname{Ker}\varphi$ [15], [20], s'obtient à l'aide de cette suite exacte. En effet, on extrait de la longue suite exacte d'homotopie précédente.

$$\begin{array}{cccccccc} \ldots \to & \pi_2(B\,\mathrm{St}(A)^+) \to & \pi_2(BE(A)^+) & \overset{\delta_*}{\underset{\approx}{\to}} & \pi_1(B\operatorname{Ker}\varphi) & \to & \pi_1(B\,\mathrm{St}(A)^+) & \\ & \| & \| & & \| & & \| & \\ & 0 & H_2(E(A); \mathbf{Z}) & & \operatorname{Ker}\varphi & & 0 & \square \end{array}$$

1.4.4. *Cône et suspension d'un anneau.* — On note $C\,\mathbf{Z}$ (cône de $\mathbf{Z}$) l'ensemble des matrices infinies à coefficients dans $\mathbf{Z}$ qui n'ont qu'un nombre fini d'éléments non nuls sur chaque ligne et sur chaque colonne. $C\,\mathbf{Z}$ est muni d'une structure d'anneau par l'addition et la multiplication usuelles des matrices. L'idéal $\tilde{\mathbf{Z}}$ de $C\,\mathbf{Z}$ formé des matrices n'ayant qu'un nombre fini d'éléments non nuls est un idéal bilatère. On note $S\,\mathbf{Z}$ (suspension de $\mathbf{Z}$) l'anneau quotient $C\,\mathbf{Z}/\tilde{\mathbf{Z}}$.

DÉFINITION 1.4.5. — *Pour tout anneau* A, *la suspension de* A (*resp. le cône, resp. l'anneau stabilisé*) *est l'anneau* $\mathrm{SA} = \mathrm{S}\,\mathbf{Z} \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} \mathrm{A}$ (*resp.* $\mathrm{CA} = \mathrm{C}\,\mathbf{Z} \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} \mathrm{A}$, *resp.* $\tilde{\mathrm{A}} = \tilde{\mathbf{Z}} \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} \mathrm{A}$).

Remarque 1.4.6. — Notons τ l'élément inversible de S **Z** défini par la matrice

$$\tau = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & . \\ 1 & 0 & 0 & . \\ 0 & 1 & 0 & . \\ 0 & 0 & 1 & . \\ . & . & . & . \end{bmatrix}.$$

L'application $\mathrm{A}[t, t^{-1}] \to \mathrm{SA}$ définie par $\Sigma a_n t^n \mapsto \Sigma a_n \tau^n$ est un homomorphisme d'anneaux.

Rappelons, sans démonstrations, quelques résultats sur la K-théorie du cône et de la suspension.

THÉORÈME 1.4.7 [13]. — $\mathrm{K}_0(\mathrm{CA}) = \mathrm{K}_1(\mathrm{CA}) = 0$ *et* $\mathrm{K}_0(\mathrm{A}) \to \mathrm{K}_1(\mathrm{SA})$ *est un isomorphisme.* □

L'isomorphisme $\mathrm{K}_0(\mathrm{A}) \approx \mathrm{K}_1(\mathrm{SA})$ peut se décrire de la manière suivante. Si $\mathrm{M} = \mathrm{Im}\,p$ où p est un projecteur de A^n, l'image de $[\mathrm{M}]$ dans $\mathrm{K}_1(\mathrm{SA})$ est la classe de

$$\tau \otimes p + 1 \otimes (1-p) \in \mathrm{GL}_n(\mathrm{SA}).$$

THÉORÈME 1.4.8 ([7], [30]). — *L'espace* $\mathrm{BGL}(\mathrm{CA})^+$ *est contractile et* $\mathrm{K}_i(\mathrm{CA}) = 0$ *pour tout* $i \geqq 1$. □

D'après 1.4.7, on a $\mathrm{GL}(\mathrm{CA}) = \mathrm{E}(\mathrm{CA})$, donc le noyau de la surjection $\mathrm{E}(\mathrm{CA}) \to \mathrm{E}(\mathrm{SA})$ s'identifie à $\mathrm{GL}(\tilde{\mathrm{A}})$ (*cf.* 1.2.4). Par conséquent, la suite

$$1 \to \mathrm{GL}(\tilde{\mathrm{A}}) \hookrightarrow \mathrm{GL}(\mathrm{CA}) \to \mathrm{E}(\mathrm{SA}) \to 1$$

est exacte.

THÉORÈME 1.4.9 ([7], [30]). — *Il existe une équivalence d'homotopie naturelle*

$$\eta_{\mathrm{A}} : \quad \Omega\,\mathrm{BE}(\mathrm{SA})^+ \to \mathrm{BGL}(\mathrm{A})^+.$$

Esquisse de démonstration. — Les conditions du théorème 1.3.5 sont remplies et la suite

$$\mathrm{BGL}(\tilde{\mathrm{A}})^+ \to \mathrm{BGL}(\mathrm{CA})^+ \to \mathrm{BE}(\mathrm{SA})^+$$

est donc une fibration. Puisque $\mathrm{BGL}(\mathrm{CA})^+$ est contractile (1.4.7), on a une équivalence d'homotopie $\Omega\,\mathrm{BE}(\mathrm{SA})^+ \to \mathrm{BGL}(\tilde{\mathrm{A}})^+$. Il reste à montrer que les deux espaces $\mathrm{BGL}(\tilde{\mathrm{A}})^+$ et $\mathrm{BGL}(\mathrm{A})^+$ ont même type d'homotopie (*cf.* 1.4.11). □

COROLLAIRE. — *Pour tout anneau* A, *on a* $\mathrm{K}_n(\mathrm{SA}) = \mathrm{K}_{n-1}(\mathrm{A})$ *pour* $n \geqq 1$.

1.4.10. K-*théorie des anneaux de matrices.* — L'anneau des $n \times n$-matrices à coefficients dans A est noté $\mathscr{M}_n(\mathrm{A})$. L'application

$$\mathrm{A} \to \mathscr{M}_n(\mathrm{A}), \qquad a \mapsto \begin{pmatrix} a & \\ & 0 \end{pmatrix}$$

est un morphisme de pseudo-anneaux (il ne respecte pas l'unité). Néanmoins, définit un homomorphisme de groupes

$$\Phi_n : \quad \mathrm{GL}(\mathrm{A}) \to \mathrm{GL}(\mathscr{M}_n(\mathrm{A})), \qquad \alpha = (\alpha_{ij}) \mapsto \beta = (\beta_{ij}),$$

avec

$$\beta_{ij} = \begin{bmatrix} \alpha_{ij} & & & & \\ & \delta_{ij} & & & \\ & & \delta_{ij} & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & \delta_{ij} \end{bmatrix}, \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ 1 & \text{si } i = j. \end{cases}$$

De même, l'application $\mathrm{A} \to \mathrm{CA} : a \mapsto \begin{bmatrix} \boxed{a} & 0 & 0 & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . \\ 0 & . & . & & \\ . & . & & & \\ . & & & & \end{bmatrix}$ est un morphisme de pseudo-anneaux qui induit un homomorphisme de groupes

$$\Phi : \quad \mathrm{GL}(\mathrm{A}) \to \mathrm{GL}(\tilde{\mathrm{A}}) = \mathrm{Ker}(\mathrm{GL}(\mathrm{CA}) \to \mathrm{E}(\mathrm{SA})).$$

Une $p \times p$-matrice à coefficients dans $\mathscr{M}_n(\mathrm{A})$ peut être considérée comme une $(np) \times (np)$-matrice à coefficients dans A. Il existe donc un homomorphisme naturel

$$\Phi'_n : \quad \mathrm{GL}(\mathscr{M}_n(\mathrm{A})) \to \mathrm{GL}(\mathrm{A}).$$

Soit $(\varphi, \psi) : \mathbf{N} \to \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ une bijection. On définit un homomorphisme de groupes $\mathrm{GL}(\mathrm{CA}) \to (\mathrm{CA})^*$, $\beta \mapsto \alpha$ par $\alpha_{ij} = (\beta_{\varphi(i)\varphi(j)})_{\psi(i)\psi(j)}$ (égalité entre éléments de A). β_{uv} désigne l'élément de CA qui est sur la ligne u et sur la colonne v de la matrice β. On constate que si $\beta \in \mathrm{GL}(\tilde{\mathrm{A}})$ alors $\alpha \in \mathrm{GL}(\mathrm{A}) \subset (\mathrm{CA})^*$. On a ainsi défini un homomorphisme

$$\Phi' : \quad \mathrm{GL}(\tilde{\mathrm{A}}) \to \mathrm{GL}(\mathrm{A}).$$

PROPOSITION 1.4.11. — *Les applications*

$$\Phi_n^+ : \quad \mathrm{BGL}(\mathrm{A})^+ \to \mathrm{BGL}(\mathscr{M}_n(\mathrm{A}))^+ \qquad [\text{resp. } \Phi^+ : \mathrm{BGL}(\mathrm{A})^+ \to \mathrm{BGL}(\tilde{\mathrm{A}})^+]$$

et

$$\Phi_n'^+ : \quad \mathrm{BGL}(\mathscr{M}_n(\mathrm{A}))^+ \to \mathrm{BGL}(\mathrm{A})^+ \qquad [\text{resp. } \Phi'^+ : \mathrm{BGL}(\tilde{\mathrm{A}})^+ \to \mathrm{BGL}(\mathrm{A})^+]$$

sont des équivalences d'homotopie réciproques.

Démonstration. — L'endomorphisme $\Phi'_n \circ \Phi_n$ de GL (A) est pseudoconjugué de l'identité par la pseudoconjugaison associée à l'injection $p \mapsto (p-1)n+1$. L'endomorphisme $\Phi' \circ \Phi$

de GL (A) est pseudoconjugué de l'identité par la pseudoconjugaison associée à l'injection $p \to (\varphi, \psi)^{-1}(p, 1)$.

De même l'endomorphisme $\Phi_n \circ \Phi'_n$ de $\mathrm{GL}(\mathcal{M}_n(\mathrm{A}))$ [resp. $\Phi \circ \Phi'$ de $\mathrm{GL}(\tilde{\mathrm{A}})$] est pseudoconjugué de l'identité. On conclut à l'aide de 1.2.8. □

Voici une autre construction de l'espace $\mathrm{BE}(\mathrm{SA})^+$ due à Karoubi.

PROPOSITION 1.4.12 [10]. — *Le cône de l'application continue pointée*

$$f : \mathrm{BGL}(\mathrm{CA}) \to \mathrm{BE}(\mathrm{SA})$$

est homotopiquement équivalent à l'espace $\mathrm{BE}(\mathrm{SA})^+$.

Rappelons que le cône C_f de l'application $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ est la somme amalgamée de Y et du cône topologique $\mathrm{I} \wedge \mathrm{X}$ de X :

$$(\bigstar\bigstar) \qquad \begin{array}{ccccc} x & \in & \mathrm{X} & \xrightarrow{f} & \mathrm{Y} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow g \\ (1, x) & \in & \mathrm{I} \wedge \mathrm{X} & \to & \mathrm{C}_f \end{array}$$

Démonstration. — Le théorème de van Kampen permet de calculer le groupe fondamental de C_f :

$$\pi_1(\mathrm{C}_f) = \pi_1(\mathrm{Y})/\langle \mathrm{Im}\, \pi_1(\mathrm{X}) \rangle = \mathrm{E}(\mathrm{SA})/\mathrm{Im}\, \mathrm{GL}(\mathrm{CA}) = 0.$$

L'espace C_f est donc simplement connexe. Il existe alors une factorisation de g à travers $\mathrm{BE}(\mathrm{SA})^+$:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{BE}(\mathrm{SA}) \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "i"'] & & \mathrm{C}_f \\ & \mathrm{BE}(\mathrm{SA})^+ \arrow[ur, dashed, "g^+"'] & \end{tikzcd}$$

Les applications i et g induisent des isomorphismes en homologie. Pour i, c'est une conséquence du théorème 1.1.1, pour g une conséquence de la suite exacte de Mayer-Vietoris du diagramme $(\bigstar\bigstar)$:

$$\begin{array}{ccccccccc} \to \tilde{\mathrm{H}}_n(\mathrm{X}) & \to & \tilde{\mathrm{H}}_n(\mathrm{Y}) & \to & \tilde{\mathrm{H}}_n(\mathrm{C}_f) & \to & \tilde{\mathrm{H}}_{n-1}(\mathrm{X}) \to \\ \| & & & & & & \| \\ 0 & & & & & & 0 \end{array}$$

Il s'ensuit que l'application continue

$$g^+ : \mathrm{BE}(\mathrm{SA})^+ \to \mathrm{C}_f$$

est un isomorphisme en homologie entre deux espaces simplement connexes; g^+ est donc une équivalence d'homotopie d'après le théorème de J. H. C. Whitehead. □

Remarque. — On peut montrer un théorème analogue au théorème 1.4.11 pour les espaces $\mathrm{B}_\varepsilon \mathrm{O}(\mathrm{A})^+$.

CHAPITRE II

Structure multiplicative en K-théorie algébrique

Dans ce chapitre, on définit un produit en K-théorie algébrique qui étend le produit défini sur K_0 par le produit tensoriel des modules. Ce produit coïncide avec celui défini par Milnor dans le cas $K_1 \times K_1 \to K_2$. L'isomorphisme $K_n(A) \xrightarrow{\approx} K_{n+1}(SA)$ est induit par le produit par le générateur de $K_1(S\mathbf{Z})$. On est amené tout naturellement à construire un spectre $\mathbf{K}_A$ dont les groupes d'homotopie sont les groupes $K_n(A)$. En outre, $\mathbf{K}_A$ est un Ω-spectre, qui est multiplicatif lorsque A est commutatif.

2.1. Le produit $K_n(A) \times K_p(A') \to K_{n+p}(A \otimes A')$.

2.1.1. Soient A et A′ deux anneaux. La donnée d'un isomorphisme

$$\varphi : \quad A^p \otimes A'^{p'} \to (A \otimes A')^{pp'}$$

de $A \otimes A'$-modules permet, par le produit tensoriel des matrices, de définir un homomorphisme de groupes

$$GL_p(A) \times GL_{p'}(A') \to GL_{pp'}(A \otimes A'),$$

puis une application continue $f_{p,p'}^{A,A'} : BGL_p(A)^+ \times BGL_{p'}(A')^+ \to BGL_{pp'}(A \otimes A')^+$. On note $i_q : BGL_q(A \otimes A')^+ \hookrightarrow BGL(A \otimes A')^+$ l'injection naturelle et on appelle « application stabilisée » l'application composée $i_{pp'} \circ f_{p,p'}^{A,A'}$. Si l'on change d'isomorphisme φ le nouvel homomorphisme de groupes que l'on obtient est conjugué de l'ancien; par conséquent, la nouvelle application $f_{p,p'}^{A,A'}$ (resp. $i_{pp'} \circ f_{p,p'}^{A,A'}$) est librement homotope (resp. homotope) à l'ancienne application.

2.1.2. Les propriétés suivantes de $f_{p,p'}^{A,A'}$ se montrent à l'aide du même argument.

(i) *Naturalité.* — Soit $u : A \to A_1$ un homomorphisme d'anneaux. Les applications stabilisées de $f_{p,p'}^{A_1,A'} \circ (u^+ \times \mathrm{id})$ et de $(u \otimes 1)^+ \circ f_{p,p'}^{A,A'}$ sont homotopes.

(ii) *Bilinéarité.* — Rappelons que la somme directe des matrices définit l'application $BGL_p(A)^+ \times BGL_q(A)^+ \to BGL_{p+q}(A)^+$, $(x, y) \mapsto x+y$. Pour tout $x \in BGL_p(A)^+$, $y \in BGL_q(A)^+$ et $x' \in BGL_{p'}(A')^+$ les applications stabilisées de

$$(x, y, x') \mapsto f_{p+q,p'}^{A,A'}(x+y, x')$$

et de

$$(x, y, x') \mapsto f_{p,p'}^{A,A'}(x, x') + f_{q,p'}^{A,A'}(y, x')$$

sont homotopes.

(iii) *Associativité.* — Soit A″ un anneau. Les applications stabilisées de

$$f_{pp',p''}^{A\otimes A',\, A''} \circ (f_{p,p'}^{A,A'} \times \mathrm{id})$$

et de

$$(f_{p,p'p''}^{A,A'\otimes A''}) \circ (\mathrm{id} \times f_{p',p''}^{A',A''})$$

sont homotopes.

(iv) *Commutativité.* — Soit $t : A \otimes A' \to A' \otimes A$ l'isomorphisme défini par $t(a \otimes a') = a' \otimes a$ et $s : BGL_p(A)^+ \times BGL_{p'}(A')^+ \to BGL_{p'}(A')^+ \times BGL_p(A)^+$ l'homéomorphisme qui échange les facteurs. Les applications stabilisées de $t^+ \circ f^{A,A'}_{p,p'}$ et de $f^{A',A}_{p',p} \circ s$ sont homotopes.

Définissons $\gamma^{A,A'}_{p,p'} : BGL_p(A)^+ \times BGL_{p'}(A')^+ \to BGL(A \otimes A')^+$ par la formule

$$\gamma^{A,A'}_{p,p'}(x, x') = i_{pp'} \circ f^{A,A'}_{p,p'}(x, x') - i_{pp'} \circ f^{A,A'}_{p,p'}(x_0, x') - i_{pp'} \circ f^{A,A'}_{p,p'}(x, x'_0).$$

Le signe — s'entend au sens d'espace de lacets de $BGL(A \otimes A')^+$.

LEMME 2.1.3. — *L'application $\gamma^{A,A'}_{p,p'}$ est compatible avec la stabilisation. Plus précisément, le diagramme ci-dessous est commutatif à homotopie près*

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny] BGL_p(A)^+ \times BGL_{p'}(A')^+ \arrow[rr, hook] \arrow[dr, "\gamma^{A,A'}_{p,p'}"'] & & BGL_{p+1}(A)^+ \times BGL_{p'+1}(A')^+ \arrow[dl, "\gamma^{A,A'}_{p+1,p'+1}"] \\ & BGL(A \otimes A')^+ & \end{tikzcd}$$

Démonstration. — Il nous suffit de montrer que les deux applications

$$(x, x') \mapsto f_{p,p'}(x, x') + f_{p+1,p'+1}(x_0, x') + f_{p+1,p'+1}(x, x'_0),$$
$$(x, x') \mapsto f_{p+1,p'+1}(x, x') + f_{p,p'}(x_0, x') + f_{p,p'}(x', x_0)$$

sont homotopes. Or ces applications sont induites par les homomorphismes de groupes

$$(\alpha, \beta) \mapsto (\alpha \otimes \beta) \oplus \left(\begin{pmatrix} 1_p & 0 \\ 0 & 1_1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & 1_1 \end{pmatrix}\right) \oplus \left(\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1_1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1_{p'} & 0 \\ 0 & 1_1 \end{pmatrix}\right)$$

et

$$(\alpha, \beta) \mapsto \left(\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1_1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & 1_1 \end{pmatrix}\right) \oplus (1_p \otimes \beta) \oplus (\alpha \otimes 1_{p'}) \oplus 1_{p+p'+1}$$

(1_q désigne la matrice unité de dimension q).

Il est clair que ces deux homomorphismes de

$$GL_p(A) \times GL_{p'}(A')$$

dans $GL_{3pp'+p+p'+1}(A \otimes A')$ sont conjugués ainsi que leurs stabilisés dans $GL(A \otimes A')$. Donc, d'après 1.2.11, les applications continues induites par ces homomorphismes sont homotopes. □

2.1.4. L'application $\gamma^{A,A'}_{p,p'}$ est homotopiquement triviale sur $BGL_p(A)^+ \vee BGL_{p'}(A')^+$, donc, puisque $BGL(A \otimes A')$ est un H-groupe, il existe une application continue $\hat{\gamma}^{A,A'}_{p,p'} : BGL_p(A)^+ \wedge BGL_{p'}(A')^+$ unique à homotopie près telle que le diagramme ci-dessous commute à homotopie près

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny] BGL_p(A)^+ \times BGL_{p'}(A')^+ \arrow[rr, two heads] \arrow[dr, "\gamma_{p,p'}"'] & & BGL_p(A)^+ \wedge BGL_{p'}(A')^+ \arrow[dl, "\hat{\gamma}_{p,p'}"] \\ & BGL(A \otimes A')^+ & \end{tikzcd}$$

Simplifions les notations en posant

$$X_p = \mathrm{BGL}_p(A)^+ \times \mathrm{BGL}_p(A')^+ \qquad \text{et} \qquad Y = \mathrm{BGL}(A \otimes A')^+.$$

La suite de CW-complexes $X_1 \subset X_2 \subset X_3 \subset \ldots$ a pour réunion

$$X = \mathrm{BGL}(A)^+ \times \mathrm{BGL}(A')^+.$$

D'après le lemme précédent, les triangles du diagramme

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, hook] \arrow[drr, "\gamma_{1,1}"'] & X_2 \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\gamma_{2,2}"] & X_3 \arrow[r, hook] \arrow[d, "\gamma_{3,3}"] & \cdots \arrow[dl, dashed] \\
& & Y &
\end{tikzcd}$$

sont commutatifs à homotopie près. On peut remplacer $\gamma_{2,2}$ par une application homotope $\gamma'_{2,2}$ de telle manière que le triangle (1) soit (strictement) commutatif. Le triangle (2) est toujours commutatif à homotopie près. On peut, de même, remplacer $\gamma_{3,3}$ par une application homotope $\gamma'_{3,3}$ de manière à rendre le triangle (2) (strictement) commutatif, et ainsi de suite. En définitive, on rend tous les triangles (n) commutatifs et on peut définir une application continue $\gamma^{A,A'} : X \to Y$ telle que pour tout n le triangle

$$\begin{tikzcd}
X_n \arrow[rr, hook] \arrow[dr, "\gamma'_{n,n}"'] & & X \arrow[dl, "\gamma"] \\
& Y &
\end{tikzcd}$$

soit commutatif.

DÉFINITION 2.1.5. — *Les applications continues* (*pointées*) g_0 *et* $g_1 : Z \to Z'$ *sont dites faiblement homotopes si pour tout compact* K *de* Z *les restrictions* $g_{0|K}$ *et* $g_{1|K}$ *sont homotopes* (*en tant qu'applications pointées*).

LEMME 2.1.6. — *L'application continue*

$$\gamma^{A,A'} : \quad \mathrm{BGL}(A)^+ \times \mathrm{BGL}(A')^+ \to \mathrm{BGL}(A \otimes A')^+$$

est bien définie à homotopie faible près.

Démonstration. — Pour tout compact K de X, il existe un entier p tel que $K \subset X_p$. Or $\gamma_{|X_p} = \gamma'_{p,p}$ et quelque soit le choix des $\gamma'_{i,i}$ pour $i \leqq p$, $\gamma'_{p,p}$ est homotope à $\gamma_{p,p}$. □

2.1.7. La même construction que précédemment peut s'appliquer aux applications continues $\hat{\gamma}^{A,A'}_{p,p'}$ et donne $\hat{\gamma}^{A,A'} : \mathrm{BGL}(A)^+ \wedge \mathrm{BGL}(A')^+ \to \mathrm{BGL}(A \otimes A')^+$. L'application $\hat{\gamma}^{A,A'}$ est bien définie à homotopie faible près et le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{BGL}(A)^+ \times \mathrm{BGL}(A')^+ \arrow[rr, two heads] \arrow[dr, "\gamma"'] & & \mathrm{BGL}(A)^+ \wedge \mathrm{BGL}(A')^+ \arrow[dl, "\hat{\gamma}"] \\
& \mathrm{BGL}(A \otimes A')^+ &
\end{tikzcd}$$

commute à homotopie faible près.

PROPOSITION 2.1.8. — *L'application continue*

$$\hat{\gamma}^{A,A'} : \quad BGL(A)^+ \wedge BGL(A')^+ \to BGL(A \otimes A')^+$$

est naturelle en A *et* A', *bilinéaire, associative, commutative, compatible avec* $\hat{\gamma}_{p,p'}^{A,A'}$ *à homotopie faible près. Plus précisément, les diagrammes ci-dessous sont commutatifs à homotopie faible près.*

(i) *Naturalité :*

$$\begin{tikzcd}
BGL(A)^+ \wedge BGL(A')^+ \arrow[r, "\hat{\gamma}^{A,A'}"] \arrow[d, "u^+ \wedge \mathrm{id}"'] & BGL(A \otimes A')^+ \arrow[d, "(u \otimes 1)^+"] \\
BGL(A_1)^+ \wedge BGL(A')^+ \arrow[r, "\hat{\gamma}^{A_1,A'}"] & BGL(A_1 \otimes A')^+
\end{tikzcd}$$

(on a un diagramme analogue pour tout homomorphisme $A' \to A'_1$).

(ii) *Bilinéarité :*

$$\begin{tikzcd}
(BGL(A)^+ \times BGL(A)^+) \wedge BGL(A')^+ \arrow[r, "{(x,y,x') \mapsto (x,x',y,x')}"] \arrow[dd, "(+) \wedge \mathrm{id}"'] & (BGL(A)^+ \wedge BGL(A')^+) \times (BGL(A)^+ \wedge BGL(A')^+) \arrow[d, "\hat{\gamma}^{A,A'} \times \hat{\gamma}^{A,A'}"] \\
 & BGL(A \otimes A')^+ \times BGL(A \otimes A')^+ \arrow[d, "(+)"] \\
BGL(A)^+ \wedge BGL(A')^+ \arrow[r, "\hat{\gamma}^{A,A'}"] & BGL(A \otimes A')^+
\end{tikzcd}$$

(on a un diagramme du même type en inversant les rôles de A et A').

(iii) *Associativité :*

$$\begin{tikzcd}
BGL(A)^+ \wedge BGL(A')^+ \wedge BGL(A'')^+ \arrow[r, "\hat{\gamma}^{A,A'} \wedge \mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id} \wedge \hat{\gamma}^{A',A''}"'] & BGL(A \otimes A')^+ \wedge BGL(A'')^+ \arrow[d, "\hat{\gamma}^{A \otimes A', A''}"] \\
BGL(A)^+ \wedge BGL(A' \otimes A'')^+ \arrow[r, "\hat{\gamma}^{A, A' \otimes A''}"] & BGL(A \otimes A' \otimes A'')^+
\end{tikzcd}$$

(iv) *Commutativité :*

$$\begin{tikzcd}
BGL(A)^+ \wedge BGL(A')^+ \arrow[r, "\hat{\gamma}^{A,A'}"] \arrow[d, "s"'] & BGL(A \otimes A')^+ \arrow[d, "t^+"] \\
BGL(A')^+ \wedge BGL(A)^+ \arrow[r, "\hat{\gamma}^{A',A}"] & BGL(A' \otimes A)^+
\end{tikzcd}$$

(v) *Compatibilité :*

$$\begin{tikzcd}
BGL_p(A)^+ \wedge BGL_{p'}(A')^+ \arrow[rr, "i_p \wedge i_{p'}"] \arrow[dr, "\hat{\gamma}_{p,p'}^{A,A'}"'] & & BGL(A)^+ \wedge BGL(A')^+ \arrow[dl, "\hat{\gamma}^{A,A'}"] \\
 & BGL(A \otimes A')^+ &
\end{tikzcd}$$

Démonstration. — Cette proposition résulte des propriétés de l'application $\gamma_{p,p'}^{A,A'}$, car pour tout compact K de $BGL(A)^+ \wedge BGL(A')^+$, il existe un entier p tel que $K \subset BGL_p(A)^+ \wedge BGL_p(A')^+$. $\square$

Remarque. — Dans le diagramme (i), on peut remplacer u^+ et $(u \otimes 1)^+$ par Φ_n^+ (ou $\Phi_n'^+$ ou Φ^+ ou Φ'^+) bien que ces applications ne soient pas induites par des homomorphismes d'anneaux (*cf.* 1.4.10).

2.1.9. *Remarque sur l'homotopie faible.* — On dit que l'application continue $f : Z \to Z'$ est une équivalence d'homotopie faible s'il existe une application continue $g : Z' \to Z$ telle que $f \circ g$ (resp. $g \circ f$) est faiblement homotope à $id_{Z'}$ (resp. id_Z). Soient X et Y deux CW-complexes (pointés); si $f : X \to Y$ est une équivalence d'homotopie faible, J.H.C. Whitehead a montré (*cf.* [36]) que f est alors une équivalence d'homotopie.

Si g_0 et $g_1 : Z \to Z'$ sont faiblement homotopes, pour tout espace compact X, les applications $(g_0)_*$ et $(g_1)_* : [X, Z] \to [X, Z']$ sont égales.

2.1.10. L'application continue $\hat{\gamma}^{A,A'} : BGL(A)^+ \wedge BGL(A')^+ \to BGL(A \otimes A')^+$ nous permet de définir une application

$$\begin{aligned} K_n(A) \times K_p(A') &= \pi_n(BGL(A)^+) \times \pi_p(BGL(A')^+) \\ &\to \pi_{n+p}(BGL(A \otimes A')^+) = K_{n+p}(A \otimes A') \end{aligned}$$

par la formule

$$[f] \bigstar [f'] = [\hat{\gamma} \circ (f \wedge f')].$$

THÉORÈME 2.1.11. — *L'application* $\bigstar : K_n(A) \times K_p(A') \to K_{n+p}(A \otimes A')$ *est naturelle en* A *et* A', *bilinéaire et associative* ($n, p \geqq 1$). $\square$

Supposons que A soit commutatif. L'application codiagonale $\nabla : A \otimes A \to A$, $a \otimes b \mapsto ab$ nous permet de définir par composition un homomorphisme (noté encore $\bigstar$) :

$$K_n(A) \times K_p(A) \to K_{n+p}(A).$$

THÉORÈME 2.1.12. — *Si* A *est commutatif, pour tout* $x \in K_n(A)$ *et tout* $y \in K_p(A)$, $n, p \geqq 1$ *on a la formule*

$$x \bigstar y = (-1)^{np} y \bigstar x.$$

Démonstration. — Notons t l'automorphisme de $A \otimes A$ défini par $t(a \otimes b) = b \otimes a$ et par $t^+ : BGL(A \otimes A)^+ \to BGL(A \otimes A)^+$ l'application induite. Puisque A est commutatif $\nabla \circ t = \nabla$. Notons $s : S^n \wedge S^p \to S^p \wedge S^n$ l'homéomorphisme qui échange les facteurs.

Le diagramme ci-dessous est commutatif

$$\begin{tikzcd} S^n \wedge S^p \arrow[r, "\hat{\gamma} \circ (f \wedge g)"] \arrow[d, "s"] & BGL(A \otimes A)^+ \arrow[r, "\nabla_*^+"] \arrow[d, "t^+"] & BGL(A)^+ \arrow[d, "id"] \\ S^p \wedge S^n \arrow[r, "\hat{\gamma} \circ (g \wedge f)"] & BGL(A \otimes A)^+ \arrow[r, "\nabla_*^+"] & BGL(A)^+ \end{tikzcd}$$

Comme la classe d'homotopie de s est $(-1)^{np}$. id la formule est démontrée. $\square$

La somme $\bigoplus_{n \geq 1} K_n(A)$ est ainsi munie d'une structure d'anneau gradué anticommutatif (*cf.* 2.4.3 pour une extension de ce résultat).

2.2. Les produits $K_1 \times K_1 \to K_2$ *et* $K_1 \times K_2 \to K_3$. — Nous appellerons « groupe à dualité de Poincaré orienté de dimension n » un groupe Γ tel qu'il existe une variété orientée de dimension n qui soit un espace d'Eilenberg-MacLane $K(\Gamma, 1)$. On notera $B\Gamma$ cette variété.

Lemme 2.2.1. — *Soit Γ un groupe à dualité de Poincaré orienté de dimension n, $\zeta_\Gamma \in H_n(\Gamma; \mathbf{Z})$ sa classe fondamentale. Soit G un groupe à somme directe tel que*

$$H_1(G; \mathbf{Z}) = H_2(G; \mathbf{Z}) = \ldots = H_{n-1}(G; \mathbf{Z}) = 0.$$

Alors pour tout homomorphisme $\alpha : \Gamma \to G$ l'application α^+ se factorise de manière unique à homotopie près à travers S^n, l'application $B\Gamma \to S^n$ étant de degré 1 :

$$\begin{tikzcd} B\Gamma \arrow[rr, "\alpha^+"] \arrow[dr] & & BG^+ \\ & S^n \arrow[ur, "\hat{\alpha}^+"'] & \end{tikzcd}$$

L'image de $[\hat{\alpha}^+] \in \pi_n(BG^+)$ par l'isomorphisme d'Hurewicz est $\alpha_*(\zeta_\Gamma) \in H_n(G; \mathbf{Z})$.

Démonstration. — L'espace BG^+ est $(n-1)$-connexe, donc la restriction de α^+ au $(n-1)$-squelette $(B\Gamma)_{n-1}$ de $B\Gamma$ est homotopiquement triviale. Or $B\Gamma/(B\Gamma)_{n-1}$ a le type d'homotopie de S^n car $B\Gamma$ est une variété orientable de dimension n; la surjection $B\Gamma \to B\Gamma/(B\Gamma)_{n-1}$ est une application de degré 1.

L'homomorphisme d'Hurewicz $\pi_n(BG^+) \to H_n(BG^+)$ est un isomorphisme car BG^+ est $(n-1)$-connexe. Dans le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & \pi_n(S^n) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_n(BG^+) \arrow[d] \\ H_n(B\Gamma) \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\alpha_*^+"'] & H_n(S^n) \arrow[r] & H_n(BG^+) \end{tikzcd}$$

l'image du générateur de $\pi_n(S^n)$ par la flèche horizontale est $[\hat{\alpha}^+]$ et par la flèche verticale la classe fondamentale de S^n. Donc l'image de la classe fondamentale de $B\Gamma$ dans $H_n(BG^+) = H_n(G; \mathbf{Z})$ est l'image de $[\hat{\alpha}^+]$ par l'isomorphisme d'Hurewicz. □

Exemples :

(*a*) $n = 1$, $\Gamma = \mathbf{Z}$, $G = GL(A)$;

(*b*) $n = 2$, $\Gamma = \Pi_g = \langle a_1, \ldots, a_g, a'_1, \ldots, a'_g \rangle \Big/ \prod_{i=1}^{g} [a_i, a'_i]$, $G = E(A)$ ($B\Pi_g$ est une surface de genre g. On note ζ_g sa classe fondamentale);

(*c*) $n = 3$, $\Gamma = \Pi_g \times \mathbf{Z}$, $G = \mathrm{St}(A)$.

2.2.2. *Le produit* $K_1(A) \times K_1(A') \to K_2(A'')$. — Soient A et A′ deux anneaux et A″ leur produit tensoriel au-dessus de **Z**.

Rappelons la définition du produit $K_1(A) \times K_1(A') \to \mathrm{Ker}(\mathrm{St}(A'') \xrightarrow{\varphi} E(A''))$ donnée essentiellement par Milnor [20]. Les éléments $\alpha \in GL_p(A)$ et $\alpha' \in GL_q(A')$ définissent les classes $\{\alpha\} \in K_1(A)$ et $\{\alpha'\} \in K_1(A')$. On considère

$$D_\alpha = (\alpha \otimes 1_q) \oplus (\alpha^{-1} \otimes 1_q) \oplus (1_p \otimes 1_q) \quad \text{et} \quad D'_{\alpha'} = (1_p \otimes \alpha') \oplus (1_p \otimes 1_q) \oplus (1_p \otimes \alpha'^{-1})$$

qui sont des éléments de $E(A'')$. On les relève en $\tilde{D}_\alpha \in \mathrm{St}(A'')$ et $\tilde{D}'_{\alpha'} \in \mathrm{St}(A'')$. Puisque D_α et $D'_{\alpha'}$ commutent, on a $[\tilde{D}_\alpha, \tilde{D}'_{\alpha'}] \in \mathrm{Ker}\,\varphi$. Milnor définit le produit de $\{\alpha\}$ et $\{\alpha'\}$ comme étant $[\tilde{D}_\alpha, \tilde{D}'_{\alpha'}]$.

PROPOSITION 2.2.3. — *Le produit* $\bigstar : K_1(A) \times K_1(A') \to K_2(A'')$ *coïncide au signe près avec celui défini par Milnor. De manière précise, pour tout* $\alpha \in GL_p(A)$ *et tout* $\alpha' \in GL_q(A')$ *on a*

$$\{\alpha\} \bigstar \{\alpha'\} = ([\tilde{D}_\alpha, \tilde{D}'_{\alpha'}])^{-1} \in \mathrm{Ker}\,\varphi.$$

Démonstration. — Puisque D_α et $D'_{\alpha'}$ commutent, ils définissent un homomorphisme

$$(D_\alpha . D'_{\alpha'}) : \quad \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \to E(A''), \qquad (1, 0) \mapsto D_\alpha, \quad (0, 1) \mapsto D'_{\alpha'}.$$

L'application $\gamma_{p,q} \circ (\alpha^+ \times \alpha'^+) : S^1 \times S^1 \to BGL(A'')^+$ se factorise de manière unique à homotopie près à travers $BE(A'')^+$ et l'application $S^1 \times S^1 \to BE(A'')^+$ qu'on en déduit est homotope à $(D_\alpha . D'_{\alpha'})^+$. En effet, on a

$$\begin{aligned}
\gamma_{p,q} \circ (\alpha^+ \times \alpha'^+) &= (\alpha \otimes \alpha')^+ - (\alpha \otimes 1_q)^+ - (1_p \otimes \alpha')^+ \\
&= (\alpha \otimes \alpha')^+ + (\alpha^{-1} \otimes 1_q)^+ + (1_p \otimes \alpha'^{-1})^+ \\
&= ((\alpha \otimes \alpha') \oplus (\alpha^{-1} \otimes 1_q) \oplus (1_p \otimes \alpha'^{-1}))^+ \\
&= (D_\alpha . D'_{\alpha'})^+.
\end{aligned}$$

D'après le lemme 2.2.1 l'homomorphisme $(D_\alpha . D'_{\alpha'})^+$ définit un élément de

$$\pi_2(BE(A'')^+) = K_2(A'')$$

qui est donc $[\widehat{(D_\alpha . D'_{\alpha'})^+}] = \{\alpha\} \bigstar \{\alpha'\}$. Appliquons le théorème 1.3.7 à la suite exacte

$$(\bigstar) \qquad 1 \to \mathrm{Ker}\,\varphi \xrightarrow{i} \mathrm{St}(A'') \xrightarrow{\varphi} E(A'') \to 1$$

en posant :

— $\Gamma = \mathbf{Z}$;

– $\rho : \mathbf{Z} \to \mathrm{St}(\mathrm{A}'')$, $\rho(1_{\mathbf{Z}}) = \tilde{\mathrm{D}}_\alpha$;
– $\chi : \mathbf{Z} \to \mathrm{St}(\mathrm{A}'')$, $\chi(1_{\mathbf{Z}}) = \tilde{\mathrm{D}}'_{\alpha'}$;
– $\sigma : \mathbf{Z} \to \mathrm{Ker}\,\varphi$, $\sigma(1_{\mathbf{Z}}) = [\tilde{\mathrm{D}}_\alpha, \tilde{\mathrm{D}}'_{\alpha'}]$;
– $\sigma' : \mathbf{Z} \to \mathrm{Ker}\,\varphi$, $\sigma'(1_{\mathbf{Z}}) = 1$;
– $u = 1 \in \mathrm{Ker}\,\varphi$.

L'homomorphisme $\Psi : \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \to \mathrm{E}(\mathrm{A}'')$ est alors $(\mathrm{D}_\alpha . \mathrm{D}'_{\alpha'})$.

Vérifions la formule (iii) de 1.3.7. On a

$$[\tilde{\mathrm{D}}_\alpha, \tilde{\mathrm{D}}'_{\alpha'}] \oplus \tilde{\mathrm{D}}'_{\alpha'} . \tilde{\mathrm{D}}_\alpha . \tilde{\mathrm{D}}'^{-1}_{\alpha'} = ([\tilde{\mathrm{D}}_\alpha, \tilde{\mathrm{D}}'_{\alpha'}] \oplus [\tilde{\mathrm{D}}'_{\alpha'}, \tilde{\mathrm{D}}_\alpha])(1 \oplus \tilde{\mathrm{D}}_\alpha).$$

Les commutateurs $[\tilde{\mathrm{D}}_\alpha, \tilde{\mathrm{D}}'_{\alpha'}]$ et $[\tilde{\mathrm{D}}'_{\alpha'}, \tilde{\mathrm{D}}_\alpha]$ sont dans Ker φ, donc par le lemme 1.4.1 on a

$$[\tilde{\mathrm{D}}_\alpha, \tilde{\mathrm{D}}'_{\alpha'}] \oplus [\tilde{\mathrm{D}}'_{\alpha'}, \tilde{\mathrm{D}}_\alpha] = [\tilde{\mathrm{D}}_\alpha, \tilde{\mathrm{D}}'_{\alpha'}] . [\tilde{\mathrm{D}}'_{\alpha'}, \tilde{\mathrm{D}}_\alpha] = 1.$$

Il s'ensuit

$$[\tilde{\mathrm{D}}_\alpha, \tilde{\mathrm{D}}'_{\alpha'}] \oplus (\tilde{\mathrm{D}}_\alpha)^{\tilde{\mathrm{D}}'_{\alpha'}} = (1 \oplus \tilde{\mathrm{D}}_\alpha)^1,$$

soit

$$(i \circ \sigma) \oplus \rho^{\chi(1)} = ((i \circ \sigma') \oplus \rho)^{i(u)}.$$

En conclusion, on a

$$\delta_*(\{\alpha\} \bigstar \{\alpha'\}) = \delta_*[\widehat{(\mathrm{D}_\alpha . \mathrm{D}'_{\alpha'})}^+] = [\tilde{\mathrm{D}}_\alpha, \tilde{\mathrm{D}}'_{\alpha'}]^{-1} \in \mathrm{Ker}\,\varphi,$$

après identification de $[\mathrm{S}^1, \mathrm{B}\,\mathrm{Ker}\,\varphi]$ avec Ker φ. □

Remarque. – Une autre manière d'effectuer la dernière partie de la démonstration de cette proposition est d'employer la notion de Multiplicateur de Schur pour identifier $\mathrm{H}_2(\mathrm{E}(\mathrm{A}))$ et Ker φ (*cf.* [20]). Nous allons donner les détails de cette autre démonstration car les résultats obtenus nous seront utiles par la suite.

LEMME 2.2.4. – *Soit* G *un groupe discret quelconque. Pour tout* $x \in \mathrm{H}_2(\mathrm{G}; \mathbf{Z})$ *il existe un entier* $g \geqq 1$ *et un homomorphisme* $\rho : \Pi_g \to \mathrm{G}$ *tel que* $\rho_*(\zeta_g) = x$.

Démonstration. – Soit $1 \to \mathrm{R} \to \mathrm{F} \to \mathrm{G} \to 1$ une suite exacte de groupes où F est libre. La suite spectrale d'homologie de cette extension fournit la suite exacte

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{H}_2(\mathrm{F}) & \to & \mathrm{H}_2(\mathrm{G}) & \to & \mathrm{H}_0(\mathrm{G}; \mathrm{H}_1(\mathrm{R})) & \to & \mathrm{H}_1(\mathrm{F}) \\ \| & & & & \| & & \| \\ 0 & & & & \mathrm{R}/[\mathrm{R}, \mathrm{F}] & & \mathrm{F}/[\mathrm{F}, \mathrm{F}] \end{array}$$

d'où on déduit l'isomorphisme $\mathrm{H}_2(\mathrm{G}; \mathbf{Z}) \simeq \mathrm{R} \cap [\mathrm{F}, \mathrm{F}]/[\mathrm{R}, \mathrm{F}]$ (*cf.* [9], [20]). L'image de x dans $\mathrm{R} \cap [\mathrm{F}, \mathrm{F}]/[\mathrm{R}, \mathrm{F}]$ est la classe d'un élément qu'on peut écrire $\prod_{i=1}^{g} [x_i, x'_i]$, $x_i, x'_i \in \mathrm{F}$. Dans la suite exacte $1 \to \mathrm{R}_g \to \mathrm{F}_g \to \Pi_g \to 1$, F_g est le groupe libre de générateurs $\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_g, \tilde{a}'_1, \ldots, \tilde{a}'_g$ et R_g le plus petit sous-groupe distingué de F contenant $\prod_{i=1}^{g} [\tilde{a}_i, \tilde{a}'_i]$. On définit $\tilde{\rho} : \mathrm{F}_g \to \mathrm{F}$ par $\tilde{\rho}(\tilde{a}_i) = x_i$, $\tilde{\rho}(\tilde{a}'_i) = x'_i$. L'image de R_g par $\tilde{\rho}$

appartient à R car $\prod_{i=1}^{g} [x_i, x_i'] \in \mathrm{R}$. Par passage au quotient on en déduit un homomorphisme $\rho : \Pi_g \to \mathrm{G}$.

La formule $\rho_* (\zeta_g) = x$ résulte du fait que l'image de ζ_g par l'isomorphisme $\varkappa_g : \mathrm{H}_2 (\Pi_g ; \mathbf{Z}) \xrightarrow{\approx} \mathrm{R}_g \cap [\mathrm{F}_g , \mathrm{F}_g]/[\mathrm{R}_g , \mathrm{F}_g]$ est la classe de $\left(\prod_{i=1}^{g} [\tilde{a}_i , \tilde{a}_i']\right)^{-1}$. En effet, considérons la surjection $\mathrm{F}_g \to \mathrm{F}_1 = \langle \tilde{u}, \tilde{v} \rangle$ qui envoie $\tilde{a}_1$ sur $\tilde{u}$, $\tilde{a}_1'$ sur $\tilde{v}$ et les autres générateurs sur l'élément neutre. Cette surjection induit un homomorphisme

$$\Pi_g \xrightarrow{p} \Pi_1 = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$$

et une application de degré un $\mathrm{B}\,\Pi_g \to \mathrm{S}^1 \times \mathrm{S}^1$. Dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}_2(\Pi_g) & \xrightarrow{\quad p_* \quad} & \mathrm{H}_2(\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}) \\ {\scriptstyle \varkappa_g} \downarrow \wr & & {\scriptstyle \varkappa_1} \downarrow \wr \\ \mathrm{R}_g \cap [\mathrm{F}_g , \mathrm{F}_g]/[\mathrm{R}_g , \mathrm{F}_g] & \to & \mathrm{R}_1 \cap [\mathrm{F}_1 , \mathrm{F}_1]/[\mathrm{R}_1 , \mathrm{F}_1] \end{array}$$

toutes les flèches sont des isomorphismes et $p_* (\zeta_g) = \zeta_1$. L'image par la flèche horizontale inférieure de $\left(\prod_{i=1}^{g} [\tilde{a}_i , \tilde{a}_i']\right)^{-1}$ est $[\tilde{u}, \tilde{v}]^{-1} = [\tilde{v}, \tilde{u}]$. L'explicitation de l'isomorphisme $\varkappa_1$ montre que si on représente ζ_1 par le 2-cycle $(u, v)-(v, u)$ dans la bar-résolution de $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$, on a $\varkappa_1 (\zeta_1) =$ classe de $[\tilde{v}, \tilde{u}]$. On en conclut l'égalité

$$\varkappa_g(\zeta_g) = \left(\prod_{i=1}^{g} [\tilde{a}_i , \tilde{a}_i']\right)^{-1}. \quad \square$$

Soient A un anneau et $\alpha : \Pi_g \to \mathrm{E}(\mathrm{A})$ un homomorphisme de groupes. On note $\tilde{\alpha}_i$, $\tilde{\alpha}_i'$ des relèvements de $\alpha (a_i)$, $\alpha (a_i')$ dans St (A).

COROLLAIRE 2.2.5. — *Pour tout* $x \in \mathrm{K}_2 (\mathrm{A})$ *il existe un homomorphisme* $\alpha : \Pi_g \to \mathrm{E}(\mathrm{A})$ *tel que l'image de x par les isomorphismes*

$$\mathrm{K}_2(\mathrm{A}) \approx \pi_2(\mathrm{BE}(\mathrm{A})^+) \approx \mathrm{H}_2(\mathrm{E}(\mathrm{A})) \approx \mathrm{Ker}\,\varphi$$

sont $[\hat{\alpha}^+]$, $\alpha_* (\zeta_g)$, $\left(\prod_{i=1}^{g} [\tilde{\alpha}_i , \tilde{\alpha}_i']\right)^{-1}$.

Démonstration. — Seul le fait que l'image de x dans Ker φ soit $\left(\prod_{i=1}^{g} [\tilde{\alpha}_i , \tilde{\alpha}_i']\right)^{-1}$ n'est pas tout à fait immédiat. Milnor a montré dans [20] que pour $\mathrm{G} = \mathrm{E}(\mathrm{A})$ on a l'identification des suites exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 \to & \mathrm{R} \cap [\mathrm{F}, \mathrm{F}]/[\mathrm{R}, \mathrm{F}] & \to & [\mathrm{F}, \mathrm{F}]/[\mathrm{R}, \mathrm{F}] & \to & \mathrm{F}/\mathrm{R} & \to 1 \\ & \wr & & \wr & & \| & \\ 1 \longrightarrow & \mathrm{Ker}\,\varphi & \longrightarrow & \mathrm{St}(\mathrm{A}) & \xrightarrow{\varphi} & \mathrm{E}(\mathrm{A}) & \to 1 \end{array}$$

Les relèvements x_i, $x'_i \in \mathrm{F}$ de $\alpha(a_i)$, $\alpha(a'_i)$ peuvent être choisis dans $[\mathrm{F}, \mathrm{F}]$ car $\mathrm{E}(\mathrm{A})$ est parfait. Leurs images $\tilde{\alpha}_i$, $\tilde{\alpha}'_i$ dans $\mathrm{St}(\mathrm{A})$ sont des relèvements de $\alpha(a_i)$, $\alpha(a'_i)$. Or, on a vu dans le cours de la démonstration du lemme précédent, que l'image de $\alpha_*(\zeta_g)$ dans $\mathrm{R} \cap [\mathrm{F}, \mathrm{F}]/[\mathrm{R}, \mathrm{F}]$ est la classe de $\left(\prod_{i=1}^{g} [x_i, x'_i]\right)^{-1}$. $\square$

2.2.6. *Description du produit* $\mathrm{K}_1(\mathrm{A}) \times \mathrm{K}_2(\mathrm{A}') \to \mathrm{K}_3(\mathrm{A}'')$. — Le groupe $\mathrm{K}_1(\mathrm{A})$ [resp. $\mathrm{K}_2(\mathrm{A}')$, resp. $\mathrm{K}_3(\mathrm{A}'')$] est isomorphe à $\mathrm{H}_1(\mathrm{GL}(\mathrm{A}); \mathbf{Z})$ [resp. $\mathrm{H}_2(\mathrm{E}(\mathrm{A}); \mathbf{Z})$, resp. $\mathrm{H}_3(\mathrm{St}(\mathrm{A}''); \mathbf{Z})$] (*cf.* 1.4).

On se propose de définir une application bilinéaire

$$\mathrm{H}_1(\mathrm{GL}(\mathrm{A}); \mathbf{Z}) \times \mathrm{H}_2(\mathrm{E}(\mathrm{A}'); \mathbf{Z}) \to \mathrm{H}_3(\mathrm{St}(\mathrm{A}''); \mathbf{Z})$$

qui transmuée par les isomorphismes précédents coïncide avec le produit $\bigstar$.

Soit $\beta : \mathbf{Z} \to \mathrm{GL}_p(\mathrm{A})$ qui définit $\{\beta\} \in \mathrm{H}_1(\mathrm{GL}(\mathrm{A}))$ et $\alpha : \Pi_g \to \mathrm{E}_q(\mathrm{A}')$ qui définit $\{\alpha\} \in \mathrm{H}_2(\mathrm{E}(\mathrm{A}'))$. L'homomorphisme $\alpha_- : \Pi_g \to \mathrm{E}_q(\mathrm{A}')$ est défini par $\alpha_-(a_i) = \alpha(a'_{g-i})$ et $\alpha_-(a'_i) = \alpha(a_{g-i})$.

PROPOSITION 2.2.7. — *L'homomorphisme*

$$\varkappa = (\beta \otimes \alpha) \oplus (\beta^{-1} \otimes 1_q) \oplus (1_p \otimes \alpha_-) : \mathbf{Z} \times \Pi_g \to \mathrm{E}(\mathrm{A}'')$$

se factorise à travers $\mathrm{St}(\mathrm{A}'')$ *en* $\mu : \mathbf{Z} \times \Pi_g \to \mathrm{St}(\mathrm{A}'')$. *Pour toute factorisation* μ *de* $\varkappa$ *l'image de la classe fondamentale de la variété* $\mathrm{B}(\mathbf{Z} \times \Pi_g)$ *par* μ_* *est le produit*

$$\{\beta\} \bigstar \{\alpha\} \in \mathrm{K}_3(\mathrm{A}'') = \mathrm{H}_3(\mathrm{St}(\mathrm{A}'')).$$

Démonstration. — Remarquons que

$$\prod_{i=1}^{g} [\alpha(a_i), \alpha(a'_i)] . [\alpha(a'_{g-i}), \alpha(a_{g-i})] = 1,$$

donc (lemme 1.4.1) :

$$\prod_{i=1}^{g} [\alpha(a_i), \alpha(a'_i)] \oplus \prod_{i=1}^{g} [\alpha_-(a_i), \alpha_-(a'_i)] = 1$$

et (corollaire 2.2.5) :

$$[\hat{\alpha}^+] + [\hat{\alpha}_-^+] = 1.$$

D'après la définition de $\gamma_{p,q}$ (2.1.2), on a

$$\begin{aligned} \gamma_{p,q} \circ (\beta^+ \times \alpha^+) &= (\beta \otimes \alpha)^+ - (\beta \otimes 1_q)^+ - (1_p \otimes \alpha)^+ \\ &= (\beta \otimes \alpha)^+ + (\beta^{-1} \otimes 1_q) + (1_p \otimes \alpha_-)^+ \\ &= ((\beta \otimes \alpha) \oplus (\beta^{-1} \otimes 1_q) \oplus (1_p \otimes \alpha_-))^+ = \varkappa^+. \end{aligned}$$

Par conséquent, le diagramme en flèches pleines ci-dessous est commutatif

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{B}\mathbf{Z} \times \mathrm{B}\Pi_g \arrow[r, dotted, "\mu^+"] \arrow[dl] \arrow[dd, "\beta^+ + \alpha^+"] \arrow[ddr, "\varkappa^+"] & \mathrm{B}\,\mathrm{St}(\mathrm{A}'') \arrow[dd, dotted, "\varphi^+"] \\ \mathrm{S}^1 \times \mathrm{S}^2 \arrow[dr] & & \\ & \mathrm{BGL}(\mathrm{A})^+ \times \mathrm{BE}(\mathrm{A}')^+ \arrow[r, "\gamma"] & \mathrm{BE}(\mathrm{A}'')^+ \end{tikzcd}$$

D'autre part γ est homotopiquement triviale sur $\mathrm{BGL}(\mathrm{A})^+ \vee \mathrm{BE}(\mathrm{A}')^+$, donc $\gamma \circ (\beta^+ \times \hat{\alpha}^+)$ (et par suite $\varkappa^+$) se factorise à homotopie près à travers S^3 et définit ainsi $\{\beta\} \bigstar \{\alpha\}$.

Ainsi $\varkappa^+$ est homotopiquement triviale sur le 2-squelette de $\mathrm{B}\,\mathbf{Z} \times \mathrm{B}\,\Pi_g$. Désignons par $\tilde{\beta}$, $\tilde{\alpha}_i$, $\tilde{\alpha}'_i$ des antécédents dans $\mathrm{St}(\mathrm{A}'')$ de $\varkappa(1_{\mathbf{Z}})$, $\varkappa(a_i)$, $\varkappa(a'_i)$. La restriction de $\varkappa^+$ à $\mathrm{B}\,\Pi_g$ définit l'élément $\left(\prod_{i=1}^{g} [\alpha_i, \alpha'_i]\right)^{-1}$ de Ker φ (corollaire 2.2.5); on a donc $\prod_{i=1}^{g} [\alpha_i, \alpha'_i] = 1$, De même soit S^1_i (resp. $\mathrm{S}^1_{i'}$) le cercle de $\mathrm{B}\,\Pi_g$ défini par l'inclusion $\mathbf{Z} \to \mathrm{B}\,\Pi_g$, $1_{\mathbf{Z}} \mapsto a_i$ (resp. $1_{\mathbf{Z}} \to a'_i$); la restriction de $\varkappa^+$ à $\mathrm{S}^1 \times \mathrm{S}^1_i$ (resp. $\mathrm{S}^1 \times \mathrm{S}^1_{i'}$) définit l'élément $([\tilde{\beta}, \tilde{\alpha}_i])^{-1}$ (resp. $([\tilde{\beta}, \tilde{\alpha}'_i])^{-1}$ de Ker φ; on a donc (corollaire 2.2.5) $[\tilde{\beta}, \tilde{\alpha}_i] = 1$ (resp. $[\tilde{\beta}, \tilde{\alpha}'_i] = 1$). Posons $\mu(1_{\mathbf{Z}}) = \tilde{\beta}$, $\mu(a_i) = \tilde{\alpha}_i$ et $\mu(a'_i) = \tilde{\alpha}'_i$. L'homomorphisme μ est bien défini car on vient de montrer les identités $\prod_{i=1}^{g} [\tilde{\alpha}_i, \tilde{\alpha}'_i] = [\tilde{\beta}, \tilde{\alpha}_i] = [\tilde{\beta}, \tilde{\alpha}'_i] = 1$.

Le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{B}(\mathbf{Z} \times \Pi_g) \arrow[r, "\mu^+"] \arrow[d] \arrow[dr, "\varkappa^+"] & \mathrm{B\,St}(\mathrm{A}'')^+ \arrow[d, "\varphi^+"] \\
\mathrm{S}^3 \arrow[r, "\hat{\gamma} \circ (\beta^+ \wedge \alpha^+)"] & \mathrm{BE}(\mathrm{A}'')^+
\end{tikzcd}$$

est commutatif et la formule

$$\mu_*(\zeta_{\mathbf{Z} \times \Pi_g}) = \{\beta\} \bigstar \{\alpha\}$$

est une conséquence immédiate du lemme 2.2.1. □

Exemple 2.2.8. — Soient $a, b, c \in \mathrm{A}^*$ et $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$ leurs images dans $\mathrm{K}_1(\mathrm{A})$. Les éléments

$$\begin{array}{l}
u = h_{12}(a).h_{56}(a^{-1}).\quad 1 \quad .\,h_{11\,13}(a), \\
v = h_{13}(b).\ h_{57}(b)\ .h_{89}(b^{-1}).\quad 1, \\
w = h_{14}(c).\quad 1 \quad .\,h_{8\,10}(c)\ .h_{11\,12}(c^{-1}),
\end{array}$$

de $\mathrm{St}(\mathrm{A})$ (*cf.* 1.1.12) commutent deux à deux et définissent un homomorphisme $\mu : \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \to \mathrm{St}(\mathrm{A})$. L'image de $\zeta_{\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}} \in \mathrm{H}_3(\mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \times \mathbf{Z})$ par μ_* est

$$\{a\} \bigstar \{b\} \bigstar \{c\} \in \mathrm{H}_3(\mathrm{St}(\mathrm{A})).$$

2.3. LE SPECTRE $\mathbf{K}_\mathrm{A}$ ET L'ISOMORPHISME $\mathrm{K}_n(\mathrm{A}) \xrightarrow{\approx} \mathrm{K}_{n+1}(\mathrm{SA})$.

2.3.1. *L'application continue* $\varepsilon_\mathrm{A} : \mathrm{S}^1 \wedge \mathrm{BGL}(\mathrm{A})^+ \to \mathrm{BE}(\mathrm{SA})^+$. — Notons j l'injection $\mathbf{Z} \to \mathrm{GL}_1(\mathrm{S}\,\mathbf{Z})$ définie par $j(1_{\mathbf{Z}}) = \tau$ où

$$\tau = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ 1 & 0 & & \\ & 1 & 0 & \\ 0 & & 1 & 0 \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \in (\mathrm{S}\,\mathbf{Z})^*.$$

Pour tout anneau A, 1_p désigne la $p \times p$-matrice unité ($1_1 = 1$).

LEMME ET DÉFINITION 2.3.2. — *L'application continue*

$$\hat{\gamma}\circ(j^+\wedge \mathrm{id}^+) : S^1 \wedge \mathrm{BGL}(A)^+ \to \mathrm{BGL}(SA)^+$$

se factorise de manière unique à homotopie faible près à travers $\mathrm{BE}(SA)^+$. *On note* $\varepsilon_A : S^1 \wedge \mathrm{BGL}(A)^+ \to \mathrm{BE}(SA)^+$ *cette factorisation et* $\varepsilon'_A : \mathrm{BGL}(A)^+ \to \Omega\, \mathrm{BE}(SA)^+$ *l'application adjointe.*

Démonstration. — Il est clair qu'il suffit de montrer que l'application

$$\gamma_{1,q}\circ(j^+\times \mathrm{id}^+) : S^1\times \mathrm{BGL}_q(A)^+ \to \mathrm{BGL}(SA)^+$$

se factorise à travers $\mathrm{BE}(SA)^+$. On a

$$\gamma_{1,q}\circ(j^+\times \mathrm{id}^+) = (j\otimes \mathrm{id})^+ - (j\otimes 1_q)^+ - (1\otimes \mathrm{id})^+.$$

L'homomorphisme $(1\otimes \mathrm{id}) : \mathrm{GL}_1(S\,\mathbf{Z})\times \mathrm{GL}_q(A) \to \mathrm{GL}(SA)$ se factorise à travers $\mathrm{GL}(CA)$; or $\mathrm{BGL}(CA)^+$ est contractile (théorème 1.4.8) donc $[(1\otimes \mathrm{id}^+)] = 0$. D'autre part, si on note $j^{-1} : \mathbf{Z} \to \mathrm{GL}_1(S\,\mathbf{Z})$ l'homomorphisme tel que $j^{-1}(1_{\mathbf{Z}}) = \tau^{-1}$ on a $[(j^{-1})^+] = -[j^+]$. Il s'ensuit :

$$[\gamma_{1,q}\circ(j^+\times \mathrm{id}^+)] = [(j\otimes \mathrm{id})^+] - [(j\otimes 1_q)^+],$$

$$[\gamma_{1,q}\circ(j^+\times \mathrm{id}^+)] = [(j\otimes \mathrm{id})^+] + [(j^{-1}\otimes 1_q)^+].$$

2.3.2′ $$[\gamma_{1,q}\circ(j^+\times \mathrm{id}^+)] = [((j\otimes \mathrm{id})\oplus(j^{-1}\otimes 1_q))^+].$$

Il nous reste à montrer que pour tout $n\in\mathbf{Z}$ et $c\in \mathrm{GL}_q(A)$, on a

$$((j\otimes \mathrm{id})\oplus(j^{-1}\otimes 1_q))(n, c)\in \mathrm{E}(SA) \quad \text{soit } (\tau^n\otimes c)\oplus(\tau^{-n}\otimes 1_q)\in \mathrm{E}(SA).$$

Dans $K_1(SA)$ on a l'égalité

$$\begin{aligned}\{(\tau^n\otimes c)\oplus(\tau^{-n}\otimes 1_q)\} &= \{(\tau^n\otimes 1_q).(1\otimes c)\} + \{\tau^{-n}\otimes 1_q\}\\ &= \{\tau^n\otimes 1_q\} + \{1\otimes c\} - \{\tau^n\otimes 1_q\} = \{1\otimes c\}.\end{aligned}$$

Or $\{1\otimes c\}$ provient d'un élément de $K_1(CA) = 0$; d'où $\{(\tau^n\otimes c)\oplus(\tau^{-n}\otimes 1_q)\} = 0$ et par suite

$$(\tau^n\otimes c)\oplus(\tau^{-n}\otimes 1_q)\in \mathrm{E}(SA). \quad \square$$

REMARQUE 2.3.3. — On sait que l'on a $K_0(A) \xrightarrow{\approx} K_1(CA)$ (théorème 1.4.7). D'autre part $\mathrm{BE}(SA)^+$ est le revêtement universel de $\mathrm{BGL}(SA)^+$ (proposition 1.1.7), donc on peut étendre l'application continue ε_A en

$$S^1\wedge(K_0(A)\times \mathrm{BGL}(A)^+) \to K_0(SA)\times \mathrm{BGL}(SA)^+.$$

Plus précisément, si $e : S^1 \to \mathrm{BGL}(SA)^+$ est une application continue qui représente un élément $[e]\in\pi_1(\mathrm{BGL}(SA)^+) = K_0(A)$ on pose

$$(t, [e], x)\mapsto(0, e(t)+\varepsilon_A(t, x))\in(K_0(SA)\times \mathrm{BGL}(SA)^+).$$

On note encore ε_A cette application et ε'_A son adjointe

$$K_0(A)\times BGL(A)^+ \to \Omega(K_0(SA)\times BGL(SA)^+).$$

DÉFINITION 2.3.4. — *La suite d'espaces*

$$(\mathbf{K}_A)_n = \begin{cases} \Omega^{-n}(K_0(A)\times BGL(A)^+) & si \quad n<0, \\ K_0(S^n A)\times BGL(S^n A)^+ & si \quad n \geqq 0 \end{cases}$$

et d'applications continues

$$\left.\begin{cases} \textit{adjointe de } \mathrm{id}_{(\mathbf{K}_A)_n} & si \quad n<0 \\ \varepsilon_{S^n A} & si \quad n\geqq 0 \end{cases}\right\} S^1 \wedge (\mathbf{K}_A)_n \to (\mathbf{K}_A)_{n+1}$$

définit un spectre qu'on note $\mathbf{K}_A$.

THÉORÈME 2.3.5. — *Pour tout anneau* A *le spectre* $\mathbf{K}_A$ *est un* Ω*-spectre.*

Plus précisément, l'application $\varepsilon'_A : BGL(A)^+ \to \Omega\, BE(A)^+$ *est l'équivalence d'homotopie inverse de* η_A (*cf.* 1.4.9).

Démonstration. — Soit $\delta_* : [S^1\wedge BGL(A)^+,\ BE(SA)^+] \to [BGL(A)^+,\ BGL(\tilde{A})^+]$ l'homomorphisme de connexion de la fibration (*cf.* 1.3.5) associée à la suite exacte de groupes

$$(\bigstar) \qquad 1 \to GL(\tilde{A}) \xrightarrow{i} GL(CA) \xrightarrow{r} E(SA) \to 1.$$

La classe d'homotopie de ε_A a pour image par δ_* l'élément $[\eta_A \circ \varepsilon'_A]$. On va montrer que $\delta_*[\varepsilon_A]$ est la classe d'homotopie de l'application induite par l'homomorphisme $\Phi : GL(A) \to GL(\tilde{A})$, qui permet d'identifier $BGL(A)^+$ et $BGL(\tilde{A})^+$ (*cf.* 1.4.10) Puisqu'une équivalence d'homotopie faible entre CW-complexes est une équivalence d'homotopie, il nous suffit de faire la démonstration pour la restriction $(\varepsilon_A)_q$ de ε_A (resp. ε'_A) à $S^1\wedge BGL_q(A)^+$ [resp. $BGL_q(A)^+$] pour tout q. Pour ce faire, on va appliquer le théorème 1.3.7 à la suite exacte ($\bigstar$) et au groupe $\Gamma = GL_q(A)$.

Écrivons $a\oplus b = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b\end{pmatrix}$ pour simplifier les notations. Les applications ρ, χ, σ, σ', ψ et l'élément u du théorème 1.3.7 sont définis par :

$$\rho(c) = \begin{pmatrix} 1\otimes c & 0 \\ 0 & 1\otimes 1_q \end{pmatrix} \in GL_{2q}(CA) \quad \text{pour tout } c\in GL_q(A).$$

$$\chi(1_Z) = \begin{pmatrix} \tilde{\tau}\otimes 1_q & 0 \\ -p\otimes 1_q & \tilde{\tau}^*\otimes 1_q \end{pmatrix}, \qquad \chi(1_Z)^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde{\tau}^*\otimes 1_q & -p\otimes 1_q \\ 0 & \tilde{\tau}\otimes 1_q \end{pmatrix} \in GL_{2q}(CA),$$

avec

$$\tilde{\tau} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \qquad \tilde{\tau}^* = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & 1 & 0 & \\ & & 1 & \ddots \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad p = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix} \quad \text{dans } C\mathbf{Z};$$

$\sigma(c) = 1 \otimes 1_q \in \mathrm{GL}_q(\tilde{\mathrm{A}})$, $\qquad \sigma'(c) = p \otimes c + (1-p) \otimes 1_q \in \mathrm{GL}_q(\tilde{\mathrm{A}})$ pour tout $c \in \mathrm{GL}_q(\mathrm{A})$.

$$u = \begin{pmatrix} (1-p)\otimes 1_q & 0 & p \otimes 1_q \\ 0 & 1 \otimes 1_q & 0 \\ p \otimes 1_q & 0 & (1-p)\otimes 1_q \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_{3q}(\tilde{\mathrm{A}}), \qquad u^{-1} = u;$$

L'homomorphisme $\psi : \mathbf{Z} \times \mathrm{GL}_q(\mathrm{A}) \to \mathrm{E}_{2q}(\mathrm{SA})$ est alors défini par

$$\psi(n, c) = \begin{pmatrix} \tau^n \otimes c & 0 \\ 0 & \tau^{-n} \otimes 1_q \end{pmatrix} \qquad \text{car} \quad r(\tilde{\tau}) = \tau, \quad r(\tilde{\tau}^*) = \tau^{-1} \quad \text{et} \quad r(p) = 0.$$

Notons $\omega : \mathrm{E}(\mathrm{SA}) \to \mathrm{GL}(\mathrm{SA})$ l'injection naturelle. On a $\omega \circ \psi = (j \otimes id) \oplus (j^{-1} \otimes 1_q)$, soit, d'après (2.3.2)',

$$[(\omega \circ \psi)^+] = [\gamma_{1,q} \circ (j^+ \times \mathrm{id}^+)].$$

On en déduit (*cf.* 1.3.6) $[\widehat{(\omega \circ \psi)^+}] = [\hat{\gamma}_{1,q} \circ (j^+ \wedge \mathrm{id}^+)]$ et par suite (lemme 2.3.2) $[\widehat{\psi^+}] = [(\varepsilon_{\mathrm{A}})_q]$.

Vérifions la formule (iii) du théorème 1.3.7. On a

$$\rho(c)^{\chi(1_{\mathbf{Z}})} = \chi(1_{\mathbf{Z}})\,\rho(c)\,\chi(1_{\mathbf{Z}})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 \otimes c & 0 \\ 0 & p \otimes c + (1-p) \otimes 1_q \end{pmatrix},$$

$$i \circ \sigma(c) \oplus \rho(c)^{\chi(1_{\mathbf{Z}})} = \begin{pmatrix} 1 \otimes 1_q & 0 & 0 \\ 0 & 1 \otimes c & 0 \\ 0 & 0 & p \otimes c + (1-p) \otimes 1_q \end{pmatrix}.$$

On calcule aisément

$$\begin{pmatrix} (1-p)\otimes 1_q & p \otimes 1_q \\ p \otimes 1_q & (1-p) \otimes 1_q \end{pmatrix}$$
$$\times \begin{pmatrix} p \otimes c + (1-p)\otimes 1_q & 0 \\ 0 & 1 \otimes 1_q \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} (1-p)\otimes 1_q & p \otimes 1_q \\ p \otimes 1_q & (1-p) \otimes 1_q \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 \otimes 1_q & 0 \\ 0 & p \otimes c + (1-p) \otimes 1_q \end{pmatrix},$$

et par suite,

$$i \circ \sigma(c) \oplus \rho(c)^{\chi(1_{\mathbf{Z}})} = (i \circ \sigma'(c) \oplus \rho(c))^{i(u)}.$$

En conclusion, on a

$$\delta_* [(\varepsilon_{\mathrm{A}})_q] = [(\sigma' \,|_{\mathrm{GL}_q(\mathrm{A})})^+].$$

Or l'élément $(\sigma'(c))_{ij}$ de CA est égal à

$$(p \otimes c + (1-p) \otimes 1_q)_{ij} = p c_{ij} + (1-p)\,\delta_{ij} = \begin{bmatrix} c_{ij} & & & \\ & \delta_{ij} & & 0 \\ & & \delta_{ij} & \\ & 0 & & \ddots \end{bmatrix},$$

par conséquent (*cf.* 1.4.10), $\sigma'_{|\mathrm{GL}_q(\mathrm{A})}$ est bien le composé $\mathrm{GL}_q(\mathrm{A}) \subsetneq \mathrm{GL}(\mathrm{A}) \xrightarrow{\Phi} \mathrm{GL}(\tilde{\mathrm{A}})$ comme annoncé. □

Les résultats suivants, conséquences immédiates du théorème précédent, ont été conjecturés par Gersten [7].

COROLLAIRE 2.3.6. — *Le produit par* $\{\tau\} \in \mathrm{K}_1(\mathrm{S}\,\mathbf{Z})$ *induit un isomorphisme*

$$-\bigstar\{\tau\} : \quad \mathrm{K}_n(\mathrm{A}) \xrightarrow{\approx} \mathrm{K}_{n+1}(\mathrm{SA}). \quad \square$$

COROLLAIRE 2.3.7. — *L'élément* $t \in \mathbf{Z}[t, t^{-1}]$ *définit* $\{t\} \in \mathrm{K}_1(\mathbf{Z}[t, t^{-1}])$ *et le produit par* $\{t\}$ *induit une injection* (*scindée*) $\mathrm{K}_n(\mathrm{A}) \to \mathrm{K}_{n+1}(\mathrm{A}[t, t^{-1}])$. *Par conséquent, on a*

$$\mathrm{K}_{n+1}(\mathrm{A}[t, t^{-1}]) = \mathrm{K}_{n+1}(\mathrm{A}) \oplus \mathrm{K}_n(\mathrm{A}) \oplus ?\,.$$

Démonstration. — Le théorème 2.3.5 implique que l'application composée

$$\mathrm{K}_n(\mathrm{A}) \to \mathrm{K}_{n+1}(\mathrm{A}[t, t^{-1}]) \to \mathrm{K}_{n+1}(\mathrm{SA}) \xrightarrow{\approx} \mathrm{K}_n(\mathrm{A})$$

est l'identité. □

Puisque $\mathbf{K}_\mathrm{A}$ est un Ω-spectre, ses groupes d'homotopie sont isomorphes à $\pi_n(\mathrm{K}_0(\mathrm{A}) \times \mathrm{BGL}(\mathrm{A})^+) = \mathrm{K}_n(\mathrm{A})$ pour $n \geqq 0$. Il est donc naturel de poser :

DÉFINITION 2.3.8 : $\mathrm{K}_n(\mathrm{A}) = \pi_n(\mathbf{K}_\mathrm{A})$, $n \in \mathbf{Z}$. — Les groupes $\mathrm{K}_n(\mathrm{A})$ ainsi définis pour $n < 0$ coïncident avec ceux définis par Bass [2].

2.4. PROPRIÉTÉS MULTIPLICATIVES DU SPECTRE $\mathbf{K}_\mathrm{A}$. — Le produit tensoriel (externe) des modules définit un produit

$$\otimes : \quad \mathrm{K}_0(\mathrm{A}) \times \mathrm{K}_0(\mathrm{A}') \to \mathrm{K}_0(\mathrm{A} \otimes \mathrm{A}').$$

D'autre part, les isomorphismes

$$\mathrm{K}_0(\mathrm{A}) \xrightarrow{\approx} \mathrm{K}_1(\mathrm{SA}), \qquad \mathrm{K}_0(\mathrm{A}) \xrightarrow{\approx} \mathrm{K}_2(\mathrm{S}^2\mathrm{A})$$

et le produit

$$\bigstar : \quad \mathrm{K}_1(\mathrm{SA}) \times \mathrm{K}_1(\mathrm{SA}') \to \mathrm{K}_2(\mathrm{SA} \otimes \mathrm{SA}')$$

nous permettent de définir aussi un produit

$$\bigstar : \quad \mathrm{K}_0(\mathrm{A}) \times \mathrm{K}_0(\mathrm{A}') \to \mathrm{K}_0(\mathrm{A} \otimes \mathrm{A}').$$

PROPOSITION 2.4.1. — *Les produits* $\otimes$ *et* $\bigstar$: $\mathrm{K}_0(\mathrm{A}) \times \mathrm{K}_0(\mathrm{A}') \to \mathrm{K}_0(\mathrm{A} \otimes \mathrm{A}')$ *coïncident. Plus précisément le diagramme ci-dessous est commutatif.*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{K}_0(\mathrm{A}) \times \mathrm{K}_0(\mathrm{A}') \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d, "\wr"] & \mathrm{K}_0(\mathrm{A} \otimes \mathrm{A}') \arrow[d, "\wr"] \\
\mathrm{K}_1(\mathrm{SA}) \times \mathrm{K}_1(\mathrm{SA}) \arrow[r, "\bigstar"] & \mathrm{K}_2(\mathrm{SA} \otimes \mathrm{SA}')
\end{tikzcd}$$

Démonstration. — D'après le corollaire 2.3.6 l'isomorphisme $K_1(SA) \xrightarrow{\approx} K_2(S^2 A)$ est induit par le ★-produit par $\{\tau\}$. Notons $\otimes$ les produits $K_i \times K_j \to K_{i+j}$ $(i+j \leqq 2)$ définis par Milnor [20]. Si $x \in K_0(A)$ et $y \in K_0(A')$ on a

$$(x \otimes \{\tau\}) \otimes (y \otimes \{\tau\}) = ((x \otimes y) \otimes \{\tau\}) \otimes \{\tau\} \quad ([20], \text{ lemme } 8.9),$$

d'où d'après 2.2.3 :

$$(x \otimes \{\tau\}) \bigstar (y \otimes \{\tau\}) = ((x \otimes y) \otimes \{\tau\}) \bigstar \{\tau\}.$$

Cette dernière formule exprime précisément la commutativité du diagramme ci-dessus. □

PROPOSITION 2.4.2. — *Pour tous anneaux* A *et* A′ *l'application*

$$\hat{\gamma} : \quad BGL(S^n A)^+ \wedge BGL(S^m A')^+ \to BGL(S^{n+m} A \otimes A')^+$$

s'étend en un accouplement de spectres $\mathbf{K}_A \wedge \mathbf{K}_{A'} \to \mathbf{K}_{A \otimes A'}$ *au sens de Whitehead* [35] *En particulier si* A *est commutatif le spectre* $\mathbf{K}_A$ *est multiplicatif.*

Démonstration. — Rappelons (*cf.* [35]) qu'un accouplement entre spectres $(\mathbf{E}_p, r_p)$, $(\mathbf{F}_q, s_q)$ et $(\mathbf{G}_n, t_n)$ est la donnée d'applications continues

$$\mu_{p,q} : \quad \mathbf{E}_p \wedge \mathbf{F}_q \to \mathbf{G}_{p+q}$$

telles que dans le diagramme ci-dessous le pentagone supérieur soit commutatif (à homotopie près) et le pentagone inférieur $(-1)^p$-commutatif (à homotopie près) :

$$\begin{tikzcd}
(S^1 \wedge \mathbf{E}_p) \wedge \mathbf{F}_q \arrow[r, "r_p \wedge \mathrm{id}"] \arrow[d, "\wr"] & \mathbf{E}_{p+1} \wedge \mathbf{F}_q \arrow[dr, "\mu_{p+1,q}"] & \\
S^1 \wedge (\mathbf{E}_p \wedge \mathbf{F}_q) \arrow[r, "\mathrm{id} \wedge \mu_{p,q}"] \arrow[d, "\wr"] & S^1 \wedge \mathbf{G}_{p+q} \arrow[r, "t_{p+q}"] & \mathbf{G}_{p+q+1} \\
(\mathbf{E}_p \wedge S^1 \wedge \mathbf{F}_q) \arrow[r, "\mathrm{id} \wedge s_q"] & \mathbf{E}_p \wedge \mathbf{F}_{q+1} \arrow[ur, "\mu_{p,q+q}"'] &
\end{tikzcd}$$

Ici $\mathbf{E} = \mathbf{K}_A$, $\mathbf{F} = \mathbf{K}_{A'}$, $\mathbf{G} = \mathbf{K}_{A \otimes A'}$ et $\mu = \hat{\gamma}$.

La commutativité de ces diagrammes résultent de la commutativité de diagrammes analogues où l'on a remplacé S^1 par $BGL(S\,\mathbf{Z})^+$. La proposition est alors conséquence immédiate de la proposition 2.1.8. □

COROLLAIRE 2.4.3. — *Le produit* ★ : $K_n(A) \times K_p(A') \to K_{n+p}(A \otimes A')$ *est bien défini et associatif pour tout* $n, p \in \mathbf{Z}$. *En particulier si* A *est commutatif* $K_*(A) = \bigoplus_n K_n(A)$ *est un anneau gradué anti-commutatif.* □

2.4.4. Pour tout anneau A, l'Ω-spectre $\mathbf{K}_A$ définit une théorie d'homologie généralisée et une théorie de cohomologie généralisée de la catégorie des CW-complexes finis dans les groupes abéliens (*cf.* [35]). Ces foncteurs sont définis, pour tout CW-complexe fini (pointé) X par

$$\tilde{h}_n(X; \mathbf{K}_A) = \varinjlim_k [S^{n+k}, X \wedge (\mathbf{K}_A)_k] = \pi_n(X \wedge \mathbf{K}_A),$$

$$\tilde{h}^n(X; \mathbf{K}_A) = \varinjlim_k [S^k \wedge X, (\mathbf{K}_A)_{n+k}] = [X, (\mathbf{K}_A)_n].$$

Ces foncteurs s'étendent à la catégorie des paires de CW-complexes (X, Y) en posant $h(X, Y; \mathbf{K}_A) = h(X/Y; \mathbf{K}_A)$. Si $Y = \emptyset$, $X/\emptyset$ désigne $X \cup (pt)$ (réunion disjointe), (pt) étant le point-base de $X/\emptyset$. On note $h(X; \mathbf{K}_A) = h(X, \emptyset; \mathbf{K}_A)$. On remarque que pour tout CW-complexe pointé connexe X, on a $h(X; \mathbf{K}_A) = \tilde{h}(X; \mathbf{K}_A) \oplus h(pt; \mathbf{K}_A)$.

Le morphisme de spectre $\hat{\gamma} : \mathbf{K}_A \wedge \mathbf{K}_{A'} \to \mathbf{K}_{A \otimes A'}$ nous permet de construire divers « produits » reliant les théories h_* et h^*. En particulier, le produit de Kronecker :

$$\langle -, - \rangle_{\mathbf{K}} : \quad \tilde{h}^p(X; \mathbf{K}_A) \times \tilde{h}_q(X; \mathbf{K}_{A'}) \to \pi_{q-p}(\mathbf{K}_{A \otimes A'}) = K_{q-p}(A \otimes A')$$

est construit de la manière suivante. Soient $f : S^k \wedge X \to (\mathbf{K}_A)_{p+k}$ un représentant de $[f] \in \tilde{h}^p(X; \mathbf{K}_A)$ et $g : S^{q+l} \to X \wedge (\mathbf{K}_{A'})_l$ un représentant de $[g] \in \tilde{h}_q(X; \mathbf{K}_{A'})$. L'application composée

$$S^{k+q+l} = S^k \wedge S^{q+l} \xrightarrow{\mathrm{id} \wedge g} S^k \wedge X \wedge (\mathbf{K}_{A'})_l \xrightarrow{f \wedge \mathrm{id}} (\mathbf{K}_A)_{p+k} \wedge (\mathbf{K}_{A'})_l \xrightarrow{\hat{\gamma}} (\mathbf{K}_{A \otimes A'})_{p+k+l}$$

représente un élément de $K_{(k+q+l)-(p+k+l)}(A \otimes A') = K_{q-p}(A \otimes A')$ qui est $\langle [f], [g] \rangle_{\mathbf{K}}$.

CHAPITRE III

Structure multiplicative en K-théorie hermitienne

Dans cette section on définit une structure multiplicative pour la K-théorie hermitienne ${}_\varepsilon L_*(A)$. On montre que cette structure se transmet aux groupes de Witt ${}_\varepsilon W_*(A)$ (du moins à la 2-torsion près). Dans le dernier paragraphe, on applique les résultats obtenus à la comparaison de la KO-théorie homologique de l'espace BG et des groupes de chirurgie $L_n^x(G)$.

3.1. LA ${}_\varepsilon$L-THÉORIE ET LE SPECTRE ${}_\varepsilon \mathbf{L}_A$. — Les constructions des chapitres I et II se répètent presque mot pour mot en K-théorie hermitienne; il suffit de remplacer GL par ${}_\varepsilon O$. Les propositions et théorèmes étant les mêmes que dans le cas linéaire on donnera seulement les énoncés des principaux d'entre eux.

3.1.1. Tout anneau A muni d'une antiinvolution $a \mapsto \bar{a}$ est appelé anneau hermitien. On rappelle la définition du groupe ${}_\varepsilon O_{n,n}(A)$ où $\varepsilon = \pm 1$ (*cf.* [12]) :

$${}_\varepsilon O_{n,n}(A) = \left\{ \alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_{2n}(A) \;\middle|\; \alpha \text{ laisse invariant la forme } \varepsilon\text{-hermitienne } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Posons $({}^t a)_{ij} = \bar{a}_{ji}$ pour toute matrice a à coefficients dans A; puis

$$\alpha^* = \begin{pmatrix} {}^t d & \varepsilon\, {}^t b \\ \varepsilon\, {}^t c & {}^t a \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$\alpha \in {}_\varepsilon O_{n,n}(A) \iff \alpha^* = \alpha^{-1}.$$

Le sous-groupe des commutateurs de ${}_\varepsilon O(A) = \varinjlim {}_\varepsilon O_{n,n}(A)$, noté $E_\varepsilon O(A)$, est parfait (*cf.* [13], [34] ou [3], p. 156). La somme directe sur GL (A) permet de définir [*cf.* 1.3.2 exemple (*d*)] une somme directe sur ${}_\varepsilon O(A)$. Cette somme directe munit l'espace $B\,{}_\varepsilon O(A)^+$ d'une structure de H-espace. L'anneau CA (resp. SA) est muni de l'antiinvolution $\alpha \mapsto \bar{\alpha} = {}^t\alpha$ et la suite

$$B\,{}_\varepsilon O(\tilde{A})^+ \to B\,{}_\varepsilon O(CA)^+ \to BE\,{}_\varepsilon O(SA)^+$$

est une fibration.

THÉORÈME 3.1.2. — *Il existe une équivalence d'homotopie naturelle*

$$\eta_A : \quad \Omega BE\,{}_\varepsilon O(SA)^+ \to B\,{}_\varepsilon O(A)^+. \quad \square$$

DÉFINITION 3.1.3. — *On pose* (*cf.* [12], p. 385) :

$${}_\varepsilon L_n(A) \;= \pi_n(B\,{}_\varepsilon O(A)^+) \qquad \textit{pour} \quad n \geqq 1$$

$${}_\varepsilon L_{-n}(A) = {}_\varepsilon L_1(S^{n+1}A) \qquad \textit{pour} \quad n \geqq 0.$$

3.1.4. *Structure multiplicative.* — Soient A et A′ deux anneaux hermitiens. Le produit tensoriel induit un homomorphisme de groupes

$${}_\varepsilon O_{p,p}(A) \times {}_\eta O_{q,q}(A') \to {}_{\varepsilon\eta} O_{2pq,\,2pq}(A \otimes A').$$

La même construction que dans le cas linéaire (*cf.* 2.1) nous permet de construire l'application

$$\hat{\gamma} : \quad B\,{}_\varepsilon O(A)^+ \wedge B\,{}_\eta O(A')^+ \to B\,{}_{\varepsilon\eta} O(A \otimes A')^+$$

unique à homotopie faible près et possédant les propriétés énoncées en 2.1.8 où l'on a remplacé BGL $(A)^+$ par $B_\varepsilon O(A)^+$, BGL $(A')^+$ par $B_\varepsilon O(A')^+$, etc.

En passant aux groupes d'homotopie on en déduit une application (notée $(a, b) \mapsto a \bigstar b$) :

$${}_\varepsilon L_n(A) \times {}_\eta L_p(A') \to {}_{\varepsilon\eta} L_{n+p}(A \otimes A').$$

Posons

$${}_{\bullet}L_n(A) = {}_1 L_n(A) \oplus {}_{-1} L_n(A).$$

COROLLAIRE 3.1.5. — *L'application* $\bigstar : {}_\varepsilon L_n(A) \times {}_\eta L_p(A') \to {}_{\varepsilon\eta} L_{n+p}(A \otimes A')$ *est bilinéaire et associative. Pour tout anneau commutatif* A *contenant* 1/2, *elle munit* $\bigoplus_n {}_1 L_n(A)$ (*resp.* $\bigoplus_n {}_{\bullet}L_n(A)$] *d'une structure d'anneau gradué anticommutatif.* $\square$

Si l'anneau hermitien commutatif A ne contient pas 1/2, on a seulement une structure de pseudo-anneau sur $\bigoplus_n {}_1L_n(A)$ et $\bigoplus_n {}_{\cdot}L_n(A)$.

3.1.6. *Le spectre* ${}_\varepsilon\mathbf{L}_A$. — On suppose désormais que l'anneau A contient 1/2, et on note $\mathbf{Z}' = \mathbf{Z}[1/2]$. L'injection

$$\mathbf{Z} \to {}_1O_{1,1}(S\,\mathbf{Z}'),$$

$$1_{\mathbf{Z}} \mapsto \tau^L = \varphi\begin{pmatrix}\tau & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\varphi^{-1} \qquad \text{avec} \quad \varphi = \begin{pmatrix}1/2 & 1/2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

définit une application continue $(\tau^L)^+ : S^1 \to B_1\,O(S\,\mathbf{Z}')^+$. On note $\{\tau^L\}$ sa classe d'homotopie dans ${}_1L_1(S\,\mathbf{Z}')$.

L'application composée $\hat{\gamma} \circ ((\tau^L)^+ \wedge id) : S^1 \wedge B_\varepsilon\,O(A)^+ \to B_\varepsilon\,O(SA)^+$ se factorise par $BE_\varepsilon\,O(SA)^+$ et l'application continue $S^1 \wedge B_\varepsilon\,O(A)^+ \to BE_\varepsilon\,O(SA)^+$ qu'on en déduit nous permet de construire le spectre ${}_\varepsilon\mathbf{L}_A$:

$$({}_\varepsilon\mathbf{L}_A)_n = \begin{cases} \Omega^{-n}({}_\varepsilon L_0(A) \times B_\varepsilon O(A)^+) & \text{si} \quad n < 0,\\ {}_\varepsilon L_0(S^n A) \times B_\varepsilon O(S^n A)^+ & \text{si} \quad n \geqq 0.\end{cases}$$

THÉORÈME 3.1.7. — ${}_\varepsilon\mathbf{L}_A$ *est un* Ω-*spectre et le produit par* $\{\tau^L\} : {}_\varepsilon L_n(A) \to {}_\varepsilon L_{n+1}(SA)$ *est un isomorphisme.* □

Ce théorème achève la démonstration des théorèmes de périodicité en K-théorie hermitienne donnés par Karoubi (*cf.* [12], p. 392).

On note $h_n(-, {}_\varepsilon\mathbf{L}_A)$ et $h^n(-, {}_\varepsilon\mathbf{L}_A)$ les théories d'homologie et de cohomologie généralisées associées au spectre ${}_\varepsilon\mathbf{L}_A$.

Les applications $B_\varepsilon O(A)^+ \wedge B_\eta\,O(A')^+ \to B_{\varepsilon\eta}\,O(A \otimes A')^+$ s'étendent en un accouplement de spectres ${}_\varepsilon\mathbf{L}_A \wedge {}_\eta\mathbf{L}_{A'} \to {}_{\varepsilon\eta}\mathbf{L}_{A\otimes A'}$. Dans le cas où A est commutatif, on a un produit de Kronecker que l'on note

$$\langle -, - \rangle_{\mathbf{L}} : \quad h^p(X; {}_\varepsilon\mathbf{L}_A) \times h_q(X; {}_\eta\mathbf{L}_A) \to {}_{\varepsilon\eta}L_{q-p}(A).$$

3.1.8. Comme dans le cas linéaire, le groupe ${}_\varepsilon L_0(A)$ peut s'interpréter comme le groupe de Grothendieck d'une catégorie additive. On va donner la définition de cette catégorie dans le cas où 2 est inversible dans A. Soit M un A-module à droite projectif de type fini. On note

$${}^t\mathrm{M} = \{ f : \mathrm{M} \to \mathrm{A} \mid f \text{ linéaire et } f(x\lambda) = \bar{\lambda} f(x) \}.$$

Une forme ε-hermitienne non dégénérée est la donnée d'un isomorphisme de A-modules $\Phi : M \to {}^tM$ tel que ${}^t\Phi = \varepsilon\,\Phi$. Le couple (M, Φ) est appelé un module ε-hermitien. Un morphisme de (M, Φ) dans (M', Φ') est la donnée d'un homomorphisme de A-modules $f : M \to M'$ tel que $\Phi = {}^tf.\Phi'.f$. On note ${}_\varepsilon\mathcal{Q}(A)$ la catégorie des A-modules ε-hermitiens et des isomorphismes. C'est une catégorie additive pour la somme directe des modules. Son groupe de Grothendieck est précisément ${}_\varepsilon L_0(A)$. L'isomorphisme

$${}_\varepsilon L_0(A) \to {}_\varepsilon L_1(SA) = {}_\varepsilon O(SA)/[{}_\varepsilon O(SA), {}_\varepsilon O(SA)]$$

se décrit de la manière suivante. Soit (M, Φ) un module ε-hermitien. On a

$$(M, \Phi) \oplus (M, -\Phi) \xrightarrow{\sim} \left(M \oplus {}^tM, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Soit N un module projectif de type fini sur A tel que $M \oplus N \simeq A^n$. On a alors un isomorphisme de A-modules ε-hermitiens

$$\psi : \quad (M, \Phi) \oplus (M, -\Phi) \oplus \left(N \oplus {}^tN, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{\sim} \left(A^n \oplus {}^tA^n, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix} \right).$$

On considère l'automorphisme $(\tau^L \otimes 1) \oplus (1 \otimes 1) \oplus (1 \otimes 1)$ du module ε-hermitien

$$(S\,\mathbf{Z}' \otimes M, 1 \otimes \Phi) \oplus (S\,\mathbf{Z}' \otimes M, -1 \otimes \Phi) \oplus \left(S\,\mathbf{Z}' \otimes (N \oplus {}^tN), 1 \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Le transmué de cet isomorphisme nous fournit un élément de ${}_\varepsilon O_{n,n}(SA) \subset {}_\varepsilon O(SA)$ dont la classe dans ${}_\varepsilon L_1(SA)$ est l'image de $[(M, \Phi)] \in {}_\varepsilon L_0(A)$.

On renvoie à [13] pour la description de ${}_\varepsilon L_0(A)$ dans le cas général et pour la démonstration.

Remarque 3.1.9. — Notons I_+ la classe dans ${}_1L_0(\mathbf{Z}') \otimes \mathbf{Z}'$ du module 1-hermitien $(\mathbf{Z}', x \mapsto x)$ et I_- la classe du module 1-hermitien $(\mathbf{Z}', x \mapsto -x)$. On a (*cf.* [13]). ${}_1L_0(\mathbf{Z}') \otimes \mathbf{Z}' \approx \mathbf{Z}' \oplus \mathbf{Z}'$ et I_+, I_- peuvent être pris comme générateurs. La structure multiplicative de ${}_1L_0(\mathbf{Z}') \otimes \mathbf{Z}'$ est donnée par les formules

$$I_+ . I_+ = I_- . I_- = I_+ \qquad \text{et} \qquad I_+ . I_- = I_- . I_+ = I_-.$$

De plus I_+ est l'élément unité des anneaux $\bigoplus_n {}_1L_n(A)$ et $\bigoplus {}_\bullet L_n(A)$ (A commutatif).

3.1.10. Soit A une algèbre de Banach involutive sur **R** ou **C**. Le groupe topologique ${}_\varepsilon O(A)$ admet un classifiant topologique $B\,{}_\varepsilon O(A)$ qui est un espace de lacets infinis. On note ${}_\varepsilon L_n(A) = \pi_n(B\,{}_\varepsilon O(A))$ et ${}_\varepsilon \mathbf{L}_A$ le spectre associé à l'espace $B\,{}_\varepsilon O(A)$. Si A_1 est un anneau hermitien discret et $A_1 \to A$ un homomorphisme d'anneaux antiinvolutifs, l'application continue $B\,{}_\varepsilon O(A_1) \to B\,{}_\varepsilon O(A)$ se factorise de manière unique à homotopie près par l'espace $B\,{}_\varepsilon O(A_1)^+$, d'où on en déduit un homomorphisme

$${}_\varepsilon L_n(A_1) \to {}_\varepsilon L_n(A);$$

de même on a un morphisme de spectre

$${}_\varepsilon \mathbf{L}_{A_1} \to {}_\varepsilon \mathbf{L}_A.$$

Remarquons que si X est un espace compact et $\mathbf{C}(X)$ [resp. $\mathbf{R}(X)$] l'algèbre des fonctions continues à valeurs dans **C** (resp. **R**) munie de la conjugaison complexe (resp. triviale), on a

$$\begin{aligned} {}_1L_n(\mathbf{C}(X)) = {}_{-1}L_n(\mathbf{C}(X)) &= KU^{-n}(X) \oplus KU^{-n}(X), \\ {}_1L_n(\mathbf{R}(X)) &= KO^{-n}(X) \oplus KO^{-n}(X) \\ {}_{-1}L_n(\mathbf{R}(X)) &= KU^{-n}(X) \end{aligned}$$

(*cf.* [12], p. 353).

3.2. LA $_{\varepsilon}$W-THÉORIE, LA KO-THÉORIE ET LES GROUPES DE CHIRURGIE. — On définit les groupes de Witt généralisés $_{\varepsilon}\overline{W}_n(A)$ ainsi que la théorie de (co) homologie $h(-;{}_{\varepsilon}\overline{W}_A)$, dont $_{\varepsilon}W_*(A)$ est le groupe des coefficients. On compare $_{\varepsilon}\overline{W}_n(Z'[G])$ aux groupes de chirurgie définis par Wall.

Dans ce paragraphe, les anneaux A et A′ sont hermitiens et contiennent 1/2, sauf mention expresse du contraire.

3.2.1 Rappelons que si Λ est un anneau et p un élément du centre de Λ tel que $p^2 = p$, Λ est canoniquement isomorphe à un produit d'anneaux $\Lambda_1 \times \Lambda_2$ avec

$$\Lambda_1 \approx p.\Lambda \approx \Lambda(1-p)\Lambda \qquad \text{et} \qquad \Lambda_2 \approx (1-p)\Lambda \approx \Lambda/p\Lambda.$$

Soit $f : M \to M'$ un homomorphisme de Λ-modules, alors M (resp. M′) est canoniquement isomorphe à un produit $M_1 \times M_2$ (resp. $M'_1 \times M'_2$) où M_1 (resp. M'_1) est un Λ_1-module et M_2 (resp. M'_2) un Λ_2-module. De plus f se scinde en $f_1 \times f_2$.

3.2.2. *Les foncteurs* $_{\varepsilon}\overline{W}_n$ *et* $h(-;{}_{\varepsilon}\overline{W}_A)$. — Notons $_{\varepsilon}\overline{L}_n(A) = {}_{\varepsilon}L_n(A) \otimes Z'$, $h(-;{}_{\varepsilon}\overline{L}_A) = h(-;{}_{\varepsilon}L_A) \otimes Z'$. L'élément $p = 1/2(I_+ + I_-) \in {}_1\overline{L}_0(Z')$ (*cf.* 3.1.9) est dans le centre de $_1\overline{L}_*(A)$ pour tout A. De plus

$$p^2 = \frac{1}{4}(I_+^2 + I_+I_- + I_-I_+ + I_-^2) = \frac{1}{2}(I_+ + I_-) = p.$$

On applique alors les considérations du paragraphe (3.2.1).

DÉFINITION 3.2.3. — *Pour tout anneau* A *et tout entier* n *on note*

$$_{\varepsilon}\overline{W}_n(A) = {}_{\varepsilon}\overline{L}_n(A)/p.{}_{\varepsilon}\overline{L}_n(A)$$
$$h^n(-;{}_{\varepsilon}\overline{W}_A) = h^n(-;{}_{\varepsilon}\overline{L}_A)/p.h^n(-;{}_{\varepsilon}\overline{L}_A),$$
$$h_n(-;{}_{\varepsilon}\overline{W}_A) = h_n(-;{}_{\varepsilon}\overline{L}_A)/p.h_n(-;{}_{\varepsilon}\overline{L}_A).$$

Remarque 3.2.4. — Soit A un anneau hermitien ne contenant pas forcément 1/2. Le foncteur hyperbolique

$$_{\varepsilon}H : \; GL(A) \to {}_{\varepsilon}O(A),$$
$$\alpha \mapsto \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & {}^t\alpha^{-1} \end{pmatrix}$$

induit un homomorphisme $K_n(A) \to {}_{\varepsilon}L_n(A)$. Suivant [12], on pose

$$_{\varepsilon}W_n(A) = \operatorname{Coker}(K_n(A) \to {}_{\varepsilon}L_n(A)).$$

Il est facile de se convaincre que si $1/2 \in A$: $_{\varepsilon}\overline{W}_n(A) = {}_{\varepsilon}W_n(A) \otimes Z'$. Il est clair que les propriétés générales de la $_{\varepsilon}$L-théorie se transmettent à la $_{\varepsilon}$W-théorie. En particulier, il existe un produit [noté $(a, b) \mapsto a \bigstar b$] :

$$_{\varepsilon}\overline{W}_n(A) \times {}_{\eta}\overline{W}_p(A') \to {}_{\varepsilon\eta}\overline{W}_{n+p}(A \otimes A')$$

qui possède toutes les propriétés habituelles. L'image de $\{\tau^L\} \in {}_1L_1(S\,\mathbf{Z}')$ est notée $\{\tau^W\} \in {}_1\overline{W}_1(S\,\mathbf{Z}')$ et la multiplication par $\{\tau^W\}$ induit un isomorphisme

$$ {}_\varepsilon\overline{W}_n(A) \xrightarrow{\approx} {}_\varepsilon\overline{W}_{n+1}(SA). $$

Les théories $h(-\,;{}_\varepsilon\overline{W}_A)$ (A commutatif) sont munies d'un produit de Kronecker qu'on note

$$ \langle -, - \rangle_W : \quad h^p(X;\, {}_\varepsilon\overline{W}_A) \times h_q(X;\, {}_\eta\overline{W}_A) \to {}_{\varepsilon\eta}\overline{W}_{q-p}(A). $$

Les considérations ci-dessus sont valables pour les algèbres de Banach réelles car ${}_1\overline{L}_0(\mathbf{Z}') \to {}_1L_0(\mathbf{R})$ est un isomorphisme et l'image de p est un projecteur (non trivial). En particulier

$$ {}_1\overline{W}_n(\mathbf{R}(X)) \approx \overline{KO}^{-n}(X) = KO^{-n}(X) \otimes \mathbf{Z}' $$

et la surjection

$$ \overline{KO}^{-n}(X) \oplus \overline{KO}^{-n}(X) \approx {}_1\overline{L}_n(\mathbf{R}(X)) \to {}_1\overline{W}_n(\mathbf{R}(X)) \approx \overline{KO}^{-n}(X) $$

est donnée par $[E^+ \oplus E^-] \mapsto [E^+] - [E^-]$. On a aussi

$$ {}_{-1}\overline{W}_n(\mathbf{R}(X)) \approx \operatorname{Coker}(\overline{KO}^{-n}(X) \xrightarrow{c} \overline{KU}^{-n}(X)) $$

c étant l'homomorphisme de complexification.

Remarque. — En fait, on peut construire un spectre ${}_\varepsilon\overline{\mathbf{L}}_A$ en localisant le spectre ${}_\varepsilon\mathbf{L}_A$ par rapport au système multiplicatif (2^p). Ce spectre se scinde naturellement en un produit de deux spectres dont l'un ${}_\varepsilon\overline{\mathbf{W}}_A$ nous fournit les théories $h(-\,;{}_\varepsilon\overline{W}_A)$, (*cf.* [12], p. 395).

3.2.5. L'étude de la chirurgie des variétés a amené Wall à définir des groupes d'obstructions (*cf.* [32], [33]) $L_n^s(G)$, $L_n^h(G)$, etc. pour tout groupe fondamental G d'une variété de dimension n. Les lettres s, h, etc. indiquent la nature exacte du problème en question. Ces différents groupes sont périodiques de période 4 (en n) et sont isomorphes à la 2-torsion près.

Comme on ne s'intéresse pas ici à la 2-torsion, on notera ces groupes

$$ \overline{L}_n^x(G) = L_n^s(G) \otimes \mathbf{Z}' = L_n^h(G) \otimes \mathbf{Z}'. $$

THÉORÈME 3.2.6 : $\overline{L}_n^x(G) = {}_1\overline{W}_n(\mathbf{Z}'[G])$.

Démonstration. — D'après la remarque 3.2.4, on a

$$ {}_1\overline{W}_n(\mathbf{Z}'[G]) = {}_1W_n(\mathbf{Z}'[G]) \otimes \mathbf{Z}'. $$

Le théorème de localisation en K-théorie hermitienne [11] implique l'égalité

$$ {}_1W_n(\mathbf{Z}'[G]) \otimes \mathbf{Z}' = {}_1W_n(\mathbf{Z}[G]) \otimes \mathbf{Z}'. $$

Comme les groupes ${}_1\overline{W}_n(\mathbf{Z}'[G])$ sont périodiques de période 4 (*cf.* [12], p. 394) et que

$$ {}_1\overline{W}_n(\mathbf{Z}'[G]) \approx {}_{-1}\overline{W}_{n+2}(\mathbf{Z}'[G]), $$

il suffit de montrer qu'à la 2-torsion près on a

$$ {}_1W_0(\mathbf{Z}[G]) = L_0^x(G), \qquad {}_{-1}W_0(\mathbf{Z}[G]) = L_2^x(G), $$
$$ {}_1W_1(\mathbf{Z}[G]) = L_1^x(G), \qquad {}_{-1}W_1(\mathbf{Z}[G]) = L_3^x(G). $$

Ceci se fait en utilisant les définitions de ${}_\varepsilon W_0$ (resp. ${}_\varepsilon W_1$) comme groupe de Grothendieck (resp. de Bass) (*cf.* [32], p. 294-295, [12], p. 374). □

3.2.7. L'inclusion $i : \mathbf{Z}' \subsetneq \mathbf{R}$ induit un homomorphisme

$$ i_* : \quad {}_1\overline{W}_n(\mathbf{Z}') \to {}_1\overline{W}_n(\mathbf{R}) = \overline{KO}^{-n}(pt). $$

PROPOSITION 3.2.8. — *L'homomorphisme i_* est un isomorphisme.*

Démonstration. — On sait que les groupes $\overline{KO}^{-n}(pt)$ sont périodiques de période 4. D'autre part, Karoubi [12] a construit un élément $v_2 \in {}_{-1}\overline{W}_2(\mathbf{Z}')$ [resp. $v_{-2} \in {}_{-1}\overline{W}_{-2}(\mathbf{Z}')$] dont l'image dans ${}_{-1}\overline{W}_2(\mathbf{R}) = \overline{KU}^{-2}(pt)$ [resp ${}_{-1}\overline{W}_{-2}(\mathbf{R}) = KU^{+2}(pt)$] est le générateur usuel. Donc le produit $v_2 \bigstar v_{-2} \in {}_1\overline{W}_0(\mathbf{Z}')$ est $4\,I_+$. Il s'en suit que les groupes ${}_1\overline{W}_n(\mathbf{Z}')$ sont périodiques de période 4 et que ${}_1\overline{W}_{4n}(\mathbf{Z}') \to \overline{KO}^{-4n}(pt)$ est un isomorphisme pour tout n. D'autre part, si $n \not\equiv 0$ (mod. 4), on a $\overline{KO}^n(pt) = 0$ et ${}_1\overline{W}_n(\mathbf{Z}') = \overline{L}_n^x(e) = 0$. □

THÉORÈME 3.2.9. — *Pour tout* CW-*complexe fini* X, *on a*

$$ h_n(X; {}_1\overline{\mathbf{W}}_{\mathbf{Z}'}) \approx KO_n(X) \otimes \mathbf{Z}', $$
$$ h^n(X; {}_1\overline{\mathbf{W}}_{\mathbf{Z}'}) \approx KO^n(X) \otimes \mathbf{Z}'. $$

Démonstration. — L'inclusion $\mathbf{Z}' \subsetneq \mathbf{R}$ induit un morphisme de spectres

$$ {}_1\overline{\mathbf{W}}_{\mathbf{Z}'} \to {}_1\overline{\mathbf{W}}_{\mathbf{R}} $$

d'où un morphisme de théories (co) homologiques. D'après la proposition ci-dessus, l'homomorphisme

$$ h(X; {}_1\overline{\mathbf{W}}_{\mathbf{Z}'}) \to \overline{KO}(X) $$

et un isomorphisme pour $X = S^n$, donc c'est un isomorphisme pour tout CW-complexe fini X. □

Remarque. — L'isomorphisme $h_n(X; {}_1\overline{\mathbf{W}}_{\mathbf{Z}'}) \approx KO_n(X) \otimes \mathbf{Z}'$ est encore valable si X est un CW-complexe, d'après [21].

3.3. K-THÉORIE HERMITIENNE DES ALGÈBRES DE GROUPES. — Ce paragraphe nécessite la lecture préalable du paragraphe 4.1, dont il est la traduction dans le cas hermitien. Les constructions, propositions et démonstrations sont en tout point analogues au cas linéaire; nous contenterons donc d'énoncer les principaux résultats sans démonstrations.

3.3.1. Soient A un anneau hermitien contenant 1/2 et G un groupe discret. L'anneau A [G] est muni de l'antiinvolution définie par

$$\overline{\sum a_i g_i} = \sum \bar{a}_i g_i^{-1}.$$

L'inclusion $G \to {}_1O_{1,1}(Z'[G])$ définie par

$$g \mapsto \varphi \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \varphi^{-1}, \qquad \text{ou} \quad \varphi = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

nous permet de construire un homomorphisme de ${}_1L_0(Z')$-modules

$$_L\lambda_n : \quad h_n(BG; {}_\varepsilon\mathbf{L}_A) \to {}_\varepsilon L_n(A[G]).$$

Après tensorisation par Z', nous obtenons un homomorphisme de groupes

$$_W\lambda_n : \quad h_n(BG; {}_\varepsilon\overline{\mathbf{W}}_A) \to {}_\varepsilon\overline{W}_n(A[G]).$$

Dans le cas $A = Z'$, $\varepsilon = 1$, la composition de cet homomorphisme avec les isomorphismes $\overline{KO}_n(BG) \xrightarrow{\approx} h_n(BG; {}_1\overline{\mathbf{W}}_{Z'})$ et ${}_1\overline{W}_n(Z'[G]) \xrightarrow{\approx} \overline{L}_n^x(G)$ donne naissance à un homomorphisme de groupes

$$l(G) : \quad \overline{KO}_n(BG) \to \overline{L}_n^x(G).$$

Remarquons que $l(1)$ est un isomorphisme.

La théorie $\overline{KO}_*$ possède un produit externe puisque le spectre **BO** est multiplicatif. Parallèlement, les groupes $\overline{L}_*^x$ possèdent un produit hérité de ${}_1\overline{W}_*$.

3.3.2. L'homomorphisme $l(G)$ est compatible avec ces produits.

3.3.3. Plusieurs auteurs ([12], [23], [27]) ont montré que $L_n^x(G \times \mathbf{Z})$ est isomorphe à $\overline{L}_n^x(G) \oplus \overline{L}_{n-1}^x(G)$. De plus, comme dans le cas linéaire nous pouvons montrer que l'homomorphisme $\overline{L}_{n-1}^x(G) \to \overline{L}_n^x(G \times \mathbf{Z})$ est induit par le produit par le générateur $\{\tau^W\} \in {}_1\overline{W}_1(Z'[\mathbf{Z}]) = \overline{L}_1^x(\mathbf{Z})$; ($\{\tau^W\}$ est l'image de l'élément $\{\tau^L\}$ défini en 3.1.6, par passage au quotient). On déduit de ces assertions que $_W\lambda(\mathbf{Z}^p)$ est un isomorphisme pour tout entier p.

3.3.4. Mischenko [22] et Wall [33] ont aussi défini un homomorphisme $l_G : \overline{KO}_n(BG) \to \overline{L}_n^x(G)$, mais de manière géométrique. Rappelons-en brièvement la construction ([33], p. 263).

Soit M une variété compacte orientée de dimension n et de groupe fondamental G. Soit $f : M \to BG$ une application continue classifiant le revêtement universel de M. L'application f définit un élément du groupe de bordisme orienté $\Omega_n(BG)$ qu'on note (f). Soit Q^8 la PL-variété 3-connexe de Milnor, de signature 8, telle que l'obstruction chirurgicale de l'application $Q^8 \to S^8$ soit le générateur de $L_8^x(1) = L_0^x(1)$. L'obstruction chirurgicale de l'application $M \times Q^8 \to M \times S^8$ est un élément de $L_n^x(G)$ qu'on note $\psi(M)$. L'application $\Omega_*(BG) \to L_*^x(G)$, $(f) \mapsto \psi(M)$ est un homomorphisme de $\Omega_*(pt)$-modules,

$\Omega_*(pt)$ opérant sur $L_*^x(G)$ par la signature. Or d'après Conner-Floyd [5], $\Omega_*(BG) \otimes_{\Omega_*(pt)} Z' \to KO_*(BG) \otimes Z'$ est un isomorphisme. ($\Omega_*(pt)$ opérant trivialement sur Z'). On en déduit l'homomorphisme

$$l_G : \overline{KO}_*(BG) \to \bar{L}_*^x(G).$$

3.3.5. CONJECTURE. — *Les deux homomorphismes l_G et $l(G)$ coïncident.*

Cette conjecture est vraie pour $G = \mathbf{Z}^p$, car dans ce cas on peut calculer explicitement ces deux homomorphismes. On donnera aux paragraphes 5.3 et 5.4 d'autres arguments en faveur de cette conjecture.

CHAPITRE IV

K-théorie algébrique des algèbres de groupes

Soient A un anneau et G un groupe discret. On désigne par A [G] l'algèbre sur A du groupe G :

$$A[G] = A \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} \mathbf{Z}[G] = \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i g_i \;\middle|\; a_i \in A,\ g_i \in G,\ n \in \mathbf{N} \right\}.$$

La principale motivation de l'étude des groupes $K_n(A[G])$ est d'ordre topologique. En effet, Whitehead [37], puis Volodin [29], Hatcher et Wagoner [8] ont été amenés à définir pour tout groupe fondamental G d'une variété des groupes d'obstructions $Wh_n(G)$ ($n \geqq 0$) liées à des problèmes d'isotopie et de pseudo-isotopie.

Le principal objet de ce chapitre est de comparer entre eux les groupes $h_n(BG; \mathbf{K}_{\mathbf{Z}})$ définis en 2.4.4, $K_n(\mathbf{Z}[G])$ et $Wh_n(G)$, et d'en déduire la nullité de $Wh_2(G)$ pour certains groupes G.

4.1. L'HOMOMORPHISME $\lambda_n^A(G) : h_n(BG; \mathbf{K}_A) \to K_n(A[G])$. — Soit $j : G \to GL(\mathbf{Z}[G])$ l'injection définie par

$$j(g) = \begin{bmatrix} g & & & & \\ & 1 & & 0 & \\ & & 1 & & \\ & 0 & & 1 & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}.$$

On compose l'application $j^+ : BG \to BGL(\mathbf{Z}[G])^+$ avec l'inclusion

$$BGL(\mathbf{Z}[G])^+ \to K_0(\mathbf{Z}[G]) \times BGL(\mathbf{Z}[G])^+,$$

$x \mapsto (0, x)$ pour obtenir l'application $BG \to (\mathbf{K}_{\mathbf{Z}[G]})_0$ qu'on notera encore j^+ (*cf.* 2.3).

PROPOSITION 4.1.1. — *Les homomorphismes composés* δ_n :

$$(\mathbf{K}_A)_n \wedge BG \xrightarrow{\mathrm{id} \wedge j^+} (\mathbf{K}_A)_n \wedge (\mathbf{K}_{\mathbf{Z}[G]})_0 \xrightarrow{\hat{\gamma}} (\mathbf{K}_{A[G]})_n$$

définissent un homomorphisme de spectres $\mathbf{K}_A \wedge BG \to \mathbf{K}_{A[G]}$. *On applique le foncteur* π_n *à ce morphisme pour obtenir un homomorphisme de groupes*

$$\tilde{\lambda}_n^A(G) : \quad \tilde{h}_n(BG; \mathbf{K}_A) \to K_n(A[G]).$$

Démonstration. — L'homomorphisme de spectre $\mathbf{K}_A \wedge BG \to \mathbf{K}_{A[G]}$ est bien défini si pour tout n le diagramme

$$\begin{array}{ccc} S^1 \wedge (\mathbf{K}_A)_n \wedge BG & \xrightarrow{\varepsilon_A \wedge \mathrm{id}} & (\mathbf{K}_A)_{n+1} \wedge BG \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id} \wedge \delta_n} & & \downarrow{\scriptstyle \delta_{n+1}} \\ S^1 \wedge (\mathbf{K}_{A[G]})_n & \xrightarrow{\varepsilon_{A[G]}} & (\mathbf{K}_{A[G]})_{n+1} \end{array}$$

est commutatif à homotopie faible près. Cette propriété résulte de la commutativité à homotopie faible près (2.1.8) du diagramme

$$\begin{array}{ccc} (\mathbf{K}_\mathbf{Z})_1 \wedge (\mathbf{K}_A)_n \wedge (\mathbf{K}_{\mathbf{Z}[G]})_0 & \to & (\mathbf{K}_A)_{n+1} \wedge (\mathbf{K}_{\mathbf{Z}[G]})_0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathbf{K}_\mathbf{Z})_1 \wedge (\mathbf{K}_{A[G]})_n & \longrightarrow & (\mathbf{K}_{A[G]})_{n+1} \end{array} \qquad \square$$

On étend $\tilde{\lambda}$ à $h_n(BG; \mathbf{K}_A) = \tilde{h}_n(BG; \mathbf{K}_A) \oplus K_n(A)$ à l'aide de l'inclusion canonique $K_n(A) \hookrightarrow K_n(A[G])$. On note $\lambda_n^A(G) : h_n(BG; \mathbf{K}_A) \to K_n(A[G])$ cet homomorphisme. Lorsque A est commutatif, $h_*(BG; \mathbf{K}_A)$ et $K_*(A[G])$ sont des $K_*(A)$-modules et $\lambda_*^A(G)$ est un homomorphisme de $K_*(A)$-modules.

LEMME 4.1.2. — *L'image par* $\tilde{\lambda}_1^A(\mathbf{Z})$ *du générateur de* $\tilde{h}_1(S^1; \mathbf{K}_A) \approx K_0(A)$ *correspondant à* $1 \in K_0(A)$ *est l'élément* $\{u\} \in K_1(A[u, u^{-1}])$.

Démonstration. — L'élément $1 \in K_0(A)$ définit l'application continue

$$1 : \quad S^0 \to K_0(A) \times BGL(A)^+ = (\mathbf{K}_A)_0,$$

$s \mapsto (1, \bigstar)$ où s est l'élément de S^0 qui n'est pas le point-base de S^0. La suspension de cette application, soit $S^1 \wedge S^0 \to S^1 \wedge (\mathbf{K}_A)$ fournit un représentant du générateur de $\tilde{h}_1(S^1; \mathbf{K}_A)$. On cherche à calculer l'application composée

$$S^1 \wedge S^0 \xrightarrow{\mathrm{id} \wedge 1} S^1 \wedge (\mathbf{K}_A)_0 \xrightarrow{j^+ \wedge \mathrm{id}} (\mathbf{K}_{\mathbf{Z}[u, u^{-1}]})_0 \wedge (\mathbf{K}_A)_0 \xrightarrow{\hat{\gamma}} (\mathbf{K}_{A[u, u^{-1}]})_0.$$

L'élément de $K_1(A[u, u^{-1}])$ défini par cette application est donc le produit $[j^+] \bigstar 1$. Or j^+ est induit par l'homomorphisme de groupes $\mathbf{Z} \to GL(\mathbf{Z}[u, u^{-1}])$ $1_\mathbf{Z} \mapsto u$, donc $[j^+] = \{u\}$. Par suite $\lambda_1^A(\mathbf{Z})(1) = \{u\} \in K_1(A[u, u^{-1}])$. $\square$

4.1.3. Soient A et A' deux anneaux, X et X' deux CW-complexes. On définit un produit (externe) en homologie réduite

$$\tilde{h}_n(X; \mathbf{K}_A) \times \tilde{h}_p(X'; \mathbf{K}_{A'}) \to \tilde{h}_{n+p}(X \wedge X'; \mathbf{K}_{A \otimes A'})$$

par la formule $[f]\times[g]=[\hat{\gamma}\circ(f\wedge g)]$ où $f: S^k\to X\wedge(\mathbf{K}_A)_{k-n}$ (resp. $g: S^1\to X'\wedge(\mathbf{K}_A)_{l-p}$) représente l'élément $[f]\in\tilde{h}_n(X;\mathbf{K}_A)$ (resp. $[g]\in\tilde{h}_p(X';\mathbf{K}_{A'})$). En théorie non réduite, ce produit s'écrit :

$$h_n(X;\mathbf{K}_A)\times h_p(X';\mathbf{K}_{A'})\to h_{n+p}(X\times X';\mathbf{K}_{A\otimes A'}).$$

PROPOSITION 4.1.4. — *L'homomorphisme* λ *est compatible avec le produit* $\times$ *sur* h_* *et le produit* $\bigstar$ *sur* K_*. $\square$

Cette proposition signifie que si G et G′ sont deux groupes discrets, pour tout $x\in h_n(BG;\mathbf{K}_A)$ et pour tout $x'\in h_p(BG';\mathbf{K}_{A'})$, on a

$$\lambda_{n+p}^{A\otimes A'}(G\times G')(x\times x')=\lambda_n^A(G)(x)\bigstar\lambda_p^{A'}(G')(x').$$

Remarquons que le groupe $h_n(S^1\times BG;\mathbf{K}_A)$ se décompose en $h_n(BG;\mathbf{K}_A)\oplus h_{n-1}(BG;\mathbf{K}_A)$ alors que le groupe $K_n(A[\mathbf{Z}\times G])$ se décompose en $K_n(A[G])\oplus K_{n-1}(A[G])\oplus X$ où le groupe X peut ne pas être trivial (*cf.* 2.3.7).

4.2. LES GROUPES DE WHITEHEAD $Wh_n(G)$ POUR $n=0,1$ ET 2.

DÉFINITION ([29], [37]). — *Pour tout groupe discret* G *on pose* $Wh_0(G)=\tilde{K}_0(\mathbf{Z}[G])$ *et* $Wh_1(G)=K_1(\mathbf{Z}[G])/(\pm G)$.

On a adopté ici la notation classique $\tilde{K}_n(A)=\mathrm{Coker}(K_n(\mathbf{Z})\to K_n(A))$. On note $W(\pm G)$ le sous-groupe de $St(\mathbf{Z}[G])$ (*cf.* 1.1.12) engendré par les éléments de la forme $w_{ij}(\pm g)$ où $g\in G$.

DÉFINITION 4.2.1 [8]. — *Pour tout groupe discret* G, *on pose*

$$Wh_2(G)=K_2(\mathbf{Z}[G])/W(\pm G)\cap K_2(\mathbf{Z}[G]).$$

Il est clair que $Wh_0(G)=\mathrm{Coker}\,\lambda_0^{\mathbf{Z}}(G)$ puisque $h_0(BG;\mathbf{K}_{\mathbf{Z}})=K_0(\mathbf{Z})$. La suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch appliquée à la théorie $h_*(-;\mathbf{K}_{\mathbf{Z}})$ nous montre que $\tilde{h}_1(BG;\mathbf{K}_{\mathbf{Z}})=H_1(G;K_0\,\mathbf{Z})=G/[G,G]$. On en déduit que $Wh_1(G)=\mathrm{Coker}\,\lambda_1^{\mathbf{Z}}(G)$.

Le but du prochain paragraphe est de montrer le :

THÉORÈME 4.2.2. — *Pour tout groupe discret* G, *on a* $Wh_2(G)=\mathrm{Coker}\,\lambda_2^{\mathbf{Z}}(G)$ *avec* $\lambda_2^{\mathbf{Z}}(G): h_2(BG;\mathbf{K}_{\mathbf{Z}})\to K_2(\mathbf{Z}[G])$.

L'inclusion naturelle $i:\Sigma_\infty\subsetneq GL(\mathbf{Z})$ (*cf.* 1.1.11) induit une application continue $i^+: B\Sigma_\infty^+\to BGL(\mathbf{Z})^+$. Ces deux espaces sont des espaces de lacets infinis; ils définissent donc des spectres qu'on note respectivement $\mathbf{S}$ et $\mathbf{K}_{\mathbf{Z}}$. On a adopté cette notation car un théorème de Barrat-Kahn-Priddy [1] montre que la théorie d'homologie généralisée définie par $\mathbf{S}$ est l'homotopie stable $\pi_n^s(X)=\varinjlim_k[S^k,X\wedge S^{k-n}]$. En particulier, les groupes d'homotopie de $B\Sigma_\infty^+$ sont les groupes d'homotopie stables des sphères $\pi_n^s(S^0)$. L'application continue i^+ définit un morphisme de théories homologiques

$$i_*:\ \pi_*^s(-)\to\tilde{h}_*(-;\mathbf{K}_{\mathbf{Z}}).$$

De plus, d'après les calculs de $\pi_n^s(S^0)$ et $K_n\,\mathbf{Z}$ pour $n = 0, 1, 2$ l'homomorphisme $i_n : \pi_n^s(S^0) \to K_n\,\mathbf{Z}$ est un isomorphisme. La comparaison des suites spectrales d'Atiyah-Hirzebruch des théories π_*^s et $\tilde{h}_*(-\,;\mathbf{K}_\mathbf{Z})$ nous montre alors que, pour

$$n = 0, 1, 2, \qquad i_n : \ \pi_n^s(X) \to \tilde{h}_n(X; \mathbf{K}_\mathbf{Z})$$

est un isomorphisme. Par conséquent, le théorème 4.2.2 peut se reformuler de la façon suivante :

THÉORÈME 4.2.2 (*bis*). — *Pour tout groupe discret* G, *la suite*

$$\pi_2^s(BG \cup pt) \to K_2(\mathbf{Z}[G]) \to Wh_2(G) \to 0$$

est exacte, $BG \cup pt$ *désignant la réunion disjointe de* BG *avec un point.*

L'intérêt de cette formulation est que le groupe $Wh_3(0)$ défini par Volodin [29] est probablement égal au conoyau de $\pi_3^s \to K_3(\mathbf{Z})$.

Avant de passer à la démonstration du théorème 4.2.1, nous allons donner une autre définition de $Wh_2(G)$.

On note $H(\pm\, G)$ [resp. $H(G)$] le sous-groupe de $St(\mathbf{Z}[G])$ engendré par les éléments de la forme $h_{ij}(\pm\, g)$ [resp. $h_{ij}(g)$], $g \in G$.

LEMME 4.2.3 : $Wh_2(G) = \tilde{K}_2(\mathbf{Z}[G])/H(G) \cap \tilde{K}_2(\mathbf{Z}[G])$.

Démonstration. — Il résulte de [8], p. 106, que

$$Wh_2(G) = K_2(\mathbf{Z}[G])/H(\pm\, G) \cap K_2(\mathbf{Z}[G]).$$

Les relations entre les $h_{ij}(-)$ dans le groupe de Steinberg données par Milnor ([20], lemme 9.7) nous permettent d'affirmer que si i, j, k et l sont tous distincts on a :

(*a*) $h_{ij}(-g) = h_{jk}(-1)\, h_{ij}(g)\, h_{ki}(-1)$;

(*b*) $[h_{ij}(g), h_{kl}(-1)] = 1$;

(*c*) $[h_{ij}(g), h_{ik}(-1)] = \{ g, -1 \}$ (symbole) [1];

(*d*) $[h_{ij}(g), h_{ij}(-1)] = 1$.

A l'aide de ces relations, on peut écrire tout élément de $H(\pm\, G)$ comme le produit :

- d'un élément de la forme $h_{ij}(-1)\, h_{kl}(-1) \ldots h_{mn}(-1)$;
- d'un élément de $H(G)$;
- d'un élément de la forme $\{ g, -1 \} \ldots \{ g', -1 \}$.

Or, dans $K_2(\mathbf{Z}[G])$ (écrit multiplicativement), on a $1 = \{ g, -g \} = \{ g, g \}\{ g, -1 \}$ (*cf.* [20], lemmes 8.2 et 9.8). Donc, en fait, le dernier élément du produit ci-dessus est

(1) Le symbole $\{ g, -1 \}$ des deux éléments inversibles g et -1 est le produit dans $K_2(\mathbf{Z}[G])$ de leur image dans $K_1(\mathbf{Z}[G])$ (*cf.* 2.2.2).

dans H (G). *En conclusion*, tout élément $x \in \mathrm{H}(\pm \mathrm{G}) \cap \mathrm{K}_2(\mathbf{Z}[\mathrm{G}])$ peut s'écrire $x = x_1 . x_2$ avec $x_1 \in \mathrm{K}_2(\mathbf{Z})$ et $x_2 \in \mathrm{H}(\mathrm{G}) \cap \mathrm{K}_2(\mathbf{Z}[\mathrm{G}]) = \mathrm{H}(\mathrm{G}) \cap \tilde{\mathrm{K}}_2(\mathbf{Z}[\mathrm{G}])$. Il s'ensuit

$$\mathrm{H}(\pm \mathrm{G}) \cap \mathrm{K}_2(\mathbf{Z}[\mathrm{G}]) = (\mathrm{K}_2(\mathbf{Z}).\mathrm{H}(\mathrm{G})) \cap \mathrm{K}_2(\mathbf{Z}[\mathrm{G}])$$

et par suite

$$\mathrm{K}_2(\mathbf{Z}[\mathrm{G}])/\mathrm{H}(\pm \mathrm{G}) \cap \mathrm{K}_2(\mathbf{Z}[\mathrm{G}]) = \tilde{\mathrm{K}}_2(\mathbf{Z}[\mathrm{G}])/\mathrm{H}(\mathrm{G}) \cap \tilde{\mathrm{K}}_2(\mathbf{Z}[\mathrm{G}]). \quad \square$$

4.3. COMPARAISON DE $\mathrm{H}_2(\Gamma; \mathbf{Z})$ ET $\mathrm{K}_2(\mathrm{A})$ POUR $\Gamma \subset \mathrm{A}^*$. — Nous allons démontrer un résultat un peu plus général que le théorème 4.2.2.

Soient A un anneau et Γ un sous-groupe des unités A^* de A. L'inclusion $\Gamma \subset \mathrm{A}^*$ induit un homomorphisme d'anneaux $\mathbf{Z}[\Gamma] \to \mathrm{A}$. L'exemple typique est $\mathrm{A} = \mathbf{Z}[\mathrm{G}]$ et $\Gamma = \mathrm{G}$. Notons $\mathrm{H}(\Gamma)$ le sous-groupe de St (A) engendré par les éléments de la forme $h_{ij}(c)$ où $c \in \Gamma$ et $\Delta(\Gamma)$ le sous-groupe de $\mathrm{H}(\Gamma)$ des éléments engendrés par les symboles $\{c, c\}$ où $c \in \Gamma$. On note $\tilde{\mathrm{H}}(\Gamma)$ [resp. $\tilde{\Delta}(\Gamma)$] est l'image de $\mathrm{H}(\Gamma)$ [resp. $\Delta(\Gamma)$] dans

$$\tilde{\mathrm{K}}_2(\mathrm{A}) = \mathrm{Coker}(\mathrm{K}_2(\mathbf{Z}) \to \mathrm{K}_2(\mathrm{A})).$$

PROPOSITION 4.3.1. — *Pour tout couple* (Γ, A), *il existe un homomorphisme naturel*

$$\lambda''(\Gamma): \quad \mathrm{H}_2(\Gamma; \mathbf{Z}) \to \tilde{\mathrm{K}}_2(\mathrm{A})/\tilde{\Delta}(\Gamma)$$

dont l'image est $\tilde{\mathrm{H}}(\Gamma) \cap \tilde{\mathrm{K}}_2(\mathrm{A})/\tilde{\Delta}(\Gamma)$.

Donnons d'abord quelques constructions et lemmes préliminaires.

La suite spectrale d'homologie d'Atiyah-Hirzebruch :

$$\mathrm{E}^2_{pq} = \mathrm{H}_p(\Gamma; \mathrm{K}_q \mathbf{Z}) \quad \Rightarrow \quad h_{p+q}(\mathrm{B}\Gamma; \mathbf{K}_{\mathbf{Z}})$$

est toute entière dans le premier quadrant car $\mathrm{K}_q(\mathbf{Z}) = 0$ lorsque $q < 0$. Les différentielles $\mathrm{H}_2(\Gamma; \mathrm{K}_i \mathbf{Z}) \to \mathrm{H}_0(\Gamma; \mathrm{K}_{i-1} \mathbf{Z})$ du « plan E^2 » sont nulles. En effet, dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}_2(\Gamma; \mathrm{K}_i \mathbf{Z}) & \dashrightarrow & \mathrm{H}_2((1); \mathrm{K}_i \mathbf{Z}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{H}_0(\Gamma; \mathrm{K}_{i-1} \mathbf{Z}) & \to & \mathrm{H}_0((1); \mathrm{K}_{i-1} \mathbf{Z}) \end{array}$$

le groupe $\mathrm{H}_2((1); \mathrm{K}_i \mathbf{Z})$ est nul et la flèche horizontale du bas est un isomorphisme.

La filtration de $h_2(\mathrm{B}\Gamma) = h_2(\mathrm{B}\Gamma; \mathbf{K}_{\mathbf{Z}})$ soit $0 \subset \mathrm{F}_0 \subset \mathrm{F}_1 \subset \mathrm{F}_2 = h_2(\mathrm{B}\Gamma)$ est telle que les suites

$$0 \to 0 \to \mathrm{F}_0 \to \mathrm{E}^\infty_{02} \to 0,$$

$$0 \to \mathrm{F}_0 \to \mathrm{F}_1 \to \mathrm{E}^\infty_{11} \to 0,$$

$$0 \to \mathrm{F}_1 \to \mathrm{F}_2 \to \mathrm{E}^\infty_{20} \to 0$$

sont exactes, où

$$\mathrm{E}^\infty_{02} = \mathrm{Coker}(\mathrm{Ker}\,\alpha \to \mathrm{H}_0(\Gamma; \mathrm{K}_2 \mathbf{Z})) = \mathrm{H}_0(\Gamma; \mathrm{K}_2 \mathbf{Z}),$$

$$\mathrm{E}^\infty_{11} = \mathrm{Coker}\,\alpha,$$

$$\mathrm{E}^\infty_{20} = \mathrm{H}_2(\Gamma; \mathrm{K}_0 \mathbf{Z}),$$

α étant la différentielle du « plan E^2 » $H_3(\Gamma; K_0 Z) \to H_1(\Gamma; K_1 Z)$. L'homomorphisme composé

$$h_2(pt) = K_2 Z = H_0(\Gamma; K_2 Z) = E^{\infty}_{02} = F_0 \to F_1 \to F_2 = h_2(B\Gamma)$$

est induit par l'inclusion du point dans $B\Gamma$; donc la suite $0 \to F_1/E^{\infty}_{02} \to \tilde{h}_2(B\Gamma) \to E^{\infty}_{20} \to 0$ est exacte. En définitive, la suite

$$0 \to \operatorname{Coker} \alpha \to \tilde{h}_2(B\Gamma) \to H_2(\Gamma; Z) \to 0$$

est exacte. On note $\chi(\Gamma)$ l'homomorphisme composé $H_1(\Gamma; K_1 Z) \to \operatorname{Coker} \alpha \to \tilde{h}_2(B\Gamma)$.

LEMME 4.3.2. — *L'image de* $(\chi \circ \tilde{\lambda})(\Gamma)$ *dans* $\tilde{K}_2(A)$ *est* $\tilde{\Delta}(\Gamma)$. *Par conséquent,* $\tilde{\lambda}(\Gamma)$ *induit un homomorphisme naturel*

$$\lambda''(\Gamma): \quad H_2(\Gamma; Z) \to \tilde{K}_2(A)/\tilde{\Delta}(\Gamma).$$

Démonstration. — Examinons le cas particulier $\Gamma = Z$, $B\Gamma = S^1$, $A = Z[u, u^{-1}]$. Dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H_1(S^1; K_1 Z) & \xrightarrow{\chi(Z)} & \tilde{h}_2(S^1) \\ {\scriptstyle S^H}\downarrow \wr & & {\scriptstyle S^h}\downarrow \wr \\ H_0(pt; K_1 Z) & \xrightarrow{\chi(1)} & h_1(pt) \end{array}$$

S^H et S^h désignent les isomorphismes de suspension des théories d'homologie H_* et h_*. Puisque $\chi(1)$ est un isomorphisme, il en est de même de $\chi(Z)$ et l'image du générateur de $H_1(S^1; K_1 Z) = Z/2$ est le générateur v de $\tilde{h}_2(S^1) = Z/2$. L'élément v est le produit des générateurs v_1 et v_0 de $\tilde{h}_1(S^1)$ et $\tilde{h}_1(S^0)$. Donc d'après 4.1.4 et 4.1.2, on a

$$\tilde{\lambda}^{Z}_2(Z)(v) = \tilde{\lambda}^{Z}_1(Z)(v_1) \bigstar \tilde{\lambda}^{Z}_1(1)(v_0) = \{u\} \bigstar \{-1\} = \{u, -1\} \quad (cf.\ 2.2.3).$$

Or, dans le cours de la démonstration de 4.2.3, on vu a que $\{u, -1\} = \{u, u\}$, par conséquent, on a

$$\operatorname{Im}(\tilde{\lambda} \circ \chi)(Z) = \tilde{\Delta}(Z).$$

Dans le cas Γ quelconque, pour tout élément $x \in H_1(\Gamma; K_1 Z)$, il existe un homomorphisme $\rho : Z \to \Gamma$ tel que l'image du générateur de $H_1(S^1; K_1 Z)$ par ρ_* soit x. L'homomorphisme d'anneaux $\rho^{ann} : Z[u, u^{-1}] \to A$ induit par ρ est tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H_1(S^1; K_1 Z) & \xrightarrow{(\tilde{\lambda} \circ \chi)(Z)} & \tilde{K}_2(Z[u, u^{-1}]) \\ \downarrow {\scriptstyle \rho_*} & & \downarrow {\scriptstyle \rho^{ann}_*} \\ H_1(\Gamma; K_1 Z) & \xrightarrow{(\tilde{\lambda} \circ \chi)(\Gamma)} & \tilde{K}_2(A) \end{array}$$

est commutatif. *En conclusion,* pour tout $x \in H_1(\Gamma; K_1 Z)$, on a $(\tilde{\lambda} \circ \chi)(\Gamma)(x) \in \tilde{\Delta}(\Gamma)$. Inversement, pour tout symbole de la forme $\{c, c\} \in \tilde{\Delta}(\Gamma)$, il existe un élément de $H_1(S^1; K_1 Z)$, à savoir la classe de c, dont l'image par $\tilde{\lambda} \circ \chi$ est $\{c, c\}$. $\square$

COROLLAIRE 4.3.3. — *Pour tout couple* (Γ, A), *le diagramme ci-dessous est commutatif et ses lignes sont exactes*

$$\begin{array}{ccccccccc} & & H_1(\Gamma;\, K_1\mathbf{Z}) & \xrightarrow{\chi(\Gamma)} & \tilde{h}_2(B\Gamma) & \to & H_2(\Gamma;\, \mathbf{Z}) & \to & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \lambda'(\Gamma)} & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{\lambda}(\Gamma)} & & \downarrow{\scriptstyle \lambda''(\Gamma)} & & \\ 0 & \longrightarrow & \tilde{\Delta}(\Gamma) & \longrightarrow & \tilde{K}_2(A) & \to & \tilde{K}_2(A)/\tilde{\Delta}(\Gamma) & \to & 0 \end{array} \quad \square$$

Soit $\Pi_g = \langle a_1, \ldots, a_g, a'_1, \ldots a'_g \rangle \Big/ \prod_{i=1}^{g} [a_i, a'_i]$ le groupe fondamental d'une surface compacte $B\,\Pi_g$ de genre g. La suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch étudiée précédemment nous permet de calculer $\tilde{h}_2(B\,\Pi_g;\, \mathbf{K}_{\mathbf{Z}})$. En effet, puisque $H_3(\Pi_g;\, \mathbf{Z}) = 0$ dans le diagramme du corollaire 4.3.3 $\chi(\Pi_g)$ est injectif, d'où $\tilde{h}_2(B\,\Pi_g) \approx H_1(\Pi_g;\, K_1\,\mathbf{Z}) \oplus H_2(\Pi_g;\, \mathbf{Z})$.

Le groupe Π_g est un groupe sans torsion à une relation. Un théorème dû à Waldhausen ([31], théorème 1) affirme que pour de tels groupes $\tilde{\lambda}_2^{\mathbf{Z}}$ est un isomorphisme. On en déduit que $\lambda'(\Pi_g)$ est injectif et par suite bijectif, puisque d'après 4.3.2, $\lambda'(\Pi_g)$ est surjectif. Par le lemme des cinq, on en conclut que $\lambda''(\Pi_g)$ est un isomorphisme. □

LEMME 4.3.4. — *L'image de la classe fondamentale* $\zeta_g \in H_2(\Pi_g;\, \mathbf{Z})$ *par* $\lambda''(\Pi_g)$ *est la classe de* $Z_g = \prod_{i=1}^{g} [h_{12}(a_i),\, h_{13}(a_i)] \in K_2(\mathbf{Z}[\Pi_g])$ *dans* $\tilde{K}_2(\mathbf{Z}[\Pi_g])/\tilde{\Delta}(\Pi_g)$. *On a considéré ici* $K_2(A)$ *comme un sous-groupe de* St (A) (*cf.* 1.4.3).

Démonstration. — Soit α_i (resp. α'_i) : $\Pi_g \to \mathbf{Z}$ l'homomorphisme qui envoie tous les générateurs de Π_g sauf a_i (resp. a'_i) sur 0 et a_i (resp. a'_i) sur $t = 1_{\mathbf{Z}}$. La somme directe des homomorphismes $(\alpha_i)_*$ et $(\alpha'_i)_*$ soit $\tilde{h}_2(B\,\Pi_g) \to (\tilde{h}_2(B\,\mathbf{Z}))^{2g} = (K_1\,\mathbf{Z})^{2g}$ composée avec $\chi(\Pi_g)$ est un isomorphisme. On note $\mu(\Pi_g) : \tilde{h}_2(B\,\Pi_g) \to H_1(\Pi_g;\, K_1\,\mathbf{Z}) \approx (K_1\,\mathbf{Z})^{2g}$ l'inverse à gauche de $\chi(\Pi_g)$ ainsi défini. On pose $\mu^K(\Pi_g) = (\lambda' \circ \mu \circ \tilde{\lambda}^{-1})(\Pi_g)$. L'homomorphisme $\tilde{\lambda}(\Pi_g)$ établit un isomorphisme entre les groupes infinis cycliques $\operatorname{Ker} \mu(\Pi_g)$ et $\operatorname{Ker} \mu^K(\Pi_g)$. On note z_g l'élément de $\operatorname{Ker} \mu(\Pi_g)$ dont l'image dans $H_2(\Pi_g;\, \mathbf{Z})$ est ζ_g. Notre but est de montrer que $\tilde{\lambda}(\Pi_g)(z_g) = Z_g$.

On a $Z_g \in \operatorname{Ker} \mu^K(\Pi_g)$. En effet α_i (resp. α'_i) appliqué à Z_g nous donne $h_{12}(t)\,h_{12}(t)^{-1} = 1$ [resp. $h_{13}(t)\,h_{13}(t)^{-1} = 1$] dans $\operatorname{St}(\mathbf{Z}[t, t^{-1}])$.

Cas $g = 1$. — L'élément z_1 est le produit (externe) $w_1 \times w_1$ du générateur w_1 de $\tilde{h}_1(S^1)$ par lui-même. D'après 4.1.4, on a

$$\tilde{\lambda}(w_1 \times w_1) = \tilde{\lambda}(w_1) \bigstar \tilde{\lambda}(w_1) = \{u\} \bigstar \{v\} \in \tilde{K}_2(\mathbf{Z}[u, u^{-1}, v, v^{-1}]).$$

D'après 2.2.3, $\{u\} \bigstar \{v\}$ est le symbole $\{u, v\}$ qui s'écrit $Z_1 = [h_{12}(u), h_{13}(v)]$ dans $\operatorname{St}(\mathbf{Z}[u, u^{-1}, v, v^{-1}])$.

Cas g quelconque. — La surjection $\Pi_g \to \Pi_1 = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ qui envoie a_1 sur u, a'_1 sur v et les autres générateurs de Π_g sur l'élément neutre fournit le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} z_g \in \operatorname{Ker} \mu(\Pi_g) & \to & \operatorname{Ker} \mu(\Pi_1) \\ \big\downarrow {\scriptstyle \tilde{\lambda}(\Pi_g)} & & \big\downarrow {\scriptstyle \tilde{\lambda}(\Pi_1)} \\ Z_g \in \operatorname{Ker} \mu^K(\Pi_g) & \to & \operatorname{Ker} \mu^K(\Pi_1) \end{array}$$

Ces quatre groupes sont infinis cycliques et l'image de z_g (resp. Z_g) dans $\operatorname{Ker} \mu^K(\Pi_1)$ est z_1 (resp. Z_1). On en conclut que $\tilde{\lambda}(\Pi_g)(z_g) = Z_g$. $\square$

LEMME 4.3.5. — *Tout élément y de $H(\Gamma) \cap K_2(A)$ peut s'écrire sous la forme*

$$y = \prod_{i=1}^{g} [h_{12}(c_i), h_{13}(c'_i)] \qquad \textit{avec} \quad c_i, c'_i \in \Gamma \quad \textit{pour } i = 1, \ldots, g,$$

en particulier on a l'inclusion $H(\Gamma) \cap K_2(A) \subset [H(\Gamma), H(\Gamma)]$.

Démonstration. — A partir de $y = \prod_l h_{i_l j_l}(u_l) \in K_2 A$, $u_l \in \Gamma$, on va effectuer des transformations dans le groupe de Steinberg en utilisant les formules données par Milnor ([20], lemme 9.4, 9.6 et 9.10) :

(P1) $$h_{ik}(u)\, h_{ij}(v)\, h_{ik}(u)^{-1} = h_{ij}(uv)\, h_{ij}(u)^{-1}, \qquad i \neq j,$$

(P2) $$\{u, u\} = \{u, u^{-1}\} = [h_{12}(u), h_{13}(u^{-1})] = h_{13}(u)^{-1}\, h_{13}(u^{-1})^{-1},$$

(P3) $$h_{ij}(u)\, h_{ji}(u) = 1 \qquad \text{et} \qquad h_{ij}(u) = h_{kj}(u)\, h_{ik}(u).$$

De ces formules, on déduit

(P4) $$h_{1n}(uv)^{-1}\, h_{1n}(v)\, h_{1n}(u) = h_{12}(uv)^{-1}\, h_{12}(v)\, h_{12}(u),$$

en effet,

$$\begin{array}{llll} h_{1n}(uv)\, h_{12}(uv)^{-1}\, h_{12}(v)\, h_{12}(u)\, h_{1n}(u)^{-1} & h_{1n}(v)^{-1} & = & [\text{par (P3)}], \\ h_{2n}(uv) \quad h_{12}(v) \quad h_{n2}(u) & h_{1n}(v)^{-1} & = & [\text{par (P3)}], \\ h_{2n}(uv) \quad h_{12}(v) \quad h_{n2}(u) & h_{12}(v)^{-1}\, h_{n2}(v) & = & [\text{par (P1)}], \\ h_{2n}(uv) \quad h_{n2}(uv)\, h_{n2}(v)^{-1} & h_{n2}(v) & = 1 & [\text{par (P3)}], \end{array}$$

par commodité on va travailler modulo $\Delta(\Gamma)$. Les formules (P 2), (P 1) et (P 4) nous donnent alors

(P'2) $$h_{1i}(u)^{-1} \equiv h_{1i}(u^{-1}),$$

(P'1) $$h_{1i}(v)\, h_{1n}(u) \equiv h_{1n}(u)\, h_{1i}(u^{-1} v)\, h_{1i}(u), \qquad i \neq n,$$

(P'4) $$h_{1n}(v)\, h_{1n}(u) \equiv h_{1n}(uv)\, h_{12}((uv)^{-1})\, h_{12}(v)\, h_{12}(u).$$

D'après le lemme 9.10 de [20] y peut s'écrire comme un produit d'éléments du type $h_{1k}(u)$ et de leurs inverses. Donc, d'après (P'1), y peut s'écrire comme un produit d'éléments du type $h_{1k}(u)$ (mod $\Delta(\Gamma)$). Soit n le plus grand des k intervenant dans cette écriture de y.

On va montrer que si $n \geqq 3$, on peut écrire y comme un produit de $h_{1l}(u)$ avec $1 \leqq l \leqq n-1$. On considère le facteur $h_{1n}(u)$ le plus à droite dans l'écriture de y et on essaye de le faire « sauter » par-dessus le facteur $h_{1j}(v)$ immédiatement à sa gauche. Deux cas peuvent se présenter :

(*a*) $j \neq n$: on utilise la formule (P′1);

(*b*) $j = n$: on utilise la formule (P′4).

Après un nombre fini de telles opérations y s'écrit :

$$y \equiv h_{1n}(u')\, h_{1k_1}(v_1) \ldots h_{1k_q}(v_q) \qquad \text{où} \quad 1 < k_1, \ldots, k_q < n, \quad v_i \in \Gamma.$$

Or $y \in K_2(A)$ donc son image dans $E(A)$ est 1 et par suite $u' = 1$, $h_{1n}(u') = 1$. On vient donc de supprimer l'indice n dans l'écriture de y. On recommence le même procédé avec $n-1$, etc. jusqu'à obtenir

$$y \equiv h_{12}(s_1) \ldots h_{12}(s_p), \qquad s_i \in \Gamma.$$

On applique alors la formule de Milnor ([20], lemme 9.6) :

$$h_{12}(v)\, h_{12}(u) = [h_{12}(v),\, h_{13}(u)]\, h_{12}(uv),$$

p fois pour obtenir :

$$\begin{aligned}
y &\equiv [h_{12}(s_1),\, h_{13}(s_2)]\, h_{12}(s_2 s_1)\, h_{12}(s_3) \ldots h_{12}(s_p)\\
y &\equiv [\quad ,\quad][h_{12}(s_2 s_1),\, h_{13}(s_3)]\, h_{12}(s_3 s_2 s_1)\, h_{12}(s_4) \ldots h_{12}(s_p)\\
y &\equiv \ldots\\
y &\equiv [\ ,\ ][\ ,\ ] \ldots [h_{12}(s_{p-1} \ldots s_1),\, h_{13}(s_p)]\, h_{12}(s_p \ldots s_1).
\end{aligned}$$

Or $y \in K_2(A)$ donc son image dans $E(A)$ est 1 et $s_1^{-1}.s_2^{-1} \ldots s_p^{-1} = 1$, c'est-à-dire : $s_p \ldots s_1 = 1$ et $h_{12}(s_p \ldots s_1) = 1$. $\square$

Démonstration de la proposition 4.3.1. — Le lemme 4.3.2 nous a permis de définir l'homomorphisme λ''. Soit $\alpha : \Pi_g \to \Gamma$ un homomorphisme de groupes induisant un homomorphisme d'anneaux $\alpha^{\mathrm{ann}} : \mathbf{Z}[\Pi_g] \to A$. D'après le lemme 4.3.2, le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
H_2(\Pi_g; \mathbf{Z}) & \xrightarrow{\alpha_*} & H_2(\Gamma; \mathbf{Z})\\
\downarrow{\scriptstyle \lambda''(\Pi_g)} & & \downarrow{\scriptstyle \lambda''(\Gamma)}\\
\tilde{K}_2(\mathbf{Z}[\Pi_g])/\tilde{\Delta}(\Pi_g) & \xrightarrow{\alpha_*^{\mathrm{ann}}} & \tilde{K}_2 A/\tilde{\Delta}(\Gamma)
\end{array}$$

est commutatif.

D'après le lemme 2.2.4 pour tout $x \in H_2(\Gamma; \mathbf{Z})$, il existe un homomorphisme $\alpha : \Pi_g \to \Gamma$ tel que $\alpha_*(\zeta_g) = x$; d'où

$$(\bigstar) \qquad \lambda''(\Gamma)(x) = \lambda''(\Gamma) \circ \alpha_*(\zeta_g) = \alpha_*^{\mathrm{ann}} \circ \lambda''(\Pi_g)(\zeta_g).$$

Or, d'après le lemme 4.3.4, $\lambda''(\Pi_g)(\zeta_g) \in \tilde{H}(\Pi_g) \cap \tilde{K}_2(\mathbf{Z}[\Pi_g])/\tilde{\Delta}(\Pi_g)$ et donc $\lambda''(\Gamma)(x) \in \tilde{H}(\Gamma) \cap \tilde{K}_2 A/\tilde{\Delta}(\Gamma)$. Nous venons ainsi de montrer que

$$\operatorname{Im} \lambda''(\Gamma) \subset \tilde{H}(\Gamma) \cap \tilde{K}_2 A/\tilde{\Delta}(\Gamma).$$

Soit $y \in \tilde{\mathrm{H}}(\Gamma) \cap \tilde{\mathrm{K}}_2 \mathrm{A}$. D'après le lemme 4.3.5, on peut écrire $y = \prod_{i=1}^{g} [h_{12}(c_i), h_{13}(c'_i)]$ avec $c_i, c'_i \in \Gamma$. Posons $\alpha : \Pi_g \to \Gamma$, $\alpha(a_i) = c_i$, $\alpha(a'_i) = c'_i$. Cet homomorphisme est bien défini car $y \in \mathrm{K}_2 \mathrm{A}$ et donc $\prod_{i=1}^{g} [c_i, c'_i] = 1$. La formule (★) nous montre alors que tout $y' \in \tilde{\mathrm{H}}(\Gamma) \cap \tilde{\mathrm{K}}_2(\mathrm{A})/\tilde{\Delta}(\Gamma)$ admet un antécédent dans $\mathrm{H}_2(\Gamma; \mathbf{Z})$, à savoir $\alpha_*(\zeta_g)$.

Nous venons ainsi de montrer que

$$\operatorname{Im} \lambda''(\Gamma) \supset \tilde{\mathrm{H}}(\Gamma) \cap \tilde{\mathrm{K}}_2(\mathrm{A})/\tilde{\Delta}(\Gamma). \quad \square$$

Démonstration du théorème 4.2.2. — Il nous suffit, d'après 4.2.3 de montrer que

$$\operatorname{Im} \tilde{\lambda}_2^{\mathbf{Z}}(\mathrm{G}) = \mathrm{H}(\mathrm{G}) \cap \tilde{\mathrm{K}}_2(\mathbf{Z}[\mathrm{G}]) = \tilde{\mathrm{H}}(\mathrm{G}) \cap \tilde{\mathrm{K}}_2(\mathbf{Z}[\mathrm{G}]).$$

Reprenons le diagramme du corollaire 4.3.3 avec $\Gamma = \mathrm{G}$ et $\mathrm{A} = \mathbf{Z}[\mathrm{G}]$. La proposition 4.3.1 affirme que $\operatorname{Im} \lambda''(\mathrm{G}) = \tilde{\mathrm{H}}(\mathrm{G}) \cap \mathrm{K}_2(\mathbf{Z}[\mathrm{G}])/\tilde{\Delta}(\mathrm{G})$. Or $\tilde{\Delta}(\mathrm{G}) \subset \tilde{\mathrm{H}}(\mathrm{G})$ et $\operatorname{Im} \lambda'(\mathrm{G}) \subset \tilde{\Delta}(\mathrm{G})$ (lemme 4.3.2) donc $\operatorname{Im} \tilde{\lambda}(\mathrm{G}) = \tilde{\mathrm{H}}(\mathrm{G}) \cap \tilde{\mathrm{K}}_2(\mathbf{Z}[\mathrm{G}])$.

4.4. Applications et compléments.

4.4.1. Rappelons que Waldhausen [31] a montré que l'homomorphisme $\lambda_n^{\mathrm{A}}(\mathrm{G})$ est un isomorphisme lorsque A est noethérien régulier et lorsque G appartient à une certaine classe $\mathscr{C}l$ de groupes. Cette classe contient en particulier :

– les groupes sans torsion à une relation;

– les groupes fondamentaux des sous-variétés de S^3;

– Les groupes qui sont des produits libres généralisés i. e. des sommes amalgamées ou des HNN-extensions itérées de groupes libres.

On renvoie à [31] pour la définition exacte de $\mathscr{C}l$.

Corollaire 4.4.2. — *Pour tout groupe* $\mathrm{G} \in \mathscr{C}l$ *on a* $\mathrm{Wh}_2(\mathrm{G}) = 0$. $\square$

Dans le cas où G est le groupe fondamental d'une variété P^2-irréductible suffisamment grande, ce résultat avait été conjecturé par Laudenbach [16], p. 5.

4.4.3. L'homomorphisme $\lambda''(\Gamma)$ peut se décrire de manière plus explicite. Notons $\mathrm{C}_2(\Gamma)$ le groupe des 2-chaînes entières de Γ :

$$\mathrm{C}_2(\Gamma) = \{\textstyle\sum n_i(c_i, c'_i) \mid n_i \in \mathbf{Z},\ c_i, c'_i \in \Gamma\}.$$

On note $\mathrm{Z}_2(\Gamma)$ et $\mathrm{B}_2(\Gamma)$ le sous-groupe des cycles et le sous-groupe des bords de $\mathrm{C}_2(\Gamma)$. Par définition, $\mathrm{H}_2(\Gamma; \mathbf{Z})$ est le quotient $\mathrm{Z}_2(\Gamma)/\mathrm{B}_2(\Gamma)$. Supposons pour simplifier Γ dénombrable, et soit $\nu : \Gamma \to \mathbf{N}^*$ une bijection. Pour tout couple $(c, c') \in \Gamma \times \Gamma$, on pose

$$\Lambda(c, c') = [h_{\nu(cc')\,\nu(c)}(c),\ h_{\nu(cc')\,\nu(c')}(c')] \in \mathrm{St}(\mathrm{A}).$$

En utilisant les relations classiques entre les éléments de $\mathrm{St}(\mathrm{A})$ de la forme $h_{ij}(c)$ on montre que :

(i) l'application $\sum n_i(c_i, c'_i) \to \Pi \Lambda(c_i, c'_i)^{n_i}$ définit un homomorphisme de groupes $\mathrm{C}_2(\Gamma) \to \mathrm{St}(\mathrm{A})/\Delta(\Gamma)$;

(ii) $\Lambda(Z_2(\Gamma)) \subset K_2(A)/\Delta(\Gamma)$;

(iii) $\Lambda(B_2(\Gamma)) = 1$.

En conséquence, Λ définit par passage au quotient un homomorphisme de groupes $H_2(\Gamma; \mathbf{Z}) \to K_2(A)/\Delta(\Gamma)$ qui coïncide avec $\lambda''(\Gamma)$.

CHAPITRE V

Représentations linéaires et quadratiques des groupes discrets

5.0. Soit $\mathscr{C}$ une catégorie additive. Une représentation du groupe discret G dans $\mathscr{C}$ est la donnée d'un objet E de $\mathscr{C}$ et d'un homomorphisme de groupes $\rho : G \to \mathrm{Aut}_{\mathscr{C}} E$. Un morphisme entre deux représentations (E, ρ) et (E', ρ') est la donnée d'un morphisme $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(E, E')$ tel que

$$f \circ \rho(g) = \rho'(g) \circ f \quad \text{pour tout } g \in G.$$

La catégorie $\mathscr{R}ep_G(\mathscr{C})$ des représentations de G dans $\mathscr{C}$ est additive et on note $K_G^0(\mathscr{C})$ son groupe de Grothendieck.

Le but du présent chapitre est de montrer les liens qui existent entre $K_G^0(\mathscr{P}(A))$ [où $\mathscr{P}(A)$ désigne la catégorie des modules projectifs de type fini sur l'anneau A], $K_0(A[G])$ et les groupes $h_0(BG; \mathbf{K}_A)$ et $h^0(BG; \mathbf{K}_A)$. La même étude en K-théorie hermitienne nous permettra de faire des calculs partiels des groupes de chirurgie $L_n^x(G)$ $(x = s, h)$ et de faire le lien avec la conjecture des hautes signatures de Novikov.

5.1. Représentations linéaires des groupes discrets.

5.1.1. Dans le cas où $\mathscr{C} = \mathscr{P}(A)$ est la catégorie des modules projectifs de type fini sur l'anneau A, on notera $K_G^0(A)$ au lieu de $K_G^0(\mathscr{P}(A))$. Le foncteur $K_G^0(A)$ est contravariant en G et covariant en A. D'autre part, le groupe $K_{(1)}^0(A)$ coïncide avec $K_0(A)$ et est un facteur direct de $K_G^0(A)$. On posera $\tilde{K}_G^0(A) = \mathrm{Coker}(K_{(1)}^0(A) \to K_G^0(A))$.

Soit $\rho : G \to GL_n(A)$ un homomorphisme de groupes. Il définit un élément $[\rho]$ de $K_G^0(A)$. On note encore $[\rho]$ son image dans $\tilde{K}_G^0(A)$ lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion. Les éléments $[\rho]$ engendrent $\tilde{K}_G^0(A)$. En effet, soit $E \in \mathscr{P}(A)$ muni d'une G-action. Il existe F tel que $E \oplus F \approx A^n$. Munissons F de la G-action triviale. A^n hérite alors d'une G-action $\rho : G \to GL_n(A)$ et on a $[E]+[F] = [\rho]$ dans $K_G^0(A)$ soit $[E] = [\rho]$ dans $\tilde{K}_G^0(A)$.

L'isomorphisme $K_0(S^n A) \approx K_{-n}(A)$ nous conduit alors à poser la :

DÉFINITION 5.1.2. — *On note* $K_G^n(A) = K_G^0(S^n A)$ *pour* $n \geqq 0$ *et* $K_G^*(A) = \bigoplus_{n \geqq 0} K_G^n(A)$.

Remarquons que $K_{(1)}^n(A) = K_{-n}(A)$.

Soient A (resp. A′) un anneau, G (resp. G′) un groupe discret et E (resp. E′) une représentation de G (resp. G′) dans A (resp. A′). Le produit tensoriel $E \otimes E'$ est une représentation de $G \times G'$ dans $A \otimes A'$. Cette opération s'étend en une application bilinéaire [notée $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \times \beta$)] :

$$K_G^0(A) \times K_{G'}^0(A') \to K_{G \times G'}^0(A \otimes A')$$

qui s'étend en une application bilinéaire (notée de la même manière) :

$$K_G^n(A) \times K_{G'}^p(A') \to K_{G \times G'}^{n+p}(A \otimes A').$$

En particulier, si $A = A'$ est commutatif, $p = 0$ et $G' = (1)$, $K_G^n(A)$ est muni d'une structure de $K_0(A)$-module.

Lorsque $A = A'$ est commutatif et $G = G'$ la composition de ce produit avec les homomorphismes induits par la codiagonale $\nabla : A \otimes A \to A$ et la diagonale $\Delta : G \to G \times G$ munit $K_G^0(A)$ d'une structure d'anneau. On note $\cup$ (cup-produit) cette application bilinéaire qui s'étend de manière évidente en une application bilinéaire :

$$K_G^n(A) \times K_G^p(A) \to K_G^{n+p}(A).$$

5.1.3. *Le produit de Kronecker en* K-*théorie algébrique.* — Soit $\rho : G \to GL_p(A)$ un représentant d'un élément $[\rho] \in \tilde{K}_G^0(A)$. L'homomorphisme $\rho^{ann} : A'[G] \to \mathcal{M}_p(A \otimes A')$ est induit par ρ, $\mathcal{M}_p(A \otimes A')$ étant l'anneau des matrices $p \times p$ à coefficients dans $A \otimes A'$. Le foncteur K_n appliqué à ρ^{ann} nous donne un homomorphisme de groupes (*cf.* 1.4.10) :

$$\rho_*^{ann} : \quad K_n(A'[G]) \to K_n(\mathcal{M}_p(A \otimes A')) = K_n(A \otimes A').$$

PROPOSITION 5.1.4. — *L'application*

$$\langle -, - \rangle_K : \quad K_G^0(A) \times K_n(A'[G]) \to K_n(A \otimes A'), \qquad n \in \mathbf{Z},$$
$$([\rho], x) \mapsto \langle [\rho], x \rangle_K = \rho_*^{ann}(x)$$

est bilinéaire, naturelle en G, A *et* A', *et coïncide avec le produit* $\bigstar$ *lorsque* $G = (1)$.

Démonstration. — Soit $\sigma : G \to GL_p(A)$ tel que $[\sigma] = [\rho]$. Celà signifie que les homomorphismes ρ et σ sont conjugués par un élément de $GL(A)$. Donc les homomorphismes ρ^{ann} et σ^{ann} qu'ils induisent sont conjugués et les applications ρ_*^{ann}, $\sigma_*^{ann} : K_n(A'[G]) \to K_n(A \otimes A')$ sont égales (*cf.* 1.2.11). Le reste de la proposition est trivial. □

Ce produit s'étend évidemment en un produit

$$K_G^n(A) \times K_p(A'[G]) \to K_{p-n}(A \otimes A'), \qquad n \geqq 0, \quad p \in \mathbf{Z},$$

qui vérifie en K-théorie des propriétés analogues au produit de Kronecker classique en homologie et cohomologie. Plus précisément, on va définir pour tout anneau commutatif A, un « cap-produit » :

$$- \cap - : \quad K_G^p(A) \times K_n(A[G]) \to K_{n-p}(A[G])$$

et montrer la :

PROPOSITION 5.1.5. — *Soient* A *un anneau commutatif et* G *un groupe discret. Pour tout* $x \in K_G^p(A)$, $y \in K_G^q(A)$ *et* $z \in K_n(A[G])$, *on a* $\langle x \cup y, z \rangle_K = \langle x, y \cap z \rangle_K$.

Définition du « cap-produit ». — On a $\Delta_*(z) \in K_n(A[G\times G])$. Posons $B = A[G]$. On définit le cap-produit par

$$y \cap z = \langle y, \Delta_*(z)\rangle_K \in K_{n-p}(B \otimes_A A) = K_{n-p}(A[G]).$$

Démonstration de 5.1.5. — Il suffit de montrer que si $\rho : G \to GL_r(A)$ représente x, et $\sigma : G \to GL_m(A)$ représente y (avec $p = q = 0$) :

$$\langle [\rho], \langle [\sigma], z\rangle_K\rangle_K = \langle [\rho]\times[\sigma], z\rangle_K.$$

Cette égalité résulte de ce que l'application composée

$$A[G\times G] \xrightarrow{\rho^{\mathrm{ann}}\otimes 1} \mathscr{M}_r(A[G]) \xrightarrow{\sigma^{\mathrm{ann}}} \mathscr{M}_{rm}(A)$$

coïncide avec $(\rho\otimes\sigma)^{\mathrm{ann}}$. □

Remarque. — On démontrerait, de la même manière, une formule de « projection » : pour tout $x \in K^p_{G'}(A)$ et tout $y \in K_q(A[G])$, on a

$$f_*(f^*(x) \cap y) = x \cap f_*(y),$$

dans le groupe $K_{q-p}(A[G'])$ où $f : G \to G'$ est un homomorphisme de groupes.

5.1.6. *L'homomorphisme* $\theta : K^n_G(A) \to h_n(BG; \mathbf{K}_A)$. — Soit $\rho : G \to GL_p(A)$ un homomorphisme de groupes, de classe $[\rho]$ dans $\tilde{K}^0_G(A)$. L'application continue ρ^+ a pour classe d'homotopie $[\rho^+] \in [BG, BGL(A)^+] = \tilde{h}^0(BG; \mathbf{K}_A)$. Puisque $K^0_{(1)}(A) \xrightarrow{\approx} h^0(pt; \mathbf{K}_A)$ est un isomorphisme, on en déduit une application

$$\theta^n : \quad K^n_G(A) \to h^n(BG; \mathbf{K}_A).$$

PROPOSITION 5.1.7. — *L'application*

$$\theta^n : \quad K^*_G(A) \to h^*(BG; \mathbf{K}_A)$$

est un homomorphisme de groupes gradués. Lorsque A *est commutatif,* θ^* *est un homomorphisme de* $K_0(A)$*-algèbres gradués.*

Remarque. — Quillen a montré que lorsqu'on quotiente $K^0_G(A)$ par les relations provenant des suites exactes courtes $0 \to E' \to E \to E'' \to 0$ soit $[E]-[E']-[E''] = 0$, l'homomorphisme θ^0 est encore bien défini.

5.1.8 *La formule d'adjonction.* — Soient A et A′ deux anneaux et G un groupe discret. L'homomorphisme

$$\lambda_n : \quad h_n(BG; \mathbf{K}_A) \to K_n(A[G])$$

a été défini en 4.1.1. L'homomorphisme

$$\theta^p : \quad K^p_G(A') \to h^p(BG; \mathbf{K}_{A'})$$

a été défini en 5.1.6. Le produit

$$\langle -, -\rangle_K : \quad h^p(BG; \mathbf{K}_{A'}) \times h_n(BG; \mathbf{K}_A) \to K_{n-p}(A \otimes A')$$

a été défini en 2.4.4. Le produit

$$\langle -, - \rangle_{\mathrm{K}} : \quad \mathrm{K}_{\mathrm{G}}^{p}(\mathrm{A}') \times \mathrm{K}_{n}(\mathrm{A}[\mathrm{G}]) \to \mathrm{K}_{n-p}(\mathrm{A} \otimes \mathrm{A}')$$

a été défini en 5.1.3.

PROPOSITION 5.1.9. — *Pour tout* $x \in \mathrm{K}_{\mathrm{G}}^{0}(\mathrm{A})$ $(p \geqq 0)$ *et pour tout* $y \in h_n(\mathrm{BG}; \mathbf{K}_{\mathrm{A}'})$ $(n \in \mathbf{Z})$ *on a la formule d'adjonction*

$$\langle x, \lambda_n(y) \rangle_{\mathrm{K}} = \langle \theta^{p}(x), y \rangle_{\mathrm{K}} \in \mathrm{K}_{n-p}(\mathrm{A} \otimes \mathrm{A}').$$

Démonstration. — Il suffit de considérer le cas où x appartient à $\tilde{\mathrm{K}}_{\mathrm{G}}^{0}(\mathrm{A}')$ et où y est représenté par une application continue $f : \mathrm{S}^n \to \mathrm{BG} \wedge \mathrm{BGL}(\mathrm{A}')^+$. Les autres cas s'en déduisent en remplaçant A par $\mathrm{S}^k \mathrm{A}$ et A' par $\mathrm{S}^l \mathrm{A}'$. Soit $\rho : \mathrm{G} \to \mathrm{GL}_r(\mathrm{A})$ un représentant de x, $\rho^{\mathrm{ann}} : \mathbf{Z}[\mathrm{G}] \to \mathscr{M}_r(\mathrm{A})$ et $\rho^{\mathrm{ann}} \otimes 1 : \mathrm{A}'[\mathrm{G}] \to \mathscr{M}_r(\mathrm{A} \otimes \mathrm{A}')$ les homomorphismes induits par ρ. D'après la proposition 2.1.8, le carré (1) du diagramme ci-dessous est commutatif à homotopie faible près. La commutativité du carré (2) résulte de la remarque de la proposition 2.1.8

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{S}^n \arrow[dr, "f"] & & & \\
& \mathrm{BG} \wedge \mathrm{BGL}(\mathrm{A}')^+ \arrow[dr, "j^+ \wedge \mathrm{id}"] & & \\
& & \mathrm{BGL}(\mathbf{Z}[\mathrm{G}])^+ \wedge \mathrm{BGL}(\mathrm{A}')^+ \arrow[r, "\hat{\gamma}"] \arrow[d, "(\rho^{\mathrm{ann}})^+ \wedge \mathrm{id}"'] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & \mathrm{BGL}(\mathrm{A}'[\mathrm{G}])^+ \arrow[d, "(\rho^{\mathrm{ann}} \otimes 1)^+"] \\
& & \mathrm{BGL}(\mathscr{M}_r(\mathrm{A}))^+ \wedge \mathrm{BGL}(\mathrm{A}')^+ \arrow[r, "\hat{\gamma}"] \arrow[d, "\Phi_r'^{+} \wedge \mathrm{id}"'] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & \mathrm{BGL}(\mathscr{M}_r(\mathrm{A} \otimes \mathrm{A}'))^+ \arrow[d, "\Phi_r'^{+}"] \\
& & \mathrm{BGL}(\mathrm{A})^+ \wedge \mathrm{BGL}(\mathrm{A}')^+ \arrow[r, "\hat{\gamma}"] & \mathrm{BGL}(\mathrm{A} \otimes \mathrm{A}')^+
\end{tikzcd}$$

Examinons les applications composées de ce diagramme. D'après les définitions de λ et de $\langle -, - \rangle_{\mathrm{K}}$, il est clair que $\hat{\gamma} \circ (j^+ \wedge \mathrm{id}) \circ f$ est un représentant de $\lambda(y)$ et donc $\Phi_r'^{+} \circ (\rho^{\mathrm{ann}} \otimes 1)^+ \circ \hat{\gamma} \circ (j^+ \wedge \mathrm{id}) \circ f$ est un représentant de $\langle [\rho], \lambda(y) \rangle_{\mathrm{K}}$. D'autre part, l'application composée $(\rho^{\mathrm{ann}} \circ j)^+$ est un représentant de $\theta[\rho]$, dont le produit de Kronecker avec y est $\langle \theta[\rho], y \rangle_{\mathrm{K}} = [\hat{\gamma} \circ (\Phi_r'^{+} \wedge \mathrm{id})((\rho^{\mathrm{ann}} \circ j)^+ \wedge \mathrm{id}) \circ f]$. La commutativité de ce diagramme nous permet alors d'affirmer que

$$\langle [\rho], \lambda(y) \rangle_{\mathrm{K}} = \langle \theta[\rho], y \rangle_{\mathrm{K}}. \quad \square$$

Remarques sur la définition de $\mathrm{K}_{\mathrm{G}}^{n}(\mathrm{A})$ *pour* $n < 0$. — La catégorie $\mathscr{R}ep_{\mathrm{G}}(\mathrm{A})$ des représentations de G dans A est une catégorie additive; on peut donc construire le groupe de Bass K_1 de cette catégorie, qui fournit un candidat raisonnable pour $\mathrm{K}_{\mathrm{G}}^{-1}(\mathrm{A})$.

En fait, $\mathscr{R}ep_{\mathrm{G}}(\mathrm{A})$ est une catégorie avec suites exactes au sens de Quillen [26], on peut donc lui appliquer la construction $\mathscr{Q}$. Les groupes $\pi_{n+1}(|\mathscr{Q}\mathscr{R}ep_{\mathrm{G}}(\mathrm{A})|)$ sont des candidats raisonnables pour $K_G^{-n}(A)$, $n > 0$. Nous reviendrons sur cet aspect du problème dans un travail ultérieur.

5.2. REPRÉSENTATIONS QUADRATIQUES DES GROUPES DISCRETS. — Les constructions θ et $\langle -, - \rangle_K$ du paragraphe 5.1 sont valables mutatis mutandis en K-théorie hermitienne. A est un anneau hermitien contenant 1/2.

5.2.1. Soient $\varepsilon \in$ centre de A ($\varepsilon\bar{\varepsilon} = 1$) et ${}_\varepsilon\mathcal{Q}(A)$ la catégorie des A-modules ε-hermitiens (*cf.* 3.1.8).

Notons

$$
\begin{aligned}
{}_\varepsilon L_G^0(A) &= K_G^0({}_\varepsilon\mathcal{Q}(A)),\\
{}_\varepsilon \tilde{L}_G^0(A) &= \operatorname{Coker}({}_\varepsilon L_G^0(A) \to {}_\varepsilon L_0(A)),\\
{}_\varepsilon L_G^n(A) &= {}_\varepsilon L_G^0(S^n A) \qquad \text{pour} \quad n \geqq 0.
\end{aligned}
$$

Les homomorphismes $\rho : G \to {}_\varepsilon O(A)$ définissent des éléments $[\rho]$ de ${}_\varepsilon L_G^0(A)$ qui engendrent ${}_\varepsilon \tilde{L}_G^0(A)$.

La classe d'homotopie de l'application $\rho^+ : BG \to B\,{}_\varepsilon O(A)^+$ définit un élément de $\tilde{h}_0(BG; {}_\varepsilon \mathbf{L}_A) = [BG; B\,{}_\varepsilon O(A)^+]$.

On en déduit un homomorphisme

$$
{}_L\theta^n : \quad {}_\varepsilon L_G^n(A) \to h^n(BG; {}_\varepsilon \mathbf{L}_A).
$$

L'homomorphisme ρ induit un homomorphisme ${}_\eta O(A'[G]) \to {}_{\varepsilon\eta} O(A \otimes A')$ et par suite $\rho_*^{\text{ann}} : {}_\eta L_p(A'[G]) \to {}_{\varepsilon\eta} L_p(A \otimes A')$. Le produit de Kronecker :

$$
\langle -, - \rangle_L : \quad {}_\varepsilon L_G^0(A) \times {}_\eta L_p(A'[G]) \to {}_{\varepsilon\eta} L_p(A \otimes A')
$$

est défini par

$$
\langle [\rho], x \rangle = \rho_*^{\text{ann}}(x).
$$

Ce produit s'étend évidemment en un produit

$$
\langle -, - \rangle_L : \quad {}_\varepsilon L_G^n(A) \times {}_\eta L_p(A'[G]) \to {}_{\varepsilon\eta} L_{p-n}(A \otimes A')
$$

et la formule 5.1.9 est encore valable dans ce contexte.

5.2.2. L'homomorphisme θ est un homomorphisme de ${}_1L_0(\mathbf{Z}')$-modules. Lorsqu'on tensorise par $\mathbf{Z}' = \mathbf{Z}[1/2]$ les groupes ${}_\varepsilon L_G^n(A)$ et $h_n(BG; {}_\varepsilon \mathbf{L}_A)$, l'homomorphisme ${}_L\theta \otimes 1$ se scinde en somme directe de deux homomorphismes (*cf.* 3.2.1). On définit ainsi

$$
{}_\varepsilon \overline{W}_G^n(A) = {}_\varepsilon \overline{L}_G^n(A)/p.\overline{L}_G^n(A) \qquad [p \in {}_1\overline{L}_0(\mathbf{Z}')]
$$

et

$$
{}_W\theta^n : \quad {}_\varepsilon \overline{W}_G^n(A) \to h^n(BG; {}_\varepsilon \overline{\mathbf{W}}_A).
$$

De même, il est clair que le produit de Kronecker $\langle -, - \rangle_L$ passe au quotient et définit un produit

$$
\langle -, - \rangle_W : \quad {}_\varepsilon \overline{W}_G^n(A) \times {}_\eta \overline{W}_p(A'[G]) \to {}_{\varepsilon\eta} \overline{W}_{p-n}(A \otimes A').
$$

PROPOSITION 5.2.3. — *Pour tout* $x \in \overline{W}^n_G(A)$ *et pour tout* $y \in h_p(BG; {}_\eta\overline{W}_{A'})$, *on a la formule d'adjonction*

$$\langle x, {}_W\lambda(y) \rangle_W = \langle {}_W\theta(x), y \rangle_W \in {}_{\varepsilon\eta}\overline{W}_{p-n}(A \otimes A'). \quad \square$$

Examinons le groupe ${}_\varepsilon\overline{W}^0_G(A)$ lorsque A est une algèbre de Banach (sur **R** ou **C**). L'espace classifiant du groupe *topologique* $B\,{}_\varepsilon O(A)$ est un espace de lacets infinis et définit un spectre que l'on notera ${}_\varepsilon W^{top}_A$. Comme dans le cas discret, on peut construire un homomorphisme

$${}_W\theta^{top} : \quad {}_\varepsilon\overline{W}^0_G(A) \to h^0(BG; {}_\varepsilon\overline{W}^{top}_A).$$

Il est clair que l'inclusion $\mathbf{Z}' \subsetneq A$ induit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} {}_\varepsilon\overline{W}^0_G(\mathbf{Z}') & \longrightarrow & {}_\varepsilon\overline{W}^0_G(A) \\ \downarrow {}_W\theta & & \downarrow {}_W\theta^{top} \\ h^0(BG; {}_\varepsilon\overline{W}_{Z'}) & \to & h^0(BG; {}_\varepsilon\overline{W}^{top}_A) \end{array}$$

et que dans la formule d'adjonction 5.2.3 on peut remplacer ${}_W\theta$ par ${}_W\theta^{top}$. Le cas $\varepsilon = 1$, $A = \mathbf{R}$ est particulièrement intéressant; en effet la flèche inférieure du diagramme ci-dessus est alors un isomorphisme, les groupes étant eux-mêmes isomorphes à $KO^0(BG) \otimes \mathbf{Z}'$ (*cf.* 3.2.9) lorsque BG est un CW-complexe fini.

L'homomorphisme ${}_W\theta^{top}$ admet l'interprétation géométrique simple suivante. Soit $\rho : G \to {}_1O_{n,n}(\mathbf{R})$ une représentation quadratique de G. Le fibré vectoriel $E_\rho = \widetilde{BG} \times_\rho \mathbf{R}^n$ sur BG est naturellement muni d'une forme quadratique non dégénérée puisque ρ est une représentation quadratique. Ce fibré se scinde donc en $E_\rho = E^+_\rho \oplus E^-_\rho$ et $[E^+_\rho] - [E^-_\rho]$ est un élément de $KO^0(BG)$ (*cf.* 3.2.4). Avec ces notations ${}_W\theta^{top}$ s'interprète comme suit.

PROPOSITION 5.2.4. — *Dans le diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} {}_1\overline{W}^0_G(\mathbf{Z}') \arrow[rr] \arrow[dr, "{}_W\theta"'] & & {}_1\overline{W}^0_G(\mathbf{R}) \arrow[dl, "{}_W\theta^{top}"] \\ & KO^0(BG) \otimes \mathbf{Z}' & \end{tikzcd}$$

l'homomorphisme ${}_W\theta^{top}$ *est défini par*

$${}_W\theta^{top}([\rho]) = ([E^+_\rho] - [E^-_\rho]) \otimes 1. \quad \square$$

5.3. APPLICATION AU CALCUL DU RANG DE $L^x_n(G)$. — Rappelons que le caractère de Chern définit pour tout CW-complexe fini X des isomorphismes naturels de groupes Z/4-gradués $ch^* : KO^*(X) \otimes \mathbf{Q} \to \sum_k H^{*+4k}(X; \mathbf{Q})$ et $ch_* : KO_*(X) \otimes \mathbf{Q} \to \sum_k H_{*+4k}(X; \mathbf{Q})$.

On note θ^n (resp. λ_n) au lieu de ${}_W\theta^{top}_n$ ou ${}_W\theta_n$ (resp. ${}_W\lambda_n$).

Soit G un groupe discret, tel que BG ait le type d'homotopie d'un CW-complexe fini. Posons

$$\Theta^n = \mathrm{Im}\left[{}_1W^n_G(\mathbf{R}) \otimes \mathbf{Q} \xrightarrow{ch^n \circ \theta^n \otimes 1} \sum_k H^{n+4k}(G; \mathbf{Q})\right].$$

L'orthogonal de Θ^n pour le produit de Kronecker en homologie et cohomologie rationnelle est

$$(\Theta^n)^{\perp} = \{ y \in \mathrm{H}_*(\mathrm{G}; \mathbf{Q}) \mid \langle \Theta^n, y \rangle = 0 \}.$$

Soit Λ_n un supplémentaire de $(\Theta^n)^{\perp}$ dans $\mathrm{H}_*(\mathrm{G}; \mathbf{Q})$.

PROPOSITION 5.3.1. — *La restriction à Λ_n de l'homomorphisme*

$$\lambda_n \otimes 1 \circ \mathrm{ch}_n^{-1} : \sum_k \mathrm{H}_{n+4k}(\mathrm{G}; \mathbf{Q}) \to \mathrm{L}_n^x(\mathrm{G}) \otimes \mathbf{Q}$$

est injective. Par suite on a

$$\mathrm{rang}(\mathrm{L}_n^x(\mathrm{G})) \geqq \dim_{\mathbf{Q}}(\Lambda_n).$$

Démonstration. — Ce résultat est une conséquence directe de la formule d'adjonction 5.2.3 En effet, pour tout $y \in \Lambda_n - \{0\}$ il existe $x \in \Theta^n$ tel que $\langle x, y \rangle = 1$. Or, il existe, par hypothèse, un élément $\rho \in {}_1\mathrm{W}_{\mathrm{G}}^n(\mathbf{R}) \otimes \mathbf{Q}$ tel que

$$(\mathrm{ch}^n \circ \theta^n \otimes 1)(\rho) = x.$$

Donc, on a

$$\begin{aligned} 1 = \langle x, y \rangle &= \langle (\mathrm{ch}^n \circ \theta^n \otimes 1)(\rho), y \rangle && \text{(par hypothèses)} \\ &= \langle (\theta^n \otimes 1)(\rho), \mathrm{ch}_n^{-1}(y) \rangle_{\mathrm{W}} && \text{(propriété de ch)} \\ &= \langle \rho, (\lambda_n \otimes 1 \circ \mathrm{ch}_n^{-1})(y) \rangle_{\mathrm{W}} && \text{(formule d'adjonction).} \end{aligned}$$

Par suite, $(\lambda_n \otimes 1 \circ \mathrm{ch}_n^{-1})(y)$ est non nul pour tout $y \in \Lambda_n - \{0\}$. □

5.3.2. *Exemple* 1. — Considérons l'homomorphisme de groupes $j : \mathbf{Z} \to {}_1\mathrm{O}_{1,1}(\mathrm{S}\,\mathbf{Z}')$ défini par $1_{\mathbf{Z}} \mapsto \tau^{\mathrm{L}}$ (*cf.* 3.1.6). La classe d'homotopie de j^+ est un élément de ${}_1\mathrm{L}_{\mathbf{Z}}^1(\mathbf{Z}')$ dont l'image dans ${}_1\overline{\mathrm{W}}_{\mathbf{Z}}^1(\mathbf{Z}')$ est notée ρ_τ. L'image de ρ_τ par θ^1 coïncide avec le générateur de $h^1(\mathrm{S}^1; {}_1\overline{\mathrm{W}}_{\mathbf{Z}'}) = \overline{\mathrm{KO}}^1(\mathrm{S}^1)$ obtenu à partir du générateur usuel de $\overline{\mathrm{KO}}^0(pt)$ par suspension. Par suite, $(\mathrm{ch}^1 \circ \theta^1 \otimes 1)(\rho_\tau \otimes 1)$ est le générateur usuel u de $\mathrm{H}^1(\mathbf{Z}; \mathbf{Q})$. Soient $x_1, \ldots, x_p$ des générateurs de l'espace vectoriel $\mathrm{H}^1(\mathrm{G}; \mathbf{Q})$. On peut supposer que les x_i proviennent de $\mathrm{H}^1(\mathrm{G}; \mathbf{Z})$; par conséquent, il existe des homomorphismes $\alpha_i : \mathrm{G} \to \mathbf{Z}$ tels que $(\alpha_i)^*(u) = x_i$. On en conclut que la classe de $j \circ \alpha_i$ dans ${}_1\overline{\mathrm{W}}_{\mathrm{G}}^1(\mathbf{Z}') \otimes \mathbf{Q}$ a pour image x_i par $\mathrm{ch}^1 \circ \theta^1 \otimes 1$ et que cet homomorphisme est surjectif sur $\mathrm{H}^1(\mathrm{G}; \mathbf{Q})$.

PROPOSITION 5.3.3. — *L'homomorphisme* $\mathrm{ch}^* \circ \theta^* \otimes 1$ *est surjectif sur*

$$\Theta = \{ z \in \mathrm{H}^*(\mathrm{G}; \mathbf{G}) \mid z = z_1 \cup z_2 \cup \ldots \cup z_l \textit{ où } z_i \in \mathrm{H}^1(\mathrm{G}; \mathbf{Q}) \textit{ pour tout } i \}.$$

Démonstration. — On vient de voir que pour tout $z_i \in \mathrm{H}^1(\mathrm{G}; \mathbf{Q})$, il existe $\rho_i \in {}_1\mathrm{W}_{\mathrm{G}}^1(\mathbf{Z}')$ tel que $(\mathrm{ch}^1 \circ \theta^1 \otimes 1)(\rho_i \otimes 1) = z_i$. Les homomorphismes ch^* et $\theta^* \otimes 1$ étant compatibles avec le cup-produit, on a

$$z = \mathrm{ch}^*(\theta^*(\rho_1 \cup \rho_2 \cup \ldots \cup \rho_l)) \otimes 1. \quad \square$$

5.3.4. *Exemple* 2. — Soit G un sous-groupe discret sans torsion de

$$\mathrm{Sp}(2n, \mathbf{R}) = {}_{-1}\mathrm{O}_{n,n}(\mathbf{R})$$

tel que l'espace quotient $\mathrm{Sp}(2n, \mathbf{R})/\mathrm{G}$ soit compact. L'espace $\mathrm{U}(n)\diagdown\mathrm{Sp}(2n, \mathbf{R})/\mathrm{G}$ est une variété de dimension $n(n+1)$ qui est un espace d'Eilenberg-MacLane BG. Lusztig [18], en s'aidant de résultats sur l'homologie des groupes G dus à Matsushima [19], a montré que $\mathrm{ch}^0 \circ \theta^0 \otimes 1$ (resp. $\mathrm{ch}^2 \circ \theta^2 \otimes 1$) est surjectif sur $\sum_{0 \leqq 4k < n+2} \mathrm{H}^{4k}(\mathrm{G}; \mathbf{Q})$ [resp. $\sum_{0 < 4k+2 < n+2} \mathrm{H}^{4k+2}(\mathrm{G}; \mathbf{Q})$]. On peut donc appliquer le théorème 5.3.1 à l'espace vectoriel $\Lambda_n = \sum_{0 \leqq 4k < n+2} \mathrm{H}_{4k}(\mathrm{G}; \mathbf{Q})$ [resp. $\sum_{0 < 4k+2 < n+2} \mathrm{H}_{4k+2}(\mathrm{G}; \mathbf{Q})$].

COROLLAIRE 5.3.5. — *Pour tout sous-groupe discret sans torsion* G *de* $\mathrm{Sp}(2n, \mathbf{R})$ *tel que* $\mathrm{Sp}(2n, \mathbf{R})/\mathrm{G}$ *soit compact, on a*

$$\operatorname{rang}(\mathrm{L}_0^x(\mathrm{G})) \geqq \sum_{0 \leqq 4k < n+2} \dim \mathrm{H}_{4k}(\mathrm{G}; \mathbf{Q}),$$

$$\operatorname{rang}(\mathrm{L}_2^x(\mathrm{G})) \geqq \sum_{0 < 4k+2 < n+2} \dim \mathrm{H}_{4k+2}(\mathrm{G}; \mathbf{Q}).$$

En particulier si $n \geqq 7$, *le rang de* $\mathrm{L}_2^x(\mathrm{G})$ *est au moins égal à* 1.

Démonstration. — Matsushima a montré ([19] Thm. 3) que le second nombre de Betti de la variété $\mathrm{U}(n)\diagdown\mathrm{Sp}(2n, \mathbf{R})/\mathrm{G}$ [i. e. $\dim \mathrm{H}_2(\mathrm{G}; \mathbf{Q})$] est égal à 1. □

5.3.6. On montre des égalités analogues à celles du corollaire précédent pour les sous-groupes arithmétiques G de $\mathrm{Sp}(2\mathrm{n}, \mathbf{R})$ en utilisant un résultat de Borel [4] sur la surjectivité de l'homomorphisme $\mathrm{H}^p(\mathrm{Sp}(2n, \mathbf{R}); \mathbf{Q}) \to \mathrm{H}^p(\mathrm{G}; \mathbf{Q})$ en basses dimensions.

5.4. LA CONJECTURE DES HAUTES SIGNATURES DE NOVIKOV. — Soit M une variété C^∞ compacte, connexe, de dimension n et de groupe fondamental G. Soit $f : \mathrm{M} \to \mathrm{BG}$ une application continue classifiant le revêtement universel de M. On note $\mathscr{L}(\mathrm{M})$ le polynôme de Hirzebruch en les classes de Pontrjagin de M; c'est un élément de $\sum_k \mathrm{H}^{4k}(\mathrm{M}; \mathbf{Q})$. Notons $[\mathrm{M}] \in \mathrm{H}_n(\mathrm{M}; \mathbf{Q})$ la classe fondamentale de M.

DÉFINITION 5.4.1. [24]. — *Les nombres* $\sigma_x(\mathrm{M}) \equiv \langle \mathscr{L}(\mathrm{M}) \cup f^*(x), [\mathrm{M}] \rangle$ *où* $x \in \mathrm{H}^*(\mathrm{BG}; \mathbf{Q})$ *sont appelés les hautes signatures* (*higher signatures*) *de la variété* M.

5.4.2. CONJECTURE DE NOVIKOV [24]. — *Les hautes signatures sont des invariants d'homotopie.*

Plus précisément, si $\mathrm{M} \xrightarrow{g} \mathrm{M}'$ est une équivalence d'homotopie qui préserve l'orientation, les nombres $\sigma_x(\mathrm{M})$ et $\sigma_x(\mathrm{M}')$ sont égaux (avec $f = g \circ f'$).

Dans le cas où $x = 1 \in \mathrm{H}^0(\mathrm{BG}; \mathbf{Q})$ et $n = 4k$ le théorème de l'index de Hirzebruch dit que $\sigma_1(\mathrm{M}) \equiv \langle \mathscr{L}(\mathrm{M}), [\mathrm{M}] \rangle = \mathrm{I}(\mathrm{M})$, où $\mathrm{I}(\mathrm{M})$ est la signature de la forme bilinéaire symétrique induite sur $\mathrm{H}^{2k}(\mathrm{M}; \mathbf{Q})$ par le cup-produit. Donc $\sigma_1(\mathrm{M})$ est un invariant d'homotopie.

Considérons ${}_1\mathrm{W}_\mathrm{G}^*(\mathbf{R}) \otimes \mathbf{Q}$ et ${}_1\mathrm{W}_*(\mathbf{Z}'[\mathrm{G}]) \otimes \mathbf{Q} = \mathrm{L}_*^x(\mathrm{G}) \otimes \mathbf{Q}$ comme des groupes $\mathbf{Z}/4$-gradués. Le produit de Kronecker $\langle -, - \rangle_\mathrm{W}$ prend alors ses valeurs dans ${}_1\mathrm{W}_*(\mathbf{R}) \otimes \mathbf{Q} = \mathrm{KO}^0(pt) \otimes \mathbf{Q} = \mathbf{Q}$. Rappelons que Mischenko et Wall ([22], [33]) (*cf.* 3.3.4) ont défini pour toute variété M un invariant d'homotopie dans le groupe de chirurgie $\psi(\mathrm{M}) \in \mathrm{L}_n^x(\mathrm{G})$.

Voici une conjecture qui généralise la formule de Hirzebruch pour les hautes signatures.

5.4.3. CONJECTURE (*Formule de Hirzebruch généralisée*). — *Pour toute variété* M *de groupe fondamental* G *et pour tout élément* $\rho \in {}_1W_G^*(\mathbf{R}) \otimes \mathbf{Q}$, *on a la formule*

$$\sigma_x(M) = \langle \rho, \psi(M) \otimes 1 \rangle_W,$$

où $x = (\mathrm{ch}^* \circ \theta^* \otimes 1)(\rho)$.

On vérifie que dans le cas où ρ est l'élément unité de ${}_1W_G^0(\mathbf{R}) \otimes \mathbf{Q}$ ($x = 1$) et $n = 4k$ le nombre $\langle \rho, \psi(M) \otimes 1 \rangle$ est précisément I (M). En effet, si Φ est une forme hermitienne sur $\mathbf{Z}[G]$ définissant un élément de $L_0^x(G)$, son image par l'homomorphisme $L_0^x(G) \to L_0^x(1) = \mathbf{Z}$ est donnée par la signature.

PROPOSITION 5.4.4. — *La conjecture « $l_G = l(G)$ » (cf. 3.3.5) qui permet d'identifier l'homomorphisme algébrique et l'homomorphisme topologique de* $\overline{\mathrm{KO}}_*(\mathrm{BG})$ *dans* $\overline{L}_*^x(G)$ *implique la validité de la formule de Hirzebruch généralisée.*

Démonstration. — L'homomorphisme composé

$$\Omega_n(\mathrm{BG}) \to \overline{\mathrm{KO}}_n(\mathrm{BG}) \xrightarrow{l_G} \overline{L}_n^x(G)$$

envoie la classe de $(M \xrightarrow{f} \mathrm{BG})$ sur $\psi(M) \otimes 1$ ([33], p. 266). Or l'isomorphisme $\Omega_n(-) \otimes \mathbf{Q} \xrightarrow{\approx} \sum_k H_{n+4k}(-; \mathbf{Q})$ envoie la classe de (id_M) sur $\mathscr{L}(M) \cap [M]$ (*cf.* [5]) et par suite, envoie la classe de (f) sur $f_*(\mathscr{L}(M) \cap [M])$. On en conclut que $l_G \otimes 1 \circ \mathrm{ch}_*^{-1} \circ f_*(\mathscr{L}(M) \cap [M]) = \psi(M) \otimes 1$. Puisqu'on a supposé que $l_G = l(G)$, on va pouvoir appliquer la formule d'adjonction. Il vient alors :

$$\begin{aligned}
\sigma_x(M) &\equiv \langle \mathscr{L}(M) \cup f^*(x), [M] \rangle \\
&= \langle f^*(x), \mathscr{L}(M) \cap [M] \rangle \\
&= \langle x, f_*(\mathscr{L}(M) \cap [M]) \rangle \\
&= \langle \mathrm{ch}^* \circ \theta^* \otimes 1(\rho), f_*(\mathscr{L}(M) \cap [M]) \rangle \\
&= \langle \rho, l(G) \otimes 1 \circ \mathrm{ch}_*^{-1} \circ f_*(\mathscr{L}(M) \cap [M]) \rangle \\
&= \langle \rho, \psi(M) \otimes 1 \rangle. \quad \square
\end{aligned}$$

5.4.5. Remarquons que la formule de Hirzebruch généralisée implique l'invariance homotopique des hautes signatures $\sigma_x(M)$ pour les x qui sont dans $\mathrm{Im}(\mathrm{ch}^* \circ \theta^* \otimes 1)$. On a vu au paragraphe 5.3 deux exemples de tels éléments x. L'invariance homotopique des hautes signatures a été démontrée par Farrell-Hsiang [39] et par Kasparov [14] pour l'exemple 1 et Lusztig [18] pour l'exemple 2, par des méthodes différentes.

APPENDICE

Nous donnons ici la démonstration de la proposition 1.3.8, ainsi que deux lemmes sur la conjugaison. La proposition suivante est un résultat classique de topologie algébrique.

A.1. PROPOSITION. — *Soit* $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$ *une fibration d'espaces connexes, de fibre* $F = p^{-1}(b_0)$ *où* b_0 *est le point-base de* B. *Soit* $\tilde{f} : I \wedge X \to E$ *une application continue pointée telle que* $\tilde{f}(1, -) = i \circ g$, *avec* $g : X \to F$. *L'application* $\tilde{f}$ *est alors le relèvement d'une application* $f : S^1 \wedge X \to B$ *et on a*

$$\delta_*[f] = [g] \in [X, F].$$

L'application δ_* est ici l'opérateur de connexion de la suite exacte (dite de Eckmann-Hilton) :

$$(\bigstar\bigstar) \qquad \ldots \to [S^1 \wedge X, E] \to [S^1 \wedge X, B] \xrightarrow{\delta_*} [X, F] \to [X, E].$$

A.2. PROPOSITION 1.3.8. — *Soit* $F \xrightarrow{i^+} E \xrightarrow{r^+} B$ *une fibration de* H-*groupes. Soient* $f : S^1 \times X \to B$ *une application continue pointée et* $\tilde{f} : I \times X \to E$ *un relèvement de* f *tel que* $\tilde{f}(0, x_0) = \tilde{f}(1, x_0) = e_0$ *point base de* E.

On suppose qu'il existe une application continue pointée $g : X \to F$ *et une homotopie* $H : X \times [0, 1] \to E$ *vérifiant :*

(*a*) $H(x, 0) = \tilde{f}(1, x)$, $H(x_0, -) = e_0$;

(*b*) $H(x, 1) = i^+ \circ g(x) + \tilde{f}(0, x)$;

(*c*) $\forall u \in [0, 1]$, $r^+ \circ H(x, u) = f_{|X}(x)$.

Dans ces conditions, on a la formule (*avec les notations de* 1.3.6) *:*

$$\delta_*[\hat{f}] = [g] \in [X, F].$$

Démonstration. — On va modifier $\tilde{f}$ en deux étapes de manière à se trouver dans les conditions de la proposition précédente.

Première étape. — Soit $U = [0, 1]$ un intervalle. On définit une homotopie $\omega : I \times X \times U \to E$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\omega(t, x, 0) &= \tilde{f}(t, x) && (\text{définition de } \omega \text{ sur } I \times X \times \{0\}),\\
\omega(1, x, u) &= H(x, u) && (\text{définition de } \omega \text{ sur } \{1\} \times X \times U),\\
\omega(0, x, u) &= \tilde{f}(0, x) && (\text{définition de } \omega \text{ sur } \{0\} \times X \times U),\\
\omega(t, x_0, u) &= \tilde{f}(t, x_0) && (\text{définition de } \omega \text{ sur } I \times \{x_0\} \times U).
\end{aligned}$$

Ces définitions partielles de ω se recollent bien grâce aux hypothèses. Posons $A = \{1\} \times X \cup \{0\} \times X \cup I \times \{x_0\}$. L'inclusion $A \subsetneq I \times X$ est une cofibration; l'application ω est définie sur $I \times X \times \{0\}$ et sur $A \times U$ donc par le théorème d'extension des homotopies, on étend ω à $I \times X \times U$. On note

$$\tilde{f}'(t, x) = \omega(t, x, 1).$$

On a $\tilde{f}'(1, x) = H(x, 1)$, $\tilde{f}'(0, x) = \tilde{f}(0, x)$, $\tilde{f}'(t, x_0) = \tilde{f}(t, x_0)$. De plus, d'après l'hypothèse (*c*), on a $r^+ \circ \omega(0, x, u) = r^+ \circ \omega(1, x, u)$ donc, $r^+ \circ \tilde{f}'$ définit $f' : S^1 \times X \to B$ qui est homotope à f (l'homotopie étant $u \mapsto r^+ \circ \omega(-, -, u)$).

Deuxième étape. — Soit $V = [0, 1]$ un intervalle. L'application $(a, b) \mapsto a+b-b$ de $E \times E$ dans E est homotope à l'application $(a, b) \mapsto a$. On note

$$h : \quad E \times E \times V \to E, \qquad (a, b, v) \mapsto h_v(a, b)$$

cette homotopie; on a $h_0(a, b) = a+b-b$ et $h_1(a, b) = a$. On définit une homotopie $\omega' : I \times X \times V \to E$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
&\omega'(t, x, 0) = \tilde{f}'(t, x) - \tilde{f}'_I(t, x) - \tilde{f}'_X(t, x) && (\text{définition de } \omega' \text{ sur } I \times X \times \{0\}),\\
&\omega'(1, x, v) = h_v(i^+ \circ g(x), \tilde{f}'(0, x)) && (\text{définition de } \omega' \text{ sur } \{1\} \times X \times V),\\
&\omega'(0, x, v) = h_v(e_0, \tilde{f}'(0, x)) && (\text{définition de } \omega' \text{ sur } \{0\} \times X \times V),\\
&\omega'(t, x_0, v) = h_v(e_0, \tilde{f}'(t, x_0)) && (\text{définition de } \omega' \text{ sur } I \times \{x_0\} \times V).
\end{aligned}$$

Ces définitions partielles de ω' se recollent bien grâce aux hypothèses [notamment (*a*)].

L'application ω' est ainsi définie sur $I \times X \times \{0\}$ et sur $A \times V$, donc par le théorème d'extension des homotopies on étend ω' à $I \times X \times V$. On note

$$\tilde{f}''(t, x) = \omega'(t, x, 1).$$

On a

$$\begin{aligned}
\tilde{f}''(1, x) &= i^+ \circ g(x),\\
\tilde{f}''(0, x) &= e_0,\\
\tilde{f}''(t, x_0) &= e_0.
\end{aligned}$$

De plus, il est clair que $r^+ \circ \omega'(0, x, v) = r^+ \circ \omega'(1, x, v)$ puisque r^+ est un morphisme de H-espaces. *En conclusion*, $r^+ \circ \tilde{f}''$ définit une application $f'' : S^1 \times X \to B$ qui est homotope à $f' - f'_I - f'_X$ et donc aussi homotope à $f - f_I - f_X$. L'application $\tilde{f}''$ (resp. f'') étant triviale sur $I \vee X$ (resp. $S^1 \vee X$), on peut appliquer la proposition A.1 à $\hat{f}'' : S^1 \wedge X \to B$. En définitive

$$\delta_*[\hat{f}] = \delta_*[\hat{f}'] = \delta_*[\hat{f}''] = [g]. \quad \square$$

A.3. LEMME. — *Soient* ρ_1 *et* $\rho_2 : \Gamma \to G$ *deux homomorphismes de groupes conjugués par* $\nu \in G$ (i. e. $\rho_2 = \rho_1^\nu$). *Les applications continues* $B\rho_1$ *et* $B\rho_2$ *sont librement homotopes.*

Démonstration. — Considérons Γ et G comme des catégories à un seul objet, ρ_1 et ρ_2 comme des foncteurs entre ces catégories. On note $\langle \underline{0} \to \underline{1} \rangle$ la catégorie ayant deux objets $\underline{0}$ et $\underline{1}$ et trois morphismes $id_{\underline{0}}$, $id_{\underline{1}}$, $u : \underline{0} \to \underline{1}$. La conjugaison par ν s'interprète comme un foncteur

$$\eta : \quad \langle \underline{0} \to \underline{1} \rangle \times \Gamma \to G$$

en posant

$$\eta(id_{\underline{0}}, c) = \rho_1(c), \qquad \eta(id_{\underline{1}}, c) = \rho_2(c), \qquad \eta(u, c) = \nu . \rho_1(c).$$

La réalisation géométrique de $B\eta$ nous fournit l'homotopie libre cherchée, car la réalisation géométrique de $\langle \underline{0} \to \underline{1} \rangle$ est le segment I. $\square$

A.4. LEMME. — *Avec les notations du lemme précédent, on suppose que* $\rho_1 = \rho_2$ (i. e. ρ_1 *commute avec* ν). *L'homomorphisme* $(\nu, \rho_1) : \mathbf{Z} \times \Gamma \to G$, $(\nu, \rho_1)(n, c) = \nu^n . \rho_1(c)$, *est bien défini et le diagramme ci-dessous est commutatif*

$$\begin{tikzcd} I \times B\Gamma \arrow[rr, "B\eta"] \arrow[dr] & & BG \\ & S^1 \times B\Gamma \arrow[ur, leftarrow, "B(\nu, \rho_1)"'] & \end{tikzcd}$$

Démonstration. — Le foncteur $S : \langle \underline{0} \to \underline{1} \rangle \to \mathbf{Z}$ défini par $S(u) = 1_{\mathbf{Z}}$ a pour réalisation géométrique sur la surjection usuelle $I \to S^1$. La commutativité du diagramme topologique résulte de la commutativité du diagramme fonctoriel

$$\begin{tikzcd} \langle \underline{0} \to \underline{1} \rangle \times \Gamma \arrow[rr, "\eta"] \arrow[dr, "S \times \mathrm{id}_\Gamma"'] & & G \\ & \mathbf{Z} \times \Gamma \arrow[ur, leftarrow, "(\alpha, \rho_1)"'] & \end{tikzcd} \qquad \square$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. BARRATT, D. KAHN and S. PRIDDY, *On* $\Omega^\infty S^\infty$ *and the Infinite Symmetric Group* (*Proc. Symp. in Pure Math.*, vol. 22, 1971, p. 217-220, Amer. Math. Soc.).

[2] H. BASS, *Algebraic* K-*Theory*. Benjamin, 1968.

[3] H. BASS, *Unitary Algebraic* K-*Theory* (*Springer Lecture Notes*, n° 343, 1973, p. 57-265).

[4] A. BOREL, *Cohomologie réelle stable de groupes* S-*arithmétiques classiques* (*C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 274, série A, 1972, p. 1700-1702).

[5] P. E. CONNER and E.E. FLOYD, *The Relation of Cobordism to* K-*Theories* (*Springer Lecture Notes*, n° 28, 1966).

[6] S. M. GERSTEN, K_3 *of a Ring is* H_3 *of the Steinberg Group* (*Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 37, 1973, p. 366-368).

[7] S. M. GERSTEN, *On the Spectrum of Algebraic* K-*Theory* (*Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 78, 1972, p. 216-219).

[8] A. E. HATCHER and J. WAGONER, *Pseudo-isotopies of Compact Manifolds.* (*Astérisque*, vol. 6, 1973, Soc. Math. de France).

[9] H. HOPF, *Fundamentalgruppe und zweite Bettische Gruppe* (*Comment. Math. Helv.*, vol. 14, 1941-1942, p. 257-309).

[10] M. KAROUBI. Communication privée.

[11] M. KAROUBI, K-*théorie algébrique. Localisation des formes quadratiques* (*C.R. Acad. Sc. Paris*, t. 279, série A, 1974, p. 487-490).

[12] M. KAROUBI, *Périodicité de la* K-*théorie hermitienne* (*Springer Lecture Notes*, n° 343, 1973, p. 301-411).

[13] M. KAROUBI et O. VILLAMAYOR, K-*théorie algébrique et* K-*théorie topologique* I, II (*Math. Scand.*, vol. 28, 1971, p. 265-307 et 32, 1973, p. 57-86).

[14] G. G. KASPAROV, *Sur l'invariance homotopique des nombres de Pontrjagin rationnels* [*Dokl. Akad. Nauk. S.S.S.R.*, vol. 190, 1970, p. 1022-1025 (en russe)].

[15] M. KERVAIRE, *Multiplicateurs de Schur et* K-*théorie. Essays on Topology and related topics*, Springer, 1970, p. 212-225.

[16] F. LAUDENBACH, *Topologie de la dimension trois : homotopie et isotopie* (*Astérisque*, vol. 12, 1974, Soc. Math. de France).

[17] J. L. LODAY, *Structure multiplicative en* K-*théorie algébrique* (*C.R. Acad. Sc. Paris*, t. 279, série A, 1974, p. 321-324).
[18] G. LUSZTIG, *Novikov's Higher Signature and Families of Elliptic Operators* (*J. Diff. Géom.*, vol. 7, 1972, p. 229-256).
[19] Y. MATSUSHIMA, *On Betti Numbers of Compact, Locally Symmetric Riemanian Manifolds* (*Osaka Math. J.*, vol. 14, 1962, p. 1-20).
[20] J. MILNOR, *Introduction to Algebraic* K-*Theory* (*Annals of Math. Studies Princeton*, vol. 72, 1971.
[21] J. MILNOR, *On Axiomatic Homology Theory* (*Pac. J. Math.*, vol. 12, 1962, p. 337-341).
[22] A. S. MIŠČENKO, *Homotopy Invariants of non Simply Connected Manifolds. Rationals Invariants* (*Math. of the U.R.S.S.*, vol. 4, 1970, p. 506-519).
[23] S. P. NOVIKOV, *Hermitian Analogues of* K-*Theory* I, II (*Math. of the U.S.S.R.*, vol. 4, 1970, p. 257-292 et 479-505).
[24] S. P. NOVIKOV, *Analogues hermitiens de la* K-*théorie* (*Actes Congrès Intern. Math.*, t. II, 1970, p. 39-45).
[25] D. QUILLEN, *Cohomology of Groups.* (*Actes Congrès Intern. Math.*, t. II, 1970, p. 47-51).
[26] D. QUILLEN, *Higher Algebraic* K-*Theory* I. (*Springer Lecture Notes*, n° 341, 1973, p. 85-147).
[27] J. L. SHANESON, *Wall's Surgery Obstruction Groups for* $G \times \mathbf{Z}$ (*Annals of Math.*, vol. 90, 1969, p. 296-334).
[28] N. E. STEENROD, *The Topology of Fibre Bundles*, Princeton University Press, 1951.
[29] I. A. VOLODIN, *Groupes de Whitehead généralisés et pseudo-isotopie* [*Uspehi mat. Nauk.*, vol. 27, 1972, p. 229-230 (en russe)].
[30] J. WAGONER, *Delooping Classifying Spaces in Algebraic* K-*Theory.* (*Topology*, vol. 11, 1972, p. 349-370).
[31] W. WALDHAUSEN, *Algebraic* K-*Theory of Generalised Free Products* (preprint).
[32] C. T. C. WALL, *Foundations of Algebraic* L-*Theory* (*Springer Lecture Notes*, n° 343, 1973, p. 266-300).
[33] C. T. C. WALL, *Surgery on Compact Manifolds*, Academic Press, New York, 1970.
[34] L. N. WASSERSTEIN, *Stability of Unitary and Orthogonal Groups Over Rings with Involution* (*Math. Sborn.*, vol. 81, 1970, p. 328-351 (en russe)).
[35] G. W. WHITEHEAD, *Generalized Homology Theories* (*Trans. A.M.S.*, vol. 102, 1962, p. 227-283).
[36] J. H. C. WHITEHEAD, *Combinatorial Homotopy.* (*Bull. A.M.S.*, vol. 55, 1949, p. 213-245).
[37] J. H. C. WHITEHEAD, *Simple Homotopy Types.* (*Amer. J. Math.*, vol. 72, 1950, p. 1-57).
[38] J.-L. LODAY, *Higher Whitehead Groups and Stable Homotopy* (*Bull. A.M.S.*, vol. 82, 1976).
[39] F. T. FARRELL and W. C. HSIANG, *Manifolds with* $\pi_1 = G \times_\alpha T$. (*Amer. J. Math.* vol. 95, 1973, p. 813-848).

(Manuscrit reçu le 18 juin 1975.)

Jean-Louis LODAY,
Institut de Recherche Mathématique Avancée,
7, rue René-Descartes,
67084 Strasbourg Cedex.