ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

MICHEL DUFLO
MUSTAPHA RAÏS

Sur l'analyse harmonique sur les groupes de Lie résolubles

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 9, nº 1 (1976), p. 107-144
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1976_4_9_1_107_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4^e série, t. 9, 1976, p. 107 à 144.

SUR L'ANALYSE HARMONIQUE SUR LES GROUPES DE LIE RÉSOLUBLES

Par MICHEL DUFLO et MUSTAPHA RAÏS

SUMMARY. — Three important results in this paper are: 1. The Plancherel formula for the exponential solvable Lie groups, and its consequences for the square integrable representations of such groups. 2. The existence of an invariant fundamental solution for a bi-invariant differential operator on an exponential solvable group. 3. The local solvability of bi-invariant differential operators on a solvable Lie group. The proofs use essentially the harmonic analysis of some invariant distributions on solvable Lie groups using the character of the irreducible representations of such groups.

A detailed report on this work can be found in [12].

1. **Introduction**

A. A. Kirillov a donné dans [18] une description de l'espace dual $\hat{N}$ d'un groupe de Lie nilpotent simplement connexe N, grâce à sa fameuse « méthode des orbites ». De plus, il a explicité la formule de Plancherel pour N [19]. En utilisant ces résultats, M. Raïs prouve dans [27] que tout opérateur différentiel bi-invariant sur N admet une solution élémentaire tempérée et invariante.

On montre ici que tout ceci se généralise complètement à un groupe de Lie résoluble exponentiel G. Voici ce qui sert en plus de [19] et [27] : la description de l'espace dual $\hat{G}$ par P. Bernat et L. Pukanszky (*cf.* [3]), le calcul du caractère (global ou infinitésimal) des représentations unitaires irréductibles de G (*cf.* [10] et le paragraphe 4 ci-dessous), et la description de la formule de Plancherel pour un groupe non unimodulaire (*cf.* [13]).

Les mêmes méthodes, appliquées à un groupe de Lie résoluble quelconque G, donnent des informations sur certaines distributions invariantes dans un ouvert invariant $\mathscr{W}$ de G, difféomorphe au moyen de l'application exponentielle à un ouvert de l'algèbre de Lie. Nous démontrons par exemple que tout opérateur différentiel bi-invariant non nul sur G est localement résoluble.

Il est remarquable que ce dernier résultat est aussi vrai lorsque G est un groupe de Lie semi-simple. S. Helgason a montré dans [16] que c'est une simple conséquence d'un théorème d'Harish-Chandra sur les distributions invariantes ([15], Lemma 24). Le théorème d'Harish-Chandra n'utilise pas d'analyse harmonique, mais seulement la structure géométrique de G. Si l'analogue pour les groupes de Lie résolubles du théorème d'Harish-Chandra avait été démontré, le paragraphe 6 ci-dessous aurait été bien simplifié. Nous y suppléons en utilisant des méthodes d'analyse harmonique.

Pour guider le lecteur, voici les titres des prochains paragraphes.

2. La formule de Plancherel pour les groupes non unimodulaires.
3. Construction de semi-invariants de poids donné.
4. La formule du caractère.
5. La formule de Plancherel pour les groupes de Lie exponentiels.
6. Résolubilité locale des opérateurs différentiels bi-invariants.

2. La formule de Plancherel pour les groupes non unimodulaires

2.1.1. La formule de Plancherel, universellement connue pour les groupes unimodulaires, commence à être bien connue dans le cas non unimodulaire (*cf.* [13], [20], [23], [26] et [30]). Afin de simplifier le travail du lecteur, nous allons donner un résumé de la théorie.

2.1.2. Soit G un groupe localement compact séparable, muni d'une mesure de Haar à gauche dx. On note Δ la fonction module de G de sorte que $d(xy) = \Delta(y)\,dx$. Soient Z un sous-groupe fermé du centre de G et ζ un caractère unitaire de Z. On suppose que G/Z est muni d'une mesure de Haar (à gauche) $d\mathring{x}$. On désigne par $L^2(G, \zeta)$ l'espace des fonctions mesurables φ sur G, vérifiant les relations $\varphi(xz) = \zeta(z)^{-1}\varphi(x)$ pour X dans G et z dans Z, et de carré intégrable modulo Z. Les représentations régulières gauche et droite λ_ζ et ρ_ζ de G dans $L^2(G, \zeta)$ sont définies de la manière suivante : Si φ est dans $L^2(G, \zeta)$ et x, y sont dans G, alors $\lambda_\zeta(x)\varphi(y) = \varphi(x^{-1}y)$ et $\rho_\zeta(x)\varphi(y) = \Delta(x)^{1/2}\varphi(yx)$. On s'intéresse à la représentation $\lambda_\zeta \times \rho_\zeta$ du groupe $G \times G$ dans l'espace $L^2(G, \zeta)$. Si x, y sont dans G, on a

$$\lambda_\zeta \times \rho_\zeta(x, y) = \lambda_\zeta(x)\,\rho_\zeta(y).$$

2.1.3. Proposition (*cf.* [21]). — *On suppose λ_ζ de type* I. *Soit $\hat{G}_\zeta$ l'espace des représentations irréductibles de* G *dont la restriction à* Z *est un multiple de ζ, muni de la structure borélienne de Mackey. Il existe sur* G *une mesure standard μ et un champ mesurable $\xi \mapsto (\pi_\xi, \mathscr{H}_\xi)$ de représentations de* G *tels que :*

(*a*) *pour presque tout ξ, la classe de π_ξ est ξ;*

(*b*) $\lambda_\zeta \times \rho_\zeta \sim \int_{\hat{G}_\zeta} \pi_\xi \otimes \pi'_\xi \, d\mu(\xi)$;

où π'_ξ est la représentation contragrédiente de π_ξ. La classe de μ est déterminée de manière unique par ces propriétés.

2.1.4. La proposition précédente associe à chaque φ dans $L^2(G, \zeta)$ un champ (φ_ξ) d'opérateurs de Hilbert-Schmidt (en abrégé opérateurs H. S.) dans $\mathscr{H}_\xi$ (l'espace de $\pi_\xi \otimes \pi'_\xi$ s'identifiant canoniquement à l'espace des opérateurs H. S. de $\mathscr{H}_\xi$). Soit $L^1(G, \zeta)$ l'espace des fonctions mesurables φ sur G vérifiant les relations $\varphi(xz) = \zeta(z)^{-1}\varphi(x)$ pour x dans G et z dans Z, et intégrables modulo Z. Si $\varphi \in L^1(G, \zeta)$ et si $\pi \in \hat{G}_\zeta$, on pose

$$\pi(\varphi) = \int_{G/Z} \varphi(x)\pi(x)\,d\mathring{x}.$$

La description du champ (φ_ξ) d'opérateurs H. S. associé à une fonction φ dans $L^1(G, \zeta) \cap L^2(G, \zeta)$ fait intervenir les opérateurs semi-invariants de poids $\Delta^{1/2}$ pour les représentations π_ξ.

2.1.5. Soit $(\pi, \mathscr{H})$ une représentation unitaire d'un groupe (localement compact séparable) G dans un espace de Hilbert $\mathscr{H}$. Soit χ un caractère de G (on entend par là un homomorphisme continu de G dans $\mathbf{C}^*$). Soit A un opérateur fermé dans $\mathscr{H}$, de domaine dense. On dit que A est un semi-invariant de poids χ pour la représentation π si pour tout x dans G on a : $\pi(x)A \subset \chi(x)A\pi(x)$. On sait [13] que si π est irréductible, deux semi-invariants de même poids pour π sont proportionnels. D'une façon générale, si T est un opérateur fermable dans un espace de Hilbert, on désignera par $[T]$ sa fermeture.

2.1.6. THÉORÈME (*cf.* [13], th. 5). — *On suppose* λ_ζ *de type* I. *Soit :*

$$\lambda_\zeta \times \rho_\zeta = \int \pi_\xi \otimes \pi'_\xi \, d\mu(\xi),$$

la décomposition de $\lambda_\zeta \times \rho_\zeta$ *donnée par* 2.1.3. *Alors il existe pour presque tout* ξ *un opérateur self-adjoint positif non nul* A_ξ *dans* $\mathscr{H}_\xi$, *semi-invariant de poids* $\Delta^{1/2}$, *et un nombre complexe* c_ξ *de module* 1 *tels que pour tout* φ *dans* $L^1(G, \zeta) \cap L^2(G, \zeta)$, *on ait*

$$\varphi_\xi = c_\xi [\pi_\xi(\varphi) A_\xi^{-1}]$$

pour presque tout ξ.

2.2.1. Supposons en plus que G soit un groupe de Lie. On note $\mathscr{D}(G, \zeta)$ l'espace des fonctions φ, C^∞ sur G, vérifiant les relations $\varphi(xz) = \zeta(z)^{-1}\varphi(x)$ pour x dans G et z dans Z, et à support compact modulo Z. Comme corollaire du théorème précédent, on a le résultat suivant : Pour presque tout ξ, chaque opérateur $[A_\xi^{-1}\pi_\xi(\varphi)A_\xi^{-1}]$, pour φ dans $\mathscr{D}(G, \zeta)$, est traçable, sa trace est une fonction μ-intégrable sur $\hat{G}_\zeta$, et on a

$$\varphi(1) = \int_{\hat{G}_\zeta} \operatorname{tr}([A_\xi^{-1}\pi_\xi(\varphi)A_\xi^{-1}])\,d\mu(\xi)$$

(*cf.* [13], th. 5).

2.2.2. Réciproquement, soit ν une mesure sur $\hat{G}_\zeta$, et soit $\xi \mapsto (\varpi_\xi, \mathscr{H}_\xi)$ un champ sur $\hat{G}_\zeta$ de représentations de G tel que la classe de ϖ_ξ soit ξ pour presque tout ξ. On suppose qu'on s'est donné pour presque tout ξ un opérateur semi-invariant B_ξ dans $\mathscr{H}_\xi$, self-adjoint positif de poids $\Delta^{1/2}$, de telle sorte que les propriétés suivantes soient vérifiées : pour presque tout ξ, l'opérateur $[B_\xi^{-1} \varpi_\xi (\varphi) B_\xi^{-1}]$ est traçable pour chaque φ dans $\mathscr{D}(G, \zeta)$, sa trace est une fonction ν-intégrable de ξ, et

$$\varphi(1) = \int \operatorname{tr}([B_\xi^{-1} \omega_\xi(\varphi) B_\xi^{-1}])\, d\nu(\xi).$$

Alors λ_ζ est de type I et les relations entre les objets ν, B_ξ et les objets μ, A_ξ de 2.1.6 sont les suivantes. Les mesures μ et ν sont équivalentes. Soit θ telle que $d\nu(\xi) = \theta(\xi)\, d\mu(\xi)$ et soit E_ξ un opérateur entrelaçant π_ξ et ϖ_ξ. Pour presque tout ξ, on a

$$E_\xi A_\xi E_\xi^{-1} = \theta(\xi)^{-1/2} B_\xi \quad (cf.\ [13],\ \text{th. } 7).$$

2.2.3. Il apparaît ainsi que l'objet $A_\xi^{-2}\, d\mu(\xi)$ est déterminé de manière unique par la représentation $\lambda_\zeta \times \rho_\zeta$. Soit F le fibré presque partout en droites sur $\hat{G}_\zeta$ dont la fibre au-dessus de chaque ξ est l'ensemble des semi-invariants de poids Δ pour la représentation π_ξ. Soit θ une fonction mesurable sur $\hat{G}_\zeta$. Elle définit une section $s_\theta : \xi \mapsto \theta(\xi) A_\xi^2$ du fibré F. Alors $A_\xi^{-2}\, d\mu(\xi)$ peut être interprété comme la « forme linéaire » positive $s_\theta \mapsto \int \theta(\xi)\, d\mu(\xi)$ sur l'ensemble des sections s_θ de F. On dit que $A_\xi^{-2}\, d\mu(\xi)$ est la mesure de Plancherel de $\hat{G}_\zeta$, ou plus directement la mesure de Plancherel de G lorsque $Z = \{1\}$. De même, la formule donnant $\varphi(1)$ dans 2.2.1 s'appelle la formule de Plancherel de $\hat{G}_\zeta$.

2.2.4. On voit maintenant que dans un programme raisonnable de détermination explicite d'une mesure de Plancherel d'un $\hat{G}_\zeta$, on est amené à inclure :

1° une construction pour presque tout ξ, dans $\hat{G}_\zeta$ d'un opérateur self-adjoint positif A_ξ, semi-invariant de poids $\Delta^{1/2}$ pour ξ.

2° une construction d'une mesure μ sur $\hat{G}_\zeta$, les A_ξ et μ étant bien adaptés au sens suivant : pour presque tout ξ, chaque opérateur $[A_\xi^{-1} \pi_\xi(\varphi) A_\xi^{-1}]$ correspondant à une fonction φ dans $\mathscr{D}(G, \zeta)$ est traçable, sa trace est une fonction μ-intégrable de ξ et

$$\varphi(1) = \int_{\hat{G}_\zeta} \operatorname{tr}([A_\xi^{-1} \pi_\xi(\varphi) A_\xi^{-1}])\, d\mu(\xi).$$

C'est un tel programme qu'on va réaliser dans le cas des groupes résolubles exponentiels.

3. **Construction de semi-invariants de poids donné**

3.1.1. Pour fixer les notations, rappelons quelques résultats sur la construction de représentations irréductibles des groupes de Lie résolubles. Soit G un groupe de Lie. On note $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie et $\mathfrak{g}^*$ l'espace des formes linéaires sur $\mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{n}$ est un idéal

G-invariant de $\mathfrak{g}$, on considère la représentation de G dans $\mathfrak{n}^*$, contragrédiente de la représentation adjointe de G dans $\mathfrak{n}$. Si f est dans $\mathfrak{n}^*$ on désigne par $\mathfrak{g}(f)$ son stabilisateur dans $\mathfrak{g}$ et par $G(f)$ son stabilisateur dans G.

3.1.2. Soit Ω une G-orbite dans $\mathfrak{g}^*$. Soit l dans Ω. La forme bilinéaire $B_l : (X, Y) \mapsto \langle l, [X, Y] \rangle$ induit sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(l)$ une forme bilinéaire alternée non dégénérée. Comme l'application $X \mapsto X.l$ induit un isomorphisme de $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(l)$ sur l'espace tangent à Ω au point l, la forme B_l définit sur cet espace tangent une 2-forme non dégénérée ω_l. Soit ω la 2-forme sur Ω dont la valeur en chaque point l de Ω est ω_l. C'est une 2-forme fermée partout non dégénérée et G-invariante. Soit $2d$ la dimension de Ω. On pose

$$\beta_\Omega = (2\pi)^{-d}(d!)^{-1}\,\omega \wedge \ldots \wedge \omega \quad (d \text{ facteurs}).$$

C'est une forme de degré maximal G-invariante partout non nulle. On désigne encore par β_Ω la mesure qui lui est associée sur Ω (c'est la mesure canonique de Ω) [3].

3.1.3. On suppose dans toute la suite que G est un groupe de Lie résoluble simplement connexe. On appelle polarisation admissible en un point l de $\mathfrak{g}^*$ une sous-algèbre $\mathfrak{h}$ de la complexifiée $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ de $\mathfrak{g}$, vérifiant les propriétés suivantes :

1° $\mathfrak{h}+\bar{\mathfrak{h}}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$.

2° $G(l)$ normalise $\mathfrak{h}$.

3° Il existe une sous-algèbre nilpotente $\mathfrak{n}$ de $\mathfrak{g}$ contenant $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ telle que $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}_{\mathbf{C}}$ soit stable par $G(f)$, où $f = l/\mathfrak{n}$.

4° L'espace $\mathfrak{h}$ est totalement isotrope maximal pour B_l et $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}_{\mathbf{C}}$ est totalement isotrope maximal pour B_f.

3.1.4. On dit que la polarisation (admissible) $\mathfrak{h}$ en l est positive si on a : $\langle il, [X, \bar{X}] \rangle \geqq 0$ pour tout X dans $\mathfrak{h}$. Tout point l de $\mathfrak{g}^*$ admet (au moins) une polarisation positive ([3], IV.4.2). Soit l dans $\mathfrak{g}^*$ et soit $\mathfrak{h}$ une polarisation positive en l. Soit X dans $\mathfrak{g}(l)$. La partie imaginaire du nombre $-\operatorname{tr}_{\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}/\mathfrak{h}}(\operatorname{ad} X)$ ne dépend pas de $\mathfrak{h}$ ([3], V. 4.3.2). On désigne cette partie imaginaire par $\theta(X)$.

3.1.5. Un point l de $\mathfrak{g}^*$ est dit intégrable s'il existe un caractère unitaire de $G(l)$ dont la différentielle soit $il/\mathfrak{g}(l)$. Si l est intégrable, il existe un caractère unitaire de $G(l)$ dont la différentielle est $il/\mathfrak{g}(l)+(1/2)\,\theta$.

3.1.6. Dans la suite, on fixe un point intégrable l et un caractère unitaire η_l de $G(l)$ dont la différentielle est $il/\mathfrak{g}(l)+(1/2)\,\theta$. Soit $\mathfrak{h}$ une polarisation admissible positive en l. On pose $\mathfrak{d} = \mathfrak{g} \cap \mathfrak{h}$. On désigne par D_0 le sous-groupe analytique de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{d}$ et par D le groupe $G(l)\,D_0$. D est un sous-groupe *fermé* de G et η_l se prolonge de manière unique en un caractère (toujours noté η_l) de D dont la différentielle est $il/\mathfrak{d}+(1/2)\,\theta$ [si X est dans $\mathfrak{d}$, on désigne encore par $\theta(X)$ la partie imaginaire de $-\operatorname{tr}_{\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}/\mathfrak{h}}(\operatorname{ad} X)$].

3.1.7. Sur l'espace des fonctions numériques φ sur G vérifiant les relations $\varphi(xy) = |\operatorname{d\acute{e}t}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{d}}(\operatorname{Ad} y)|\,\varphi(x)$ pour x dans G et y dans D, on fixe une « mesure » G-invariante notée $\varphi \mapsto \oint_{G/D} \varphi(x)\,dx$.

3.1.8. Soit $\mathscr{H}'(l, \eta_l, \mathfrak{h}, G)$ l'espace des fonctions φ, C^∞ sur G, qui vérifient les conditions suivantes :

1° $\varphi(xy) = \eta_l(y)^{-1} \,|\, \text{dét}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{b}}(\text{Ad}\, y)\,|^{1/2}\, \varphi(x)$ pour x dans G et y dans D.

2° $\lambda(X)\,\varphi = (-il(X)+(1/2)\,\text{tr}_{\mathfrak{g}_C/\mathfrak{h}}(\text{ad}\, X))\,\varphi$ pour tout X dans $\mathfrak{h}$ [où $\lambda(X)$ est le champ de vecteurs invariant à gauche sur G déterminé par X].

3° $\oint_{G/D} |\,\varphi(x)\,|^2\, dx < \infty$.

On remarque que si y est dans D_0, 1° est conséquence de 2° et que 1° donne un sens à 3°. L'espace $\mathscr{H}'(l, \eta_l, \mathfrak{h}, G)$ est de façon naturelle un espace pré-hilbertien. On désigne par $\mathscr{H}(l, \eta_l, \mathfrak{h}, G)$ l'espace hilbertien complété et par $\pi(l, \eta_l, \mathfrak{h}, G)$ la représentation naturelle (par translations à gauche) de G dans $\mathscr{H}(l, \eta_l, \mathfrak{h}, G)$. Auslander et Kostant ont montré que cette représentation est *irréductible*, et que sa classe ne dépend pas du choix de $\mathfrak{h}$. On la notera $\pi(l, \eta_l, G)$. Soit η l'application qui à $l' = x.l$ dans Ω associe le caractère $\eta_{l'} : y \mapsto \eta_l(x^{-1}yx)$ de $G(l')$. Comme on a $\pi(l, \eta_l, G) = \pi(l', \eta_{l'}, G)$, on posera $\pi(l, \eta_l, G) = \pi(\Omega, \eta)$ ([3], chap. VIII).

3.1.9. Voici quelques détails techniques utilisés plus bas. On fixe l, η_l et $\mathfrak{h}$ comme en 3.1.6. Soit $\mathfrak{g}_1$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{n}$ et telle que sa complexifiée contienne $\mathfrak{h}$. Soient G_1 le sous-groupe analytique de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_1$, et l_1 la restriction de l à $\mathfrak{g}_1$. On note $G(l_1)$ le stabilisateur de l_1 dans G, $G(l_1)^0$ sa composante neutre. On introduit de même les groupes $G_1(l_1)$, $G_1(l_1)^0$ et leurs algèbres de Lie.

LEMME. — *Considérée comme sous-algèbre de* $(\mathfrak{g}_1)_C$, $\mathfrak{h}$ *est une polarisation admissible positive pour le point* l_1. *Le groupe* $G_1(l_1)$ *est contenu dans* D *et la restriction* η_{l_1} *de* η_l (*cf.* 3.1.6) *à* $G_1(l_1)$ *est un caractère dont la différentielle est* $il_1/\mathfrak{g}_1(l_1)+(1/2)\,\theta_1$ (*où* θ_1 *est défini de manière analogue à* θ). *On peut donc définir la représentation* $\pi(l_1, \eta_{l_1}, \mathfrak{h}, G_1)$ *de* G_1. *Le stabilisateur de cette représentation dans* G *est le groupe* $G(l)\,G_1$.

Démonstration. — Les conditions 1.3.4 de 3.1.3, avec l_1 et G_1 au lieu de l et G, sont faciles à vérifier. En particulier $\mathfrak{h}$ étant totalement isotrope pour B_{l_1}, elle contient $\mathfrak{g}_1(l_1)$. Il en résulte que D^0 contient $G_1(l_1)^0$.

Montrons que $G(l_1) = G_1(l_1)^0\, G(l)$. Soit donc $g \in G(l_1)$. Comme $g.l = l+t$, où t est une forme linéaire nulle sur $\mathfrak{g}_1$, il existe $d \in D^0$ tel que $g.l = d.l$. En effet $D^0.l = l+V$, où V est l'orthogonal de $\mathfrak{h}+\bar{\mathfrak{h}}$ dans $\mathfrak{g}^*$, d'après [3] (IV. 3.1.7). Puisque G_1 contient D^0, il en résulte que g est dans $G_1(l_1)^0\, G(l)$. L'inclusion opposée est évidente.

L'algèbre $\mathfrak{h}$ est donc stable sous $G(l_1)$. En particulier $G_1(l_1)$ normalise $\mathfrak{h}$, et $\mathfrak{h}$ est une polarisation admissible pour l_1.

L'assertion du lemme relative à η_{l_1} résulte de ce que $\theta = \theta_1$, car $\mathfrak{g}_1$ est un idéal de $\mathfrak{g}$.

Il est facile de voir que $G(l)$ stabilise la représentation $\pi_1 = \pi(l_1, \eta_{l_1}, \mathfrak{h}, G_1)$. Réciproquement, si $g \in G$ stabilise π_1 il résulte de [1] que g stabilise l'orbite $G_1.l_1$. Donc $g \in G(l_1)\,G_1$, et d'après ce que nous venons de voir, $g \in G(l)\,G_1$.

3.1.10. Gardons les notations de 3.1.9. On suppose de plus que le groupe $G_1' = G(l)\,G_1$ est fermé dans G. (Il est facile de construire des exemples où ceci n'est pas réalisé, en utilisant le groupe de Mautner et son enveloppe algébrique.) Considérons l'espace $\mathscr{H}'(l, \eta_l, \mathfrak{h}, G'_1)$ formé des fonctions φ, C^∞ sur G'_1 vérifiant les conditions 1°, 2° et 3° de 3.1.8, avec G'_1 à la place de G. Soit $\pi'_1 = \pi(l, \eta_l, \mathfrak{h}, G'_1)$ la représentation de G'_1 dans l'espace de Hilbert complété. Posons d'autre part $\pi_1 = \pi(l_1, \eta_{l_1}, \mathfrak{h}, G_1)$ et $\pi = \pi(l, \eta_l, \mathfrak{h}, G)$.

LEMME. — *La représentation de* G *induite par la représentation* π'_1 *de* G'_1 *est isomorphe à* π. *La restriction de* π'_1 *à* G_1 *est isomorphe à* π_1.

Démonstration. — La seconde assertion est évidente. La première est une application du principe d'induction par étage (*cf.* [3], V. 4.2.1).

3.1.11. LEMME. — *Avec les notations de* 3.1.10, *la classe de* π'_1 *ne dépend pas du choix de la polarisation* $\mathfrak{h}$ *admissible pour* l *et* l_1 *telle que* $\mathfrak{h} \subset (\mathfrak{g}_1)_{\mathbf{C}}$.

Démonstration. — Les classes des représentations π et π_1 ne dépendent pas de $\mathfrak{h}$, d'après la théorie d'Auslander et Kostant appliquée aux groupes G et G_1. La théorie de Mackey montre que la classe d'une représentation du stabilisateur G'_1 de π_1 dans G, qui étend π_1 et induit π, est uniquement déterminée.

3.2.1. On suppose maintenant donnés une orbite intégrable Ω dans $\mathfrak{g}^*$ et η comme ci-dessus, ce qui permet de construire la classe $\pi(\Omega, \eta)$ de représentations irréductibles de G.

3.2.2. LEMME. — *Soit* χ *un caractère de* G. *On suppose que si* $l \in \Omega$, *on a :* $G(l) \subset \operatorname{Ker} \chi$. *Il existe une bijection canonique entre l'ensemble des semi-invariants de poids* χ *pour* $\pi(\Omega, \eta)$ *et l'ensemble des fonctions* ψ *sur* Ω *telles que* $\psi(x^{-1}.l) = \chi(x)\psi(l)$ *pour tous* x *dans* G *et* l *dans* Ω.

Démonstration. — (*a*) On suppose pour commencer que χ est réel ou unitaire. On pose $G''_1 = \operatorname{Ker} \chi$. Il est de codimension 1 dans G. On note $\mathfrak{g}_1$ son algèbre de Lie, $(\mathfrak{g}_1)_{\mathbf{C}}$ la complexifiée de $\mathfrak{g}_1$ et G^0_1 la composante neutre de G_1. Soit $l \in \Omega$. En utilisant la méthode de [3] (IV.4.2), on voit qu'il existe des polarisations admissibles positives en l, contenues dans $(\mathfrak{g}_1)_{\mathbf{C}}$ [on a en effet $\mathfrak{g}(l) \subset \mathfrak{g}_1$]. Soit $\mathfrak{h}$ une telle polarisation. On réalise la représentation $\pi(\Omega, \eta)$ dans l'espace $\mathscr{H}(l, \eta_l, \mathfrak{h}, G)$.

Soit ψ une fonction sur Ω telle que $\psi(x^{-1}.l') = \chi(x)\psi(l')$ pour tous x dans G et l' dans Ω. (Pour simplifier on dira d'une telle fonction qu'elle est semi-invariante de poids χ.) On remarquera qu'il en existe de non nulles. Soit $\tilde{\psi}$ la fonction sur G définie par $\tilde{\psi}(x) = \psi(x.l)$ pour x dans G. Cette fonction est C^∞ sur G et bi-invariante par G''_1. Il est immédiat que l'opération de multiplication par $\tilde{\psi}$ induit dans $\mathscr{H}(l, \eta_l, \mathfrak{h}, G)$ un opérateur semi-invariant de poids χ. Soit $A_\psi(l, \mathfrak{h})$ cet opérateur.Il reste à voir que $A(l, \mathfrak{h})$ ne dépend ni du choix de l dans Ω, ni du choix de $\mathfrak{h}$ parmi les polarisations positives en l, contenues dans $(\mathfrak{g}_1)_{\mathbf{C}}$. Autrement dit, il faut montrer que si on choisit l', $\mathfrak{h}'$ de manière analogue à l et $\mathfrak{h}$ et si U est une isométrie de $\mathscr{H}(l, \eta_l, \mathfrak{h}, G)$ sur $\mathscr{H}(l', \eta_{l'}, \mathfrak{h}', G)$ entrelaçant $\pi(l, \eta_l, \mathfrak{h})$ et $\pi(l', \eta_{l'}, \mathfrak{h}')$ alors on a : $U A(l, \mathfrak{h}) = A(l', \mathfrak{h}') U$.

(*b*) Montrons d'abord que A $(l, \mathfrak{h})$ ne dépend pas de $\mathfrak{h}$.

On définit les groupes G_1 et G'_1 comme en 3.1.9 et 3.1.10. Comme G (l) est contenu dans G''_1, il en est de même de G'_1, ce qui entraîne que G'_1 est fermé dans G. Soit $\mathcal{H}_1$ l'espace de la représentation π'_1 (*cf.* 3.1.10).

On identifie l'espace de la représentation $\pi(l, \eta_l, \mathfrak{h}, G)$ à un espace de fonctions sur G à valeurs dans $\mathcal{H}_1$. L'opérateur A $(l, \mathfrak{h})$ s'identifie alors à la multiplication par $\tilde{\psi}$ dans cet espace de fonctions. Comme la classe de π'_1 ne dépend pas de $\mathfrak{h}$, il en est de même de A $(l, \mathfrak{h})$. Nous le noterons A (l).

(*c*) Montrons maintenant que A (l) ne dépend pas de l. Soit x_0 dans G et soit $l' = x_0 . l$. Soit σ_1 une représentation de $G'_1 = G_1\, G(l)$ dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}_1$, équivalente à π'_1 [*voir* (*b*)]. Pour tout x dans G'_1, on pose $\sigma'_1(x) = \sigma_1(x_0^{-1}\, x x_0)$. La classe de σ'_1 est $\pi(l', \eta_{l'}, \mathfrak{h}, G'_1)$. Soit $\mathcal{H}$ (resp. $\mathcal{H}'$) l'espace de la représentation de G induite par σ_1 (resp. σ'_1). L'espace $\mathcal{H}$ est constitué de fonctions $\varphi : G \to \mathcal{H}_1$ telles que $\varphi(xy) = \sigma_1(y)^{-1}\, \varphi(x)$, tandis que les fonctions φ dans $\mathcal{H}'$ vérifient les relations $\varphi(xy) = \sigma_1(x_0^{-1}\, y x_0)\, \varphi(x)$ (pour x dans G et y dans G'_1). L'opérateur A (l) est la multiplication par $\tilde{\psi}$ dans $\mathcal{H}$ tandis que A (l') est la multiplication par la fonction $x \mapsto \psi(x x_0 . l)$. Il est immédiat alors que l'opérateur $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ défini par $(U\varphi)(x) = \varphi(x x_0)$ entrelace $\pi(l, \eta_l, \mathfrak{h}, G)$ et $\pi(l', \eta_{l'}, \mathfrak{h}, G)$ et transforme A (l) en A (l').

(*d*) Lorsque χ est réel ou unitaire, on a donc associé (de manière *canonique*) à chaque fonction ψ sur Ω, semi-invariante de poids χ un opérateur A_ψ semi-invariant de poids χ. On remarquera que si χ est réel et si ψ est positive non nulle, alors A_ψ est self-adjoint positif. Si χ est unitaire, la fonction $|\psi|$ est constante, et A_ψ est un opérateur borné de norme $|\psi|$. Passons maintenant au cas général. On écrit $\psi = \theta\, |\psi|$, de sorte que θ est un semi-invariant de poids $\chi\, |\chi|^{-1}$ et $|\psi|$ est un semi-invariant de poids $|\chi|$. On dispose donc des opérateurs A_θ et $A_{|\psi|}$. Alors l'écriture $A_\theta\, A_{|\psi|}$ est la décomposition polaire d'un opérateur fermé A_ψ, semi-invariant de poids χ.

Réciproquement, tout semi-invariant de poids χ pour la représentation $\pi(\Omega, \eta)$ s'obtient par ce procédé, puisque deux semi-invariants de poids χ sont proportionnels [13].

3.2.3. *Remarque*. — Lorsque χ est réel ou unitaire, il n'y a aucun arbitraire dans la construction du semi-invariant A_ψ associée à la fonction ψ. Dans le cas général, on a posé $A_\psi = A_{\psi |\psi|^{-1}}\, A_{|\psi|}$, mais on aurait pu aussi bien choisir le semi-invariant $A_{|\psi|}\, A_{\psi |\psi|^{-1}}$ qui peut être différent de A_ψ, comme le montre l'exemple suivant. Soit G le groupe de Heisenberg de dimension 3. L'élément général de G est noté (x, y, z), avec x, y, z réels et la multiplication dans G est donnée par la formule

$$(x_1, y_1, z_1)(x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2,\ z_1 + z_2 + x_1 y_2).$$

Soit π la représentation unitaire irréductible de G dans $L^2(\mathbf{R})$ telle que $\pi(x, y, z)\, \varphi(t) = e^{i(z+ty)}\, \varphi(x+t)$, pour chaque φ dans $L^2(\mathbf{R})$. L'opérateur unitaire A_1 dans $L^2(\mathbf{R})$ défini par $A_1\, \varphi(t) = \varphi(t+1)$ est un semi-invariant pour π de poids $\chi_1 : (x, y, z) \mapsto e^{-iy}$. L'opérateur A_2 de multiplication dans $L^2(\mathbf{R})$ par la fonction e^{-t}

est un semi-invariant pour π, (self-adjoint positif), de poids $\chi_2 : (x, y, z) \mapsto e^{-x}$. On a alors $A_1 A_2 = e^{-1} A_2 A_1$. L'opérateur $A_1 A_2$ est donc un semi-invariant pour π, de poids $\chi : (x, y, z) \mapsto e^{-x-iy}$, qui n'est pas normal.

3.2.4. D'après ce qui précède, s'il existe l dans Ω tel que $G(l) \subset \operatorname{Ker} \chi$, il existe des semi-invariants non nuls de poids χ pour les représentations $\pi(\Omega, \eta)$. Supposons maintenant que G soit un groupe exponentiel. On sait que dans ce cas, toutes les orbites de G dans $\mathfrak{g}^*$ sont intégrables et simplement connexes, de sorte qu'à chaque orbite Ω est associée une classe $\pi(\Omega)$ de représentations unitaires irréductibles de G. On a alors :

3.2.5. Proposition. — *On suppose* G *exponentiel. Soient* χ *un caractère de* G *et* Ω *une orbite dans* $\mathfrak{g}^*$. *S'il existe un semi-invariant non nul de poids* χ *pour* $\pi(\Omega)$, *on a* $G(l) \subset \operatorname{Ker} \chi$ *pour tout* l *dans* Ω.

Démonstration. — Soit T un semi-invariant non nul de poids χ pour $\pi(\Omega)$. En considérant la décomposition polaire de T, on est ramené au cas où le caractère χ est soit réel, soit unitaire. On suppose donc désormais que χ est ainsi. Soit G_1 la composante neutre du noyau G_1'' de χ et soit $\mathfrak{g}_1$ son algèbre de Lie. Soit l dans Ω. Il suffit de montrer que $\mathfrak{g}(l) \subset \mathfrak{g}_1$ puisque $G(l)$ est connexe. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi. Alors $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}(l)$. Soit $l_1 = l/\mathfrak{g}_1$ et soit Ω_1 l'orbite (sous G_1) de l_1 dans $\mathfrak{g}_1^*$. On va vérifier que la restriction de $\pi(\Omega)$ à G_1 est $\pi(\Omega_1)$. En effet, il est possible de trouver (toujours par le procédé de [3], IV. 4.2) une polarisation admissible $\mathfrak{h}_1$ au point l_1 telle que $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{g}(l)$ soit une polarisation admissible au point l. Alors l'opération de restriction à G_1 est un isomorphisme de $\mathscr{H}(l, \mathfrak{h}, G)$ sur $\mathscr{H}(l_1, \mathfrak{h}_1, G_1)$ qui commute à l'action de G_1. Mais alors $\pi(\Omega)$ ne peut être induite à partir d'aucune représentation irréductible d'un sous-groupe fermé propre de G contenant G_1 (car sa restriction à G_1 est irréductible). Comme on sait [13] que $\pi(\Omega)$ est induite par une représentation irréductible de G_1, on aboutit à une contradiction.

3.3.1. Soit toujours G un groupe de Lie résoluble simplement connexe. L'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ de $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ s'identifie à l'algèbre des distributions sur G de support $\{1\}$, et l'algèbre symétrique $S(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ s'identifie à l'algèbre des distributions sur $\mathfrak{g}$ de support $\{0\}$, ou bien à l'algèbre des fonctions polynômiales sur $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}^*$. Le groupe G opère dans ces algèbres, et on notera $Z(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ [resp. $I(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$] les éléments invariants de $U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ [resp. $S(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$] et $SZ(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ [resp. $SI(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$] les éléments semi-invariants.

3.3.2. Soit π une représentation irréductible de G dans un espace de Hilbert $\mathscr{H}$. On note $\mathscr{H}_\infty$ le sous-espace des vecteurs C^∞, et $d\pi$ la représentation correspondante de $U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ dans $\mathscr{H}_\infty$. Pour tout $u \in U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$, l'opérateur $d\pi(u)$ est fermable. Notons $[d\pi(u)]$ sa fermeture. En particulier, si u est semi-invariant de poids χ, il en est de même de l'opérateur $[d\pi(u)]$.

3.3.3. Il existe un isomorphisme canonique d'algèbres γ de $SI(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ sur $SZ(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ (*cf.* [28]). Rappelons quelques résultats relatifs à γ.

3.3.4. Soit $\mathfrak{g}_1$ un idéal de $\mathfrak{g}$. Notons γ_1 l'isomorphisme canonique de $SI(\mathfrak{g}_{1\mathbf{C}})$ sur $SZ(\mathfrak{g}_{1\mathbf{C}})$. Alors γ et γ_1 coïncident sur $SI(\mathfrak{g}_{1\mathbf{C}}) \cap SI(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ (*cf.* [28]).

3.3.5. Soit $\mathfrak{g}_0$ l'intersection des noyaux des différentielles $d\chi$ des caractères χ de G qui sont des poids de semi-invariants non nuls dans SZ $(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$. Alors SI $(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ est contenu dans I $(\mathfrak{g}_{0\mathbf{C}})$ (lemme de Borho, *cf.* [28]). Il résulte de ceci et de 3.3.4 qu'il suffit de décrire γ sur I $(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$.

3.3.6. La description de $\gamma^{-1}(u)$ pour $u \in \mathrm{Z}(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ a été faite dans [10] (cor. II, IV.2 et note en bas de page). Pour chaque $l \in \mathfrak{g}_{\mathbf{C}}^*$, Dixmier a construit un idéal bilatère primitif I_l dans U $(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ (*cf.* [7], chap. 6). Pour tout $l \in \mathfrak{g}_{\mathbf{C}}^*$, la valeur $\gamma^{-1}(u)(l)$ du polynôme $\gamma^{-1}(u)$ au point l est telle que l'image de u dans $\mathrm{U}(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})/\mathrm{I}_l$ soit le scalaire $\gamma^{-1}(u)(l)$.

3.3.7. PROPOSITION. — *Soient* Ω *une orbite intégrable dans* $\mathfrak{g}^*$ *et* η *comme en* 3.1.8. *Soit* $u \in \mathrm{SZ}(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$. *Pour* $l \in \Omega$, *posons* $\psi(l) = \gamma^{-1}(u)(il)$. *L'opérateur semi-invariant pour* $\pi(\Omega, \eta)$ *qui correspond à* ψ *est* $[d\pi(\Omega, \eta)(u)]$.

Démonstration. — 1° Supposons pour commencer que $u \in \mathrm{Z}(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$. D'après [11] (chap. II, lemme 2.1), le noyau de $d\pi(\Omega, \eta)$ dans U $(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ est I_{il} (où l est un point de Ω). Notre assertion dans ce cas résulte de 3.3.6.

2° Supposons maintenant u semi-invariant de poids χ. Le groupe G_1'' noyau de χ est de codimension $\geqq 2$. D'après 3.3.5, $u \in \mathrm{Z}(\mathfrak{g}_{1\mathbf{C}})$, où $\mathfrak{g}_1$ est l'algèbre de Lie de G_1''. Soit l un point de Ω. Posons $l_1 = l/\mathfrak{g}_1$ et $v = \gamma^{-1}(u)$.

Supposons de plus $v(il_1) \neq 0$. Comme v est semi-invariant de poids χ le groupe G_1'' contient $\mathrm{G}(l_1)$. D'après [3] (chap. IV, § 4.2), il existe une polarisation $\mathfrak{h}$ admissible en l, positive, telle que $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_{1\mathbf{C}}$ soit une polarisation positive admissible pour l_1. Alors, d'après [3] (IV. 2.3.3), $\mathfrak{h}$ est contenue dans $\mathfrak{g}(l_1)_{\mathbf{C}} + \mathfrak{g}_{1\mathbf{C}} = \mathfrak{g}_{1\mathbf{C}}$. On est donc dans les conditions d'application de 3.1.9 dont nous employons les notations. Le groupe $\mathrm{G}_1' = \mathrm{G}(l)\,\mathrm{G}_1$ est fermé, car il en est de même du groupe G_1'' qui le contient et a même composante neutre. On utilise les notations π, π_1 et π_1' de 3.1.10.

D'après 3.3.4, et la première partie de la démonstration, appliquée au groupe G_1, on a

$$(\bigstar) \qquad [d\pi_1(u)] = v(il)\,\mathrm{Id}.$$

Soit $\mathscr{H}_1$ l'espace de π_1 et de π_1'. La représentation π est réalisée dans l'espace des fonctions φ sur G à valeurs dans $\mathscr{H}_1$, qui vérifient :

$$\varphi(gh) = \pi_1'(h)^{-1}\varphi(g) \qquad (g \in \mathrm{G},\ h \in \mathrm{G}_1')$$

et qui sont de carré intégrable modulo G_1'. En considérant séparément les opérateurs associés à $|\psi|$ et $\psi|\psi|^{-1}$, on voit que l'opérateur A dans l'espace de π associé à ψ est la multiplication par la fonction $g \mapsto \psi(gl) = \chi(g)^{-1} v(il)$.

L'opérateur $[d\pi(u)]$ est semi-invariant de poids χ. Il est proportionnel à A d'après [13]. Pour démontrer la proposition, il suffit de prouver que l'on a $\mathrm{A}(\varphi) = d\pi(u)(\varphi)$ pour un élément φ non nul assez régulier dans l'espace de π.

Soit donc φ un tel élément assez régulier pour que les lignes suivantes soient justifiées. Soit $X \in \mathfrak{g}_1$. On a, pour $t \in \mathbf{R}$, $g \in G$,

$$\begin{aligned}\pi(\exp(tX))\varphi(g) &= \varphi(\exp(-tX)g) = \varphi(g\exp(-t\operatorname{Ad} g^{-1}X))\\ &= \pi_1(\exp(t\operatorname{Ad} g^{-1}X))\varphi(g)\end{aligned}$$

et donc :

$$d\pi(X)\varphi(g) = d\pi_1(\operatorname{Ad} g^{-1}X)\varphi(g).$$

La même égalité reste vraie pour $X \in U(\mathfrak{g}_{1\mathbf{C}})$. En particulier, quand u est un élément de $U(\mathfrak{g}_{1\mathbf{C}})$ semi-invariant de poids χ sous l'action de G, on obtient

$$d\pi(u)\varphi(g) = \chi(g)^{-1}d\pi_1(u)\varphi(g).$$

La formule (★) montre que l'on a

$$d\pi(u)\varphi(g) = \chi(g)^{-1}v(il)\varphi(g)$$

et donc

$$d\pi(u)\varphi = A(\varphi).$$

3° Pour achever la démonstration du théorème, nous devons montrer que si $u \in U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ est semi-invariant de poids χ, et si $\gamma^{-1}(u)(il) = 0$, alors $d\pi(\Omega, \eta)(u) = 0$, c'est-à-dire, comme il est rappelé dans la première partie de la démonstration, $u \in I_{il}$. Ceci résulte de [28] (prop. 5.1).

4. La formule du caractère

4.1.1. Soit G un groupe de Lie, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Soit $\mathscr{V}$ un voisinage ouvert de O dans $\mathfrak{g}$ tel que $\mathscr{W} = \exp(\mathscr{V})$ soit un ouvert de G et tel que l'application exponentielle soit un difféomorphisme de $\mathscr{V}$ sur $\mathscr{W}$. Soient dx une mesure de Haar à gauche sur G et dX une mesure de Haar sur $\mathfrak{g}$. Il existe une et une seule fonction J, strictement positive dans $\mathscr{V}$, de classe C^∞, G-invariante telle que $d(\exp X) = J(X)\,dX$. Lorsque $J(0) = 1$, on dira que les deux mesures dx et dX *se correspondent*. Il est clair que si la mesure de Haar dx du groupe est donnée, il lui correspond une et une seule mesure de Haar dX sur $\mathfrak{g}$ et vice-versa. Supposons G muni d'une mesure de Haar à gauche dx, de sorte que $\mathfrak{g}$ est muni de la mesure de Haar correspondante dX. Si α est une fonction sur $\mathfrak{g}$, sa transformée de Fourier additive $\hat{\alpha}$ est la fonction sur $\mathfrak{g}^*$ définie par

$$\hat{\alpha}(l) = \int \alpha(X)e^{i\langle l, X\rangle}dX.$$

Si π est une représentation unitaire de G, on pose

$$\pi(\alpha) = \int \alpha(X)\pi(\exp X)\,dX.$$

4.1.2. Dans la suite, on fixe un groupe résoluble simplement connexe G, muni d'une mesure de Haar à gauche dx, une orbite intégrable Ω de G dans $\mathfrak{g}^*$, une représentation irréductible $\pi = \pi(\Omega, \eta)$ construite comme indiqué dans 3.1.8, un caractère χ de G *à valeurs réelles* et une fonction ψ strictement positive sur Ω, semi-invariante de poids χ. En particulier, on a $G(l) \subset \ker(\chi)$ pour tout l dans Ω.

Soit A l'opérateur (self-adjoint positif) semi-invariant de poids χ pour π associé à ψ par le lemme 3.2.2. Soit $\mathscr{D}(G)$ l'espace des fonctions C^∞ sur G, à support compact, muni de sa topologie habituelle. Dans ce paragraphe, on montre que moyennant une hypothèse simple sur ψ et Ω, chaque opérateur de la forme $[A\,\pi(\beta)\,A]$, avec β dans $\mathscr{D}(G)$, est traçable et on calcule dans le cas où l'hypothèse en question est vérifiée la restriction de la distribution $\beta \mapsto \operatorname{tr}[A\,\pi(\beta)\,A]$ à un certain ouvert $\mathscr{W}$ de G. Les démonstrations sont celles de [3] (chap. IX), à part quelques points qu'on signalera à mesure.

4.1.3. Soit l dans Ω. On pose $\mathfrak{n} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, $f = l/\mathfrak{n}$ et $\mathfrak{n}(\Omega) = \mathfrak{n} + \mathfrak{g}(f)$. On remarque que si X est dans $\mathfrak{g}(f)$, $\operatorname{ad}(X)$ normalise $\mathfrak{g}(l)$ de sorte qu'on peut poser $u(X) = (1/2)\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(l)}(X)$. Il existe sur $\mathfrak{n}(\Omega)$ une et une seule fonction analytique p'_Ω ayant les propriétés suivantes :

(*a*) $p'_\Omega(X+Y) = p'_\Omega(X)$ pour X dans $\mathfrak{g}(f)$ et Y dans $\mathfrak{n}$.

(*b*) $p'_\Omega(X) = (\operatorname{dét}(\operatorname{Sh} u(X)/u(X)))^{1/2}$ près de O dans $\mathfrak{g}(f)$.

La fonction p'_Ω ne dépend pas du point l choisi dans Ω, et elle est G-invariante.

4.1.4. On choisit une polarisation positive $\mathfrak{n}$-admissible $\mathfrak{h}$ au point l (on entend par là qu'elle vérifie les conditions écrites dans 3.1.3, 3.1.4 pour cette sous-algèbre $\mathfrak{n} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$) vérifiant de plus les conditions suivantes : $\mathfrak{h}$ est contenue dans $(\mathfrak{g}_1)_{\mathbf{C}}$ ($\mathfrak{g}_1$ étant l'algèbre de Lie du noyau G_1 de χ) et $\mathfrak{h} \cap (\mathfrak{g}(f))_{\mathbf{C}}$ est stable par conjugaison. De telles polarisations existent. On pose $\mathfrak{d} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}$ et $\mathfrak{e} = (\mathfrak{h} + \bar{\mathfrak{h}}) \cap \mathfrak{g}$. Soient $\pm\mu_1, \ldots, \pm\mu_d$ les poids de $\mathfrak{g}(f)$ dans $\mathfrak{n} \cap \mathfrak{e}/\mathfrak{n} \cap \mathfrak{d}$, et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les poids de $\mathfrak{g}(f)$ dans $\mathfrak{n}/\mathfrak{n} \cap \mathfrak{e}$. On prolonge chacune de ces formes linéaires μ_i ou λ_j en une forme linéaire (désignée par la même notation μ_i ou λ_j) sur $\mathfrak{n}(\Omega)$, nulle sur $\mathfrak{n}$. Pour simplifier les notations, chaque fois que V est un espace vectoriel et que ν est une forme linéaire sur V, on désignera par S_ν la fonction sur V définie par

$$S_\nu(v) = \operatorname{Sh}\frac{(1/2)\,\nu(v)}{(1/2)\,\nu(v)}$$

pour tout v dans V. Compte tenu de ceci, on pose

$$p'_0 = \prod_{1 \leq i \leq d} S_{\mu_i} \qquad \text{et} \qquad p'_1 = \prod_{1 \leq j \leq n} S_{\lambda_j}.$$

4.1.5. Lemme. — *Soit $\mathscr{V}$ l'ensemble des* X *dans* $\mathfrak{g}$ *tels que* ad X *n'ait aucune valeur propre de la forme $2\,i\,\pi\,n$, avec n entier non nul. Il existe des fonctions p_0, p_1 sur* $\mathfrak{g}$, C^∞ *et G-invariantes, ne s'annulant pas dans $\mathscr{V}$ ayant les propriétés suivantes : la fonction p_0 (resp. p_1) prolonge p'_0 (resp. p'_1). La fonction $p_\Omega = p_0\,p_1$ prolonge la fonction p'_Ω définie dans* 4.1.3.

Démonstration. — On choisit des racines de $\mathfrak{g}$ toujours notées $\mu_1, \ldots, \mu_d, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ qui prolongent les poids de $\mathfrak{g}(f)$ considérés plus haut. On remarquera que ces racines sont nulles sur $\mathfrak{n}$. Il est évident que les fonctions $p_0 = \prod_i S_{\mu_i}$, $p_1 = \prod_j S_{\lambda_j}$ sont des fonctions C^∞ sur $\mathfrak{g}$, G-invariantes, qui ne s'annulent pas dans $\mathscr{V}$ et qui prolongent respectivement p'_0 et p'_1. De plus un calcul simple montre que la restriction de $p_0 p_1$ à $\mathfrak{n}(\Omega)$ est p'_Ω.

4.2.1. PROPOSITION. — *On pose $m' = 1 + \dim \mathfrak{g}$. Soit p_Ω une fonction C^∞ sur $\mathfrak{g}$, G-invariante, ne s'annulant pas dans $\mathscr{V}$ et prolongeant la fonction p'_Ω. Soit $\mathscr{D}^{m'}(\mathscr{V})$ l'espace des fonctions sur $\mathscr{V}$, de classe $C^{m'}$, à support compact dans $\mathscr{V}$ et soit $\alpha \in \mathscr{D}^{m'}(\mathscr{V})$. On suppose que la fonction $l \mapsto (\psi(l))^2 (\alpha p_\Omega^{-1})\hat{}(l)$ est intégrable sur Ω (pour la mesure β_Ω). Dans ces conditions :*

1. *Si l'opérateur $[A\,\pi(\alpha)\,A]$ est traçable, sa trace est donnée par la formule :*

$$\operatorname{tr}([A\,\pi(\alpha)\,A]) = \int_\Omega (\psi(l))^2 (\alpha p_\Omega^{-1})\hat{}(l)\, d\beta_\Omega(l).$$

2. *Si $\pi(\alpha)$ est positif, alors $[A\,\pi(\alpha)\,A]$ est traçable.*

Démonstration. — (*a*) Soit $\mathscr{W} = \exp(\mathscr{V})$. C'est un ouvert de G et l'application exponentielle induit un difféomorphisme de $\mathscr{V}$ sur $\mathscr{W}$. Soit dX la mesure de Haar correspondante du groupe additif $\mathfrak{g}$. On a alors, comme expliqué plus haut, $d(\exp X) = J(X)\, dX$, avec $J(0) = 1$. Soit α dans $\mathscr{D}^{m'}(\mathscr{V})$, et soit β la fonction sur $\mathscr{W}$ telle que

$$\alpha(X) = \beta(\exp X)\, J(X)$$

pour X dans $\mathscr{V}$. Elle est dans $\mathscr{D}^{m'}(\mathscr{W})$ et on a

$$\pi(\beta) = \int \alpha(X)\, \pi(\exp X)\, dX = \pi(\alpha).$$

(*b*) Soit E^0 le sous-groupe analytique de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{e}$. Soit $E = G(l)\,E^0$. C'est un sous-groupe fermé de G et la représentation π est induite (au sens ordinaire) par une représentation unitaire ρ de E. Dans [3] (chap. IX, démonstration de la proposition 3.2.1) il est prouvé que l'opérateur $\pi(\beta)$ est défini par le noyau

$$K(x, y) = \int_E \Delta_G(y)^{-1}\, \Delta_{E,G}(z)^{1/2}\, \beta(xzy^{-1})\, \rho(z)\, dz,$$

où $\Delta_{E,G}(z) = \Delta_E(z)/\Delta_G(z)$ pour tout z dans E et dz est une mesure de Haar à gauche de E convenablement choisie. La même démonstration prouve que l'opérateur $A\,\pi(\beta)\,A$ est défini par le noyau

$$K'(x, y) = \int_E \tilde{\psi}(x)\, \tilde{\psi}(y)\, \Delta_G(y)^{-1}\, \Delta_{E,G}(z)^{1/2}\, \beta(xzy^{-1})\, \rho(z)\, dz.$$

(*c*) On s'intéresse à l'opérateur

$$\mathrm{K}'(x, x) = \tilde{\psi}(x)^2 \Delta_{\mathrm{G}}(x)^{-1} \int_{\mathrm{E}} \Delta_{\mathrm{E, G}}(z)^{1/2} \beta(xzx^{-1}) \rho(z) \, dz.$$

Soit ρ_0 la restriction de la représentation ρ à E_0. En fait $\mathrm{K}(x, x) = \rho_0(\gamma)$, où $\gamma \in \mathscr{D}^{m'}(\mathrm{E}^0)$ est une fonction convenable, et les arguments donnés dans [3] (IX, 3.2.1), sans aucune modification, montrent que pour chaque x dans G, l'opérateur $\mathrm{K}'(x, x)$ est traçable, et que sa trace est une fonction continue de x, calculable par une formule qu'on va expliciter.

(*d*) Soit $d\mathrm{Z}$ la mesure de Haar du groupe additif $\mathfrak{e}$ adaptée à dz comme $d\mathrm{X}$ est adaptée à dx. Soit $\mathfrak{e}^{\perp}$ le sous-espace de $\mathfrak{g}^*$ orthogonal à $\mathfrak{e}$. C'est le dual de $\mathfrak{g}/\mathfrak{e}$. Soit $d\zeta$ la mesure de Haar de $\mathfrak{e}^{\perp}$ duale de la mesure quotient $d\mathrm{X}/d\mathrm{Z}$. Soit l_0 la restriction de l à $\mathfrak{e}$. On désigne par ω l'orbite de l_0 sous E^0 dans $\mathfrak{e}^*$ et par β_ω sa mesure canonique.

On a alors

$$\operatorname{tr} \mathrm{K}'(x, x) = \psi(x \,.\, l)^2 \int_{\omega} d\beta_\omega(l') \int_{\mathfrak{e}^{\perp}} (\alpha \, p_\Omega^{-1})\hat{}\,(x \,.\, (l' + k)) \, d\zeta(k).$$

(*e*) On peut maintenant achever la démonstration de la proposition 4.2.1. Soit $\mathscr{C}$ l'espace des fonctions F sur G continues à support compact modulo E, telles que

$$\mathrm{F}(xz) = \Delta_{\mathrm{E, G}}(z) \, \mathrm{F}(x)$$

pour z dans E et x dans G. Soit $\mu_{\mathrm{G, E}}$ la « forme linéaire » sur $\mathscr{C}$ définie par

$$\int_{\mathrm{G}} f(x) \, dx = \oint_{\mathrm{G/E}} d\mu_{\mathrm{G, E}}(x) \int_{\mathrm{E}} f(xz) \, \Delta_{\mathrm{E, G}}(z)^{-1} \, dz$$

pour toute fonction f sur G continue à support compact.

(*i*) Supposons d'abord que l'opérateur $\mathrm{A} \, \pi(\beta) \, \mathrm{A}$ soit traçable. Alors d'après [3] (chap. IX, cor. 3.4.1), la trace de $\mathrm{A} \, \pi(\beta) \, \mathrm{A}$ est donnée par

$$\operatorname{tr}(\mathrm{A} \, \pi(\beta) \, \mathrm{A}) = \oint_{\mathrm{G/E}} \operatorname{tr} \mathrm{K}'(x, x) \, d\mu_{\mathrm{G, E}}(x),$$

et en utilisant (*d*), on voit que le second membre de cette égalité vaut

$$\int_{\Omega} \psi(l)^2 (\alpha \, p_\Omega^{-1})\hat{}\,(l) \, d\beta_\Omega(l),$$

sous réserve de la convergence de cette intégrale.

(ii) Supposons maintenant que $\pi(\beta)$ soit positif, de sorte que $A\,\pi(\beta)\,A$ l'est aussi. L'hypothèse d'intégrabilité sur Ω de la fonction

$$l \mapsto \psi(l)^2 (\alpha\, p_\Omega^{-1})^\wedge (l)$$

est exactement la suivante :

$$\oint_{G/E} \operatorname{tr} K'(x, x)\, d\mu_{G/E}(x) < \infty.$$

Il en résulte (théorème de Mercer, [3], chap. V, 3.3.1 et cor. 3.4.2) que $A\,\pi(\beta)\,A$ est traçable.

4.2.2. Théorème. — *On suppose qu'il existe un entier positif m et une norme $\|\ \|$ sur $\mathfrak{g}^*$ tels que l'on ait*

$$(\bigstar) \qquad \int_\Omega \psi(l)^2 (1+\|l\|)^{-m}\, d\beta_\Omega(l) < \infty.$$

Dans ces conditions :

1. *L'application $\gamma \mapsto [A\,\pi(\gamma)\,A]$ envoie continûment l'espace $\mathcal{D}(G)$ dans l'espace des opérateurs à trace de l'espace de $\pi(\Omega, \eta)$.*

2. *Soit α dans $\mathcal{D}(\mathscr{V})$. L'opérateur $[A\,\pi(\alpha)\,A]$ est traçable. Soit p_Ω une fonction C^∞ sur $\mathfrak{g}$, G-invariante, ne s'annulant pas dans $\mathscr{V}$ et qui prolonge p'_Ω. On a*

$$\operatorname{tr}([A\,\pi(\alpha)\,A]) = \int_\Omega \psi(l)^2 (\alpha\, p_\Omega^{-1})^\wedge (l)\, d\beta_\Omega(l).$$

Démonstration. — Soit $\mathscr{U}$ un voisinage de 1 dans G tel que $\mathscr{U}^2 \subset \mathscr{W}$. Soit

$$m'' = \sup(m,\ 1+\dim \mathfrak{g})$$

et soit $\varphi \in \mathcal{D}^{m''}(\mathscr{U})$. La fonction $\check{\varphi} \bigstar \varphi$ [où $\check{\varphi}(x) = \Delta(x^{-1})\,\varphi(x^{-1})$] est dans $\mathcal{D}^{m''}(\mathscr{W})$ et il existe $\alpha \in \mathcal{D}^{m''}(\mathscr{V})$ telle que $\pi(\check{\varphi} \bigstar \varphi) = \pi(\alpha)$. La deuxième assertion de la proposition 4.2.1 montre que $[A\,\pi(\alpha)\,A] = [A\,\pi(\varphi)^*\,\pi(\varphi)\,A]$ est traçable. Ainsi $[\pi(\varphi)\,A]$ est un opérateur H. S. Soit maintenant γ dans $\mathcal{D}(G)$. D'après [3] (p. 251), il existe des fonctions φ_i, ψ_i $(1 \leqq i \leqq 4)$ dans $\mathcal{D}^{m''}(\mathscr{U})$ telles que $\gamma = \sum_i \varphi_i \bigstar \gamma_i \bigstar \psi_i$, les γ_i étant des éléments de $\mathcal{D}(G)$ qui dépendent continûment de γ. Comme chacun des opérateurs $[A\,\pi(\varphi_i)]$ et $[\pi(\psi_i)\,A]$ est de Hilbert-Schmidt, l'opérateur $[A\,\pi(\gamma)\,A]$ est traçable. Ceci démontre la première assertion du théorème. Le reste provient de la première partie de la proposition 4.2.1.

4.2.3. *Remarque.* — Dans [3] (chap. II, n° 4), on a utilisé l'idéal

$$\mathfrak{m}(\Omega) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] + \mathfrak{g}(l)$$

qui est évidemment contenu dans $\mathfrak{n}(\Omega)$ et peut être strictement plus petit, et le sous-groupe H de G qui stabilise la restriction de l à $\mathfrak{m}(\Omega)$. De même ici, on considère le sous-groupe H′ de G qui stabilise la restriction de l à $\mathfrak{n}(\Omega)$, et son algèbre de Lie $\mathfrak{h}' = \mathfrak{g}(l) + [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \cap \mathfrak{g}(f)$. Les démonstrations de [3] (chap. II, n° 4) se transposent sans aucune difficulté, et on peut énoncer les résultats suivants : on a $H' l = l + \mathfrak{n}(\Omega)^{\perp}$ et de façon plus précise, si $l \in \Omega$ et $l_1 \in \mathfrak{n}(\Omega)^{\perp}$, il existe X dans $\mathfrak{h}'$ tel que $l + l_1 = (\exp X).l$. La donnée d'une mesure de Haar dl_1 de $\mathfrak{n}(\Omega)^{\perp}$ définit une mesure invariante sur l'espace homogène $H'/G(l) = l + \mathfrak{n}(\Omega)^{\perp}$. L'espace homogène G/H' admet une mesure invariante. On peut donc appliquer le paragraphe 3 du chapitre II de [3] : il existe une mesure de Haar dl_1 sur $\mathfrak{n}(\Omega)^{\perp}$ et une mesure invariante λ sur G/H' telles que

$$\int_{\Omega} \varphi(l')\, d\beta_{\Omega}(l') = \int_{G/H'} d\lambda(x) \int_{\mathfrak{n}(\Omega)^{\perp}} \varphi(x.l + l_1)\, dl_1$$

pour toute fonction φ intégrable sur Ω, relativement à la mesure β_{Ω}. Appliquons ceci aux fonctions $\varphi : l' \mapsto \psi(l')^2 (\alpha\, p_{\Omega}^{-1})\hat{}\,(l)$ qui apparaissent dans l'énoncé du théorème 4.2.2. Si on remarque que $\psi(l + l_1) = \psi(l)$ chaque fois que l est dans Ω et l_1 est dans $\mathfrak{n}(\Omega)^{\perp}$ [on a en effet $\psi(l + l_1) = \psi((\exp X).l) = \chi(\exp X)^{-1} \psi(l) = \psi(l)$ puisque $\exp X \in \operatorname{Ker} \chi$ pour tout X dans $\mathfrak{h}'$], il vient

$$\operatorname{tr}([A\, \pi(\alpha)\, A]) = \int_{G/H'} \psi(x.l)^2\, d\lambda(x) \int_{\mathfrak{n}(\Omega)^{\perp}} (\alpha\, p_{\Omega}^{-1})\hat{}\,(x.l + l_1)\, dl_1.$$

Il en résulte qu'il existe une mesure de Haar dY sur $\mathfrak{n}(\Omega)$ telle que

$$\operatorname{tr}([A\, \pi(\alpha)\, A]) = \int_{G/H'} \psi(x.l)^2\, d\lambda(x) \int_{\mathfrak{n}(\Omega)} (\alpha\, p_{\Omega}^{-1})(Y)\, e^{i\langle x.l, Y\rangle}\, dY.$$

Cette formule montre que lorsque le théorème 4.2.2 s'applique, la distribution (sur $\mathscr{V}$) $\alpha \mapsto \operatorname{tr}([A\, \pi(\pi)\, A])$ a son support contenu dans $\mathscr{V} \cap \mathfrak{n}(\Omega)$. [Par contre, il semble qu'il ne soit pas toujours contenu dans $\mathscr{V} \cap \mathfrak{m}(\Omega)$].

5. La formule de Plancherel pour les groupes exponentiels

5.1.1. Soit G un groupe de Lie connexe, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Soient Z un sous-groupe fermé du centre de G et ζ un caractère unitaire de Z. On désignera par $\mathfrak{z}$ l'algèbre de Lie de Z et par z une forme linéaire sur $\mathfrak{z}$ telle que iz soit la différentielle de ζ. Soit $\mathfrak{g}_z^*$ le sous-ensemble de $\mathfrak{g}^*$ constitué par les formes linéaires dont la restriction à $\mathfrak{z}$ est z. C'est un sous-espace affine G-invariant de $\mathfrak{g}^*$, dont la direction est $\mathfrak{z}^{\perp}$. Soient l_0 dans $\mathfrak{g}_z^*$ et $\mathfrak{p}$ un sous-espace de $\mathfrak{g}$ tel que $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{g}(l_0)$. Soit F l'application définie dans $\mathfrak{p} \times (l_0 + \mathfrak{q}^{\perp})$ (où $\mathfrak{q}$ est l'espace $\mathfrak{p} + \mathfrak{z}$), à valeurs dans $\mathfrak{g}_z^*$ telle que $F(X, l) = (\exp X).l$. Elle est étale au point $(0, l_0)$.

5.1.2. Supposons maintenant que l_0 soit un point de $\mathfrak{g}_z^*$ dont l'orbite a la dimension maximale des orbites de G dans $\mathfrak{g}_z^*$. Soit $\mathscr{V}$ un voisinage de l_0 dans $\mathfrak{g}_z^*$ tel que $\mathfrak{g} = \mathfrak{p}+\mathfrak{g}(l)$ pour tout l dans $\mathscr{V}$. On peut alors affirmer : il existe un voisinage ouvert $\mathscr{V}_1$ de 0 dans $\mathfrak{p}$, un voisinage ouvert $\mathscr{V}_2$ de l_0 dans $l_0+\mathfrak{q}^{\perp}$, et un voisinage ouvert $\mathscr{V}$ de l_0 dans $\mathfrak{g}_z^*$ ayant les propriétés suivantes : $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{g}(l)$ pour tout l dans $\mathscr{V}$ et F est un difféomorphisme de $\mathscr{V}_1 \times \mathscr{V}_2$ sur $\mathscr{V}$. On remarquera que $\mathscr{V}_2$ est une sous-variété de $\mathscr{V}$ et que l'orbite Ω_l d'un point l de $\mathscr{V}$ rencontre $\mathscr{V}_2$ en au moins un point. Malheureusement $\Omega_l \cap \mathscr{V}_2$ n'est pas en général réduite à un point. Toutefois l'espace tangent en un point f de $\mathscr{V}_2$ à l'orbite Ω_f et l'espace $\mathfrak{q}^{\perp}$ sont supplémentaires l'un de l'autre dans $\mathfrak{z}^{\perp}$. Autrement dit, la sous-variété $\mathscr{V}_2$ est transverse à l'orbite de chacun de ses points.

5.1.3. Avec les notations ci-dessus, nous allons montrer que l'on peut choisir $\mathscr{V}_1$ et $\mathscr{V}$ de telle sorte que $\exp(\mathscr{V}_1) \cap G(l) = \{1\}$ pour tout $l \in \mathscr{V}$, et que $\exp(\mathscr{V}_1)\, G(l)$ contienne un voisinage N (ne dépendant pas de l) pour tout $l \in \mathscr{V}$.

Pour obtenir la première assertion, il suffit de supposer que pour tout $X \in \mathscr{V}_1$, ad (X) n'a pas de valeur propre imaginaire pure de la forme $2\,ik$, avec $k \in \mathbb{N}^*$. En effet, il résulte de [3] (I.3.3) que si X vérifie cette condition, et si $\exp(X) \in G(l)$, alors $X \in \mathfrak{g}(l)$. Comme $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{g}(l)$ sont supplémentaires, on obtient $X = 0$.

Pour obtenir la seconde, on va utiliser le théorème des fonctions implicites. On définit une application H de $\mathfrak{g}_z^* \times \mathscr{V}_1 \times \mathfrak{g}(l_0)$ dans $\mathfrak{g}_z^* \times G$ par la formule

$$H(l, X, Y) = (l, \exp X \exp Y_l),$$

où pour tout $Y \in \mathfrak{g}(l_0)$, Y_l désigne la projection sur $\mathfrak{g}(l)$ parallèlement à $\mathfrak{p}$. Alors H est continûment différentiable, et sa différentielle en $(l_0, 0, 0)$ est inversible. En modifiant au besoin $\mathscr{V}$, on voit que l'on peut supposer que l'image de H contient $\mathscr{V} \times N$, où N est un voisinage convenable de 1 dans G. Il en résulte que N est contenu dans $\exp(\mathscr{V}_1)\, G(l)$ pour tout $l \in \mathscr{V}$.

5.1.4. Proposition. — *Soit $\mathscr{O}$ un ouvert de $\mathfrak{g}_z^*$ ayant les propriétés suivantes : $\mathscr{O}$ est G-invariant. Les orbites de G dans $\mathscr{O}$ sont localement fermées et de dimension maximale. Soit φ une fonction borélienne non négative sur $\mathscr{O}$. On pose $\Phi(l) = \int_{\Omega_l} \varphi(l')\, d\beta_{\Omega_l}(l')$ où pour chaque l dans $\mathscr{O}$, Ω_l désigne l'orbite de l. Alors la fonction Φ est elle-même borélienne dans $\mathscr{O}$.*

Démonstration. — Soit $\mathscr{O}_1$ la réunion des ouverts de $\mathscr{O}$ dans lesquels Φ est borélienne. Alors Φ est borélienne dans $\mathscr{O}_1$ car $\mathscr{O}$ a une base dénombrable d'ouverts. Soit M le complémentaire de $\mathscr{O}_1$ dans $\mathscr{O}$. C'est un sous-espace localement compact dans lequel G opère et chaque G-orbite est localement fermée. Supposons que M soit non vide. On va montrer qu'il existe un ouvert non vide $\mathscr{U}$ de M tel que Φ soit borélienne dans $\mathscr{U}$, de sorte que Φ est borélienne dans $\mathscr{U} \cup \mathscr{O}_1$, ce qui contredit la définition de $\mathscr{O}_1$. Soit donc l_0 dans M. Soient $\mathfrak{p}$, $\mathscr{V}$, $\mathscr{V}_1$, $\mathscr{V}_2$ comme ci-dessus. Soit N un voisinage de 1 dans G tel que $N \subset \exp(\mathscr{V}_1)\, G(l)$ avec $\exp(\mathscr{V}_1) \cap G(l) = \{1\}$ pour tout l dans $\mathscr{V}$. D'après [14], il existe un ouvert non vide $\mathscr{U}$ de M tel que $\mathscr{U} \subset \mathscr{V}$ et $\Omega_l \cap \mathscr{U} = \mathrm{N}.l \cap \mathscr{U}$ pour tout l dans $\mathscr{U}$. On va voir que Φ est borélienne dans $\mathrm{G}.\mathscr{U}$. Soit (g_i) une suite de points de G telle que les $g_i.\mathscr{U}$ forment un recouvrement de $\mathrm{G}.\mathscr{U}$, et soit (φ_i) une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement. Il suffit de montrer que la fonction

$$\Phi_i : l \to \int \varphi_i(l') \varphi(l') \, d\beta_{\Omega_l}(l')$$

est borélienne dans $\mathscr{U}$. Comme la fonction $\varphi_i \varphi$ est à support dans $g_i.\mathscr{U}$, l'intégrale précédente s'écrit sous la forme $\int_{\Omega_l \cap \mathscr{U}} \psi_i(l') \, d\beta_{\Omega_l}(l')$, où ψ_i est une fonction borélienne convenable, à support dans $\mathscr{U}$. Comme $\Omega_l \cap \mathscr{U} = \mathrm{N}.l \cap \mathscr{U}$, on a

$$\Phi_i(l) = \int_{\mathscr{V}_1} \psi_i(\exp(\mathrm{X}).f) \gamma(\mathrm{X}, f) \, d\mathrm{X},$$

où

$$\gamma(\mathrm{X}, f) = d(\exp(\mathrm{X}).f)/d\beta_\Omega(\exp(\mathrm{X}).f)$$

et $d\mathrm{X}$ est une mesure de Haar de $\mathfrak{p}$. D'où le résultat.

5.1.5. Lemme. — *Soient* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie,* $\mathfrak{z}$ *une sous-algèbre de son centre,* $z \in \mathfrak{z}^*$ *et* $\mathfrak{g}_z^*$ *comme ci-dessus. Il existe une fonction rationnelle non nulle* θ *sur* $\mathfrak{g}_z^*$ *telle que* $\theta(x.l) = \Delta(x) \theta(l)$ *pour tous* x *dans* G *et* l *dans* $\mathfrak{g}_z^*$.

Ce résultat est dû à Pukanszky ([26], prop. 4.1) dans le cas où $\mathfrak{g}$ est résoluble et à J. Dixmier, M. Duflo et M. Vergne dans le cas général ([8], 4.7).

5.1.6. Fixons une fonction borélienne ψ sur $\mathfrak{g}_z^*$, à valeurs positives et telle que $\psi(x^{-1}.l) = \Delta(x) \psi(l)$ pour x dans G et l dans $\mathfrak{g}_z^*$. Soit dl une mesure invariante par translation sur $\mathfrak{g}_z^*$, c'est-à-dire une mesure positive sur $\mathfrak{g}_z^*$ invariante par toutes les transformations de $\mathfrak{g}_z^*$ de la forme $l \mapsto l + l'$ avec l' dans $\mathfrak{z}^\perp$. Alors la mesure $\psi(l) \, dl$ est une mesure G-invariante sur $\mathfrak{g}_z^*$. Dans ce qui suit, nous dirons que G opère presque partout régulièrement dans $\mathfrak{g}_z^*$ s'il existe dans $\mathfrak{g}_z^*$ un ouvert qui est réunion d'orbites localement fermées de dimension maximale et dont le complémentaire est de mesure nulle. On a alors :

5.1.7. Lemme. — *On suppose que* G *opère presque partout régulièrement dans* $\mathfrak{g}_z^*$. *Soient* ψ *et* dl *comme plus haut. Il existe une unique mesure borélienne positive* m_ψ *sur* $\mathfrak{g}_z^*/\mathrm{G}$ *telle que l'on ait*

$$\int_{\mathfrak{g}_z^*} \varphi(l) \psi(l) \, dl = \int_{\mathfrak{g}_z^*/\mathrm{G}} dm_\psi(\Omega) \int_\Omega \varphi(l) \, d\beta_\Omega(l)$$

pour toute fonction φ, *borélienne positive, ou intégrable pour* $\psi(l) \, dl$ *sur* $\mathfrak{g}_z^*$.

Démonstration. — Soit $\mathscr{O}$ un ouvert de $\mathfrak{g}_z^*$ dont le complémentaire est négligeable et où toutes les orbites sont localement fermées et de dimension maximale. D'après [21] et [22], il existe une mesure m'_ψ sur $\mathscr{O}/\mathrm{G}$ et pour presque toute orbite Ω de G dans $\mathscr{O}$ une mesure

G-invariante β'_Ω sur Ω, donc de la forme $\alpha(\Omega)\,\beta_\Omega$, telles que l'énoncé du lemme soit vrai avec $\mathcal{O}$, m'_ψ et β'_Ω à la place de $\mathfrak{g}_z^*$, m_ψ et β_Ω. De plus, si m'_ψ est fixée, les mesures β'_Ω sont déterminées presque partout. Comme chaque fonction $\Phi\ :\ l \mapsto \int_{\Omega_l} \varphi(l')\,d\beta_\Omega(l')$ est borélienne dans $\mathcal{O}$ dès que φ l'est, la fonction α est borélienne dans $\mathcal{O}/\mathrm{G}$. Il suffit donc de poser $m_\psi = \alpha\, m'_\psi$.

5.1.8. Nous allons montrer comment calculer les mesures m_ψ définies en 5.1.7, dans le cas particulier où il existe un ouvert $\mathcal{O}$ dans $\mathfrak{g}_z^*$, de complémentaire négligeable, et tel que $\mathcal{O}/\mathrm{G}$ admette une structure de variété différentiable quotient. Cette condition entraîne que l'action de G dans $\mathfrak{g}_z^*$ est presque partout régulière — et il nous paraît vraisemblable que la réciproque est vraie.

On choisit une forme différentielle de degré maximal w sur $\mathfrak{z}^\perp$, qui définit sur $\mathfrak{g}_z^*$ la mesure dl. Posons $p = \dim \mathfrak{g}(l)/\mathfrak{z}$ pour $l \in \mathcal{O}$. Soient $l_0 \in \mathcal{O}$, et $q_1, \ldots, q_p$ des fonctions différentiables à valeurs réelles définies dans un voisinage G-invariant de l_0 dans $\mathcal{O}$, et telles que les fonctions $\tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_p$ obtenues par passage au quotient forment un système de coordonnées locales au voisinage de l'image de l_0 dans $\mathcal{O}/\mathrm{G}$. Les différentielles $dq_1(l), \ldots, dq_p(l)$ sont des éléments de $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}$. Comme dans [8] (1.10), on voit qu'il existe une fonction $a(q_1, \ldots, q_p, w)$ telle que, pour tout $t \in \Lambda^p(\mathfrak{z}^\perp)$ et pour tout l dans un voisinage G-invariant de l_0 l'on ait

$$a(q_1, \ldots, q_p, w)(l)\langle \gamma_l \wedge t, w\rangle = \langle t, dq_1(l) \wedge \ldots \wedge dq_p(l)\rangle.$$

où l'on a posé $\gamma_l = (d\,!)^{-1}\,\mathrm{B}_l \wedge \ldots \wedge \mathrm{B}_l$ (d facteurs). [On considère B_l comme un élément de $\Lambda^2(\mathfrak{g}/\mathfrak{z})^*$, et $2\,d = \dim \mathfrak{g}/\mathfrak{g}(l)$]. La fonction $a(q_1, \ldots, q_p, w)$ est semi-invariante de poids Δ (*cf.* [8], 1.11).

La proposition suivante n'est qu'une autre formulation du résultat de [19].

PROPOSITION. — *On définit* ψ *et* m_ψ *comme en* 5.1.7. *La mesure* m_ψ *provient d'une forme différentielle sur* $\mathcal{O}/\mathrm{G}$. *Au voisinage de l'image de* l_0 *cette forme différentielle est égale à* $\psi\, a(q_1, \ldots, q_p, w)^{-1}\, d\tilde{q}_1 \wedge \ldots \wedge d\tilde{q}_p$.

On notera que la fonction $\psi\, a(q_1, \ldots, q_p, w)$ *est invariante et passe donc au quotient.*

La proposition dit que l'objet résultat de la division de w par les formes β_Ω est décrit localement par la formule

$$(2\,r)^d\, a(q_1, \ldots, q_p)^{-1}\, d\tilde{q}_1 \wedge \ldots \wedge d\tilde{q}_p.$$

On laisse au lecteur le soin d'en donner une définition intrinsèque.

Démonstration de la proposition. — Il suffit de démontrer que pour tout l dans un voisinage de l_0, on a

$$w = (2\,l)^d\, a(q_1, \ldots, q_p, w)^{-1}\, \tau_l \wedge dq_1(l) \wedge \ldots \wedge dq_p(l),$$

où τ_l est un élément de $\Lambda^{2d}(\mathfrak{g}/\mathfrak{z})$ dont la restriction à l'espace tangent $\mathfrak{g}.l$ à $\mathrm{G}.l$ au point l est β_l [on a posé $\beta_l = \beta_{\Omega_l}(l)$].

Fixons un tel l. Choisissons une base $e_1, \ldots, e_n$ de $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}$ telle que $w = e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$, et telle que $e_{2d+1}, \ldots, e_n$ soit une base de $\mathfrak{g}(l)/\mathfrak{z}$. Soit $e_1^*, \ldots, e_n^*$ la base duale dans $\mathfrak{z}^\perp$. Il existe un scalaire (le discriminant) tel que $\gamma_l = \alpha\, e_1^* \wedge \ldots \wedge e_{2d}^*$ et l'on a

$$\alpha^2 = \text{dét}(B([e_i, e_j])_{1 \leq i, j \leq 2d}.$$

Un calcul immédiat montre que l'on a

$$a(q_1, \ldots, q_p, w)(l)^{-1}\, dq_1(l) \wedge \ldots \wedge dq_p(l) = \alpha\, e_{2d+1} \wedge \ldots \wedge e_n.$$

Par définition de β_l, on a

$$\beta_l(e_1 l, \ldots, e_{2d} l) = (2r)^{-d} \gamma_l(e_1, \ldots, e_{2d}) = (2r)^{-d}\alpha.$$

Par ailleurs, on a

$$e_1 \wedge \ldots \wedge e_{2d}(e_1.l, \ldots, e_{2d}.l) = \text{dét}(\langle e_i, e_j.l \rangle) = \alpha^2.$$

On peut donc choisir :

$$\tau_l = \alpha^{-1}(2r)^{-d} e_1 \wedge \ldots \wedge e_{2d}.$$

La proposition en résulte.

Rappelons que lorsque $\mathfrak{g}$ est algébrique, on peut choisir $q_1, \ldots, q_p$ et ψ rationnelles, de sorte que m_ψ est rationnel dès qu'il existe sur $\mathcal{O}/G$ une structure rationnelle naturelle.

5.1.9. Supposons toujours que G opère presque partout régulièrement dans $\mathfrak{g}_z^*$. Soit ψ une fonction comme dans 5.1.6, presque partout à valeurs dans $]0, +\infty[$. Une telle fonction existe d'après le lemme 5.1.5. Pour chaque orbite Ω de G dans $\mathfrak{g}_z^*$, on désigne par ψ_Ω la restriction de ψ à Ω. La fonction ψ_Ω est un semi-invariant de poids Δ, et pour presque tout Ω, elle est strictement positive. Soient $m = 1 + \dim \mathfrak{g}$ et $\| \ \|$ une norme sur $\mathfrak{g}^*$. Le lemme 5.1.7 et le théorème de Fubini montrent que pour presque tout Ω, on a

$$\int_\Omega (1 + \| l \|)^{-m} \psi_\Omega(l)^{-1}\, d\beta_\Omega(l) < \infty.$$

5.2.1. On suppose dorénavant que G est résoluble simplement connexe de type I. On sait que les orbites de G dans $\mathfrak{g}^*$ sont intégrables et localement fermées [1]. Pour presque toute orbite Ω de G dans $\mathfrak{g}_z^*$, on est donc dans les conditions où le théorème 4.2.2 s'applique. Soit donc Ω une orbite de G dans $\mathfrak{g}_z^*$ et soit $\pi = \pi(\Omega, \eta)$ une représentation irréductible de G construite comme en 3.1.8. Soit $\varphi = \psi^{1/2}$ et soit $A_{\Omega, \eta}$ l'opérateur de poids $\Delta^{1/2}$ pour π associé par le lemme 3.2.2 à la restriction φ_Ω de φ à Ω.

La première assertion du théorème 4.2.2 permet d'affirmer que pour presque tout Ω l'application $\gamma \mapsto [A^{-1} \pi(\gamma) A^{-1}]$ envoie continûment $\mathcal{D}(G)$ dans l'espace des opérateurs traçables de l'espace de π. Pour exploiter la deuxième assertion du théorème 4.2.2, on a besoin de renseignements supplémentaires sur les fonctions p_Ω.

5.2.2. LEMME. — *Soit* Ω *une orbite de* G *dans* $\mathfrak{g}_z^*$, *de dimension maximale. Soit* l *dans* Ω. *On a :* $[\mathfrak{g}(l), \mathfrak{g}(l)] \subset \ker z$. *En particulier* $\mathfrak{g}(l)$ *est nilpotente.*

Une démonstration de ce lemme se trouve dans [9] (prop. I.1.). L'utilité d'un tel résultat affirmant que $\mathfrak{g}(l)$ est nilpotente a déjà été montrée dans [3] (chap. IX, 4.2). Rappelons de quoi il s'agit. Soit p la fonction sur $\mathfrak{g}$ définie par $p(\mathrm{X}) = (\text{dét}(\mathrm{Sh}(\mathrm{ad}\,\mathrm{X}/2)/(\mathrm{ad}\,\mathrm{X}/2)))^{1/2}$. Elle est strictement positive dans l'ouvert $\mathscr{V}$ de $\mathfrak{g}$ introduit en 4.1.5. Soit maintenant $\mathscr{V}_0$ l'ensemble des X dans $\mathfrak{g}$ tels que $|\lambda| < 2\pi$ pour toute valeur propre imaginaire pure λ de ad X. On a alors ([3], chap. IX, lemme 4.2.1) : soit l dans $\mathfrak{g}^*$ tel que $\mathfrak{g}(l)$ soit nilpotente, et soit Ω l'orbite de l. Pour tout X dans $\mathfrak{n}(\Omega) \cap \mathscr{V}_0$, on a $p(\mathrm{X}) = p'_\Omega(\mathrm{X})$.

5.2.3. On considère l'ensemble des orbites Ω de G dans $\mathfrak{g}_z^*$ ayant les propriétés suivantes :

(i) $\displaystyle\int_\Omega (1+\|l\|)^{-m}\, \psi_\Omega(l)^{-1}\, d\beta_\Omega(l) < \infty$;

(ii) ψ_Ω est non nulle;

(iii) si l est dans Ω, l'algèbre $\mathfrak{g}(l)$ est nilpotente.

Le complémentaire de cet ensemble d'orbites est m_ψ-négligeable, et on peut énoncer : pour chaque orbite Ω ayant ces propriétés, l'application $\gamma \mapsto [\mathrm{A}_{\Omega,\eta}^{-1}\, \pi(\gamma)\, \mathrm{A}_{\Omega,\eta}^{-1}]$ est linéaire continue de $\mathscr{D}(\mathrm{G})$ dans l'espace des opérateurs à trace de l'espace de π. Si α est dans $\mathscr{D}(\mathscr{V}_0)$, on a

$$\mathrm{tr}([\mathrm{A}_{\Omega,\eta}^{-1}\pi(\alpha)\mathrm{A}_{\Omega,\eta}^{-1}]) = \int_\Omega (\alpha p^{-1})\hat{\ }(l)\,\psi_\Omega(l)^{-1}\, d\beta_\Omega(l).$$

On a ainsi presque démontré la première partie de la proposition suivante.

5.2.4. PROPOSITION. — *Soit* G *un groupe résoluble simplement connexe de type* I. *Soient* Z *un sous-groupe fermé connexe du centre de* G *et* ζ *un caractère unitaire de* Z. *On désigne par* $\mathscr{D}(\mathrm{G}, \zeta)$ *l'espace des fonctions* φ, *de classe* C^∞ *sur* G, *telles que* $\varphi(xy) = \zeta(y)^{-1}\varphi(x)$ *pour* x *dans* G, y *dans* Z, *à support compact modulo* Z. *Soient* z *et* $\mathfrak{g}_z^*$ *comme plus haut. Si* l_0 *est un point de* $\mathfrak{g}_z^*$, *on a :* $\mathfrak{g}_z^* = l_0 + \mathfrak{z}^\perp$. *On fixe une mesure de Haar* $d\mathring{x}$ *sur* G/Z, *d'où la mesure de Haar correspondante sur* $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}$, *d'où la mesure duale sur* $\mathfrak{z}^\perp$. *On munit* $\mathfrak{g}_z^*$ *de la mesure dl, translatée par* l_0 *de cette mesure duale. Cette mesure ne dépend pas du choix de* l_0. (*On dira que, c'est la mesure duale de* $\mathfrak{g}_z^*$ *correspondant à* $d\mathring{x}$.) *Soient* ψ, m_ψ *et* φ *les objets définis dans* 5.1.6, 5.1.7 *et* 5.2.1. *Si* Ω *est une orbite de* G *dans* $\mathfrak{g}_z^*$ *et si* $\pi(\Omega, \eta)$ *est une représentation irréductible de* G, *on pose pour chaque* φ *dans* $\mathscr{D}(\mathrm{G}, \zeta)$:

$$\pi(\Omega, \eta)(\varphi) = \int_{\mathrm{G/Z}} \varphi(x)\,\pi(\Omega, \eta)(x)\, d\mathring{x}.$$

Pour presque tout Ω, *on désigne par* $\mathrm{A}_{\Omega,\eta}$ *l'opérateur self-adjoint semi-invariant de poids* $\Delta^{1/2}$ *pour la représentation* $\pi(\Omega, \eta)$, *associé à* φ_Ω. *Dans ces conditions :*

1. *Pour presque tout* Ω, *l'application* $\varphi \mapsto [\mathrm{A}_{\Omega,\eta}^{-1}\,\pi(\Omega, \eta)(\varphi)\,\mathrm{A}_{\Omega,\eta}^{-1}]$ *envoie continûment* $\mathscr{D}(\mathrm{G}, \zeta)$ *dans l'espace des opérateurs traçables de l'espace de* $\pi(\Omega, \eta)$.

2. *Soit* $\mathscr{V}_0$ *l'ensemble des* X *dans* $\mathfrak{g}$ *tels que* $|\lambda| < 2\pi$ *pour toute valeur propre imaginaire pure* λ *de* ad X, *et soit* $\mathscr{W}_0 = \exp(\mathscr{V}_0)$. *Soit* $\mathscr{D}(\mathscr{W}_0, \zeta)$ *le sous-espace de* $\mathscr{D}(G, \zeta)$ *constitué par les fonctions dont le support modulo* Z *est un compact de* $\mathscr{W}_0/Z$. *On a alors pour chaque* φ *dans* $\mathscr{D}(\mathscr{W}_0, \zeta)$:

$$\varphi(1) = \int_{\mathfrak{g}_{\mathfrak{z}}^*/G} \operatorname{tr}([A_{\Omega,\eta}^{-1} \pi(\Omega, \eta)(\varphi) A_{\Omega,\eta}^{-1}])\, dm_\psi(\Omega).$$

Démonstration. — Soit dz une mesure de Haar de Z, et soit φ dans $\mathscr{D}(G, \zeta)$. Il existe une fonction β dans $\mathscr{D}(G)$ telle que $\varphi(x) = \int_Z \beta(xz)\, \zeta(z)\, dz$. On munit G de la mesure de Haar produit des mesures de Haar de Z et de G/Z. On a alors

$$\pi(\Omega, \eta)(\varphi) = \int_G \beta(x)\, \pi(\Omega, \eta)(x)\, dx$$

puisque la restriction de $\pi(\Omega, \eta)$ à Z est un multiple de ζ. La première assertion de la proposition est alors évidente, compte tenu de 5.2.1. Soit maintenant dX la mesure de Haar de $\mathfrak{g}$ qui correspond à dx, de sorte que $d(\exp X) = J(X)\, dX$ pour tout X dans $\mathscr{V}$, avec $J(0) = 1$. Soit β dans $\mathscr{D}(\mathscr{W}_0)$ et soit α dans $\mathscr{D}(\mathscr{V}_0)$ telle que $\alpha(X) = J(X)\, \beta(\exp X)$ pour tout X dans $\mathscr{V}_0$. D'après 5.2.3, on a

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}([A_{\Omega,\eta}^{-1} \pi(\Omega, \eta)(\beta) A_{\Omega,\eta}^{-1}]) &= \operatorname{tr}([A_{\Omega,\eta}^{-1} \pi(\Omega, \eta)(\alpha) A_{\Omega,\eta}^{-1}]) \\ &= \int_\Omega (\alpha p^{-1})^\wedge(l)\, \Phi_\Omega(l)^{-2}\, d\beta_\Omega(l). \end{aligned}$$

Ceci étant, on a

$$\varphi(1) = \int_Z \beta(z)\, \zeta(z)\, dz = \int_{\mathfrak{z}} \alpha(Y)\, e^{i\langle z, Y\rangle}\, dY,$$

où dY est la mesure de Haar de $\mathfrak{z}$ qui correspond à dz. En fait cette mesure dY est telle que

$$\varphi(1) = \int_{\mathfrak{z}} \alpha(Y)\, p(Y)^{-1}\, e^{i\langle z, Y\rangle}\, dY = \int_{\mathfrak{z}^\perp} (\alpha p^{-1})^\wedge(l_0 + l)\, dl.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \varphi(1) = \int_{\mathfrak{g}_{\mathfrak{z}}^*} (\alpha p^{-1})^\wedge(l)\, dl &= \int_{\mathfrak{g}_{\mathfrak{z}}^*/G} dm_\psi(\Omega) \int_\Omega (\alpha p^{-1})^\wedge(l)\, \Phi_\Omega(l)^{-2}\, d\beta_\Omega(l) \\ &= \int_{\mathfrak{g}_{\mathfrak{z}}^*/G} \operatorname{tr}([A_{\Omega,\eta}^{-1} \pi(\Omega, \eta)(\varphi) A_{\Omega,\eta}^{-1}])\, dm_\psi(\Omega), \end{aligned}$$

ce qui est le résultat annoncé.

5.2.5. On suppose désormais que G est un groupe résoluble exponentiel. Soient Z, ζ, $\mathfrak{z}$, z, $\mathfrak{g}_z^*$ comme plus haut. L'application $\Omega \mapsto \pi(\Omega)$ est un isomorphisme borélien de $\mathfrak{g}_z^*/G$ sur l'espace $\hat{G}_\zeta$ des (classes de) représentations unitaires irréductibles de G dont la restriction à Z est un multiple de ζ. ([3], chap. I et chap. VI, [25]).

5.2.7. THÉORÈME. — *Soit* G *un groupe résoluble exponentiel. Soient* Z, ζ, $\mathfrak{z}$, z, $\mathfrak{g}_z^*$ *comme plus haut. On choisit les mesures sur* G/Z *et* $\mathfrak{g}_z^*$ *comme en* 5.2.4.

1. *Soit* Φ *une fonction borélienne positive sur* $\mathfrak{g}_z^*$, *vérifiant les relations*

$$\Phi(x^{-1}.l) = \Delta(x)^{1/2}\Phi(l)$$

pour x *dans* G *et* l *dans* $\mathfrak{g}_z^*$. *Soit* $\psi = \Phi^2$. *La mesure* $\psi(l)\,dl$ *est invariante et il existe une unique mesure* m_ψ *sur* $\hat{G}_\zeta$ *telle que l'on ait*

$$\int_{\mathfrak{g}_z^*} \varphi(l)\,\psi(l)\,dl = \int_{\hat{G}_\zeta} dm_\psi(\Omega)\int_\Omega \varphi(l)\,d\beta_\Omega(l)$$

pour toute fonction borélienne φ, *positive sur* $\mathfrak{g}_z^*$.

2. *Il existe des fonctions boréliennes* Φ *comme ci-dessus, qui sont de plus presque partout strictement positives. Soit* Φ *une telle fonction. Soit* A_Ω^Φ *le semi-invariant de poids* $\Delta^{1/2}$ *pour* $\pi(\Omega)$, *associé pour presque tout* Ω *à la restriction de* Φ *à* Ω. *Alors* $(A_\Omega^\Phi)^{-2}\,dm_\psi(\Omega)$ *ne dépend pas de* Φ. *C'est la mesure de Plancherel de* $\hat{G}_\zeta$.

Démonstration. — La première affirmation du théorème n'est autre que le lemme 5.1.7, compte tenu de l'identification de $\hat{G}_\zeta$ avec $\mathfrak{g}_z^*/G$. Pour ce qui est de la deuxième, il est évident que $(A_\Omega^\Phi)^{-2}\,dm_\psi(\Omega)$ ne dépend pas du choix de Φ. Pour montrer que c'est la mesure de Plancherel de $\hat{G}_\zeta$, il suffit donc de prouver ceci pour une fonction Φ particulière. On en fixe donc une comme dans 5.1.9. On applique la proposition 5.2.4. Il vient d'abord que pour presque tout Ω dans $\hat{G}_\zeta$, l'opérateur $[A_\Omega^{-1}\,\pi(\Omega)(\varphi)\,A_\Omega^{-1}]$ est traçable pour toute fonction φ dans $\mathscr{D}(G, \zeta)$, et ensuite que

$$\varphi(1) = \int_{\hat{G}_\zeta} \operatorname{tr}([A_\Omega^{-1}\,\pi(\Omega)(\varphi)\,A_\Omega^{-1}])\,dm_\psi(\Omega)$$

pour toute φ dans $\mathscr{D}(G, \zeta)$ (dans le cas exponentiel, on a $\mathscr{W}_0 = \mathscr{W} = G$). D'après 2.2.3 et 2.2.4, la mesure de Plancherel de $\hat{G}_\zeta$ est bien $(A_\Omega^\Phi)^{-2}\,dm_\psi(\Omega)$.

5.2.6. *Remarque.* — Soit F le fibré sur $\hat{G}_\psi$ dont la fibre au-dessus de Ω est l'ensemble des semi-invariants de poids Δ pour la représentation $\pi(\Omega)$. D'après 3.2.2 et 3.2.5, le fibré F s'identifie canoniquement au fibré sur $\hat{G}_\zeta$ dont la fibre au-dessus de Ω est l'ensemble des fonctions ψ sur Ω telles que $\psi(x^{-1}.l) = \Delta(x)\,\psi(l)$ pour x dans G et l dans Ω. Les sections mesurables de F s'identifient donc aux fonctions mesurables ψ sur $\mathfrak{g}_z^*$ telles que $\psi(x^{-1}.l) = \Delta(x)\,\psi(l)$ pour x dans G et l dans $\mathfrak{g}_z^*$. La mesure de Plancherel de $\hat{G}_\psi$, considérée comme « forme linéaire » positive sur l'ensemble des sections mesurables de F, peut être décrite de la manière suivante : soit ψ une telle section. Elle détermine une mesure m_ψ sur $\hat{G}_\zeta$. La mesure de Plancherel fait correspondre à ψ la masse de la mesure m_ψ. On notera que la mesure de Plancherel dépend du choix d'une mesure de Haar de G/Z.

5.2.7. *Remarque.* — Soit G un groupe résoluble exponentiel et soit Z′ son centre. On sait que Z′ est un groupe vectoriel, qui s'identifie au moyen de l'application exponentielle à $\mathbf{R}^m$, m étant sa dimension. Soit Γ un sous-groupe discret de Z′. On désignera par Z le sous-groupe vectoriel de Z′ engendré par Γ. Alors Z/Γ est un sous-groupe compact connexe du centre de G/Γ, de sorte que la représentation de Z/Γ dans $L^2(G/\Gamma)$ se décompose. Les diverses composantes peuvent être décrites de la manière suivante : soit ζ un caractère unitaire de Z, trivial sur Γ, et soit (comme dans 2.1.2) $L^2(G, \zeta)$ l'espace des fonctions φ sur G vérifiant les relations $\varphi(xz) = \zeta(z)^{-1}\varphi(x)$ (x dans G et z dans Z) et de carré intégrable modulo Z. Il est immédiat que $L^2(G, \zeta)$ s'identifie au sous-espace de $L^2(G/\Gamma)$ constitué par les vecteurs de type ζ (pour l'action de Z/Γ). Comme Z/Γ est central dans G/Γ, la représentation de G×G dans $L^2(G/\Gamma)$ (produit de la représentation régulière gauche par la représentation régulière droite) est somme directe des représentations $\lambda_\zeta \times \rho_\zeta$ de G×G dans $L^2(G, \zeta)$, le caractère ζ parcourant $(Z/\Gamma)\hat{}$.

5.2.8. *Remarque.* — La classe de la mesure dm est connue (*cf.* [23], th. 33, où la détermination en est attribuée à Pukanszky).

5.3.1. Dans tout ce qui suit, G est un groupe résoluble exponentiel de centre Z. Nous allons déterminer les représentations de G qui sont de carré intégrable modulo Z et calculer leur degré formel [13]. Rappelons que si π est une représentation de G dans un espace de Hilbert $\mathscr{H}$, les coefficients de π sont les fonctions $c_{w,v} : x \mapsto (w \mid \pi(x)\,v)$ déterminées par la donnée de deux éléments w et v dans $\mathscr{H}$. Ceci étant, on a les généralisations (évidentes) suivantes de [13] (§ 3).

5.3.2. LEMME. — *Soit ζ un caractère de Z et soit $\pi \in \hat{G}_\zeta$. La représentation π intervient discrètement dans la représentation régulière gauche λ_ζ si et seulement si elle possède un coefficient non nul $c_{w,v}$ de carré intégrable modulo Z. Si π intervient discrètement dans λ_ζ, il existe un opérateur self-adjoint positif* A, *semi-invariant de poids $\Delta^{1/2}$ pour π possédant les propriétés suivantes :*

1. *Soient w et v dans $\mathscr{H}$, avec $w \neq 0$. Alors $c_{w,v}$ est dans $L^2(G, \zeta)$ si et seulement si v est dans le domaine de* A.

2. *Soient w, w' dans $\mathscr{H}$ et v, v' dans le domaine de* A. *Alors*

$$(c_{w,v} \mid c_{w',v'}) = (w \mid w')(\mathrm{A}\,v' \mid \mathrm{A}\,v),$$

le produit scalaire des coefficients étant calculé dans $L^2(G, \zeta)$.

L'opérateur A^{-2} *s'appelle le degré formel de la représentation* π.

5.3.3. Lemme. — *Soit* $A_\Omega^{-2}\, dm(\Omega)$ *la mesure de Plancherel de* $\hat{G}_\zeta$. *La représentation* $\pi(\Omega)$ (*où* Ω *est une orbite de* G *dans* $\mathfrak{g}_z^*$) *est de carré intégrable modulo* Z *si et seulement si* $m(\{\Omega\})$ *est non nul. Lorsqu'il en est ainsi le degré formel de* $\pi(\Omega)$ *est l'opérateur* $A_\Omega^{-2}\, m(\{\Omega\})$.

5.3.4. Théorème. — *Soient* G *un groupe résoluble exponentiel,* Ω *une orbite de* G *dans* $\mathfrak{g}^*$, $\pi(\Omega)$ *l'élément de* $\hat{G}$ *associé à* Ω, *et* l *dans* Ω. *Soit* Z *le centre de* G. *Alors* $\pi(\Omega)$ *est de carré intégrable modulo* Z *si et seulement si* $G(l) = Z$.

Démonstration. — D'après le théorème 5.2.7 et le lemme 5.3.3, la représentation $\pi(\Omega)$ (où Ω est une orbite de G dans un $\mathfrak{g}_z^*$) est de carré intégrable modulo Z si et seulement si $\{\Omega\}$ est de mesure non nulle pour la mesure de Lebesgue de $\mathfrak{g}_z^*$. Le théorème de Sard montre que ceci n'est possible que si $\dim(\Omega) = \dim \mathfrak{g}_z^*$. Soit l dans Ω. Cela signifie $\mathfrak{g}(l) = \mathfrak{z}$, ou encore $G(l) = Z$ puisque $G(l)$ est toujours connexe. Comme toute orbite Ω est contenue dans un $\mathfrak{g}_z^*$ convenable, on a bien démontré le théorème.

5.3.5. *Remarque.* — La condition $G(l) = Z$ équivaut évidemment à celle-ci : $G(l)/Z$ est compact. Sous cette forme, le théorème est l'analogue du théorème fameux de Harish-Chandra sur les conditions d'existence de séries discrètes de représentations pour les groupes de Lie réels semi-simples. La démonstration du théorème de Harish-Chandra est beaucoup plus difficile !

5.3.6. On va maintenant calculer le degré formel des représentations de carré intégrable modulo Z. Nous faisons donc l'hypothèse suivante : il existe l dans $\mathfrak{g}^*$ tel que $\mathfrak{g}(l) = \mathfrak{z}$. D'autre part, nous fixons une mesure de Haar sur G/Z, la mesure de Haar correspondante sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}$, et une base $(e_1, \ldots, e_{2d})$ de $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}$ telle que le parallélépipède de $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}$ dont les arêtes sont $e_1, \ldots, e_{2d}$, soit de volume 1. Soit l dans $\mathfrak{g}^*$. On désigne par $D(l)$ le discriminant de la forme $(2\pi)^{-1} B_l$, considérée comme forme bilinéaire sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}$, calculé dans la base $(e_1, e_2, \ldots, e_{2d})$. Autrement dit, on a $D(l)\, e_1^* \wedge \ldots \wedge e_{2d}^* = (2\pi)^{-d} (d\,!)^{-1} B_l \wedge \ldots \wedge B_l$ (d facteurs) où $(e_1^*, \ldots, e_{2d}^*)$ est la base duale de $(e_1, \ldots, e_{2d})$. On a donc $D(l) \neq 0$ si et seulement si $\mathfrak{g}(l) = \mathfrak{z}$.

5.3.7. Lemme. — *Soit* $z \in \mathfrak{z}^*$. *Soit* (*pour chaque* i) e'_i *un représentant de* e_i *dans* $\mathfrak{g}$, *et soit* γ *la forme différentielle sur* $\mathfrak{g}_z^*$ *obtenue en restreignant* $(2\pi)^{-2d} e'_1 \wedge \ldots \wedge e'_{2d}$ *à* $\mathfrak{g}_z^*$.

La mesure associée à γ est la mesure (duale) dl sur $\mathfrak{g}_z^*$ qui correspond à la mesure de Haar donnée sur G/Z comme expliqué dans l'énoncé de la proposition 5.2.4. Soit l dans $\mathfrak{g}_z^*$ tel que $D(l) \neq 0$, et soit Ω l'orbite de l. On a $\gamma = D(l)\, (\beta_\Omega)_l$. On a $D(x.l) = \Delta(x)\, D(l)$ pour tous x dans G et l dans $\mathfrak{g}^*$.

Démonstration. — La première assertion est claire. Soit maintenant l dans $\mathfrak{g}_z^*$ tel que $D(l) \neq 0$. Alors l'application $X \mapsto X.l$ induit un isomorphisme T de $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}$ sur $\mathfrak{z}^\perp$. Par définition de $(\beta_\Omega)_l$, l'image réciproque (par T) de $(\beta_\Omega)_l$ est de la forme $D(l)\, e_1^* \wedge \ldots \wedge e_{2d}^*$. D'autre part, l'image réciproque de γ est égale à $D(l)^2\, e_1^* \wedge \ldots \wedge e_{2d}^*$. En effet, sa valeur au point $e_1 \wedge \ldots \wedge e_{2d}$ est $(2\pi)^{-2d}$ dét $|(\langle l, [e_i, e_j] \rangle)_{i,j}|$, et on sait que ce nombre est égal à $D(l)^2$. D'où la deuxième assertion du lemme. La troisième résulte de la seconde. Remarquons qu'il s'agit d'un cas particulier très simple de 5.1.8.

5.3.8. THÉORÈME. — *Soit* G, *un groupe résoluble exponentiel de centre* Z *admettant des représentations de carré intégrables modulo* Z. *Fixons une mesure de Haar sur* G/Z. *Soit* D *le polynôme sur* $\mathfrak{g}^*$ *décrit ci-dessus. Soit* Ω *une orbite de* G *dans* $\mathfrak{g}^*$ *et soit* l *dans* Ω. *Alors la représentation* $\pi(\Omega)$ *est de carré intégrable si et seulement si* $D(l) \neq 0$. *Le polynôme* D *vérifie les relations* $D(x.l) = \Delta(x) D(l)$ *pour tous* x *dans* G *et* l *dans* $\mathfrak{g}^*$. *Le semi-invariant de poids* Δ^{-1} *pour* $\pi(\Omega)$ *associé à la restriction de* $|D|$ *à* Ω *est le degré formel de* $\pi(\Omega)$.

Cela résulte immédiatement du théorème 5.2.7 et des lemmes 5.3.2 et 5.3.3.

Supposons vérifiées les conditions du théorème, et soit $z \in \mathfrak{z}^*$ un élément tel qu'il existe $l \in \mathfrak{g}^*$ tel que $l/\mathfrak{z} = z$ et $\mathfrak{g}(l) = \mathfrak{z}$. Alors les orbites ouvertes dans $\mathfrak{g}_z^*$ sont les composantes connexes de l'ouvert de $\mathfrak{g}_z^*$, où D ne s'annule pas. Comme D est un polynôme, il y en a un nombre fini $\Omega_1, \ldots, \Omega_m$. Notons $\pi_1, \ldots, \pi_m$ les représentations associées, et $A_1^{-2}, \ldots, A_m^{-2}$ leurs degrés formels respectifs. Notons ζ le caractère unitaire de Z de différentielle iz. Alors $\lambda_\zeta \times \rho_\zeta$ est équivalente à

$$\pi_1 \otimes \pi'_1 \oplus \ldots \oplus \pi_m \otimes \pi'_m$$

et l'on a

$$\varphi(1) = \sum_{1 \leq i \leq m} \operatorname{tr}([A_i^{-1} \pi_i(\varphi) A_i^{-1}])$$

pour chaque $\varphi \in \mathcal{D}(G, \zeta)$.

5.3.9. *Exemples.* — 1. Soit G un groupe résoluble exponentiel unimodulaire admettant des représentations de carré intégrables modulo Z. Le polynôme D est constant sur les orbites, et donc constant sur $\mathfrak{g}_z^*$ pour presque tout $z \in \mathfrak{z}^*$. Il en résulte que D appartient à l'algèbre symétrique de $\mathfrak{z}$. Soit $z \in \mathfrak{z}^*$. Ou bien $D(z) = 0$, auquel cas λ_ζ n'admet pas de sous-représentation irréductible. Ou bien $D(z) \neq 0$, auquel cas $\mathfrak{g}_z^*$ est une orbite Ω de G, $\lambda_\zeta \times \rho_\zeta$ est isomorphe à $\pi_\Omega \otimes \pi'_\Omega$, et le degré formel de $\pi(\Omega)$ est $|D(z)|$.

Dans le cas d'un groupe nilpotent, ces résultats ont été obtenus par une autre méthode par C. C. Moore et J. Wolf [24].

2. Il existe des groupes exponentiels tels que $Z = \{1\}$, et admettant des représentations de carré intégrable. C'est le cas par exemple du groupe « $ax+b$ » et l'on trouvera d'autres exemples dans [29]. Remarquons que si G n'est pas réduit à l'élément neutre, il n'est pas unimodulaire, d'après l'exemple ci-dessus.

Faisons les calculs explicites pour le groupe des matrices de la forme $x = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, avec a, b dans $\mathbf{R}$ et $a > 0$. On choisit la mesure de Haar $dx = a^{-2}\, da\, db$. On a $\Delta(x) = a^{-1}$ On pose $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $D = (2\pi)^{-1} e_2$. Il y a deux orbites ouvertes dans $\mathfrak{g}^*$: l'orbite Ω_+ qui contient e_2^* et l'orbite Ω_- qui contient $-e_2^*$.

Les représentations associées π_+ et π_- peuvent être réalisées dans l'espace des fonctions φ sur $]0, +\infty[$, de carré intégrable pour $t^{-1}\,dt$, avec les formules suivantes :

$$\pi_\pm\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\varphi(t) = \varphi(a^{-1}t),$$

$$\pi_\pm\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\varphi(t) = e^{\pm it^{-1}b}\varphi(t).$$

Le degré formel est l'opérateur de multiplication par $\left|\mathrm{D}\left(\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}(\pm e_2^*)\right)\right|$. Dans les deux cas, le degré formel est l'opérateur de multiplication par $(2\pi t)^{-1}$. On retrouve ainsi les formules de [17].

5.3.10. PROPOSITION. — *Soit* G *un groupe résoluble exponentiel. On suppose que* $\mathrm{Z} = \{1\}$, *et que* G *admet des représentations de carré intégrable. Il existe un élément* u *dans l'algèbre enveloppante* $\mathrm{U}(\mathfrak{g}_\mathbf{C})$ *de la complexifiée* $\mathfrak{g}_\mathbf{C}$ *de* $\mathfrak{g}$ *tel que pour toute orbite ouverte* Ω *de* G *dans* $\mathfrak{g}^*$, *le degré formel de* $\pi(\Omega)$ *soit la clôture de l'opérateur* $\varepsilon\, d\pi_\Omega(u)$ [*qui est défini* a priori *sur l'espace des vecteurs* C^∞ *de la représentation* $\pi(\Omega)$], *où* ε *est le signe de* D *sur* Ω.

Démonstration. — Posons $\mathrm{D}'(l) = \mathrm{D}(-il)$ pour l dans $\mathfrak{g}^*$. Alors D' est une fonction polynôme sur $\mathfrak{g}^*$ vérifiant les relations $\mathrm{Ad}(x)\,\mathrm{D}' = \Delta(x)^{-1}\,\mathrm{D}'$ pour tout x dans G. Soit u l'élément de $\mathrm{U}(\mathfrak{g}_\mathbf{C})$ correspondant à D' par l'application de Poincaré-Birkhoff-Witt. Alors l'opérateur $[d\pi_\Omega(u)]$ correspond à la restriction de D à Ω, d'après 3.3.7. En effet, $u = \gamma(\mathrm{D}')$ car $\mathrm{D}' \in s(\mathfrak{n}_\mathbf{C})$, où $\mathfrak{n}$ est l'algèbre dérivée de $\mathfrak{g}$.

6. Résolubilité locale des opérateurs différentiels bi-invariants

6.1.1. Soit D un opérateur différentiel (non nul) à coefficients constants sur $\mathbf{R}^n$.

Un résultat important de la théorie des équations aux dérivées partielles dit qu'un tel opérateur D admet une solution élémentaire, ce qui implique que D a la propriété d'être localement résoluble en tout point de $\mathbf{R}^n$ [cette propriété signifiant que tout point de $\mathbf{R}^n$ admet dans $\mathbf{R}^n$ un voisinage ouvert $\mathcal{O}$ tel que $\mathrm{D}\,\mathcal{D}'(\mathcal{O}) \supset \mathcal{D}(\mathcal{O})$, $\mathcal{D}'$ désignant comme à l'ordinaire un espace de distributions]. Ce théorème est dû à Malgrange, qui affirme l'existence d'une distribution T sur $\mathbf{R}^n$, ayant certaines propriétés de régularité locale, telle que $\mathrm{DT} = \delta$ (δ étant la mesure de Dirac à l'origine). L'existence d'une solution élémentaire tempérée ne fut établie que bien plus tard (Hörmander, Lojasiewicz). Récemment, l'utilisation du théorème de résolution des singularités de Hironaka a permis à Atiyah d'une part et à Bernstein d'autre part ([2], [4]) de démontrer l'existence des solutions élémentaires tempérées par une méthode intéressante qu'on peut résumer de la manière suivante : on suppose que la distribution $u = \mathrm{D}\,\delta$ est de type positif. Alors sa transformée de Fourier $\hat{u}$ est une fonction polynôme non nulle, à valeurs positives sur $\mathbf{R}^n$. On a alors le théorème (qu'on appellera le théorème d'Atiyah-Bernstein) : pour chaque nombre complexe s à partie réelle Re (s) positive, la fonction $x \mapsto (\hat{u}(x))^s$ définit une distribution tempérée $\hat{u}^s$ sur $\mathbf{R}^n$. La fonction $s \mapsto \hat{u}^s$ [à valeurs dans l'espace $\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$ des distributions tempérées] qui est définie et holomorphe dans le demi-plan Re $(s) > 0$, se prolonge à tout le plan complexe en une fonction méromorphe. Il existe un entier $N > 0$ ne dépendant que de u tel que les pôles de ce prolongement (qui sont d'ordre au plus n) se trouvent parmi les rationnels de la forme $-1/N, -2/N, \ldots, -p/N, \ldots$ (p entier > 0).

Soit alors $\sum_{-n \leq p} a_p (s+1)^p$ le développement en série de Laurent du prolongement de $s \mapsto \hat{u}^s$, au voisinage de -1 (chaque a_p est une distribution tempérée sur $\mathbf{R}^n$). On a : $\hat{u}a_0 = 1$, de sorte que la distribution T transformée de Fourier inverse de a_0 est une solution élémentaire de D. En fait, comme on l'a remarqué dans [27], cette méthode donne un résultat plus précis : D admet une solution élémentaire tempérée qui est invariante par le plus grand sous-groupe de GL $(n, \mathbf{R})$ qui laisse D invariant. Par exemple, si G est un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, si D est un opérateur différentiel (non nul, à coefficients constants) sur $\mathfrak{g}$ qui est G-invariant, D admet une solution élémentaire tempérée centrale (on entend par distribution centrale sur $\mathfrak{g}$ une distribution G-invariante).

6.1.2. Soit G un groupe de Lie, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. On considère l'algèbre des opérateurs différentiels invariants à gauche sur G, qui s'identifie, comme il est bien connu, à l'algèbre enveloppante U $(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ de la complexifiée $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ de $\mathfrak{g}$. Lorsque G est abélien, ce qui précède montre que tout opérateur différentiel invariant non nul sur G est localement résoluble (en tout point). Il n'en est plus ainsi en général. Soient en effet X et Y deux éléments de $\mathfrak{g}$, qu'on considère comme des opérateurs différentiels invariants du premier ordre. Nous inspirant de [5] (p. 28), nous dirons que l'opérateur $D = X + i Y$ (ou l'élément $X + i Y$ de $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$) est de Hans Lewy si la sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ engendrée par X et Y est de dimension au moins 3. Soit maintenant D un opérateur différentiel invariant de la forme $X + i Y$, avec X et Y dans $\mathfrak{g}$. Alors Cérézo et Rouvière montrent que D est localement résoluble si et seulement si D n'est pas de Hans Lewy [5].

6.1.3. *Remarque.* — Soit U $(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$. C'est une forme réelle de U $(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$. On dira d'un opérateur différentiel invariant D sur G qu'il est réel s'il provient d'un élément de $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$. Soit maintenant $X + i Y$ un opérateur de Hans Lewy de G. Soient u et v deux éléments de U $(\mathfrak{g})$ tels que $X v + Y u = 0$. On trouve deux tels éléments en cherchant dans U $(\mathfrak{g})$ un multiple commun à droite aux deux éléments X et Y. On sait qu'un tel multiple commun existe toujours ([7], lemme 3.6.9). Alors l'opérateur différentiel invariant $(X + i Y)(u + iv)$ est un opérateur différentiel invariant réel qui n'est pas localement résoluble. Par exemple, si G est le groupe de Heisenberg de dimension 3 et si (X, Y, Z) est une base de son algèbre de Lie vérifiant les relations $[X, Y] = Z$, $[X, Z] = [Y, Z] = 0$, $X + i Y$ est de Hans Lewy et

$$D = Y(X^2 + Y^2) - XZ = (X + i Y)(u + iv) \qquad \text{avec} \quad u = XY + Z \quad \text{et} \quad v = -Y^2$$

est un opérateur réel non localement résoluble. De même si $G = SU(2)$ et si (X, Y, Z) est une base de $\mathfrak{g}$ vérifiant les relations $[X, Y] = Z$, $[Y, Z] = X$, $[Z, X] = Y$, l'opérateur $(X^2 + Y^2) Y + ZX$ est réel non localement résoluble.

6.1.4. On considère maintenant l'algèbre des opérateurs différentiels bi-invariants sur G, qui s'identifie au centre de U ($\mathfrak{g}_\mathbf{C}$). Si G est nilpotent, il est prouvé dans [27] que tout opérateur différentiel bi-invariant non nul sur G est localement résoluble. Il en est de même si G est semi-simple ([16], *voir* aussi ci-dessous). Il est donc raisonnable de conjecturer que sur tout groupe de Lie G, les opérateurs différentiels bi-invariants (non nuls) sont localement résolubles. Le résultat essentiel de ce paragraphe dit qu'il est bien ainsi pour les groupes résolubles.

6.2.1. Soit G un groupe de Lie connexe, muni d'une mesure de Haar à gauche dx. On munit $\mathfrak{g}$ de la mesure de Haar $d\mathrm{X}$ correspondant à dx. Soit $\mathscr{V}_0$ un voisinage ouvert de 0 dans $\mathfrak{g}$ ayant les propriétés suivantes : $\mathscr{V}_0$ est G-invariant, $\mathscr{W}_0 = \exp(\mathscr{V}_0)$ est ouvert dans G, $\exp : \mathscr{V}_0 \to \mathscr{W}_0$ est un difféomorphisme, de sorte que

$$p(\mathrm{X}) = \left| \operatorname{dét}\left(\operatorname{Sh} \frac{\operatorname{ad} \mathrm{X}/2}{\operatorname{ad} \mathrm{X}/2} \right) \right|^{1/2} > 0$$

pour tout X dans $\mathscr{V}_0$. Un tel voisinage $\mathscr{V}_0$ existe toujours au moins si G est simplement connexe. [Supposons que G est simplement connexe et prenons pour $\mathscr{V}_0$ l'ensemble des X dans $\mathfrak{g}$ tels que $|\operatorname{Im} \lambda| < \pi$ pour toute valeur propre λ de ad X. Si X et Y sont deux éléments de $\mathscr{V}_0$ tels que $\exp(\mathrm{X}) = \exp(\mathrm{Y})$, on a

$$\operatorname{Ad}(\exp \mathrm{X}) = \exp(\operatorname{ad} \mathrm{X}) = \operatorname{Ad}(\exp \mathrm{Y}) = \exp(\operatorname{ad} \mathrm{Y}),$$

de sorte que $\operatorname{ad} \mathrm{X} = \operatorname{ad} \mathrm{Y}$; il existe donc Z dans le centre de $\mathfrak{g}$ tel que $\mathrm{X} = \mathrm{Y}+\mathrm{Z}$, et on a $\exp \mathrm{Z} = 1$; mais la composante connexe du centre de **G** étant simplement connexe, il en résulte que $\mathrm{Z} = 0$.] Supposons donc donné un tel voisinage $\mathscr{V}_0$. Pour chaque φ dans $\mathscr{D}(\mathscr{W}_0)$, on pose

$$\gamma' \varphi(\mathrm{X}) = \varphi(\exp \mathrm{X})\, \Delta(\exp \mathrm{X})^{1/2}\, p(\mathrm{X})$$

pour X dans $\mathscr{V}_0$. Alors $\gamma' : \mathscr{D}(\mathscr{W}_0) \to \mathscr{D}(\mathscr{V}_0)$ est un isomorphisme vectoriel topologique de $\mathscr{D}(\mathscr{W}_0)$ sur $\mathscr{D}(\mathscr{V}_0)$. On remarquera que

$$\Delta(\exp \mathrm{X})^{1/2}\, p^2(\mathrm{X}) = \left| \operatorname{dét} \frac{1-e^{\operatorname{ad} \mathrm{X}}}{\operatorname{ad} \mathrm{X}} \right|$$

pour tout X, de sorte qu'on a aussi

$$\gamma' \varphi(\mathrm{X}) = \varphi(\exp \mathrm{X})\, \mathrm{J}(\mathrm{X})\, p^{-1}(\mathrm{X}) \qquad \text{avec} \quad \mathrm{J}(\mathrm{X}) = \left| \operatorname{dét} \frac{1-e^{-\operatorname{ad} \mathrm{X}}}{\operatorname{ad} \mathrm{X}} \right|.$$

On désignera par $\gamma : \mathscr{D}'(\mathscr{V}_0) \to \mathscr{D}'(\mathscr{W}_0)$ l'isomorphisme transposé de γ'. Soient S une distribution sur $\mathscr{V}_0$, $\mathrm{T} = \gamma \mathrm{S}$ et φ dans $\mathscr{D}(\mathscr{W}_0)$. Alors on a

$$\int d\mathrm{T}(x)\, \varphi(x) = \int d\mathrm{S}(x)\, p(\mathrm{X})\, (\varphi\, \Delta^{1/2})(\exp \mathrm{X}),$$

ce qui montre que T s'obtient à partir de S en multipliant S par la fonction p, puis en prenant l'image par l'application exponentielle de la distribution p S, enfin en multipliant la distribution obtenue par $\Delta^{1/2}$. Il est clair que si S est une distribution centrale (ou invariante) sur $\mathscr{V}_0$ $\Big[$c'est-à-dire telle que

$$\int dS(X)\,\varphi(\mathrm{Ad}(x)X) = \int dS(X)\,\varphi(X)$$

pour tous φ dans $\mathscr{D}(\mathscr{V}_0)$ et x dans G$\Big]$, la distribution $T = \gamma S$ est une distribution centrale (ou invariante) sur $\mathscr{W}_0$ $\Big[$c'est-à-dire telle que

$$\int dT(y)\,\varphi(xyx^{-1}) = \int dT(y)\,\varphi(y)$$

pour tous φ dans $\mathscr{D}(\mathscr{W}_0)$ et x dans G$\Big]$. Plus généralement, soit $\chi : G \to \mathbf{C}^*$ un caractère de G, et soit S une distribution sur $\mathscr{V}_0$ telle que

$$\int dS(X)\,\varphi(\mathrm{Ad}(x)X) = \chi(x)\int dS(X)\,\varphi(x)$$

pour tous φ dans $\mathscr{D}(\mathscr{V}_0)$ et x dans G. On dira qu'une telle distribution S est semi-invariante de poids χ. Alors la distribution $T = \gamma S$ est semi-invariante de poids χ, c'est-à-dire est telle que

$$\int dT(y)\,\varphi(xyx^{-1}) = \chi(x)\int dT(y)\,\varphi(y)$$

pour tous φ dans $\mathscr{D}(\mathscr{W}_0)$ et x dans G.

6.2.2. Soit $\mathfrak{g}_0$ un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$ et soit v_0 une distribution sur $\mathfrak{g}_0$, à support $\{0\}$. On définit l'extension v de v_0 à $\mathfrak{g}$ par les formules :

$$\int dv(X)\,\varphi(X) = \int dv_0(X_0)\,\varphi_0(\Delta_0)$$

où chaque φ dans $\mathscr{D}(\mathfrak{g})$ on désigne par φ_0 la restriction de φ à $\mathfrak{g}_0$. Soit $\delta(X) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}\,X)$ pour tout X dans $\mathfrak{g}$, de sorte que $\Delta^{1/2}(\exp X) = \exp(-(1/2)\,\delta(X))$. Supposons que $\mathfrak{g}_0 \subset \ker\delta$. La fonction $1-(\Delta^{1/2}.\exp)$ est nulle sur $\mathfrak{g}_0$ de même que ses dérivées partielles dans la direction de $\mathfrak{g}_0$. De ceci résulte que la distribution $u = \gamma(v)$ s'obtient simplement en multipliant v par la fonction p, puis en prenant l'image de pv par l'application exponentielle (la multiplication par $\Delta^{1/2}$ est inutile). Ceci dit, une application immédiate d'un lemme de type Borho ([8], 4.5) montre qu'il existe un idéal $\mathfrak{g}_0$ de $\mathfrak{g}$, contenu dans ker δ ayant la propriété suivante : toute distribution semi-invariante v sur $\mathfrak{g}$, à support $\{0\}$, est l'extension à $\mathfrak{g}$ d'une distribution v_0 sur $\mathfrak{g}_0$, à support $\{0\}$. Par conséquent, l'isomorphisme γ se réduit sur les distributions semi-invariantes à support $\{0\}$ à multiplier par p, puis à prendre l'image par l'exponentielle. Ceci étant, soit X dans $\mathfrak{g}$ et soit v_X (resp. u_X) la distribution sur $\mathfrak{g}$ (resp. G) ainsi définie :

$$\int dv_X(Y)\,\varphi(Y) = \left(\frac{d}{dt}\varphi(tX)\right)_{t=0}$$

$$\left[\text{resp. } \int du_X(y)\,\varphi(y) = \left(\frac{d}{dt}\varphi(\exp(tX))\right)\right]_{t=0}.$$

On sait que l'application $X \mapsto v_X$ se prolonge de manière unique en un isomorphisme de l'algèbre symétrique $S(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ de la complexifiée $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ de $\mathfrak{g}$ sur l'algèbre (de convolution) des distributions à support $\{0\}$ dans $\mathfrak{g}$. De même l'application $X \mapsto u_X$ fournit un isomorphisme de l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ sur l'algèbre de convolution des distributions à support $\{1\}$ dans G. Compte tenu de ces identifications, la restriction de γ aux distributions à support $\{0\}$ est un isomorphisme (d'espaces vectoriels) de $S(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ sur $U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$. Cet isomorphisme n'est autre que celui noté $\beta \circ D_p$ dans [10]. Par conséquent, la restriction de γ à l'algèbre des distributions invariantes sur $\mathfrak{g}$, à support $\{0\}$ est donc, au moins si $\mathfrak{g}$ est semi-simple ou résoluble, l'isomorphisme canonique (sur l'algèbre des distributions invariantes sur G, à support $\{1\}$) défini dans [10]. En fait, on a mieux encore (toujours sous l'hypothèse que $\mathfrak{g}$ est semi-simple ou résoluble) : Considérons l'algèbre (de convolution) engendrée par les distributions semi-invariantes sur $\mathfrak{g}$ (resp. G), à support $\{0\}$, (resp. $\{1\}$). Alors γ est un isomorphisme d'algèbres de la première sur la deuxième [28]. C'est celui décrit en 3.3.3.

6.2.3. Soit Ω une orbite de G dans $\mathfrak{g}^*$. On dira que Ω est Δ-tempérée si elle a les propriétés suivantes : il existe une fonction borélienne ψ_Ω positive non nulle sur Ω, semi-invariante de poids Δ, un entier positif m et une norme $\|\ \|$ sur $\mathfrak{g}^*$ tels que

$$\int_\Omega (1+\|l\|)^{-m}\,\psi_\Omega(l)^{-1}\,d\beta_\Omega(l) < \infty.$$

Alors, quel que soit le compact K de $\mathfrak{g}^*$, l'ensemble $K \cap \Omega$ est intégrable pour la mesure $\psi_\Omega(l)^{-1}\,d\beta_\Omega(l)$. Cette dernière mesure a donc une image directe dans $\mathfrak{g}^*$, qui est à croissance lente. On peut donc considérer sa transformée de Fourier (abélienne), qui est une distribution (tempérée de type positif) sur $\mathfrak{g}$, dont la valeur sur une fonction φ dans $\mathscr{D}(\mathfrak{g})$ est $\int_\Omega \hat{\varphi}(l)\,\psi_\Omega^{-1}(l)\,d\beta_\Omega(l)$. On désignera par S_Ω^ψ la restriction à $\mathscr{V}_0$ de cette distribution sur $\mathfrak{g}$ et par T_Ω^ψ la distribution sur $\mathscr{W}_0$ image de S_Ω^ψ par γ. Si φ est dans $\mathscr{D}(\mathscr{W}_0)$, on a

$$\int dT_\Omega^\psi(x)\,\varphi(x) = \int_\Omega (\alpha p^{-1})^\wedge(l)\,\psi_\Omega(l)^{-1}\,d\beta_\Omega(l),$$

avec $\alpha(x) = \varphi(\exp X)\,J(X)$. Les distributions S_Ω^ψ et T_Ω^ψ sont invariantes. On remarquera que dans les mêmes conditions que ci-dessus on peut définir des distributions S_Ω^ψ et T_Ω^ψ associées à la donnée d'une fonction semi-invariante de poids χ autre que Δ.

6.3.1. Soit maintenant u une distribution invariante sur G ayant pour support $\{1\}$ et soit $v = \gamma^{-1}(u)$. On désignera par $\hat{u}$ la fonction polynôme G-invariante sur $\mathfrak{g}^*$ telle que

$$\int dv(\mathrm{X})\,\varphi(\mathrm{X}) = \int \hat{u}(l)\,\hat{\varphi}(l)\,dl$$

pour chaque φ dans $\mathscr{D}(\mathfrak{g})$, de sorte que

$$\hat{u}(l) = \int dv(\mathrm{X})\,e^{-i\langle l, \mathrm{X}\rangle}$$

pour tout l dans $\mathfrak{g}$. Supposons que la fonction $\hat{u}$ soit positive sur $\mathfrak{g}^*$. Alors il est clair que pour chaque nombre complexe s à partie réelle positive, la forme linéaire :

$$\varphi \mapsto \int (\hat{u}(l))^s (\gamma'\varphi)^\wedge(l)\,dl$$

définit sur $\mathscr{D}(\mathscr{W}_0)$ une distribution invariante qu'on notera u^s, et d'après le théorème d'Atiyah-Bernstein, la fonction $s \mapsto u^s$ se prolonge au plan complexe en une fonction méromorphe. Supposons maintenant que l'isomorphisme $\gamma^{-1} : \mathscr{D}'(\mathscr{W}_0) \to \mathscr{D}'(\mathscr{V}_0)$ ait la propriété suivante : $\gamma^{-1}(u \bigstar u^s) = \gamma^{-1}(u) \bigstar \gamma^{-1}(u^s)$ pour $\mathrm{Re}(s) > 0$, où au second membre la convolution est relative au groupe additif $\mathfrak{g}$. On a alors pour chaque φ dans $\mathscr{D}(\mathscr{W}_0)$:

$$\begin{aligned}\langle u \bigstar u^s, \varphi\rangle &= \langle \gamma(\gamma^{-1}(u \bigstar u^s)), \varphi\rangle = \langle \gamma^{-1}(u) \bigstar \gamma^{-1} u^s, \gamma'\varphi\rangle \\ &= \int \hat{u}(l)(\hat{u}(l))^s (\gamma'\varphi)^\wedge(l)\,dl = \langle u^{s+1}, \varphi\rangle,\end{aligned}$$

de sorte qu'on a l'égalité de fonctions méromorphes :

$$u \bigstar u^s = u^{s+1}.$$

De ceci résulte, comme dans le cas des groupes $\mathbf{R}^n$, que si on appelle T le coefficient « constant » du développement en série de Laurent de la fonction $s \mapsto u^s$ au voisinage de -1, alors on a : $u \bigstar \mathrm{T} = \mathrm{T} \bigstar u = \delta$.

6.3.2. Supposons maintenant que G soit un groupe semi-simple connexe.

Soit $\mathscr{V}_0$ l'ensemble des X dans $\mathfrak{g}$ tels que $|\mathrm{Im}\,\lambda| < \pi$ pour toute valeur propre λ de ad X. Soient u et T deux distributions invariantes sur $\mathscr{W}_0$, le support de u étant $\{1\}$. Alors un théorème de Harish-Chandra ([15], Lemma 24) montre que

$$\gamma^{-1}(u \bigstar \mathrm{T}) = \gamma^{-1}(u) \bigstar \gamma^{-1}(\mathrm{T}),$$

ce qui est largement suffisant pour permettre le raisonnement de 6.3.1.

Lorsque G n'est pas semi-simple, on va voir que l'utilisation des distributions T_Ω^ψ permet dans beaucoup de cas (en particulier dans celui des groupes résolubles) d'aboutir à l'égalité fondamentale $u \bigstar u^s = u^{s+1}$.

6.3.3. Supposons en effet que le groupe G opère régulièrement dans $\mathfrak{g}^*$. Choisissons une fonction rationnelle non nulle θ sur $\mathfrak{g}^*$, semi-invariante de poids Δ^{-1} et posons $\psi = |\theta|^{-1}$. Pour chaque orbite Ω, on désigne par φ_Ω la restriction de ψ à Ω. La mesure invariante $\psi(l)\,dl$ détermine une mesure borélienne m_ψ sur $\mathfrak{g}^*/G$ et presque toutes les orbites Ω sont tempérées (5.1.7, 5.1.9). Les distributions S_Ω^ψ et T_Ω^ψ sont donc définies pour presque toutes les orbites Ω (une fois fixés $\mathscr{V}_0$ et $\mathscr{W}_0$). Soient u et $\hat{u}$ comme dans 6.3.1. On a, pour chaque φ dans $\mathscr{D}(\mathscr{W}_0)$:

$$\begin{aligned}\langle u, \varphi \rangle &= \int_{\mathfrak{g}^*} \hat{u}(l)(\gamma'\varphi)^\wedge(l)\,dl \\ &= \int_{\mathfrak{g}^*/G} \hat{u}(\Omega)\,dm_\psi(\Omega) \int_\Omega (\gamma'\varphi)^\wedge(l)\,\psi(l)^{-1}\,d\beta_\Omega(l) \\ &= \int_{\mathfrak{g}^*/G} \hat{u}(\Omega) \langle T_\Omega^\psi, \varphi \rangle\, dm_\psi(\Omega).\end{aligned}$$

Supposons maintenant que pour presque tout Ω, on ait

$$u \bigstar T_\Omega^\psi = \hat{u}(\Omega)\, T_\Omega^\psi,$$

[ce qui équivaut à $\gamma^{-1}(u \bigstar T_\Omega^\psi) = \gamma^{-1}(u) \bigstar \gamma^{-1}(T_\Omega^\psi)$ d'après la définition de T_Ω^ψ].

1. Si u_1 et u_2 sont deux distributions centrales ayant pour support $\{1\}$, alors $\gamma^{-1}(u_1 \bigstar u_2) = \gamma^{-1}(u_1) \bigstar \gamma^{-1}(u_2)$. En effet, pour chaque φ dans $\mathscr{D}(\mathscr{W}_0)$, on a

$$\begin{aligned}\langle u_1 \bigstar u_2, \varphi \rangle &= \int_{\mathfrak{g}^*/G} \hat{u}_2(\Omega) < u_1 \bigstar T_\Omega^\psi, \varphi \rangle\, dm_\psi(\Omega) \\ &= \int_{\mathfrak{g}^*/G} \hat{u}_2(\Omega)\hat{u}_1(\Omega) \langle T_\Omega^\psi, \varphi \rangle\, dm_\psi(\Omega) \\ &= \int_{\mathfrak{g}^*} \hat{u}_1(l)\hat{u}_2(l)(\gamma'\varphi)^\wedge(l)\,dl = \langle \gamma^{-1}(u_1) \bigstar \gamma^{-1}(u_2), \varphi \rangle.\end{aligned}$$

2. Si $\hat{u}_2$ est positive, de sorte qu'on peut définir u_2^s, on a

$$\gamma^{-1}(u_1 \bigstar u_2^s) = \gamma^{-1}(u_1) \bigstar \gamma^{-1}(u_2^s).$$

On a en effet, si $\operatorname{Re}(s) \geqq 0$:

$$\langle u_2^s, \varphi \rangle = \int_{\mathfrak{g}^*/G} (\hat{u}_2(\Omega))^s \langle T_\Omega^\psi, \varphi \rangle\, dm_\psi(\Omega)$$

pour chaque φ dans $\mathscr{D}(\mathscr{W}_0)$. Le reste de la démonstration est comme dans 1.

6.4.1. On supposera dans tout ce qui suit que G est un groupe résoluble simplement connexe. On prendra comme dans le paragraphe 5 comme voisinage $\mathscr{V}_0$ de 0 dans $\mathfrak{g}$ l'ensemble des X tels que $|\lambda| < 2\pi$ pour toute valeur propre imaginaire pure λ de ad X. On a alors :

6.4.2. Lemme. — *Soit Ω une orbite intégrable, Δ-tempérée, de dimension maximale. Soit ψ_Ω une fonction borélienne strictement positive sur Ω, semi-invariante de poids Δ et soit T_Ω^ψ la distribution sur $\mathscr{W}_0$ qui lui correspond. Soit $\pi = \pi(\Omega, \eta)$ une représentation irréductible de* G. *On a alors, pour chaque φ dans $\mathscr{D}(\mathscr{W}_0)$:*

$$\int dT_\Omega^\psi(x)\,\varphi(x) = \operatorname{tr}([A^{-1}\pi(\varphi)A^{-1}]),$$

où A *désigne l'opérateur semi-invariant de poids $\Delta^{1/2}$ pour π associé à la fonction $(\psi_\Omega)^{1/2}$.*

Démonstration. — On a en effet :

$$\int dT_\Omega^\psi(x)\,\varphi(x) = \int_\Omega (\alpha\, p^{-1})^\wedge(l)\,\psi_\Omega(l)^{-1}\,d\beta_\Omega(l),$$

avec $\alpha(X) = \varphi(\exp X)\,J(X)$, de sorte que

$$\pi(\alpha) = \int \alpha(X)\,\pi(\exp X)\,dX = \int \varphi(x)\,\pi(x)\,dx.$$

D'où la formule annoncée, compte tenu de 5.2.3.

6.4.3. *Remarque.* — Si Ω est non intégrable mais vérifie les autres conditions du lemme, il est probable qu'on a un énoncé analogue faisant intervenir une des représentations factorielles normales construites par Pukanszky [26] à la place de $\pi(\Omega, \eta)$.

6.4.4. Proposition. — *Soit G_0 un groupe résoluble simplement connexe. Soit u_0 une distribution invariante non nulle sur* G *ayant pour support* $\{1\}$ *et telle que $\hat{u}_0$ soit positive sur $\mathfrak{g}_0^*$. On peut donc définir les distributions u_0^s sur G_0. Soit u_0' une distribution invariante à support* $\{1\}$. *Alors :*

$$\gamma_0^{-1}(u_0' \bigstar u_0^s) = \gamma_0^{-1}(u_0') \bigstar \gamma_0^{-1}(u_0^s).$$

Démonstration. — Supposons d'abord que G_0 soit de type I et utilisons les notations de 6.3.2. On a, pour $\operatorname{Re}(s) > 0$:

$$\langle u_0^s, \varphi \rangle = \int_{\mathfrak{g}_0^*/G_0} (\hat{u}_0(\Omega))^s \langle T_\Omega^\psi, \varphi \rangle\, dm_\psi(\Omega)$$

pour chaque φ dans $\mathscr{D}(\mathscr{W}_0)$ et aussi (lemme 6.4.2) :

$$\int dT_\Omega^\psi(x)\,\varphi(x) = \operatorname{tr}([A^{-1}\pi(\varphi)A^{-1}]),$$

pour presque tout Ω. D'après cette dernière formule :

$$\begin{aligned}\langle u'_0 \bigstar T^{\psi}_{\Omega}, \varphi \rangle &= \operatorname{tr}([A^{-1} \pi(\varphi \bigstar \check{u}'_0) A^{-1}]) \\ &= \pi(\Omega, \eta)(\check{u}'_0) \operatorname{tr}([A^{-1} \pi(\varphi) A^{-1}]),\end{aligned}$$

de sorte que $u'_0 \bigstar T^{\psi}_{\Omega} = \pi(\Omega, \eta)(\check{u}'_0) T^{\psi}_{\Omega}$ pour presque tout Ω. Mais on sait d'autre part (3.3.7) que $\pi(\Omega, \eta)(\check{u}'_0) = \hat{u}'_0(\Omega)$. On a donc $u'_0 \bigstar T^{\psi}_{\Omega} = \hat{u}'_0(\Omega) T^{\psi}_{\Omega}$ pour presque tout Ω. D'après 6.3.3, on peut conclure :

$$\gamma_0^{-1}(u'_0 \bigstar u^s_0) = \gamma_0^{-1}(u'_0) \bigstar \gamma_0^{-1}(u^s_0).$$

Plaçons-nous maintenant dans le cas général, et choisissons une représentation linéaire fidèle de $\mathfrak{g}_0$. Soit alors $\mathfrak{g}_1$ l'enveloppe algébrique de $\mathfrak{g}_0$ et soit G_1 le groupe de Lie simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_1$. Il est résoluble de type I. Soit G'_0 le sous-groupe analytique de G_1 d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_0$. C'est un sous-groupe fermé simplement connexe de G_1. On peut donc supposer que $G_0 = G'_0$. Soit u_1 l'extension à G_1 de la distribution u_0. C'est une distribution invariante sur G_1 portée par $\{1\}$ et il est immédiat que la fonction $\hat{u}_1$ sur $\mathfrak{g}^*_1$ qui lui correspond est à valeurs positives. On peut donc définir les distribu ions u^s_1, et d'après la première partie de la démonstration, on a

$$\gamma_1^{-1}(u'_1 \bigstar u^s_1) = \gamma_1^{-1}(u'_1) \bigstar \gamma_1^{-1}(u^s_1)$$

pour toute distribution invariante u'_1 portée par $\{1\}$. Il reste maintenant à faire la remarque suivante :

Soit $\mathscr{W}_1$ le voisinage de 1 dans G_1 image par l'application exponentielle de l'ensemble $\mathscr{V}_1$ des X dans $\mathfrak{g}_1$ tels que $|\lambda| < 2\pi$ pour toute valeur propre imaginaire pure λ de ad X. De même, on dispose du voisinage $\mathscr{W}_0$ de 1 dans G_0. Les distributions u^s_1 sont des distributions sur $\mathscr{W}_1$, tandis que les distributions u^s_0 sont des distributions sur $\mathscr{W}_0$. En fait, chaque distribution u^s_1 est l'extension à $\mathscr{W}_1$ de la distribution u^s_0, comme on le voit facilement. Il en résulte que

$$\gamma_0^{-1}(u'_0 \bigstar u^s_0) = \gamma_0^{-1}(u'_0) \bigstar \gamma_0^{-1}(u^s_0)$$

pour chaque distribution invariante u'_0 sur G_0, portée par $\{1\}$.

6.4.5. Soit maintenant u une distribution semi-invariante de poids χ portée par $\{1\}$. Elle définit sur G un opérateur différentiel D tel que $D\varphi(x) = \int du(y)\varphi(yx)$ pour tout x dans G, pour toute fonction φ C^∞ sur G. On dira d'un tel opérateur qu'il est semi-bi-invariant de poids χ. Un opérateur différentiel semi-bi-invariant ayant pour poids le caractère trivial de G est bi-invariant (il est invariant par les translations à gauche et à droite de G).

6.4.6. THÉORÈME. — *Soit* G *un groupe de Lie résoluble simplement connexe. Soit* u *une distribution semi-invariante* (*non nulle*) *de poids* χ *sur* G *portée par* $\{ 1 \}$. *Il existe une distribution* T *sur* $\mathscr{W}_0$, *invariante par le noyau de* χ, *telle que*

$$u \bigstar T = T \bigstar u = \delta,$$
$$\gamma^{-1}(u' \bigstar T) = \gamma^{-1}(u') \bigstar \gamma^{-1}(T),$$

pour toute distribution semi-invariante u' *portée par* $\{ 1 \}$. *En particulier, tout opérateur différentiel semi-bi-invariant non nul sur* G *est localement résoluble.*

Démonstration. — Soit $\mathfrak{g}_0$ l'idéal de $\mathfrak{g}$ introduit dans 6.2.2 et soit G_0 le sous-groupe analytique de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_0$. G_0 est un sous-groupe normal fermé simplement connexe de G et toute distribution semi-invariante u'' sur G, portée par $\{ 1 \}$, est l'extension à G d'une distribution invariante u'' sur G_0, portée par $\{ 1 \}$. Soit $\tilde{u}$ la distribution sur G définie par

$$\int d\tilde{u}(x)\,\varphi(x) = \overline{\int du(x)\,\overline{\varphi(x^{-1})}}$$

pour chaque φ dans $\mathscr{D}$ (G) (où pour tout nombre complexe z, la notation $\bar{z}$ désigne le nombre complexe conjugué de z). Alors $u \bigstar \tilde{u}$ est l'extension à G de $u_0 \bigstar \tilde{u}_0$ et la fonction $(u_0 \bigstar \tilde{u}_0)^\wedge$ est positive. On peut donc définir les distributions $(u_0 \bigstar \tilde{u}_0)^s$ et le coefficient constant T_0 du développement en série de Laurent au voisinage de -1 de la fonction $s \mapsto (u_0 \bigstar \tilde{u}_0)^s$ est une distribution invariante par le noyau de χ. On a $u \bigstar \tilde{u} \bigstar T_0 = \delta$, de même que

$$\gamma_0^{-1}(u'_0 \bigstar T_0) = \gamma_0^{-1}(u_0) \bigstar \gamma_0^{-1}(T_0)$$

chaque fois que u' est une distribution invariante sur G_0 portée par $\{ 1 \}$. Soit maintenant T l'extension de T_0 à $\mathscr{W}_0$. Il est immédiat que la distribution $\tilde{u} \bigstar T$ vérifie les conditions énoncées dans le théorème.

6.4.7. Supposons que G soit un groupe résoluble exponentiel. Alors $\mathscr{V}_0 = \mathfrak{g}$ et $\mathscr{W}_0 = G$. On dira qu'une distribution T sur G est tempérée si γ^{-1} (T) est une distribution tempérée sur $\mathfrak{g}$. Compte tenu de cette définition, on voit que lorsque G est exponentiel, les distributions u^s sont des distributions tempérées. On a donc :

6.4.8. COROLLAIRE. — *Soit* G *un groupe résoluble exponentiel. Alors tout opérateur différentiel non nul sur* G, *semi-bi-invariant de poids* χ, *admet une solution élémentaire tempérée invariante par le noyau de* χ.

6.4.9. *Remarque.* — Si G est résoluble ou semi-simple, il existe un voisinage ouvert de 1 dans G dans lequel tout opérateur différentiel semi-bi-invariant non nul admet une solution élémentaire. Si G est semi-simple, cette solution élémentaire locale ne se prolonge pas (en général) en une solution élémentaire globale. Par exemple, soit G = SL (2, $\mathbb{C}$). Son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ admet (H, X, Y) comme base avec

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

[11] M. Duflo, *Sur les extensions des représentations irréductibles des groupes de Lie nilpotents* (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, t. 5, 1972, p. 71-120).

[12] M. Duflo, *Inversion Formula and Invariant Differential Operators on Solvable Lie Groups* (*Proceed. International Congress of Math.*, 1974, Vancouver).

[13] M. Duflo and C. C. Moore, *On the Regular Representations of a Non Unimodular Locally Compact Group* (à paraître dans *J. Funct. Anal.*).

[14] J. Glimm, *Locally Compact Transformation Groups* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 101, 1961, p. 124-138).

[15] Harish-Chandra, *Invariant Eigendistributions on a Semi-Simple Lie Group* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 119, 1965, p. 457-508).

[16] S. Helgason, *The Surjectivity of Invariant Differential Operators on Symmetric spaces*, I (*Ann. of Math.*, vol. 98, 1973, p. 451-479).

[17] I. Khalil, *L'analyse harmonique de la droite et du groupe affine de la droite* (*Thèse Sc. Math.*, Université de Nancy, 1973).

[18] A. A. Kirillov, *Unitary Representations of Nilpotent Lie Groups* (*Russ. Math. Surv.*, vol. 17, 1962, p. 53-104).

[19] A. A. Kirillov, *Plancherel Measure for Nilpotent Lie Groups* (*Funct. Anal. and Appl.*, vol. 1, 1967, p. 330-331).

[20] A. Kleppner and R. Lipsman, *The Plancherel Formula for Group Extensions* (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, vol. 5, 1972, p. 459-516).

[21] G. W. Mackey, *Induced Representations of Locally Compact Groups*, II, (*Ann. of Math.*, vol. 58, 1953, p. 193-221).

[22] G. W. Mackey, *Borel Structure in Groups and their Duals* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 85, 1957, p. 134-165).

[23] C. C. Moore, *Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces* (in *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Amer. Math. Soc.*, vol. 26, 1973).

[24] C. C. Moore and J. A. Wolf, *Square Integrable Representations of Nilpotent Lie Groups.*

[25] L. Pukanszky, *On the Unitary Representations of Exponential Groups* (*J. Funct. Anal.*, vol. 2, 1968, p. 73-113).

[26] L. Pukanszky, *Unitary Representations of Solvable Lie Groups* (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, t. 4, 1971, p. 457-608).

[27] M. Raïs, *Solutions élémentaires des opérateurs différentiels bi-invariants sur un groupe de Lie nilpotent* (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 273, série 1971, p. 495-498).

[28] R. Rentschler et M. Vergne, *Sur le semi-centre du corps enveloppant d'une algèbre de Lie* (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, t. 6, 1973, p. 389-405).

[29] H. Rossi and M. Vergne, *Representations of Certain Solvable Lie Groups* (*J. Funct. Anal.*, vol. 13, 1973, p. 324-389).

[30] N. Tatsuuma, *Plancherel Formula for Non Unimodular Locally Compact Groups* (*J. Math. Kyoto University*, vol. 12, 1972, 179-261).

(Manuscrit reçu le 18 août 1975.)

Michel Duflo,
Paris VII,
U.E.R. de Mathématiques,
2, place Jussieu,
75221 Paris Cedex 05

et

Mustapha Raïs,
Université de Poitiers,
Département de Mathématiques,
40, avenue du Recteur-Pineau,
86022 Poitiers.

On pose

$$A_1 = iH, \qquad A_2 = X-Y, \qquad A_3 = i(X-Y) \qquad \text{et} \qquad B_j = i A_j \quad (j = 1, 2, 3).$$

Alors (A_1, A_2, A_3) est une base de l'algèbre de Lie du sous-groupe compact $K = SU(2)$. Soit D l'opérateur différentiel invariant à gauche sur G défini par

$$D = B_1 A_1 + B_2 A_2 + B_3 A_3$$

(où chaque A_j ou B_j est identifié à un opérateur différentiel du premier ordre invariant à gauche sur G). En fait l'opérateur D est bi-invariant. Soit T une distribution sur G telle que $DT = \delta$. On désigne par $T^\natural$ la distribution sur G telle que

$$\int dT^\natural(x)\,\varphi(x) = \int dT(x) \int_H \varphi(xk)\,dk$$

pour chaque φ dans $\mathscr{D}(G)$, dk étant la mesure de Haar normalisée de K. On a alors $DT^\natural = 0$ (parce que $T^\natural$ est invariante à droite pour K), ce qui contredit l'égalité $DT^\natural = \delta^\natural$ ($\delta^\natural$ est la mesure uniforme de masse totale 1 portée par K). Cet exemple se trouve parmi d'autres dans [6]. Par contre, si G est résoluble simplement connexe, nous pensons (sans savoir le démontrer) que tout opérateur différentiel semi-bi-invariant non nul admet une solution élémentaire globale sur G.

6.4.10. Soit $X+iY$ un opérateur de Hans Lewy sur un groupe de Lie G. Alors, quel que soit l'opérateur différentiel invariant à gauche D sur G, l'opérateur $(X+iY)D$ n'est pas localement résoluble. On en déduit le curieux résultat suivant : soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie résoluble réelle et soit $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ sa complexifiée. Soit $X+iY$ un élément de Hans Lewy de $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$. Alors l'idéal à droite $(X+iY)\,U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ de $U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ ne contient aucun élément semi-invariant non nul. Il en est de même dans le cas semi-simple. Par contre, on sait que l'idéal bilatère engendré par $X+iY$ dans $U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ contient un semi-invariant non nul.

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. Auslander and B. Kostant, *Polarization and Unitary Representations of Solvable Lie Groups* (*Inv. Math.*, vol. 14, 1971, p. 255-354).

[2] M. Atiyah, *Resolution of Singularities and Division of Distributions* (*Comm. Pure and Appl. Math.*, vol. 23, 1970, p. 145-150).

[3] P. Bernat, N. Conze et coll., *Représentations des groupes de Lie résolubles*, Monographies de la Société mathématique de France, Dunod, Paris, 1972.

[4] I. N. Bernstein, *The Analytic Continuation of Generalized Functions with Respect to a Parameter* (*Funct. Anal. and appl.*, vol. 6, 1972, p. 273-285).

[5] A. Cerezo et F. Rouvière, *Résolubilité locale d'un opérateur différentiel invariant du premier ordre* (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, t. 4, 1971, p. 21-30).

[6] A. Cerezo et F. Rouvière, *Équations différentielles invariantes sur un groupe de Lie semi-simple complexe* (à paraître).

[7] J. Dixmier, *Algèbres enveloppantes*, Gauthier-Villars, Paris, 1974.

[8] J. Dixmier, M. Duflo et M. Vergne, *Sur la représentation co-adjointe d'une algèbre de Lie* (à paraître).

[9] M. Duflo, *Construction of Primitive Ideals in an Enveloping Algebra*, Publ. of the 1971 Summer School in Math., Edited by I. M. Gelfand, Bolyai-Janos Math. Soc., Budapest.

[10] M. Duflo, *Caractères des groupes et algèbres de Lie résolubles* (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, t. 3, 1970, p. 23-74).