

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

H. LEMONNIER

**Mémoires sur les fonctions elliptiques qui correspondent à la fonction  $\cos x + i \sin x$ . Premier mémoire**

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 2<sup>e</sup> série*, tome 4 (1875), p. 371-437

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1875\\_2\\_4\\_371\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1875_2_4_371_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1875, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

MÉMOIRES  
SUR  
LES FONCTIONS ELLIPTIQUES

QUI CORRESPONDENT A LA FONCTION  $\cos x + i \sin x$ ,

PAR M. H. LEMONNIER,

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE HENRI IV.

---

INTRODUCTION.

L'importance de la fonction  $\cos x + i \sin x$  dans la Trigonométrie et l'Analyse est due surtout aux deux propriétés qu'elle possède, d'avoir pour inverse l'expression  $\cos x - i \sin x$ , et de se reproduire à un facteur près dans sa dérivée.

Les mêmes propriétés appartiennent à trois combinaisons linéaires des fonctions elliptiques désignées par les lettres  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  (voir le Traité de MM. Briot et Bouquet). Ces combinaisons sont

$$\mu(z) + i\lambda(z), \quad \nu(z) + ki\lambda(z), \quad \frac{\nu(z) + k\mu(z)}{k'};$$

nous les désignons par

$$\nu_1(z), \quad \mu_1(z), \quad \lambda_1(z).$$

Dans un premier Mémoire, après avoir signalé les propriétés fondamentales, les zéros et les infinis de ces fonctions, nous en donnons les développements en séries de produits, en sommes de termes, en séries circulaires, et nous traitons les mêmes questions sur leurs rapports, qui n'ont que des zéros et des infinis doubles.

Dans un second Mémoire, il s'agit de l'addition et de la multiplica-

tion. Le point de départ y est, pour  $\nu_1(z)$ , une formule analogue à la formule de Moivre prise sous la forme

$$\cos(z+t) + i \sin(z+t) = \frac{\cos z + i \sin z}{\cos t - i \sin t}.$$

La formule s'établit par la considération des zéros et des infinis de  $\nu_1(z+t)$  au moyen de la relation

$$\nu\left(\frac{\omega'}{z} - z\right) = i \frac{\mu(z)}{\lambda(z)}.$$

Sans compter les expressions de  $\mu(z+t)$ ,  $\lambda(z+t)$  qu'elle implique, elle se prête à des conséquences variées; elle conduit en particulier, sans qu'il y ait embarras de facteurs étrangers, aux valeurs des produits  $\mu(z+t)\mu(z-t)$ , .... Des formules parallèles ont lieu pour  $\mu_1(z+t)$ ,  $\lambda_1(z+t)$ . Il en résulte, de proche en proche, à l'égard de la multiplication, des expressions concrètes qui sont des fonctions rationnelles de  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  où les termes, à un facteur près du premier degré quand  $n$  est impair, ont un degré sous-double de celui qui a lieu dans les expressions de  $\lambda(nz)$ , et sont conjugués l'un de l'autre.

L'objet d'un troisième Mémoire est la division de l'argument. En faisant ressortir l'analogie de la question avec le problème correspondant de la Trigonométrie, nous sommes amenés à l'étude particulière de l'équation où  $\nu_1(z)$  est égal à l'unité. C'est une équation qui correspond à l'équation  $x^n - 1 = 0$ , et jouit de propriétés analogues. Les racines primitives y sont en nombre égal à  $n^2 \left(1 - \frac{1}{a^2}\right) \left(1 - \frac{1}{b^2}\right) \dots$ ,  $a, b, \dots$  étant les facteurs premiers de  $n$ . Une racine primitive de  $x^n - 1 = 0$  engendre toutes les racines par ses puissances successives; pareillement deux racines s'exprimant par  $\nu_1 \frac{p_1 \omega + q_1 z \omega'}{n}$ ,  $\nu_1 \frac{p_2 \omega + q_2 z \omega'}{n}$  suffisent pour faire obtenir toutes les autres, pourvu que la condition d'avoir  $p_1 q_2 - q_1 p_2 \leq 0$  soit remplie. Quand le nombre  $n$  n'est pas un nombre premier, les racines peuvent se calculer au moyen de celles d'équations de degrés inférieurs, les racines primitives elles-mêmes au moyen de leurs racines primitives.

Les mêmes faits s'appliquent à la fonction  $\mu_1(z)$  et à  $\lambda_1(z)$ , comme à

$\lambda(z)$ ,  $\mu(z)$  et  $\nu(z)$ , sauf certaines particularités; par exemple, pour  $\lambda_1(z)$ ,  $\mu_1(z)$ ,  $\nu_1(z)$ , le nombre des racines primitives est moitié moindre.

Dans le Mémoire suivant, nous traitons de la division par 2, puis par un nombre impair, de l'une ou de l'autre période, ainsi que des problèmes inverses. La division par un nombre impair  $n$  fait dépendre  $g_1$ ,  $k_1$ ,  $k'_1$  paramètres et modules de la fonction à déterminer des diverses valeurs de  $\nu\left(p\frac{\Omega}{n}\right)$ , ou de  $\mu\left(p\frac{\Omega}{n}\right)$ , ou de  $\lambda\left(\frac{\omega}{4} + p\frac{\Omega}{n}\right)$ , avec des équations de condition qui admettent les racines primitives d'équations étudiées dans le troisième Mémoire, et n'admettent pas les autres. Le degré de l'équation modulaire  $f(k', k'_1) = 0$ , égal à  $n\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right)\dots$ , se reconnaît sans difficulté. Les calculs eux-mêmes accusent que l'équation en  $k$  et  $k_1$  est la même, et que, par le changement de  $k'$  en  $\eta i$ , de  $k'_1$  en  $\eta_1 i$ , elle devient l'équation qui lie  $\eta = \frac{k'}{k}$  et  $\eta_1 = \frac{k'_1}{k_1}$ . L'équation modulaire sous la forme d'un déterminant peut se déduire des formules obtenues. Nous appliquons le procédé au cas de  $n = 3$  et à celui de  $n = 5$ ; alors, au moins, les calculs à faire pour amener l'équation à être rationnelle ne sont pas trop pénibles.

---

## PREMIER MÉMOIRE.

---

### I.

#### *Définitions et premières propriétés.*

1. Soit  $\lambda(z, g, k)$  ou simplement  $\lambda(z)$  la fonction définie par l'équation différentielle

$$\frac{d\lambda}{dz} = g \sqrt{(1 - \lambda^2)(1 - k^2\lambda^2)},$$

sous la condition d'avoir, pour  $z = 0$ ,  $\lambda = 0$  et  $\frac{d\lambda}{dz} = g$ . La fonction

$\mu(z, g, k)$  ou  $\mu(z)$  et la fonction  $\nu(z, g, k)$  ou  $\nu(z)$  sont définies par les formules.

$$\mu(z) = \sqrt{1 - \lambda^2(z)}, \quad \nu(z) = \sqrt{1 - k^2 \lambda^2(z)},$$

en se prenant égales à 1 pour  $z = 0$ . Il s'ensuit

$$\frac{d\lambda}{dz} = g\mu(z)\nu(z), \quad \frac{d\mu}{dz} = -g\lambda(z)\nu(z), \quad \frac{d\nu}{dz} = -k'g\lambda(z)\mu(z).$$

Soient encore  $\omega, \omega'$  deux périodes élémentaires de  $\lambda(z)$ , telles qu'on ait

$$\lambda\left(\frac{\omega}{4}\right) = 1, \quad \lambda\left(\frac{\omega}{4} + \frac{\omega'}{2}\right) = \frac{1}{k}, \quad \nu\left(\frac{\omega}{4}\right) = k' = \sqrt{1 - k^2}, \quad \mu\left(\frac{\omega}{4} + \frac{\omega'}{2}\right) = -\frac{k'i}{k},$$

de telle sorte qu'il en résulte

$$\begin{aligned} \mu\left(\frac{\omega'}{2} + z\right) &= -i \frac{\nu(z)}{k\lambda(z)}, & \nu\left(\frac{\omega'}{2} + z\right) &= -i \frac{\mu(z)}{\lambda(z)}, \\ \lambda\left(\frac{\omega}{4} - z\right) &= \lambda\left(\frac{\omega}{4} + z\right) = \frac{\mu(z)}{\nu(z)}, & \mu\left(\frac{\omega}{4} - z\right) &= -\mu\left(\frac{\omega}{4} + z\right) = k' \frac{\lambda(z)}{\nu(z)}, \\ & & \nu\left(\frac{\omega}{4} - z\right) &= \frac{k'}{\nu(z)}. \end{aligned}$$

Les trois fonctions qui doivent nous occuper seront

$$\nu_1(z) = \mu(z) + i\lambda(z), \quad \mu_1(z) = \nu(z) + ki\lambda(z), \quad \lambda_1(z) = \frac{\nu(z) + k\mu(z)}{k'}.$$

Elles sont évidemment, comme les fonctions  $\lambda, \mu, \nu$ , monodromes sur tout le plan, et elles ont pour périodes élémentaires communes  $\omega$  et  $2\omega'$ .

On sait que, pour avoir  $\lambda\left(\frac{\omega_1}{4}\right) = 1, \lambda\left(\frac{\omega_1}{4} + \frac{\omega'_1}{2}\right) = \frac{1}{k}$ ,  $\omega_1, \omega'_1$  étant deux autres périodes, il faut prendre

$$\omega_1 = (4m + 1)\omega + 4n\omega', \quad \omega'_1 = 2m'\omega + (2n' + 1)\omega'.$$

Pour avoir en outre  $\nu\left(\frac{\omega_1}{4}\right) = \nu\left(\frac{\omega}{4}\right)$ , il faut que  $n$  soit pair; et de plus que  $n'$  soit pair aussi pour avoir  $\mu\left(\frac{\omega_1}{4} + \frac{\omega'_1}{2}\right) = -\frac{k'i}{k}$ . Les pé-

riodes  $\omega_1$  et  $2\omega'_1$  ne seront donc analogues à  $\omega$  et  $2\omega'$ , pour les trois fonctions, que si elles leur sont liées par les formules

$$\omega_1 = (4m + 1)\omega + 8n\omega', \quad 2\omega'_1 = 4m'\omega + (4n' + 1)2\omega'$$

ou

$$\omega_1 = 4m\omega + 4n2\omega' + \omega, \quad 2\omega'_1 = 4m'\omega + 4n'2\omega' + 2\omega';$$

et, si elles sont élémentaires, les nombres entiers  $m, n, m', n'$  satisferont à la condition

$$(4m + 1)(4n' + 1) - 16nm' = 1.$$

Les produits

$$[\mu(z) + i\lambda(z)][\mu(z) - i\lambda(z)], \quad [\nu(z) + ki\lambda(z)][\nu(z) - ki\lambda(z)],$$

$$\frac{\nu(z) + k\mu(z)}{k'} \frac{\nu(z) - k\mu(z)}{k'}$$

sont tous trois égaux à l'unité; on a ainsi

$$\frac{1}{\nu_1(z)} = \mu(z) - i\lambda(z), \quad \frac{1}{\mu_1(z)} = \nu(z) - ki\lambda(z), \quad \frac{1}{\lambda_1(z)} = \frac{\nu(z) - k\mu(z)}{k'},$$

c'est-à-dire que les inverses des trois fonctions sont les expressions conjuguées dues, les deux premières au changement de  $i$  en  $-i$ , la troisième à celui de  $k$  en  $-k$  sans changer le signe de  $k'$ .

Les propriétés connues des fonctions  $\lambda, \mu, \nu$  conduisent immédiatement aux formules suivantes :

$$\nu_1(-z) = \frac{1}{\nu_1(z)}, \quad \nu_1\left(z + \frac{\omega}{2}\right) = -\nu_1(z), \quad \nu_1\left(\frac{\omega}{2} - z\right) = -\frac{1}{\nu_1(z)},$$

$$\nu_1(\omega' + z) = -\frac{1}{\nu_1(z)}, \quad \nu_1(\omega' - z) = -\nu_1(z),$$

$$\mu_1(-z) = \frac{1}{\mu_1(z)}, \quad \mu_1\left(\frac{\omega}{2} + z\right) = \frac{1}{\mu_1(z)}, \quad \mu_1\left(\frac{\omega}{2} - z\right) = \mu_1(z),$$

$$\mu_1(\omega' + z) = -\frac{1}{\mu_1(z)}, \quad \mu_1(\omega' - z) = -\mu_1(z)$$

et

$$\lambda_1(-z) = \lambda_1(z), \quad \lambda_1\left(\frac{\omega}{2} + z\right) = \frac{1}{\lambda_1(z)}, \quad \lambda_1\left(\frac{\omega}{2} - z\right) = \frac{1}{\lambda_1(z)},$$

$$\lambda_1(\omega' + z) = -\lambda_1(z) = \lambda_1(\omega' - z).$$

2. *Dérivées des trois fonctions.* — Le calcul de ces dérivées donne

$$\frac{dv_1}{dz} = v_1'(z) = -g\lambda(z)v(z) + ig\mu(z)v(z) = igv(\mu + i\lambda) = igv\nu_1,$$

$$\frac{d\mu_1}{dz} = \mu_1'(z) = -gk^2\lambda\mu + kig\mu\nu = kgi\mu(\nu + ki\lambda) = ikg\mu\mu_1,$$

$$\frac{d\lambda_1}{dz} = \lambda_1'(z) = \frac{-gk^2\lambda\mu - kig\lambda\nu}{h'} = -kg\lambda\lambda_1;$$

d'où l'on tire

$$\frac{dv_1}{v_1} = d \log v_1 = ig\nu dz, \quad \frac{d\mu_1}{\mu_1} = d \log \mu_1 = ikg\mu dz, \quad \frac{d\lambda_1}{\lambda_1} = d \log \lambda_1 = -kg\lambda dz,$$

puis

$$\log v_1(z) = ig \int_0^z \nu(z) dz,$$

$$\log \mu_1(z) = ikg \int_0^z \mu(z) dz,$$

$$\log \lambda_1(z) = -kg \int_0^z \lambda(z) dz + \log \frac{1+k}{k'},$$

ou bien

$$v_1(z) = e^{ig \int_0^z \nu(z) dz}, \quad \mu_1(z) = e^{ikg \int_0^z \mu(z) dz}, \quad \lambda_1(z) = \frac{1+k}{k'} e^{-kg \int_0^z \lambda(z) dz}.$$

Il est aisé de reconnaître par ces expressions que les fonctions  $v_1(z)$ ,  $\mu_1(z)$ ,  $\lambda_1(z)$  sont monodromes, bien que les intégrales  $\int_0^z \nu(z) dz$ ,  $\int_0^z \mu(z) dz$ ,  $\int_0^z \lambda(z) dz$  ne le soient pas.

Si l'on pose  $z = \frac{\omega'}{2} + z'$ , on a

$$\nu(z) = \nu\left(\frac{\omega'}{2} + z'\right) = -i \frac{\mu(z')}{\lambda(z')},$$

puis

$$\int \nu(z) dz = -i \int \mu(z') \frac{gz' dz'}{\lambda(z') gz'}.$$

Quand on fait l'intégration le long d'un cercle d'un rayon  $\rho$  infiniment petit, ayant le point  $\frac{\omega'}{2}$  pour centre, cette intégrale a pour limite  $\frac{2\pi}{g}$ ; par suite, l'exponentielle ne change pas. Il en est de même de tout autre point rendant  $\nu(z)$  infini. La fonction  $\nu_1(z)$  est donc bien monodrome.

3. Zéros et infinis des trois fonctions. Fonction  $\nu_1(z)$ . — Comme l'on a  $\mu(z) + i\lambda(z) = \frac{1}{\mu(z) - i\lambda(z)}$ , les infinis de  $\nu_1(z)$  sont les zéros de  $\mu(z) - i\lambda(z)$ , et ses zéros en sont les infinis. Ces zéros et infinis ne peuvent répondre à des valeurs finies de  $\lambda$  et de  $\mu$ ; ils ne peuvent provenir que des infinis de  $\lambda$  et de  $\mu$ , ce qui est une particularité importante.

A tout infini de  $\lambda$  et de  $\mu$ , il correspond soit un zéro, soit un infini de  $\nu_1(z)$ .

L'expression générale des infinis est en effet, pour  $\lambda$  et  $\mu$ ,

$$\alpha = (2p + 1) \frac{\omega'}{2} + q \frac{\omega}{2}.$$

Or, si l'on pose  $z = \alpha + z'$ , il vient

$$\nu_1(\alpha + z') = \pm \nu_1 \left[ (2p + 1) \frac{\omega'}{2} + z' \right],$$

le signe  $+$  se prenant si  $q$  est pair, le signe  $-$  si  $q$  est impair; et de là il résulte,

Au cas où  $p$  est pair . . . . .  $\nu_1(\alpha + z') = \pm \nu_1 \left( \frac{\omega'}{2} + z' \right),$

Au cas où  $p$  est impair . . . . .  $\nu_1(\alpha + z') = \pm \frac{1}{-\nu_1 \left( \frac{\omega'}{2} + z' \right)}.$

Mais on a

$$\nu_1 \left( \frac{\omega'}{2} + z' \right) = i \frac{1 - \nu(z')}{k\lambda(z')},$$

de sorte que,  $z'$  tendant vers zéro, la limite est celle de

$$i \frac{k^2 g \lambda(z') \mu(z')}{k g \mu(z') \nu(z')} = ik \frac{\lambda(z')}{\nu(z')}$$

ou zéro.



Donc, dans le premier cas,  $\alpha$  est un zéro de  $\nu_1(z)$ , et dans le second, c'est un infini.

L'expression générale des zéros de  $\nu_1(z)$  est, en conséquence,

$$\alpha = (4p + 1) \frac{\omega'}{2} + q \frac{\omega}{2},$$

celle des infinis est

$$\alpha = (4p - 1) \frac{\omega'}{2} + q \frac{\omega}{2}.$$

Ainsi, sur la ligne du côté  $2\omega'$  du parallélogramme élémentaire, les zéros se suivent à partir du point  $\frac{\omega'}{2}$  par intervalles égaux à ce côté,  $2\omega'$ , et les milieux des intervalles sont des infinis; de sorte que les infinis et les zéros sont distribués sur des lignes parallèles au côté  $\omega$  du parallélogramme, les lignes portant alternativement des zéros et des infinis qui se suivent à la distance  $\frac{\omega}{2}$ .

Dans le parallélogramme élémentaire  $(\omega, 2\omega')$ , la somme des deux zéros est

$$\frac{\omega'}{2} + \left( \frac{\omega'}{2} + \frac{\omega}{2} \right) = \omega' + \frac{\omega}{2};$$

d'où résulte

$$\nu_1(z) = \nu_1 \left( \omega' + \frac{\omega}{2} - z \right)$$

ou

$$\nu_1(z + p\omega + q2\omega') = \nu_1 \left( \omega' + \frac{\omega}{2} - z + p'\omega + q'2\omega' \right).$$

*Fonction  $\mu_1(z)$ .* — On trouve d'une façon semblable que les zéros de la fonction  $\mu_1(z)$  ont pour expression

$$\alpha = (4p + 1) \frac{\omega'}{2} + q\omega, \quad \alpha = (4p - 1) \frac{\omega'}{2} + (2q + 1) \frac{\omega}{2},$$

et les infinis

$$\alpha = (4p - 1) \frac{\omega'}{2} + q\omega, \quad \alpha = (4p + 1) \frac{\omega'}{2} + (2q + 1) \frac{\omega}{2}.$$

Sur le côté  $2\omega'$  du parallélogramme élémentaire les zéros et les infinis sont les mêmes que pour  $\nu_1(z)$ ; mais sur chacune des lignes me-

nées en ces points parallèlement au côté  $\omega$ , les zéros et les infinis se succèdent à la distance  $\frac{\omega}{2}$ .

Fonction  $\lambda_1(z)$ . — Les zéros ont pour expression générale

$$a = (2p + 1) \frac{\omega'}{2} + (2q + 1) \frac{\omega}{2},$$

les infinis

$$\alpha = (2p + 1) \frac{\omega'}{2} + q\omega.$$

Il n'y a là sur la ligne  $2\omega'$  que des infinis, et sur chacune des lignes qui y sont menées parallèlement au côté  $\omega$ , les infinis et les zéros se succèdent alternativement, par intervalles égaux à  $\frac{\omega}{2}$ , de sorte que les lignes parallèles à  $2\omega'$  sont alternativement des lignes d'infinis et de zéros.

4. D'après cette distribution des zéros et des infinis pour les trois fonctions  $\nu_1(z)$ ,  $\mu_1(z)$ ,  $\lambda_1(z)$ , les rapports  $\frac{\nu_1(z)}{\mu_1(z)}$ ,  $\frac{\mu_1(z)}{\lambda_1(z)}$ ,  $\frac{\lambda_1(z)}{\nu_1(z)}$  n'ont chacun que des zéros et des infinis doubles. Nous désignerons ces rapports par  $\varpi_1(z)$ ,  $\varpi_2(z)$ ,  $\varpi_3(z)$ .

Pour le premier,  $\varpi_1(z) = \frac{\nu_1(z)}{\mu_1(z)}$ , l'expression générale des zéros est

$$a = (2p + 1) \frac{\omega}{2} + (4q + 1) \frac{\omega'}{2},$$

celle des infinis

$$\alpha = (2p + 1) \frac{\omega}{2} + (4q - 1) \frac{\omega'}{2};$$

pour le deuxième,  $\varpi_2(z) = \frac{\mu_1(z)}{\lambda_1(z)}$ , celle des zéros est

$$a = p\omega + (4q + 1) \frac{\omega'}{2},$$

celle des infinis

$$\alpha = (2p + 1) \frac{\omega}{2} + (4q + 1) \frac{\omega'}{2};$$

et pour le troisième,  $\varpi_3(z) = \frac{\lambda_1(z)}{\nu_1(z)}$ , celle des zéros est

$$a = (2p + 1) \frac{\omega}{2} + (4q - 1) \frac{\omega'}{2},$$

celle des infinis

$$\alpha = p\omega + (4q + 1) \frac{\omega'}{2}.$$

Les trois rapports ont  $\omega$  et  $2\omega'$  pour périodes élémentaires, et dans leur parallélogramme il n'y a pour chacun qu'un zéro double et un infini double.

Il est à remarquer que l'on a

$$\varpi'_1(z) = igk' \frac{\varpi_1(z)}{\lambda_1(z)}, \quad \varpi'_2(z) = igk \frac{\varpi_2(z)}{\nu_1(z)}, \quad \varpi'_3(z) = -ig \frac{\varpi_3(z)}{\mu_1(z)};$$

d'où

$$\varpi_1(z) = e^{igk' \int_0^z \frac{dz}{\lambda_1(z)}}, \quad \varpi_2(z) = \frac{k'}{1+k} e^{igk \int_0^z \frac{dz}{\nu_1(z)}}, \quad \varpi_3(z) = \frac{1+k}{k'} e^{-ig \int_0^z \frac{dz}{\mu_1(z)}}.$$

## II.

### *Développements en produits de facteurs.*

5. *Développement de*  $\nu_1(z) = \mu(z) + i\lambda(z) = e^{g \int_0^z \nu(z) dz}$ . Considérons la formule connue

$$\nu(z) = \frac{2\pi i}{\omega g} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=-n'}^{n=n'} (-1)^n \cot \left[ (2n+1)\pi\rho - \frac{2\pi z}{\omega} \right],$$

$n'$  devant croître indéfiniment et  $\rho$  désignant le rapport  $\frac{\omega'}{\omega}$ . C'est

$$\nu(z) = \frac{2\pi i}{\omega g} \lim \left[ \cot \left( \pi\rho - \frac{2\pi z}{\omega} \right) + 2 \sum_{n=1}^{n=n'} (-1)^{n-1} \frac{\sin \left( 2\pi\rho - \frac{4\pi z}{\omega} \right)}{\cos \left( 2\pi\rho - \frac{4\pi z}{\omega} \right) - \cos n 4\pi\rho} \right].$$

On en déduit

$$gi \int_0^z \nu(z) dz = \log \frac{\sin\left(\pi\rho - \frac{2\pi z}{\omega}\right)}{\sin \pi\rho} + \lim \sum_{n=1}^{n=n'} (-1)^n \log \frac{\cos\left(2\pi\rho - \frac{4\pi z}{\omega} - \cos n 4\pi\rho\right)}{\cos 2\pi\rho - \cos n 4\pi\rho},$$

d'où

$$\begin{aligned} \nu_1(z) &= \lim \frac{\sin\left(\pi\rho - \frac{2\pi z}{\omega}\right)}{\sin \pi\rho} \frac{\cos 2\pi\rho - \cos 4\pi\rho}{\cos\left(2\pi\rho - \frac{4\pi z}{\omega}\right) - \cos 4\pi\rho} \\ &\times \frac{\cos\left(2\pi\rho - \frac{4\pi z}{\omega}\right) - \cos 2 \cdot 4\pi\rho}{\cos 2\pi\rho - \cos 2 \cdot 4\pi\rho} \dots \frac{\cos 2\pi\rho - \cos(2n-1)4\pi\rho}{\cos\left(2\pi\rho - \frac{4\pi z}{\omega}\right) - \cos(2n-1)4\pi\rho} \\ &\times \frac{\cos\left(2\pi\rho - \frac{4\pi z}{\omega}\right) - \cos 2n \cdot 4\pi\rho}{\cos 2\pi\rho - \cos 2n \cdot 4\pi\rho} \dots \end{aligned}$$

$n$  croissant indéfiniment.

Comme l'on a

$$\frac{\cos\left(2\pi\rho - \frac{4\pi z}{\omega}\right) - \cos 2n 4\pi\rho}{\cos 2\pi\rho - \cos 2n 4\pi\rho} = 1 + \frac{\sin \frac{2\pi z}{\omega} \sin\left(2\pi\rho - \frac{2\pi z}{\omega}\right)}{\sin(4n-1)\pi\rho \sin(4n+1)\pi\rho}$$

et

$$\frac{\cos\left(2\pi\rho - \frac{4\pi z}{\omega}\right) - \cos(2n-1)4\pi\rho}{\cos 2\pi\rho - \cos(2n-1)4\pi\rho} = 1 + \frac{\sin \frac{2\pi z}{\omega} \sin\left(2\pi\rho - \frac{2\pi z}{\omega}\right)}{\sin(4n-3)\pi\rho \sin(4n-1)\pi\rho},$$

si l'on pose

$$I_1 = \prod_{n=1}^{n=\infty} \frac{\cos\left(2\pi\rho - \frac{4\pi z}{\omega}\right) - \cos 2n \cdot 4\pi\rho}{\cos 2\pi\rho - \cos 2n 4\pi\rho} = \prod_{n=1}^{n=\infty} \left[ 1 + \frac{\sin \frac{2\pi z}{\omega} \sin\left(2\pi\rho - \frac{2\pi z}{\omega}\right)}{\sin(4n-1)\pi\rho \sin(4n+1)\pi\rho} \right],$$

$$I_2 = \prod_{n=1}^{n=\infty} \frac{\cos\left(2\pi\rho - \frac{4\pi z}{\omega}\right) - \cos(2n-1)4\pi\rho}{\cos 2\pi\rho - \cos(2n-1)4\pi\rho} = \prod_{n=1}^{n=\infty} \left[ 1 + \frac{\sin \frac{2\pi z}{\omega} \sin\left(2\pi\rho - \frac{2\pi z}{\omega}\right)}{\sin(4n-3)\pi\rho \sin(4n-1)\pi\rho} \right]$$

la formule est

$$v_1(z) = \frac{\sin\left(\pi\rho - \frac{2\pi z}{\omega}\right)}{\sin\pi\rho} \frac{I_1}{I_2}.$$

Mais elle peut se mettre comme il suit sous une forme plus simple.  
On a d'abord

$$\begin{aligned} v_1(z) &= \lim \frac{\sin\left(\pi\rho - \frac{2\pi z}{\omega}\right)}{\sin\pi\rho} \frac{\sin\pi\rho \sin 3\pi\rho}{\sin\left(\pi\rho + \frac{2\pi z}{\omega}\right) \sin\left(3\pi\rho - \frac{2\pi z}{\omega}\right)} \\ &\times \frac{\sin\left(3\pi\rho + \frac{2\pi z}{\omega}\right) \sin\left(5\pi\rho - \frac{2\pi z}{\omega}\right)}{\sin 3\pi\rho \sin 5\pi\rho} \dots \\ &\times \frac{\sin(4n-3)\pi\rho \sin(4n-1)\pi\rho}{\sin\left[(4n-3)\pi\rho + \frac{2\pi z}{\omega}\right] \sin\left[(4n-1)\pi\rho - \frac{2\pi z}{\omega}\right]} \\ &\times \frac{\sin\left[(4n-1)\pi\rho + \frac{2\pi z}{\omega}\right] \sin\left[(4n+1)\pi\rho - \frac{2\pi z}{\omega}\right]}{\sin(4n-1)\pi\rho \sin(4n+1)\pi\rho} \dots, \end{aligned}$$

ce qui se réduit à

$$\begin{aligned} v_1(z) &= \lim \frac{\sin\left(\pi\rho - \frac{2\pi z}{\omega}\right) \sin\left(3\pi\rho + \frac{2\pi z}{\omega}\right) \dots \sin\left[(4n-3)\pi\rho - \frac{2\pi z}{\omega}\right]}{\sin\left(\pi\rho + \frac{2\pi z}{\omega}\right) \sin\left(3\pi\rho - \frac{2\pi z}{\omega}\right) \dots \sin\left[(4n-3)\pi\rho + \frac{2\pi z}{\omega}\right]} \\ &\times \frac{\sin\left[(4n-1)\pi\rho + \frac{2\pi z}{\omega}\right] \sin\left[(4n+1)\pi\rho + \frac{2\pi z}{\omega}\right]}{\sin\left[(4n-1)\pi\rho - \frac{2\pi z}{\omega}\right] \sin(4n+1)\pi\rho} \\ &= \lim \prod_{n=1}^{n=n'} \frac{\cos\left(2\pi\rho + \frac{4\pi z}{\omega}\right) - \cos(2n-1)4\pi\rho}{\cos\left(2\pi\rho - \frac{4\pi z}{\omega}\right) - \cos(2n-1)4\pi\rho} \\ &\times \lim \frac{\sin\left[(4n+1)\pi\rho - \frac{2\pi z}{\omega}\right]}{\sin(4n+1)\pi\rho}. \end{aligned}$$

Or on a

$$\begin{aligned} \lim \frac{\sin \left[ (4n+1)\pi\rho - \frac{2\pi z}{\omega} \right]}{\sin(4n+1)\pi\rho} &= \lim \left[ \cos \frac{2\pi z}{\omega} - \sin \frac{2\pi z}{\omega} \cot(4n+1)\pi\rho \right] \\ &= \cos \frac{2\pi z}{\omega} + i \sin \frac{2\pi z}{\omega}, \end{aligned}$$

supposé que le coefficient de  $i$  dans la valeur de  $\rho$  soit positif. Donc

$$\begin{aligned} \nu_1(z) &= e^{\frac{2\pi zi}{\omega}} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \left( 2\pi\rho + \frac{4\pi z}{\omega} \right) - \cos(2n-1)4\pi\rho}{\cos \left( 2\pi\rho - \frac{4\pi z}{\omega} \right) - \cos(2n-1)4\pi\rho} \\ &= e^{\frac{2\pi zi}{\omega}} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ 1 - \frac{\sin \frac{4\pi z}{\omega} \sin 2\pi\rho}{\sin \left[ (4n-3)\pi\rho + \frac{2\pi z}{\omega} \right] \sin \left[ (4n-1)\pi\rho - \frac{2\pi z}{\omega} \right]} \right\}. \end{aligned}$$

*Remarque.* — En faisant dans cette formule  $z = \frac{\omega}{4} + \frac{\omega'}{2}$ , on obtient

$$\frac{1-k'}{k} = e^{\pi i} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 4(n-1)\pi\rho \cos 4n\pi\rho}{\cos^2(4n-2)\pi\rho} = e^{\pi i} \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{\sin^2 2\pi\rho}{\cos^2(4n-2)\pi\rho} \right);$$

d'où

$$\frac{1+k'}{k} = e^{-\pi i} \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{\sin^2 2\pi\rho}{\cos 4(n-1)\pi\rho \cos 4n\pi\rho} \right).$$

Par la différentiation, l'expression de  $\nu_1(z)$  donne

$$\begin{aligned} g i \nu(z) &= \frac{2\pi i}{\omega} - \frac{4\pi}{\omega} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{\sin \left( 2\pi\rho + \frac{4\pi z}{\omega} \right)}{\cos \left( 2\pi\rho + \frac{4\pi z}{\omega} \right) - \cos(2n-1)4\pi\rho} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sin \left( 2\pi\rho - \frac{4\pi z}{\omega} \right)}{\cos \left( 2\pi\rho - \frac{4\pi z}{\omega} \right) - \cos(2n-1)4\pi\rho} \right]; \end{aligned}$$

d'où, par  $z = 0$ ,

$$\begin{aligned} g &= \frac{2\pi}{\omega} + \frac{8\pi i \sin 2\pi\rho}{\omega} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{\cos 2\pi\rho - \cos(2n-1)4\pi\rho} \\ &= \frac{2\pi}{\omega} + \frac{4\pi i \sin 2\pi\rho}{\omega} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{\sin(4n-3)\pi\rho \sin(4n-1)\pi\rho}. \end{aligned}$$

6. Le développement que nous venons d'obtenir pour  $\nu_1(z)$  peut se déduire de la formule générale due à Cauchy

$$\frac{f(t)}{f(0)} = \prod \frac{\left(1 - \frac{t}{a}\right)^p}{\left(1 - \frac{t}{\alpha}\right)^q} e^{-\frac{t}{2\pi i} \int \frac{f'(z)}{f(z)} \log\left(1 - \frac{t}{z}\right) dz},$$

où  $f(z)$  désigne une fonction qui n'est pas nulle à l'origine, ayant  $a, \dots, \alpha, \dots$  pour ses zéros et ses infinis dans l'intérieur d'un contour qui comprend le point  $z = t$ , monodrome ainsi que sa dérivée à l'intérieur et le long du contour.

Lorsque le contour s'éloigne à l'infini dans tous les sens, si le quotient  $\frac{f'(z)}{f(z)}$  reste de valeur finie tout le long de ce contour, la formule peut se remplacer par

$$\frac{f(t)}{f(0)} = \lim \prod \frac{\left(1 - \frac{t}{a}\right)^p}{\left(1 - \frac{t}{\alpha}\right)^q} e^{-\frac{t}{2\pi i} \int \frac{f'(z)}{f(z)} \frac{dz}{z}},$$

de sorte qu'elle donne

$$\nu_1(z) = \lim \prod \frac{1 - \frac{z}{\frac{\omega'}{2} + m \frac{\omega}{2}}}{1 - \frac{z}{\frac{\omega'}{2} + m \frac{\omega}{2}}} e^{-\frac{gz}{2\pi} \int \frac{\nu_1(\xi)}{\xi} d\xi}.$$

Comme la fonction  $\nu\left(\frac{\omega'}{2} + z\right)$  est impaire, prenons un contour qui ait le point  $z = \frac{\omega'}{2}$  pour centre, par exemple celui d'un parallélogramme

ayant ses côtés parallèles à ceux du parallélogramme élémentaire  $(2\omega', \omega)$ , aux points

$$z = -\left(m' \frac{\omega}{2} + \frac{\omega}{4}\right), \quad z = m' \frac{\omega}{2} + \frac{\omega}{4}$$

et

$$z = -(4n' + 1) \frac{\omega'}{2} + \frac{z}{4} \omega', \quad z = (4n' + 1) \frac{\omega'}{2} + \frac{\omega'}{4}.$$

L'intégrale, si l'on pose  $\zeta = \frac{\omega'}{2} + \zeta'$ , deviendra

$$\int \frac{\nu(\zeta) d\zeta}{\zeta} = \int \nu\left(\frac{\omega'}{2} + \zeta'\right) d\zeta' \left(\frac{\omega'}{2} + \zeta'\right)^{-1} = \int \nu\left(\frac{\omega'}{2} + \zeta'\right) \frac{d\zeta'}{\zeta'} \left(1 + \frac{\omega'}{2\zeta'}\right)^{-1};$$

elle aura même limite que  $\int \nu\left(\frac{\omega'}{2} + \zeta'\right) \frac{d\zeta'}{\zeta'}$ , c'est-à-dire zéro; et de là

$$\nu_1(z) = \lim \prod_{n=-n'}^{n=n'} \frac{1 - \frac{z}{(4n+1) \frac{\omega'}{2} + m \frac{\omega}{2}}}{1 - \frac{z}{(4n-1) \frac{\omega'}{2} + m \frac{\omega}{2}}}.$$

Mais  $m$  devra varier pour les deux termes depuis  $m = -m'$  jusqu'à  $m = m'$ ; et  $n$  pour le numérateur depuis  $n = -n'$  jusqu'à  $n = n'$ , et pour le dénominateur depuis  $n = -n' + 1$  jusqu'à  $n = n'$ ; c'est-à-dire qu'on a

$$\nu_1(z) = \lim \frac{\prod_{n=-n'}^{n=n'} \prod_{m=-m'}^{m=m'} \left(1 - \frac{z}{(4n+1) \frac{\omega'}{2} + m \frac{\omega}{2}}\right)}{\prod_{n=-n'+1}^{n=n'} \prod_{m=-m'}^{m=m'} \left(1 - \frac{z}{(4n-1) \frac{\omega'}{2} + m \frac{\omega}{2}}\right)}$$

ou

$$\nu_1(z) = \lim \frac{\prod_{n=-n'}^{n=n'} \prod_{m=-m'}^{m=m'} \left(1 - \frac{\frac{2\pi z}{\omega}}{(4n+1)\pi\rho + m\pi}\right)}{\prod_{n=-n'+1}^{n=n'} \prod_{m=-m'}^{m=m'} \left(1 - \frac{\frac{2\pi z}{\omega}}{(4n-1)\pi\rho + m\pi}\right)}$$



De là

$$\begin{aligned}
\nu_1(z) &= \lim_{n=-n'}^{n=n'} \frac{\prod_{n=-n'}^{n=n'} \frac{\sin \left[ (4n+1)\pi\rho - \frac{2\pi z}{\omega} \right]}{\sin(4n+1)\pi\rho}}{\prod_{n=-n'+1}^{n=n'} \frac{\sin \left[ (4n-1)\pi\rho - \frac{2\pi z}{\omega} \right]}{\sin(4n-1)\pi\rho}} \\
&= \frac{\sin \left( \pi\rho - \frac{2\pi z}{\omega} \right) \sin \left( 5\pi\rho - \frac{2\pi z}{\omega} \right) \sin \left[ (4n+1)\pi\rho - \frac{2\pi z}{\omega} \right]}{\sin \pi\rho \sin 5\pi\rho \dots \sin(4n+1)\pi\rho} \dots \\
&\times \frac{\sin \left( 3\pi\rho + \frac{2\pi z}{\omega} \right) \sin \left( 7\pi\rho + \frac{2\pi z}{\omega} \right) \sin \left[ (4n-1)\pi\rho + \frac{2\pi z}{\omega} \right]}{\sin 3\pi\rho \sin 7\pi\rho \dots \sin(4n-1)\pi\rho} \dots \\
&\times \frac{\sin 3\pi\rho \sin 7\pi\rho \dots \sin(4n-1)\pi\rho}{\sin \left( 3\pi\rho - \frac{2\pi z}{\omega} \right) \sin \left( 7\pi\rho - \frac{2\pi z}{\omega} \right) \sin \left[ (4n-1)\pi\rho - \frac{2\pi z}{\omega} \right]} \dots \\
&\times \frac{\sin \pi\rho \sin 5\pi\rho \dots \sin(4n-3)\pi\rho}{\sin \left( \pi\rho + \frac{2\pi z}{\omega} \right) \sin \left( 5\pi\rho + \frac{2\pi z}{\omega} \right) \sin \left[ (4n-3)\pi\rho + \frac{2\pi z}{\omega} \right]} \dots;
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\nu_1(z) &= \lim \frac{\sin \left( \pi\rho - \frac{2\pi z}{\omega} \right) \sin \left( 3\pi\rho + \frac{2\pi z}{\omega} \right) \sin \left[ (4n-3)\pi\rho - \frac{2\pi z}{\omega} \right]}{\sin \left( \pi\rho + \frac{2\pi z}{\omega} \right) \sin \left( 3\pi\rho - \frac{2\pi z}{\omega} \right) \sin \left[ (4n-3)\pi\rho + \frac{2\pi z}{\omega} \right]} \\
&\times \frac{\sin \left[ (4n-1)\pi\rho + \frac{2\pi z}{\omega} \right] \sin \left[ (4n+1)\pi\rho - \frac{2\pi z}{\omega} \right]}{\sin \left[ (4n-1)\pi\rho + \frac{2\pi z}{\omega} \right] \sin(4n+1)\pi\rho} \dots,
\end{aligned}$$

ce qui est la formule précédemment obtenue.

7. Autre développement de  $\nu_1(z)$ . — Considérons la formule connue

$$\begin{aligned}
\nu(z) &= -\frac{i}{g} \lim \sum_{m=-m'}^{m=m'} \sum_{n=-n'}^{n=n'} (-1)^n \frac{1}{z - \frac{m\omega}{2} - (2n+1)\frac{\omega'}{2}} \\
&= -\frac{\pi i}{g\omega} \lim \sum_{m=-m'}^{m=m'} \sum_{n=-n'}^{n=n'} (-1)^n \frac{1}{\frac{\pi z}{\omega'} - \frac{m\pi}{2\rho} - (2n+1)\frac{\pi}{2}};
\end{aligned}$$

d'où

$$v(z) = \frac{\pi i}{g\omega'} \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{m=-m'}^{m=m} \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi z}{\omega'} - \frac{m\pi}{2\rho}\right)}.$$

Il s'ensuit

$$g^i \int_0^z v(z) dz = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{m=-m'}^{m=m'} \log \frac{\text{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi z}{2\omega'} + \frac{m\pi}{4\rho}\right)}{\text{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{m\pi}{4\rho}\right)},$$

puis

$$\begin{aligned} v_1(z) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{m=-m'}^{m=m'} \frac{\text{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi z}{2\omega'} + \frac{m\pi}{4\rho}\right)}{\text{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{m\pi}{4\rho}\right)} \\ &= \text{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi z}{2\omega'}\right) \prod_{m=1}^{m=\infty} \text{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi z}{2\omega'} + \frac{m\pi}{4\rho}\right) \text{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi z}{2\omega'} - \frac{m\pi}{4\rho}\right) \\ &= \text{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi z}{2\omega'}\right) \prod_{m=1}^{m=\infty} \frac{\text{tang}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi z}{2\omega'}\right) - \text{tang}^2\frac{m\pi}{4\rho}}{1 - \text{tang}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi z}{2\omega'}\right) \text{tang}^2\frac{m\pi}{4\rho}} \\ &= \text{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi z}{2\omega'}\right) \prod_{m=1}^{m=\infty} \frac{\cos\frac{m\pi}{2\rho} - \sin\frac{\pi z}{\omega'}}{\cos\frac{m\pi}{2\rho} + \sin\frac{\pi z}{\omega'}} \\ &= \text{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi z}{2\omega'}\right) \prod_{m=1}^{m=\infty} \left(1 - \frac{2\sin\frac{\pi z}{\omega'}}{\cos\frac{m\pi}{2\rho} + \sin\frac{\pi z}{\omega'}}\right) \\ &= \text{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi z}{2\omega'}\right) \prod_{m=1}^{m=\infty} \left[1 - \frac{\sin\frac{\pi z}{\omega'}}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi z}{2\omega'} + \frac{m\pi}{4\rho}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi z}{2\omega'} - \frac{m\pi}{4\rho}\right)}\right]. \end{aligned}$$

La formule de Cauchy donnerait là

$$\begin{aligned} \nu_1(z) &= \lim_{m=-m'} \prod_{m=-m'}^{m=m'} \frac{\prod_{n=-n'}^{n=n'} \left( 1 - \frac{\frac{\pi z}{2\omega'}}{n\pi + \frac{\pi}{4} + m\frac{\pi}{4\rho}} \right)}{\prod_{n=-n'+1}^{n=n'} \left( 1 - \frac{\frac{\pi z}{2\omega'}}{n\pi - \frac{\pi}{4} + m\frac{\pi}{4\rho}} \right)} \\ &= \lim_{m=-m'} \prod_{m=-m'}^{m=m'} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + m\frac{\pi}{4\rho} - \frac{\pi z}{2\omega'}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + m\frac{\pi}{4\rho}\right)} \frac{\sin\left(-\frac{\pi}{4} + m\frac{\pi}{4\rho} - \frac{\pi z}{2\omega'}\right)}{\sin\left(-\frac{\pi}{4} + m\frac{\pi}{4\rho}\right)} \\ &= \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi z}{2\omega'}\right) \prod_{m=1}^{m=\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi z}{2\omega'} + m\frac{\pi}{4\rho}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi z}{2\omega'} - m\frac{\pi}{4\rho}\right)} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi z}{2\omega'} - m\frac{\pi}{4\rho}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi z}{2\omega'} + m\frac{\pi}{4\rho}\right)} \end{aligned}$$

ou

$$\nu_1(z) = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi z}{2\omega'}\right) \prod_{m=1}^{m=\infty} \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi z}{2\omega'} + m\frac{\pi}{4\rho}\right) \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi z}{2\omega'} - m\frac{\pi}{4\rho}\right).$$

comme ci-dessus.

8. *Développements de*  $\mu_1(z) = \nu(z) + ki\lambda(z) = e^{gki \int_0^z \mu(z) dz}$ . — Pre-  
nons

$$\mu(z) = -\frac{2\pi i}{kg\omega} \lim_{n=-n'} \sum_{n=-n'}^{n=n'} \frac{(-1)^n}{\sin\left[\frac{2\pi z}{\omega} - (2n+1)\pi\rho\right]}.$$

On en tire

$$kgi \int_{\omega'}^{z} \mu(z) dz = \lim_{n=-n'} \sum_{n=-n'}^{n=n'} (-1)^n \log \frac{\operatorname{tang}\left[(2n+1)\frac{\pi\rho}{2} - \frac{\pi z}{\omega}\right]}{\operatorname{tang}(2n+1)\frac{\pi\rho}{2}}.$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \mu_1(z) = \lim & \frac{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi\rho}{2} - \frac{\pi z}{\omega}\right) \operatorname{tang}\left(3\frac{\pi\rho}{2} + \frac{\pi z}{\omega}\right) \operatorname{tang}\left(5\frac{\pi\rho}{2} - \frac{\pi z}{\omega}\right)}{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi\rho}{2} + \frac{\pi z}{\omega}\right) \operatorname{tang}\left(3\frac{\pi\rho}{2} - \frac{\pi z}{\omega}\right) \operatorname{tang}\left(5\frac{\pi\rho}{2} + \frac{\pi z}{\omega}\right)} \dots \\ & \times \frac{\operatorname{tang}\left[\left(4n-1\right)\frac{\pi\rho}{2} + \frac{\pi z}{\omega}\right] \operatorname{tang}\left[\left(4n+1\right)\frac{\pi\rho}{2} - \frac{\pi z}{\omega}\right]}{\operatorname{tang}\left[\left(4n-1\right)\frac{\pi\rho}{2} - \frac{\pi z}{\omega}\right] \operatorname{tang}\left[\left(4n+1\right)\frac{\pi\rho}{2} + \frac{\pi z}{\omega}\right]} \dots = \frac{\varphi(z)}{\varphi(-z)}, \end{aligned}$$

en posant

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \operatorname{tang}\left(\frac{\pi\rho}{2} - \frac{\pi z}{\omega}\right) \prod_{n=1}^{n=\infty} \frac{\operatorname{tang}\left[\left(4n-1\right)\frac{\pi\rho}{2} + \frac{\pi z}{\omega}\right]}{\operatorname{tang}\left[\left(4n+1\right)\frac{\pi\rho}{2} + \frac{\pi z}{\omega}\right]} \\ &= \operatorname{tang}\left(\frac{\pi\rho}{2} - \frac{\pi z}{\omega}\right) \prod_{n=1}^{n=\infty} \left[ 1 - \frac{2 \sin \pi\rho}{\sin \pi\rho + \sin\left(\frac{2\pi z}{\omega} + 4n\pi\rho\right)} \right] \\ &= \operatorname{tang}\left(\frac{\pi\rho}{2} - \frac{\pi z}{\omega}\right) \prod_{n=1}^{n=\infty} \left\{ 1 - \frac{\sin \pi\rho}{\sin\left[\frac{\pi z}{\omega} + (4n+1)\frac{\pi\rho}{2}\right] \cos\left[\frac{\pi z}{\omega} + (4n-1)\frac{\pi\rho}{2}\right]} \right\}. \end{aligned}$$

*Remarque.* — On déduit de là par  $z = \frac{\omega}{4}$ ,

$$\begin{aligned} k' + ki &= - \prod_{n=0}^{n=\infty} \left( 1 - \frac{2 \sin \pi\rho}{\sin \pi\rho + \cos 4n\pi\rho} \right)^2 \\ &= - \prod_{n=0}^{n=\infty} \left\{ 1 - \frac{\sin \pi\rho}{\sin\left[\frac{\pi}{4} - (4n-1)\frac{\pi\rho}{2}\right] \sin\left[\frac{\pi}{4} - (4n+1)\frac{\pi\rho}{2}\right]} \right\}^2; \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} k' - ki &= - \prod_{n=0}^{n=\infty} \left( 1 - \frac{2 \sin \pi\rho}{\sin \pi\rho - \cos 4n\pi\rho} \right)^2 \\ &= - \prod_{n=0}^{n=\infty} \left\{ 1 + \frac{\sin \pi\rho}{\sin\left[\frac{\pi}{4} - (n+1)\frac{\pi\rho}{2}\right] \cos\left[\frac{\pi}{4} - (4n-1)\frac{\pi\rho}{2}\right]} \right\}^2. \end{aligned}$$

ou encore, de plus haut,

$$k' + ki = - \prod_{n=0}^{n=\infty} \left[ 1 - \frac{\sin \pi \rho \cos 4n\pi \rho}{\left( \frac{\sin \pi \rho + \cos 4n\pi \rho}{2} \right)^2} \right],$$

$$k' - ki = - \prod_{n=0}^{n=\infty} \left[ 1 + \frac{\sin \pi \rho \cos 4n\pi \rho}{\left( \frac{\sin \pi \rho - \cos 4n\pi \rho}{2} \right)^2} \right].$$

9. Autre développement de  $\mu_1(z)$ . — L'expression suivante de  $\mu(z)$  :

$$\mu(z) = \frac{\pi i}{kg\omega'} \lim_{m=-m'-1}^{m=m'} \frac{(-1)^m}{\cos \left( \frac{\pi z}{\omega'} - m \frac{\pi}{2\rho} \right)}$$

donne

$$\begin{aligned} \mu_1(z) &= \operatorname{tang} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\pi z}{2\omega'} \right) \prod_{n=1}^{n=\infty} \operatorname{col} \left[ \frac{\pi}{4} - \frac{(2n-1)\pi}{4\rho} - \frac{\pi z}{2\omega'} \right] \operatorname{col} \left[ \frac{\pi}{4} + \frac{(2n-1)\pi}{4\rho} - \frac{\pi z}{2\omega'} \right] \\ &\quad \times \operatorname{tang} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{2n\pi}{4\rho} - \frac{\pi z}{2\omega'} \right) \operatorname{tang} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{2n\pi}{4\rho} - \frac{\pi z}{2\omega'} \right) \\ &= \operatorname{tang} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\pi z}{2\omega'} \right) \prod_{n=1}^{n=\infty} \frac{\cos \frac{(2n-1)\pi}{2\rho} + \sin \frac{\pi z}{\omega'}}{\cos \frac{(2n-1)\pi}{2\rho} - \sin \frac{\pi z}{\omega'}} : \frac{\cos \frac{2n\pi}{2\rho} + \sin \frac{\pi z}{\omega'}}{\cos \frac{2n\pi}{2\rho} - \sin \frac{\pi z}{\omega'}} \\ &= \operatorname{tang} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\pi z}{2\omega'} \right) \frac{\prod_{n=1}^{n=\infty} \left[ 1 - \frac{2 \sin \frac{\pi z}{\omega'}}{\sin \frac{\pi z}{\omega'} - \cos \frac{(2n-1)\pi}{2\rho}} \right]}{\prod_{n=1}^{n=\infty} \left( 1 - \frac{2 \sin \frac{\pi z}{\omega'}}{\sin \frac{\pi z}{\omega'} - \cos \frac{2n\pi}{2\rho}} \right)}. \end{aligned}$$

10. Développement de  $\lambda_1(z) = \frac{\nu(z) + k\mu(z)}{k'} = \frac{1+k}{k'} e^{-kg \int_0^z \lambda(z) dz}$ . —

Soit prise la formule

$$\lambda(z) = \frac{2\pi}{kg\omega} \lim_{n=-n'-1}^{n=n'} \frac{1}{\sin \left[ \frac{2\pi z}{\omega} - (2n+1)\pi\rho \right]}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} kg \int_0^z \lambda(z) dz &= \lim \sum_{n=-n'-1}^{n=n'} \log \frac{\text{tang} \left[ (2n+1) \frac{\pi\rho}{2} - \frac{\pi z}{\omega} \right]}{\text{tang} (2n+1) \frac{\pi\rho}{2}} \\ &= \lim \sum_{n=0}^{n=n'} \log \frac{\text{tang} \left[ (2n+1) \frac{\pi\rho}{2} - \frac{\pi z}{\omega} \right] \text{tang} \left[ (2n+1) \frac{\pi\rho}{2} + \frac{\pi z}{\omega} \right]}{\text{tang}^2 (2n+1) \frac{\pi\rho}{2}} \end{aligned}$$

et par suite

$$\begin{aligned} \lambda_1(z) &= \frac{1+k}{h'} \prod_{n=0}^{n=\infty} \frac{\text{col} \left[ (2n+1) \frac{\pi\rho}{2} - \frac{\pi z}{\omega} \right] \text{col} \left[ (2n+1) \frac{\pi\rho}{2} + \frac{\pi z}{\omega} \right]}{\text{col}^2 (2n+1) \frac{\pi\rho}{2}} \\ &= \frac{1+k}{h'} \prod_{n=0}^{n=\infty} \left\{ 1 + \frac{2 \sin \frac{\pi z}{\omega}}{\sin \left[ (2n+1) \pi\rho - \frac{\pi z}{\omega} \right] - \sin \frac{\pi z}{\omega}} \right\} \\ &\quad \times \prod_{n=0}^{n=\infty} \left\{ 1 - \frac{2 \sin \frac{\pi z}{\omega}}{\sin \left[ (2n+1) \pi\rho + \frac{\pi z}{\omega} \right] + \sin \frac{\pi z}{\omega}} \right\} \\ &= \frac{1+k}{h'} \prod_{n=0}^{n=\infty} \left\{ 1 + \frac{\sin \frac{\pi z}{\omega}}{\sin \left[ (2n+1) \frac{\pi\rho}{2} - \frac{\pi z}{\omega} \right] \cos (2n+1) \frac{\pi\rho}{2}} \right\} \\ &\quad \times \prod_{n=0}^{n=\infty} \left\{ 1 - \frac{\sin \frac{\pi z}{\omega}}{\sin \left[ (2n+1) \frac{\pi\rho}{2} + \frac{\pi z}{\omega} \right] \cos (2n+1) \frac{\pi\rho}{2}} \right\}. \end{aligned}$$

*Remarque.* — De là, par  $z = \frac{\omega}{4}$ ,

$$\frac{1-k}{h'} = \prod_{n=0}^{n=\infty} \left[ 1 - \frac{1}{\cos^2 (2n+1) \frac{\pi\rho}{2}} \right];$$

d'où

$$\frac{1+k}{k'} = \prod_{n=0}^{n=\infty} \left[ 1 - \frac{1}{\sin^2(2n+1)\frac{\pi\rho}{2}} \right].$$

11. *Autre développement.* — On a

$$\begin{aligned} \lambda(z) &= -\frac{\pi}{hg\omega'} \operatorname{tang} \frac{\pi z}{\omega'} - \frac{2\pi}{hg\omega'} \lim_{n=n'} \sum_{n=1}^{n=n'} (-1)^n \left[ \operatorname{tang} \left( \frac{\pi z}{\omega'} - \frac{n\pi}{2\rho} \right) + \operatorname{tang} \left( \frac{\pi z}{\omega'} + \frac{n\pi}{2\rho} \right) \right] \\ &= -\frac{\pi}{hg\omega'} \operatorname{tang} \frac{\pi z}{\omega'} - \frac{2\pi}{hg\omega'} \lim_{n=n'} \sum_{n=1}^{n=n'} (-1)^n \frac{\sin \frac{2\pi z}{\omega'}}{\cos \frac{n\pi}{\rho} + \cos \frac{2\pi z}{\omega'}}; \end{aligned}$$

d'où

$$hg \int_0^z \lambda(z) dz = \log \cos \frac{\pi z}{\omega'} + \lim_{n=n'} \sum_{n=1}^{n=n'} (-1)^n \log \frac{\cos \frac{n\pi}{\rho} + \cos \frac{2\pi z}{\omega'}}{\cos \frac{n\pi}{\rho} + 1},$$

puis

$$\lambda_1(z) = \frac{1+k}{k'} \frac{1}{\cos \frac{\pi z}{\omega'}} \prod_{n=1}^{n=\infty} \left( \frac{\cos \frac{2\pi z}{\omega'} + \cos \frac{n\pi}{\rho}}{1 + \cos \frac{n\pi}{\rho}} \right)^{(-1)^{n-1}},$$

$$\lambda_1(z) = \frac{1+k}{k'} \frac{1}{\cos \frac{\pi z}{\omega'}} \prod_{n=1}^{n=\infty} \left( 1 - \frac{\sin^2 \frac{\pi z}{\omega'}}{\cos^2 \frac{n\pi}{2\rho}} \right)^{(-1)^{n-1}},$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1+k}{k'} \frac{1}{\cos \frac{\pi z}{\omega'}} \frac{\prod_{n=1}^{n=\infty} \left[ 1 - \frac{\sin^2 \frac{\pi z}{\omega'}}{\cos^2 \frac{(2n-1)\pi}{2\rho}} \right]}{\prod_{n=1}^{n=\infty} \left( 1 - \frac{\sin^2 \frac{\pi z}{\omega'}}{\cos^2 \frac{2n\pi}{2\rho}} \right)}. \end{aligned}$$

III.

*Développement des mêmes fonctions en séries de fractions.*

12. Pour une fonction  $f(z)$  monodrome et monogène dans une portion du plan, devenant seulement infinie en certains points de cette partie, Cauchy a donné la formule

$$f(t) = \oint \frac{f(z)}{t-z} + \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z) dz}{z-t},$$

où le signe résidu s'applique à tous les infinis que renferme l'aire plane considérée, tandis que l'intégration s'opère sur tout le contour de l'aire.

Si le contour s'éloigne à l'infini dans tous les sens, sans que le module de  $f(z)$  cesse d'être en tous ses points d'une valeur finie, l'intégrale peut se réduire à la limite de  $\frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z) dz}{z}$ ; elle est nulle quand  $f(z)$  est une fonction impaire et que l'origine est un centre pour le contour.

13. *Développement de  $\nu_1(z)$ .* — Considérons la fonction impaire

$$\nu_1\left(\frac{\omega'}{2} + z\right).$$

Ses infinis étant donnés par

$$\frac{\omega'}{2} + z = (4m-1)\frac{\omega'}{2} + n\frac{\omega}{2}, \quad \text{d'où} \quad z = (2m-1)\omega' + n\frac{\omega}{2},$$

si l'on pose

$$z = (2m-1)\omega' + n\frac{\omega}{2} + z',$$

on aura

$$\begin{aligned} \nu_1\left(\frac{\omega'}{2} + z\right) &= (-1)^n \nu_1\left(-\frac{\omega'}{2} + z'\right) = (-1)^n \left[ \mu\left(\frac{\omega'}{2} - z'\right) - i\lambda\left(\frac{\omega'}{2} - z'\right) \right] \\ &= (-1)^n \frac{1 + \nu(z')}{k} i \frac{g' z'}{\lambda(z')} \frac{1}{g' z'}, \end{aligned}$$



ce qui donne pour expression générale du résidu

$$(-1)^n \frac{2i}{gk} \frac{1}{z - (2m-1)\omega' - n \frac{\omega}{2}}$$

au point  $z = (2m-1)\omega' + n \frac{\omega}{2}$ .

Prenons comme contour un parallélogramme dont les côtés, parallèles à ceux du parallélogramme élémentaire, soient déterminés par les points

$$z = -n' \frac{\omega}{2} - \frac{\omega}{4}, \quad z = n' \frac{\omega}{2} + \frac{\omega}{4},$$

et les points

$$z = -(2m'-1)\omega' - \frac{\omega'}{4}, \quad z = (2m'-1)\omega' + \frac{\omega'}{4}.$$

Les valeurs de  $n$  à considérer seront

$$n = 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \dots, \quad n', \\ -1, \quad -2, \quad -3, \dots, \quad -n';$$

celles de  $m$  seront

$$m = 0, \quad 1, \quad 2, \dots, \quad m', \\ -1, \quad -2, \dots, \quad -m' + 1,$$

de sorte qu'on a

$$\begin{aligned} \nu_i \left( \frac{\omega'}{2} + z \right) &= \lim \frac{2i}{kg} \sum_{n=-n'}^{n=n'} \sum_{m=-m'+1}^{m=m'} \frac{(-1)^n}{z - (2m-1)\omega' - n \frac{\omega}{2}} \\ &= \frac{4\pi i}{kg\omega} \lim \sum_{m=-m'+1}^{m=m'} \sum_{n=-n'}^{n=n'} \frac{(-1)^n}{\frac{2\pi z}{\omega} - 2\pi(2m-1)\rho - n\pi} \\ &= \frac{4\pi i}{kg\omega} \lim \sum_{m=-m'+1}^{m=m'} \frac{1}{\sin \left[ \frac{2\pi z}{\omega} - (2m-1)2\pi\rho \right]} \\ &= \frac{4\pi i}{kg\omega} \left\{ \frac{1}{\sin \left( \frac{2\pi z}{\omega} + 2\pi\rho \right)} + \sum_{m=1}^{m=\infty} \left[ \frac{1}{\sin \left( \frac{2\pi z}{\omega} - (2m-1)2\pi\rho \right)} + \frac{1}{\sin \left( \frac{2\pi z}{\omega} + (2m-1)2\pi\rho \right)} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{4\pi i}{kg\omega} \left\{ \frac{1}{\sin\left(\frac{2\pi z}{\omega} + 2\pi\rho\right)} + \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{2\sin\left(\frac{2\pi z}{\omega} + 2\pi\rho\right) \cos 4m\pi\rho}{\sin\left[\frac{2\pi z}{\omega} - (2m-1)2\pi\rho\right] \sin\left[\frac{2\pi z}{\omega} + (2m+1)2\pi\rho\right]} \right\} \\
 &= \frac{16\pi i \sin\left(\frac{2\pi z}{\omega} + 2\pi\rho\right)}{kg\omega} \left\{ \frac{1}{2\left[1 - \cos\left(\frac{4\pi z}{\omega} + 4\pi\rho\right)\right]} + \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{\cos 4m\pi\rho}{\cos 8m\pi\rho - \cos\left(\frac{4\pi z}{\omega} + 4\pi\rho\right)} \right\} \\
 &= \frac{16\pi i \sin\left(\frac{2\pi z}{\omega} + 2\pi\rho\right)}{kg\omega} \left\{ \frac{1}{2\left[1 - \cos\left(\frac{4\pi z}{\omega} + 4\pi\rho\right)\right]} + \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{\cos 4m\pi\rho}{\cos 8m\pi\rho - \cos\left(\frac{4\pi z}{\omega} + 4\pi\rho\right)} \right\},
 \end{aligned}$$

et de là

$$\begin{aligned}
 \nu_1(z) &= \frac{16\pi i \sin\left(\frac{2\pi z}{\omega} + \pi\rho\right)}{kg\omega} \left\{ \frac{1}{2\left[1 - \cos\left(\frac{4\pi z}{\omega} + 2\pi\rho\right)\right]} + \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{\cos 4m\pi\rho}{\cos 8m\pi\rho - \cos\left(\frac{4\pi z}{\omega} + 2\pi\rho\right)} \right\} \\
 &= \frac{8\pi i \sin\left(\frac{2\pi z}{\omega} + \pi\rho\right)}{kg\omega} \left\{ \frac{1}{2\sin^2\left(\frac{2\pi z}{\omega} + \pi\rho\right)} + \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{\cos 4m\pi\rho}{\sin\left[\frac{2\pi z}{\omega} - (4m-1)\pi\rho\right] \sin\left[\frac{2\pi z}{\omega} + (4m+1)\pi\rho\right]} \right\}.
 \end{aligned}$$

14. Autre développement. — Comme on a

$$\nu_1\left(\frac{\omega'}{2} + z\right) = \frac{\pi i}{kg\omega'} \lim_{n=-n'}^{n=n'} \sum_{n=-n'}^{n=n'} (-1)^n \sum_{m=-m'+1}^{m=m'} \frac{1}{\frac{\pi z}{2\omega'} + \frac{\pi}{2} - n\frac{\pi}{4\rho} - m\pi} \quad \text{et} \quad \cot z = \lim_{m=-m'}^{m=m'} \sum_{m=-m'}^{m=m'} \frac{1}{z - m\pi},$$

il vient

$$\begin{aligned}
 \nu_1\left(\frac{\omega'}{2} + z\right) &= \frac{\pi i}{kg\omega'} \lim_{n=-n'}^{n=n'} \sum_{n=-n'}^{n=n'} (-1)^n \cot\left(\frac{\pi z}{2\omega'} + \frac{\pi}{2} - n\frac{\pi}{4\rho}\right) \\
 &= \frac{\pi i}{kg\omega'} \left\{ \cot\left(\frac{\pi z}{2\omega'} + \frac{\pi}{2}\right) + \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n \left[ \cot\left(\frac{\pi z}{2\omega'} + \frac{\pi}{2} - \frac{n\pi}{4\rho}\right) + \cot\left(\frac{\pi z}{2\omega'} + \frac{\pi}{2} + \frac{n\pi}{4\rho}\right) \right] \right\} \\
 &= \frac{\pi i}{kg\omega'} \left\{ \cot\left(\frac{\pi z}{2\omega'} + \frac{\pi}{2}\right) + \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n \frac{\sin\left(\frac{\pi z}{\omega'} + \pi\right)}{\sin\left(\frac{\pi z}{2\omega'} + \frac{\pi}{2} - \frac{n\pi}{4\rho}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{2\omega'} + \frac{\pi}{2} + \frac{n\pi}{4\rho}\right)} \right\};
 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \nu_1(z) &= \frac{\pi i}{k g \omega'} \left[ \cot \left( \frac{\pi z}{2 \omega'} + \frac{\pi}{4} \right) + 2 \cos \frac{\pi z}{\omega'} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{\cos \frac{n \pi}{2 \rho} + \sin \frac{\pi z}{\omega'}} \right] \\ &= \frac{2 \pi i \cos \frac{\pi z}{\omega'}}{k g \omega'} \left[ -\frac{1}{2 \left( 1 + \sin \frac{\pi z}{\omega'} \right)} + \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{\cos \frac{n \pi}{2 \rho} + \sin \frac{\pi z}{\omega'}} \right] \\ &= \frac{\pi i \cos \frac{\pi z}{\omega'}}{k g \omega'} \left[ -\frac{1}{2 \cos^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\pi z}{2 \omega'} \right)} + \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{\cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\pi z}{2 \omega'} + \frac{n \pi}{4 \rho} \right) \cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\pi z}{2 \omega'} - \frac{n \pi}{4 \rho} \right)} \right]. \end{aligned}$$

15. Développement de  $\mu_1(z)$ . — Soit considérée la fonction impaire  $\mu_1\left(\frac{\omega'}{2} + z\right)$ . Ses infinis ont pour expressions générales

$$z = (2m - 1)\omega' + n\omega, \quad z = 2m\omega' + (2n + 1)\frac{\omega}{2}.$$

Si l'on fait  $z = (2m - 1)\omega' + n\omega + z'$ , on trouve

$$\mu_1\left(\frac{\omega'}{2} + z\right) = \mu_1\left(-\frac{\omega'}{2} + z'\right) = \frac{i[1 + \mu(z')]}{\lambda(z')},$$

et pour le résidu

$$\frac{2i}{g} \frac{1}{z - (2m - 1)\omega' - n\omega};$$

en faisant

$$z = 2m\omega' + (2n + 1)\frac{\omega}{2} + z',$$

on a

$$\mu_1\left(\frac{\omega'}{2} + z\right) = \mu_1\left(\frac{\omega'}{2} + \frac{\omega}{2} + z'\right) = \nu\left(\frac{\omega'}{2} + z'\right) - k i \lambda\left(\frac{\omega'}{2} + z'\right) = -i \frac{1 + \mu(z')}{\lambda(z')},$$

et pour le résidu correspondant

$$-\frac{2i}{g} \frac{1}{z - 2m\omega' - (2n + 1)\frac{\omega}{2}}.$$

Prenons un contour formé par les droites que déterminent parallèlement aux côtés du parallélogramme élémentaire  $(\omega, 2\omega')$  les points

$$z = -2m'\omega' - \frac{\omega'}{4}, \quad z = 2m'\omega' + \frac{\omega'}{4}$$

et les points

$$z = -(2n' + 1)\frac{\omega}{2} - \frac{\omega}{4}, \quad z = (2n' + 1)\frac{\omega}{2} + \frac{\omega}{4};$$

les valeurs de  $m$  et de  $n$  seront pour les premiers infinis

$$\begin{aligned} m = 0, \quad 1, \quad 2, \dots, \quad m', & \quad n = 0, \quad 1, \quad 2, \dots, \quad n', \\ -1, \quad -2, \dots, \quad -m' + 1, & \quad -1, \quad -2, \dots, \quad -n', \end{aligned}$$

et pour les seconds

$$\begin{aligned} m = 0, \quad 1, \quad 2, \dots, \quad m', & \quad n = 0, \quad 1, \quad 2, \dots, \quad n', \\ -1, \quad -2, \dots, \quad -m', & \quad -1, \quad -2, \dots, \quad -n' - 1, \end{aligned}$$

de sorte qu'il s'ensuit

$$\begin{aligned} \mu_1\left(\frac{\omega'}{2} + z\right) &= \frac{2i}{g} \lim \sum_{m=-m'+1}^{m=m'} \sum_{n=-n'}^{n=n'} \frac{1}{z - (2m-1)\omega' - n\omega} \\ &\quad - \frac{2i}{g} \lim \sum_{m=-m'}^{m=m'} \sum_{n=-n'-1}^{n=n'} \frac{1}{z - 2m\omega' - (2n+1)\frac{\omega}{2}}. \end{aligned}$$

De là, d'abord,

$$\begin{aligned} \mu_1\left(\frac{\omega'}{2} + z\right) &= \frac{2\pi i}{\omega g} \lim \sum_{m=-m'+1}^{m=m'} \sum_{n=-n'}^{n=n'} \frac{1}{\frac{\pi z}{\omega} - (2m-1)\pi\rho - n\pi} \\ &\quad - \frac{2\pi i}{\omega g} \lim \sum_{m=-m'}^{m=m'} \sum_{n=-n'-1}^{n=n'} \frac{1}{\frac{\pi z}{\omega} - 2m\pi\rho - (2n+1)\frac{\pi}{2}}, \end{aligned}$$

ce qui revient à

$$\begin{aligned} \mu_1\left(\frac{\omega'}{2} + z\right) &= \frac{2\pi i}{\omega' g} \lim_{m \rightarrow -m'+1} \sum_{m=-m'+1}^{m=m'} \cot\left[\frac{\pi z}{\omega} - (2m-1)\pi\rho\right] + \frac{2\pi i}{\omega' g} \lim_{m \rightarrow -m'} \sum_{m=-m'}^{m=m'} \operatorname{tang}\left(\frac{\pi z}{\omega} - 2m\pi\rho\right) \\ &= \frac{2\pi i}{\omega' g} \left[ \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{2 \sin \frac{2\pi z}{\omega}}{\cos(2m-1)2\pi\rho - \cos \frac{2\pi z}{\omega}} + \operatorname{tang} \frac{\pi z}{\omega} + \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{2 \sin \frac{2\pi z}{\omega}}{\cos 4m\pi\rho + \cos \frac{2\pi z}{\omega}} \right] \\ &= \frac{4\pi i \sin \frac{2\pi z}{\omega}}{\omega' g} \left[ \frac{\frac{1}{2}}{1 + \cos \frac{2\pi z}{\omega}} + \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{\cos m 2\pi\rho + (-1)^m \cos \frac{2\pi z}{\omega}} \right]; \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} (z) &= \frac{4\pi i \sin\left(\frac{2\pi z}{\omega} - \pi\rho\right)}{\omega' g} \left\{ \frac{\frac{1}{2}}{1 + \cos\left(\frac{2\pi z}{\omega} - \pi\rho\right)} + \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{1}{\cos m 2\pi\rho + (-1)^m \cos\left(\frac{2\pi z}{\omega} - \pi\rho\right)} \right\} \\ &= \frac{2\pi i \sin\left(\frac{2\pi z}{\omega} - \pi\rho\right)}{\omega' g} \left\{ \frac{1}{2 \cos^2\left(\frac{\pi z}{\omega} - \frac{\pi\rho}{2}\right)} + \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi z}{\omega} - \frac{\pi\rho}{2} - 2m\pi\rho\right) \cos\left(\frac{\pi z}{\omega} - \frac{\pi\rho}{2} + 2m\pi\rho\right)} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{\sin\left[\frac{\pi z}{\omega} - \frac{\pi\rho}{2} - (2m-1)\pi\rho\right] \sin\left[\frac{\pi z}{\omega} - \frac{\pi\rho}{2} + (2m-1)\pi\rho\right]} \right\} \\ &= \frac{2\pi i \sin\left(\frac{2\pi z}{\omega} - \pi\rho\right)}{\omega' g} \left\{ \frac{1}{2 \cos^2\left(\frac{\pi z}{\omega} - \frac{\pi\rho}{2}\right)} + \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{(-1)^m}{\cos\left[\frac{\pi z}{\omega} - \frac{\pi\rho}{2} - m\left(\pi\rho + \frac{\pi}{2}\right)\right] \cos\left[\frac{\pi z}{\omega} - \frac{\pi\rho}{2} + m\left(\pi\rho + \frac{\pi}{2}\right)\right]} \right\} \end{aligned}$$

16. *Autre développement.* — On a également

$$\begin{aligned} \mu_1\left(\frac{\omega'}{2} + z\right) &= \frac{\pi i}{\omega' g} \lim_{m \rightarrow -m'+1} \sum_{m=-m'+1}^{m=m'} \sum_{n=-n'}^{n=n'} \frac{1}{\frac{\pi z}{2\omega'} - 2n \frac{\pi}{4\rho} - (2m-1) \frac{\pi}{2}} \\ &\quad - \frac{\pi i}{\omega' g} \lim_{m \rightarrow -m'} \sum_{m=-m'}^{m=m'} \sum_{n=-n'-1}^{n=n'} \frac{1}{\frac{\pi z}{2\omega'} - (2n+1) \frac{\pi}{4\rho} - m\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{\pi i}{\omega' g} \lim \left\{ \sum_{n=-n'}^{n=n'} \operatorname{tang} \left( \frac{\pi z}{2\omega'} - 2n \frac{\pi}{4\rho} \right) + \sum_{n=-n'-1}^{n=n'} \operatorname{cot} \left[ \frac{\pi z}{2\omega'} - (2n+1) \frac{\pi}{4\rho} \right] \right\} \\
 &= -\frac{\pi i}{\omega' g} \left[ \operatorname{tang} \frac{\pi z}{2\omega'} + 2 \sin \frac{\pi z}{\omega'} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\cos \frac{\pi z}{\omega'} + \cos \frac{n\pi}{\rho}} + 2 \sin \frac{\pi z}{\omega'} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\cos(2n+1) \frac{\pi}{2\rho} - \cos \frac{\pi z}{\omega'}} \right] \\
 &= -\frac{2\pi i \sin \frac{\pi z}{\omega'}}{\omega' g} \left[ -\frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 + \cos \frac{\pi z}{\omega'} + \cos \frac{n\pi}{\rho} + (-1)^n \cos \frac{\pi z}{\omega'}} \right];
 \end{aligned}$$

d'où

$$\mu_1(z) = \frac{2\pi i \cos \frac{\pi z}{\omega'}}{\omega' g} \left[ -\frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 + \sin \frac{\pi z}{\omega'} + \cos \frac{n\pi}{\rho} + (-1)^n \sin \frac{\pi z}{\omega'}} \right].$$

17. Développement de  $\lambda_1(z)$ . — Soit considérée la fonction impaire  $\lambda_1\left(\frac{\omega'}{2} + z\right)$ , dont les infinis sont donnés par

$$\frac{\omega'}{2} + z = (2m+1) \frac{\omega'}{2} + n\omega,$$

de sorte que l'expression générale en est

$$z = m\omega' + n\omega.$$

Si l'on fait  $z = m\omega' + n\omega + z'$ , il vient

$$\lambda_1\left(\frac{\omega'}{2} + z\right) = (-1)^m \lambda_1\left(\frac{\omega'}{2} + z'\right) = (-1)^m \frac{\mu(z') - \nu(z')}{k' \lambda(z')},$$

et pour le résidu

$$\frac{-2i}{k' g} (-1)^m.$$

Soit un contour semblable aux précédents, passant aux points  $z = -n'\omega$ ,  $z = n'\omega$ , et aux points  $z = -m'\omega'$ ,  $z = m'\omega'$ ; nous aurons

$$\lambda_1\left(\frac{\omega'}{2} + z\right) = -\frac{2i}{k' g} \lim \sum_{m=-m'}^{m=m'} (-1)^m \sum_{n=-n'}^{n=n'} \frac{1}{z - m\omega' - n\omega};$$

d'où, d'abord,

$$\begin{aligned} \lambda_1\left(\frac{\omega'}{2} + z\right) &= -\frac{2\pi i}{k'\omega g} \lim_{m=-m'}^{m=m'} \sum_{n=-n'}^{n=n'} (-1)^m \frac{1}{\frac{\pi z}{\omega} - m\pi\rho - n\pi} \\ &= -\frac{2\pi i}{k'\omega g} \lim_{m=-m'}^{m=m'} \sum_{m=-m'}^{m=m'} (-1)^m \cot\left(\frac{\pi z}{\omega} - m\pi\rho\right) \\ &= -\frac{2\pi i}{k'\omega g} \left[ \cot\frac{\pi z}{\omega} + \sum_{m=1}^{m=\infty} (-1)^m \frac{2\sin\frac{2\pi z}{\omega}}{\cos m 2\pi\rho - \cos\frac{2\pi z}{\omega}} \right] \\ &= -\frac{4\pi i \sin\frac{2\pi z}{\omega}}{k'\omega g} \left[ -\frac{\frac{1}{2}}{1 - \cos\frac{2\pi z}{\omega}} + \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{(-1)^m}{\cos m 2\pi\rho - \cos\frac{2\pi z}{\omega}} \right]; \end{aligned}$$

par suite

$$\begin{aligned} &= -\frac{4\pi i \sin\left(\frac{2\pi z}{\omega} - \pi\rho\right)}{k'\omega g} \left[ -\frac{\frac{1}{2}}{1 - \cos\left(\frac{2\pi z}{\omega} - \pi\rho\right)} + \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{(-1)^m}{\cos m 2\pi\rho - \cos\left(\frac{2\pi z}{\omega} - \pi\rho\right)} \right] \\ &= -\frac{2\pi i \sin\left(\frac{2\pi z}{\omega} - \pi\rho\right)}{k'\omega g} \left\{ -\frac{1}{2\sin^2\left(\frac{\pi z}{\omega} - \frac{\pi\rho}{2}\right)} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{(-1)^m}{\sin\left[\frac{\pi z}{\omega} - (2m+1)\frac{\pi\rho}{2}\right] \sin\left[\frac{\pi z}{\omega} + (2m-1)\frac{\pi\rho}{2}\right]} \right\}. \end{aligned}$$

18. *Autre développement.* — On a encore

$$\lambda_1\left(\frac{\omega'}{2} + z\right) = -\frac{2\pi i}{k'\omega'g} \lim_{n=-n'}^{n=n'} \sum_{m=-m'}^{m=m'} (-1)^m \frac{1}{\frac{\pi z}{\omega'} - \frac{n\pi}{\rho} - m\pi},$$

d'où

$$\begin{aligned} \lambda_1\left(\frac{\omega'}{2} + z\right) &= -\frac{2\pi i}{k'\omega'g} \lim_{n=-n'}^{n=n'} \sum \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi z}{\omega'} - \frac{n\pi}{\rho}\right)} \\ &= -\frac{2\pi i}{k'\omega'g} \left( \frac{1}{\sin\frac{\pi z}{\omega'}} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{4\sin\frac{\pi z}{\omega'} \cos\frac{n\pi}{\rho}}{\cos 2\frac{n\pi}{\rho} - \cos\frac{2\pi z}{\omega'}} \right) \\ &= -\frac{8\pi i \sin\frac{\pi z}{\omega'}}{k'\omega'g} \left( -\frac{\frac{1}{2}}{1 - \cos\frac{2\pi z}{\omega'}} + \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\cos\frac{n\pi}{\rho}}{\cos\frac{2n\pi}{\rho} - \cos\frac{2\pi z}{\omega'}} \right), \end{aligned}$$

et de là

$$\begin{aligned} \lambda_1(z) &= \frac{8\pi i \cos\frac{\pi z}{\omega'}}{k'\omega'g} \left( -\frac{\frac{1}{2}}{1 + \cos\frac{2\pi z}{\omega'}} + \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\cos\frac{n\pi}{\rho}}{\cos\frac{2n\pi}{\rho} + \cos\frac{2\pi z}{\omega'}} \right) \\ &= \frac{4\pi i \cos\frac{\pi z}{\omega'}}{h'\omega'g} \left[ -\frac{1}{2\cos^2\frac{\pi z}{\omega'}} + \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\cos\frac{n\pi}{\rho}}{\cos\left(\frac{\pi z}{\omega'} + \frac{n\pi}{\rho}\right) \cos\left(-\frac{\pi z}{\omega'} + \frac{n\pi}{\rho}\right)} \right]. \end{aligned}$$

IV.

*Développement en fonctions circulaires.*

19. Soit considérée la fonction impaire  $\nu_1\left(\frac{\omega'}{2} + z\right)$ . Si l'on prend pour variable  $t = e^{\frac{2\pi zi}{\omega}}$ , il correspondra à une valeur de  $z$  une seule valeur de  $t$ , et à une valeur de  $t$  des valeurs de  $z$  ayant pour expression générale

$$z = z_1 + m\omega;$$

les valeurs correspondantes de  $\nu_1\left(\frac{\omega'}{2} + z\right)$  sont les mêmes. En conséquence,  $\nu_1\left(\frac{\omega'}{2} + z\right)$  est une fonction monodrome de  $t$ .



Cette fonction a des infinis dont l'expression est

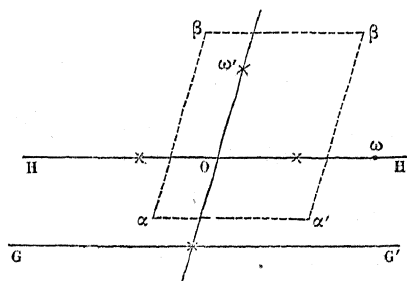
$$z = (2m - 1)\omega' + n \frac{\omega}{2}.$$

Elle sera donc d'un module fini pour tout point situé à l'intérieur de la bande limitée aux droites menées par les points  $z' = (2m - 1)\omega'$ ,  $z'' = (2m + 1)\omega'$  parallèlement au côté  $\omega$  du parallélogramme élémentaire  $(\omega, 2\omega')$ . Pour une valeur de  $t$  correspondante, il y aura ainsi une valeur finie de la fonction et une seule, de sorte que  $\nu_1\left(\frac{\omega'}{2} + z\right)$  est, dans l'étendue que comprennent les deux droites, une fonction monodrome et finie de  $t$ . Elle y est donc développable en une série procédant suivant les puissances croissantes et décroissantes de  $t$ .

Le champ des valeurs correspondantes de  $t$  est d'ailleurs une couronne circulaire, ce qu'il est aisé de voir. Lorsque  $z$  s'accroît de  $\frac{\omega}{2}$ , la fonction  $\nu_1\left(\frac{\omega'}{2} + z\right)$  change de signe,  $t$  le fait aussi : d'après quoi la fonction change de signe en même temps que  $t$ , sans que  $z$  sorte d'une même bande, sans que le développement change de forme; elle est donc une fonction impaire de  $t$ .

Prenons, au lieu d'une bande quelconque, celle qui répond à  $m = 0$ ,

Fig. 1.



limitée aux droites  $GG'$ ,  $HH'$  (*fig. 1*) qui passent par les points  $z = -\omega'$ ,  $z = \omega'$ . La valeur de  $z$  y sera susceptible de changer de signe. Or,  $t$  se changeant par là en  $\frac{1}{t}$  ou  $e^{\frac{2\pi zi}{\omega}}$  en  $e^{-\frac{2\pi zi}{\omega}}$ , et  $\nu_1\left(\frac{\omega'}{2} + z\right)$  changeant de signe aussi, il s'ensuit que dans le développement les coefficients des

puissances ascendantes sont respectivement égaux et de signes contraires à ceux des puissances descendantes, c'est-à-dire qu'on a, pour la bande dont il s'agit,

$$\nu_1\left(\frac{\omega'}{2} + z\right) = \sum_{p=0}^{p=\infty} A_p \left[ e^{(2p+1)\frac{2\pi zi}{\omega}} - e^{-(2p+1)\frac{2\pi zi}{\omega}} \right].$$

Si l'on multiplie par  $e^{(2p+1)\frac{2\pi z}{\omega}}$  tous les termes de cette égalité, puis par  $dz$  et qu'on intègre de  $z = \alpha$ , en ligne droite par exemple, jusqu'à  $z = \alpha + \omega$ , le point  $z = \alpha$  étant dans la bande que nous considérons, il ne reste au second membre que

$$- \int_{\alpha}^{\alpha+\omega} A_p dz = - A_p \omega.$$

On a donc

$$A_p = - \frac{1}{\omega} \int_{\alpha}^{\alpha+\omega} \nu_1\left(\frac{\omega'}{2} + z\right) e^{(2p+1)\frac{2\pi zi}{\omega}} dz.$$

Pour l'intégration, nous pouvons remplacer le segment  $\alpha\alpha'$  de longueur  $\omega$  par un parallélogramme où ce segment soit un côté, l'opposé  $\beta\beta'$  passe au point  $z = 2p'\omega'$ , et où les deux autres soient parallèles à  $\omega'$ , pourvu que  $\beta\beta'$  soit supposé infiniment loin, du côté de  $\omega'$ , si le module de  $q = e^{2\pi\rho i}$  est  $< 1$ , ou  $\rho'' > 0$  dans  $\rho = \rho' + \rho''i$ , et du côté de  $-\omega'$  dans le cas contraire. Les valeurs de  $\nu_1\left(\frac{\omega'}{2} + z\right)$  étant les mêmes quand  $z$  s'accroît de  $\omega$ , les éléments de l'intégrale se détruiront sur les côtés  $\alpha'\beta'$ ,  $\beta\alpha$ ; de plus, si l'on pose  $z = 2p'\omega' + z'$ , on a

$$e^{(2p+1)\frac{2\pi zi}{\omega}} = e^{(2p+1)2\pi 2p'\rho i} e^{(2p+1)\frac{2\pi z' i}{\omega}} = q^{(2p+1)2p'} e^{(2p+1)\frac{2\pi z' i}{\omega}},$$

de sorte que le module de  $q^{(2p+1)2p'}$ ,  $p$  étant  $> 0$ , tend vers zéro, quand  $p'$  va vers  $+\infty$ , si le module de  $q$  est  $< 1$ , et quand  $p'$  tend vers  $-\infty$ , si le module de  $q$  est  $> 1$ . L'intégrale suivant  $\alpha\alpha'$  est donc la limite de celle qu'on obtient en parcourant le contour du parallélogramme. Cette dernière peut s'obtenir au moyen des infinis de  $\nu_1\left(\frac{\omega'}{2} + z\right)$  qui sont

renfermées dans le contour. Ces infinis sont sur deux lignes. Supposons le module de  $q < 1$  : nous pouvons supposer  $\alpha$  tel que les infinis soient donnés, les uns par  $z = (2m - 1)\omega'$ ,  $m$  recevant les valeurs 0, 1, 2, 3, ..., les autres donnés par  $z = (2m - 1)\omega' + \frac{\omega}{2}$  pour les mêmes valeurs de  $m$ . Dans le passage des premiers aux seconds, les valeurs de  $\nu_1\left(\frac{\omega'}{2} + z\right)$  changent de signe, ainsi que celles du facteur  $e^{\frac{2\pi zi}{\omega}(2p+1)}$ ; les résidus sont les mêmes.

En posant  $z = (2m - 1)\omega' + z'$ , on trouve

$$\begin{aligned} \nu_1\left(\frac{\omega'}{2} + z\right) e^{(2p+1)\frac{2\pi zi}{\omega}} dz &= \nu_1\left(-\frac{\omega'}{2} + z'\right) e^{(2p+1)2\pi i\left[(2m-1)\omega' + \frac{z'}{\omega}\right]} \\ &= \frac{1 + \nu z'}{k} i \frac{dz'}{z'} e^{(2p+1)2\pi i\left[(2m-1)\omega' + \frac{z'}{\omega}\right]}, \end{aligned}$$

et pour le résidu

$$\frac{2i}{kg} e^{(2p+1)(2m-1)2\pi i} = \frac{2i}{kg} q^{(2p+1)(2m-1)},$$

ou pour l'intégrale autour du point

$$-\frac{4\pi}{kg} q^{(2p+1)(2m-1)},$$

et de là

$$A_p = \frac{8\pi}{k\omega g} \sum_{m=1}^{m=\infty} q^{(2p+1)(2m-1)} = \frac{8\pi}{k\omega g} \frac{q^{2p+1}}{1 - q^{2(2p+1)}},$$

puis

$$\nu_1\left(\frac{\omega'}{2} + z\right) = \frac{8\pi}{k\omega g} \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{q^{2p+1}}{1 - q^{2(2p+1)}} \left[ e^{(2p+1)\frac{2\pi zi}{\omega}} - e^{-(2p+1)\frac{2\pi zi}{\omega}} \right],$$

tant que le point  $z$  est entre  $GG'$  et  $HH'$ , le module de  $q$  étant  $< 1$ .

Si l'on remplace  $z + \frac{\omega'}{2}$  par  $z$ , il vient, pour les valeurs de  $z$  com-

prises entre les droites de direction  $\omega$  menées aux points  $z = -\frac{\omega'}{2}$ ,  
 $z = \frac{3\omega'}{2}$ ,

$$\nu_1(z) = \frac{8\pi}{k\omega g} \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{q^{2p+1}}{1-q^{2(2p+1)}} \left[ e^{(2p+1)\left(\frac{2\pi z}{\omega} - \pi\rho\right)} - e^{-(2p+1)\left(\frac{2\pi z}{\omega} - \pi\rho\right)} \right],$$

ou sous une autre forme

$$\nu_1(z) = \frac{16\pi i}{k\omega g} \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{q^{2p+1}}{1-q^{2(2p+1)}} \sin(2p+1) \left( \frac{2\pi z}{\omega} - \pi\rho \right).$$

Pour la bande comprise entre les droites qui déterminent les points  $z = (4m-1)\frac{\omega'}{2}$ ,  $z = (4m+3)\frac{\omega'}{2}$ ,  $z$  doit se remplacer, dans cette formule, par  $z - 2m\omega'$ , ce qui donne

$$\nu_1(z) = \frac{16\pi i}{k\omega g} \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{q^{2p+1}}{1-q^{2(2p+1)}} \sin(2p+1) \left[ \frac{2\pi z}{\omega} - (4m+1)\pi\rho \right].$$

*Remarque.* — Pour une bande s'étendant de  $z = -\frac{\omega'}{2}$  à  $z = \frac{\omega'}{2}$ , on aura

$$\begin{aligned} \nu_1(z) \pm \nu_1(-z) &= \frac{16\pi i}{k\omega g} \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{q^{2p+1}}{1-q^{2(2p+1)}} \left[ \sin(2p+1) \left( \frac{2\pi z}{\omega} - \pi\rho \right) \right. \\ &\quad \left. \mp \sin(2p+1) \left( \frac{2\pi z}{\omega} + \pi\rho \right) \right]; \end{aligned}$$

d'où

$$\mu(z) = -\frac{16\pi i}{k\omega g} \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{q^{2p+1}}{1-q^{2(2p+1)}} \sin(2p+1) \pi\rho \cos(2p+1) \frac{2\pi z}{\omega},$$

puis

$$\lambda(z) = \frac{16\pi}{k\omega g} \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{q^{2p+1}}{1-q^{2(2p+1)}} \cos(2p+1) \pi\rho \sin(2p+1) \frac{2\pi z}{\omega}.$$

20. Développement de  $\mu_1 z$ . — Considérons la fonction impaire  $\mu_1 \left( \frac{\omega'}{2} + z \right)$ , qui a pour infinis

$$z = (2m - 1)\omega' + n\omega, \quad z = 2m\omega' + (2n + 1)\frac{\omega}{2},$$

de sorte qu'elle ne présente aucun infini dans la bande limitée aux droites de direction  $\omega$  menées par les points  $z = (2m - 1)\omega'$ ,  $z = 2m\omega'$ .

Soit d'abord  $m = 0$ ; la bande correspondante GG'HH' s'étend de  $z = -\omega'$  à  $z = 0$ .

On aura

$$\mu_1 \left( \frac{\omega'}{2} + z \right) = \sum_{p=-\infty}^{p=\infty} A_p e^{p \frac{2\pi z i}{\omega}}$$

ou

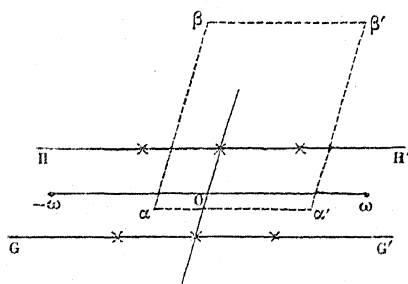
$$\mu_1 \left( \frac{\omega'}{2} + z \right) = A_0 + \sum_{p=1}^{p=\infty} A_p e^{p \frac{2\pi z i}{\omega}} + \sum_{p=-1}^{p=-\infty} A_p e^{p \frac{2\pi z i}{\omega}};$$

d'où

$$\int_{\alpha}^{\alpha + \omega} \mu_1 \left( \frac{\omega'}{2} + z \right) e^{-p \frac{2\pi z i}{\omega}} dz = \omega A_p \quad \text{et} \quad \int_{\alpha}^{\omega + \alpha} \mu_1 \left( \frac{\omega'}{2} + z \right) dz = \omega A_0,$$

le point  $\alpha$  se prenant à volonté à l'intérieur de la bande GG'HH' (fig. 2).

Fig. 2.



Supposons en premier lieu  $p < 0$ . Soit encore le module de  $q < 1$ . L'intégration suivant  $\alpha\alpha'$  pourra se remplacer par une intégration sur

le contour d'un parallélogramme ayant pour côtés  $\alpha\alpha'$ , deux parallèles à  $O\omega'$  et une droite  $\beta\beta'$  se prenant du côté de  $\omega'$  indéfiniment loin. Les infinis compris dans ce contour pourront répondre à  $m = 1, 2, 3, \dots$ , pour  $z = (2m - 1)\omega'$  et à  $m = 0, 1, 2, \dots$ , pour  $z = 2m\omega' + \frac{\omega}{2}$ . Évaluons les intégrales qui s'y rapportent. Si l'on pose

$$z = (2m - 1)\omega' + z',$$

il vient

$$\begin{aligned} \mu_1 \left( \frac{\omega'}{2} + z \right) e^{-p \frac{2\pi z i}{\omega}} dz &= \mu_1 \left( -\frac{\omega'}{2} + z' \right) e^{-p(2m-1)2\pi q i - p \frac{2\pi z' i}{\omega}} dz' \\ &= \mu_1 \left( -\frac{\omega'}{2} + z \right) q^{-p(2m-1)} e^{-p \frac{2\pi z' i}{\omega}} dz' \\ &= \frac{1 + \mu(z')}{\lambda(z')} i q^{-p(2m-1)} e^{-p \frac{2\pi z' i}{\omega}} dz'; \end{aligned}$$

d'où, pour l'intégrale partielle,

$$-\frac{4\pi}{g} q^{-p(2m-1)},$$

et pour la somme des intégrales

$$\sum_{m=1}^{\infty} -\frac{4\pi}{g} q^{-p(2m-1)} = -\frac{4\pi}{g} \frac{q^{-p}}{1 - q^{-2p}}.$$

En prenant  $z = 2m\omega' + \frac{\omega}{2} + z'$ , on a

$$\begin{aligned} \mu_1 \left( \frac{\omega'}{2} + z \right) e^{-p \frac{2\pi z i}{\omega}} dz &= \mu_1 \left( \frac{\omega'}{2} + z' + \frac{\omega}{2} \right) e^{-p2\pi i 2m q - p\pi i - p \frac{2\pi z' i}{\omega}} dz' \\ &= (-1)^p \frac{-1 - \mu(z')}{\lambda(z')} i e^{-p2\pi i 2m q} e^{-p \frac{2\pi z' i}{\omega}} dz' \\ &= (-1)^p \frac{-1 - \mu(z')}{\lambda(z')} i q^{-2pm} e^{-p \frac{2\pi z' i}{\omega}} dz'; \end{aligned}$$

d'où, pour l'intégrale,

$$\frac{(-1)^p q^{-2mp}}{g} 4\pi,$$

et pour la somme

$$(-1)^p \frac{4\pi}{g} \sum_{m=0}^{m=\infty} q^{-2mp} = (-1)^p \frac{4\pi}{g} \frac{1}{1-q^{-2p}}.$$

Par suite

$$A_p = \frac{4\pi}{\omega g} \frac{(-1)^p - q^{-p}}{1 - q^{-2p}};$$

c'est, au cas de  $p$  impair,

$$A_p = -\frac{4\pi}{\omega g} \frac{1}{1 - q^{-p}},$$

et au cas de  $p$  pair,

$$A_p = \frac{4\pi}{\omega g} \frac{1}{1 + q^{-p}},$$

ou, dans tous les cas,

$$A_p = \frac{4\pi}{\omega g} \frac{(-1)^{-p}}{1 + (-q)^{-p}}.$$

Soit, en second lieu,  $p > 0$ , le module de  $q < 1$ . Alors  $\beta\beta'$  est à prendre du côté de  $-\omega'$ , de sorte que pour  $z = (2m-1)\omega'$  les valeurs de  $m$  sont  $0, -1, -2, \dots$  et pour  $z = 2m\omega'$  elles sont  $m = -1, -2, \dots$ . Mais les intégrations autour des infinis s'opèrent là en sens contraire de celles qui concernent les circonstances précédentes, il y a un changement de signe à faire; les résultats sont donc, d'une part,

$$\sum_{m=0}^{m=-\infty} \frac{4\pi}{g} q^{-p(2m-1)} = \frac{4\pi}{g} \frac{q^p}{1 - q^{2p}},$$

de l'autre

$$\sum_{m=-1}^{m=-\infty} -\frac{4\pi}{g} (-1)^p q^{-2mp} = -\frac{4\pi}{g} (-1)^p \frac{q^{2p}}{1 - q^{2p}};$$

d'où

$$A_p = \frac{4\pi}{\omega g} \frac{q^p - (-1)^p q^{2p}}{1 - q^{2p}} = \frac{4\pi}{\omega g} q^p \frac{1 - (-q)^p}{1 - (-q)^{2p}} = \frac{4\pi}{\omega g} q^p \frac{1}{1 + (-q)^p}.$$

De là

$$\begin{aligned} \mu_1\left(\frac{\omega'}{2} + z\right) &= A_0 + \frac{4\pi}{\omega g} \left[ \sum_{p=-1}^{p=\infty} \frac{q^p}{(1+(-q)^p)} e^{p \frac{2\pi z i}{\omega}} + \sum_{p=-1}^{p=\infty} \frac{(-1)^{-p}}{1+(-q)^{-p}} e^{p \frac{2\pi z i}{\omega}} \right] \\ &= A_0 + \frac{4\pi}{\omega g} \sum_{p=-1}^{p=\infty} \frac{q^p e^{p \frac{2\pi z i}{\omega}} + (-1)^p e^{-p \frac{2\pi z i}{\omega}}}{1+(-q)^p} \\ &= A_0 + \frac{4\pi}{\omega g} \sum_{p=-1}^{p=\infty} \left[ \frac{q^p + (-1)^p}{1+(-q)^p} \cos p \frac{2\pi z}{\omega} + i \frac{q^p - (-1)^p}{1+(-q)^p} \sin p \frac{2\pi z}{\omega} \right] \\ &= A_0 + \frac{4\pi}{\omega g} \sum_{p=-1}^{p=\infty} (-1)^p \left[ \cos p \frac{2\pi z}{\omega} - i \frac{1 - (-q)^p}{1+(-q)^p} \sin p \frac{2\pi z}{\omega} \right]. \end{aligned}$$

Il nous reste à trouver la valeur de

$$\omega A_0 = \int_z^{\alpha+\omega} \mu_1\left(\frac{\omega'}{2} + z\right) dz.$$

Considérons pour cela un parallélogramme ayant  $\alpha\alpha'$  pour côté et l'origine O pour centre. Comme la fonction  $\mu_1\left(\frac{\omega'}{2} + z\right) = i \frac{1 - \mu(z)}{\lambda(z)}$  est impaire, ses valeurs seront égales et de signes contraires aux points symétriques l'un de l'autre sur les côtés  $\alpha\alpha'$ ,  $\alpha_1\alpha'_1$  opposés; par suite l'intégrale le long du contour sera

$$2 \int_z^{\alpha+\omega} \mu_1\left(\frac{\omega'}{2} + z\right) dz.$$

Le parallélogramme ne contient qu'un infini, par exemple  $\frac{\omega}{2}$ . Or, en posant  $z = \frac{\omega}{2} + z'$ , on a

$$\int_{-\frac{\omega}{2}}^{\frac{\omega}{2}} \mu_1\left(\frac{\omega'}{2} + \frac{\omega}{2} + z'\right) dz' = -i \int \frac{1 + \mu(z')}{\lambda(z')} dz' = -\frac{2i}{g} 2\pi i = \frac{4\pi}{g}.$$



Donc

$$\int_z^{z+\omega} \mu_1 \left( \frac{\omega'}{2} + z \right) dz = \frac{2\pi}{g},$$

$$A_0 = \frac{2\pi}{\omega g},$$

$$\mu_1 \left( \frac{\omega'}{2} + z \right) = \frac{2\pi}{\omega g} \left\{ 1 + 2 \sum_{p=1}^{p=\infty} (-1)^p \left[ \cos p \frac{2\pi z}{\omega} - i \frac{1 - (-q)^p}{1 + (-q)^p} \sin p \frac{2\pi z}{\omega} \right] \right\},$$

et de là

$$\mu_1(z) = \frac{2\pi}{\omega g} \left\{ 1 + 2 \sum_{p=1}^{p=\infty} (-1)^p \left[ \cos p \left( \frac{2\pi z}{\omega} - \pi\rho \right) - i \frac{1 - (-q)^p}{1 + (-q)^p} \sin p \frac{2\pi z}{\omega} - \pi\rho \right] \right\},$$

pour la bande qui s'étend entre le point  $z = -\frac{\omega'}{2}$  et le point  $z = \frac{\omega'}{2}$ ,  
puis

$$\mu_1(z) = \frac{2\pi i}{\omega g} \left\{ 1 + 2 \sum_{p=1}^{p=\infty} (-1)^p \left( \cos p \left[ \frac{2\pi z}{\omega} - (4m+1)\pi\rho \right] - i \frac{1 - (-q)^p}{1 + (-q)^p} \sin p \left[ \frac{2\pi z}{\omega} - (4m+1)\pi\rho \right] \right) \right\}$$

quand la bande va du point  $z = (4m-1)\frac{\omega'}{2}$  au point  $(4m+1)\frac{\omega'}{2}$ .

21. *Développement de  $\lambda_1(z)$ .* — Soit la fonction  $\lambda_1(z) = \frac{\nu(z) + k\mu(z)}{h'}$ ;

elle est paire et a pour infinis  $z = (2m+1)\frac{\omega'}{2} + n\omega$ , de sorte qu'elle est de valeur finie pour tous les points situés à l'intérieur de la bande qui est limitée aux droites de direction  $\omega$  menées par les points  $z = (2m-1)\frac{\omega'}{2}$ ,  $z = (2m+1)\frac{\omega'}{2}$ .

Considérons d'abord la bande pour laquelle  $m = 0$ , allant du point  $z = -\frac{\omega'}{2}$  au point  $z = \frac{\omega'}{2}$ . On y aura

$$\lambda_1(z) = \sum_{p=1}^{p=\infty} A_p \left( e^{p \frac{2\pi z i}{\omega}} + e^{-p \frac{2\pi z i}{\omega}} \right) + A_0;$$

d'où

$$\int_{\alpha}^{\alpha+\omega} \lambda_1(z) dz = A_0 \omega \quad \text{et} \quad \int_{\alpha}^{\alpha+\omega} \lambda_1(z) e^{p \frac{z\pi i}{\omega}} dz = \omega A_p, \quad p \leq 0.$$

La dernière intégrale peut s'évaluer par les infinis que donne  $z = (2m + 1) \frac{\omega'}{2}$ ,  $m$  allant de zéro à l'infini, si le module de  $q$  est  $< 1$ .

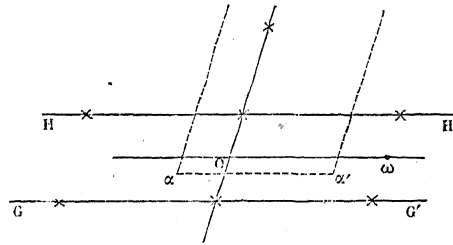
On trouve ainsi

$$\omega A_p = \frac{4\pi}{k'g} q^{\frac{p}{2}} \sum_{m=0}^{m=\infty} (-1)^m q^{pm} = \frac{4\pi}{k'g} q^{\frac{p}{2}} \frac{1}{1+q^p},$$

$$A_p = \frac{4\pi}{k'\omega g} \frac{q^{\frac{p}{2}}}{1+q^p}, \quad p \geq 0.$$

D'autre part, si l'on considère le parallélogramme  $\alpha\alpha'\alpha_1\alpha'_1$ , où le

Fig. 3.



côté  $\alpha'\alpha_1$ , de longueur  $\omega'$  est parallèle à  $O\omega'$ , la fonction  $\lambda_1(z)$  changeant de signe, quand  $z$  varie de  $\omega'$ , l'intégrale suivant le contour de ce parallélogramme sera  $2 \int_{\alpha}^{\alpha+\omega} \lambda_1(z) dz$ . Comme il ne s'y trouve qu'un infini,  $z = \frac{\omega'}{2}$ , et que par  $z = \frac{\omega'}{2} + z'$  on a

$$\lambda_1(z) dz = -i \frac{\mu(z') + \nu(z')}{h' \lambda(z')} dz',$$

il s'ensuit

$$2 \int_{\alpha}^{\alpha+\omega} \lambda_1(z) dz = \frac{4\pi}{k'g}.$$

Donc il vient

$$A_0 = \frac{2\pi}{k'\omega g},$$

et ainsi

$$\lambda_1(z) = \frac{2\pi}{k'\omega g} \left( 1 + 4 \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{q^{2p}}{1+q^{2p}} \cos p \frac{2\pi z}{\omega} \right).$$

Par le changement de  $z$  en  $z + \frac{\omega}{2}$ , on a dans la même bande

$$\frac{1}{\lambda_1(z)} = \frac{2\pi}{k'\omega g} \left[ 1 + 4 \sum_{p=1}^{p=\infty} (-1)^p \frac{q^{2p}}{1+q^{2p}} \cos p \frac{2\pi z}{\omega} \right];$$

d'où

$$\nu(z) = \frac{2\pi}{\omega g} \left[ 1 + 4 \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{q^{2p}}{1+q^{2p}} \cos 2p \frac{2\pi z}{\omega} \right],$$

$$\mu(z) = \frac{8\pi q^{\frac{1}{2}}}{k'\omega g} \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{q^{2p}}{1+q^{2p+1}} \cos(2p+1) \frac{2\pi z}{\omega},$$

formules connues (Traité de MM. Briot et Bouquet, nos 156, 157).

Pour la bande comprise entre les points  $z = (2m-1)\frac{\omega'}{2}$ ,  $(2m+1)\frac{\omega'}{2}$ , l'expression de  $\lambda_1(z)$  sera

$$\lambda_1(z) = \frac{2\pi}{k'\omega g} \left[ 1 + 4 \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{q^{2p}}{1+q^{2p}} \cos p \left( \frac{2\pi z}{\omega} - m \frac{2\pi \rho}{\omega} \right) \right].$$

#### DÉVELOPPEMENTS DES FONCTIONS $\varpi_1(z)$ , $\varpi_2(z)$ , $\varpi_3(z)$ .

##### V.

##### *Développements en produits de facteurs.*

22. Nous avons trouvé, en supposant positif le coefficient de  $i$  dans l'expression de  $\rho$ ,

$$\nu_1(z) = e^{\frac{2\pi z i}{\omega}} \prod_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin \left[ (4n-3) \pi \rho - \frac{2\pi z}{\omega} \right] \sin \left[ (4n-1) \pi \rho + \frac{2\pi z}{\omega} \right]}{\sin \left[ (4n-3) \pi \rho + \frac{2\pi z}{\omega} \right] \sin \left[ (4n-1) \pi \rho - \frac{2\pi z}{\omega} \right]};$$

nous avons obtenu, d'autre part,

$$\mu_1(z) = \frac{\text{tang} \left( \frac{\pi\rho}{2} - \frac{\pi z}{\omega} \right) \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\text{tang} \left[ (4n-1) \frac{\pi\rho}{2} + \frac{\pi z}{\omega} \right] \text{tang} \left[ (4n+1) \frac{\pi\rho}{2} - \frac{\pi z}{\omega} \right]}{\text{tang} \left( \frac{\pi\rho}{2} + \frac{\pi z}{\omega} \right) \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\text{tang} \left[ (4n-1) \frac{\pi\rho}{2} - \frac{\pi z}{\omega} \right] \text{tang} \left[ (4n+1) \frac{\pi\rho}{2} + \frac{\pi z}{\omega} \right]}$$

On en déduit

$$\varpi_1(z) = e^{\frac{2\pi zi}{\omega}} \frac{\cos^2 \left( \frac{\pi\rho}{2} - \frac{\pi z}{\omega} \right) \cos^2 \left( 3 \frac{\pi\rho}{2} + \frac{\pi z}{\omega} \right) \cos^2 \left( 5 \frac{\pi\rho}{2} - \frac{\pi z}{\omega} \right) \dots \lim \frac{\sin \left[ (4n-1) \pi\rho + \frac{2\pi z}{\omega} \right]}{\sin \left[ (4n-1) \pi\rho - \frac{2\pi z}{\omega} \right]}$$

d'où

$$\begin{aligned} \varpi_1(z) &= e^{-\frac{2\pi zi}{\omega}} \frac{\cos^2 \left( \frac{\pi\rho}{2} - \frac{\pi z}{\omega} \right) \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 \left[ (4n-1) \frac{\pi\rho}{2} + \frac{\pi z}{\omega} \right] \cos^2 \left[ (4n+1) \frac{\pi\rho}{2} - \frac{\pi z}{\omega} \right]}{\cos^2 \left( \frac{\pi\rho}{2} + \frac{\pi z}{\omega} \right) \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 \left[ (4n-1) \frac{\pi\rho}{2} - \frac{\pi z}{\omega} \right] \cos^2 \left[ (4n+1) \frac{\pi\rho}{2} + \frac{\pi z}{\omega} \right]} \\ &= e^{-\frac{2\pi zi}{\omega}} \frac{\cos^2 \left( \frac{\pi\rho}{2} - \frac{\pi z}{\omega} \right) \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{\sin \pi\rho \sin \frac{2\pi z}{\omega}}{\cos \left[ (4n-1) \frac{\pi\rho}{2} - \frac{\pi z}{\omega} \right] \cos \left[ (4n+1) \frac{\pi\rho}{2} + \frac{\pi z}{\omega} \right]} \right)^2}{\cos^2 \left( \frac{\pi\rho}{2} + \frac{\pi z}{\omega} \right) \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{2 \sin \pi\rho \sin \frac{2\pi z}{\omega}}{\cos \left( \frac{2\pi z}{\omega} + \pi\rho \right) + \cos 4n\pi\rho} \right)^2} \end{aligned}$$

Au moyen de l'expression de  $\lambda_1(z)$ ,

$$\lambda_1(z) = \frac{1+k}{k'} \prod_{n=0}^{\infty} \frac{\cot \left[ (2n+1) \frac{\pi\rho}{2} - \frac{\pi z}{\omega} \right] \cot \left[ (2n+1) \frac{\pi\rho}{2} + \frac{\pi z}{\omega} \right]}{\cot^2 (2n+1) \frac{\pi\rho}{2}}$$

on obtient ensuite

$$\begin{aligned} \omega_2(z) &= \frac{k'}{1+k} \prod_{n=0}^{n=\infty} \frac{\operatorname{tang}^2 \left[ (4n-1) \frac{\pi\rho}{2} + \frac{\pi z}{\omega} \right]}{\operatorname{tang}^2 (4n-1) \frac{\pi\rho}{2}} \prod_{n=1}^{n=\infty} \frac{\operatorname{tang}^2 \left[ (4n+1) \frac{\pi\rho}{2} - \frac{\pi z}{\omega} \right]}{\operatorname{tang}^2 (4n+1) \frac{\pi\rho}{2}} \\ &= \frac{k'}{1+k} \prod_{n=0}^{n=\infty} \left\{ 1 + \frac{\sin \frac{\pi z}{\omega}}{\cos \left[ (4n-1) \frac{\pi\rho}{2} + \frac{\pi z}{\omega} \right] \sin \left[ (4n-1) \frac{\pi\rho}{2} \right]} \right\}^2 \\ &\quad \times \prod_{n=1}^{n=\infty} \left\{ 1 - \frac{\sin \frac{\pi z}{\omega}}{\cos \left[ (4n+1) \frac{\pi\rho}{2} - \frac{\pi z}{\omega} \right] \sin \left[ (4n+1) \frac{\pi\rho}{2} \right]} \right\}^2 \\ &= \frac{k'}{1+k} \prod_{n=0}^{n=\infty} \left\{ 1 + \frac{2 \sin \frac{\pi z}{\omega}}{\sin \left[ (4n-1) \pi\rho + \frac{\pi z}{\omega} \right] - \sin \frac{\pi z}{\omega}} \right\}^2 \\ &\quad \times \prod_{n=0}^{n=\infty} \left\{ 1 - \frac{2 \sin \frac{\pi z}{\omega}}{\sin \left[ (4n+1) \pi\rho - \frac{\pi z}{\omega} \right] + \sin \frac{\pi z}{\omega}} \right\}^2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \omega_3(z) &= \frac{1+k}{k'} e^{\frac{2\pi z i}{\omega}} \frac{\cos^2 \left( \frac{\pi\rho}{2} + \frac{\pi z}{\omega} \right) \operatorname{tang}^2 \frac{\pi\rho}{2}}{\sin^2 \left( \frac{\pi\rho}{2} - \frac{\pi z}{\omega} \right)} \\ &\quad \times \prod_{n=1}^{n=\infty} \left\{ \frac{\sin \left[ (4n-1) \pi\rho - \frac{\pi z}{\omega} \right] + \sin \frac{\pi z}{\omega}}{\sin \left[ (4n-1) \pi\rho + \frac{\pi z}{\omega} \right] + \sin \frac{\pi z}{\omega}} \frac{\sin \left[ (4n+1) \pi\rho + \frac{\pi z}{\omega} \right] - \sin \frac{\pi z}{\omega}}{\sin \left[ (4n+1) \pi\rho - \frac{\pi z}{\omega} \right] - \sin \frac{\pi z}{\omega}} \right\}^2, \end{aligned}$$

en s'appuyant sur ce que

$$\omega_3(z) = \frac{1}{\omega_1(z) \omega_2(z)}.$$

23. *Autres développements.* — On trouve d'une manière semblable

$$\varpi_1(z) = \prod_{n=1}^{n=\infty} \left[ 1 - \frac{2 \sin \frac{\pi z}{\omega'}}{\sin \frac{\pi z}{\omega'} + \cos \frac{(2n-1)\pi}{2\rho}} \right]^2,$$

$$\varpi_2(z) = \frac{2k'}{1+k} \sin^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\pi z}{2\omega'} \right) \frac{\prod_{n=1}^{n=\infty} \left( 1 - \frac{\sin \frac{\pi z}{\omega'}}{\cos \frac{2n\pi}{2\rho}} \right)^2}{\prod_{n=1}^{n=\infty} \left[ 1 - \frac{\sin \frac{\pi z}{\omega'}}{\cos \frac{(2n-1)\pi}{2\rho}} \right]^2}$$

et

$$\varpi_3(z) = \frac{1+k}{2k'} \frac{1}{\sin^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\pi z}{2\omega'} \right)} \prod_{n=1}^{n=\infty} \frac{\left[ 1 + \frac{\sin \frac{\pi z}{\omega'}}{\cos \frac{(2n-1)\pi}{2\rho}} \right]^2}{\left( 1 - \frac{\sin \frac{\pi z}{\omega'}}{\cos \frac{2n\pi}{2\rho}} \right)^2}.$$

VI.

*Développements en sommes de fractions.*

24. Soit considérée la fonction

$$f(z) = \varpi_1 \left( z + \frac{\omega'}{2} \right) = igk' \frac{\varpi_1 \left( z + \frac{\omega'}{2} \right)}{\lambda_1 \left( z + \frac{\omega'}{2} \right)} = -g \frac{k'^2}{k} \frac{[1 - \nu(z)] \lambda(z)}{[1 - \mu(z)] [\mu(z) + \nu(z)]}.$$

C'est une fonction impaire qui n'a que des infinis triples donnés par

$$z = (2p + 1) \frac{\omega}{2} + (2q + 1) \omega'.$$

Elle est d'une valeur finie sur tout le contour du parallélogramme qui s'étend de

$$z = -p'\omega \text{ à } z = p'\omega \text{ et de } z = -q'2\omega' \text{ à } z = q'2\omega'.$$

Les infinis compris dans le parallélogramme répondront à

$$p = -p', -p'+1, \dots, p'-1 \text{ et à } q = -q', -q'+1, \dots, q'-1.$$

La formule de Cauchy appliquée à la fonction est ainsi

$$f(t) = \omega' \left( t + \frac{\omega'}{2} \right) = \mathcal{E} \frac{\omega' \left( z + \frac{\omega'}{2} \right)}{t - z} = -g \frac{k'^2}{k} \mathcal{E} \frac{[1 - \nu(z)] \lambda(z)}{[1 - \mu(z)] [\mu(z) + \nu(z)] (t - z)}.$$

Posons  $z = (2p+1)\frac{\omega}{2} + (2q+1)\omega' + z'$ ; il viendra

$$f(t) = g \frac{k'^2}{k} \mathcal{E} \frac{[1 + \nu(z')] \lambda(z')}{[1 - \mu(z')] [\mu(z') - \nu(z')] \left[ t - (2p+1)\frac{\omega}{2} - (2q+1)\omega' - z' \right]}.$$

Comme on a

$$\lambda(z') = g z' \left[ 1 - \frac{z'^2}{1.2.3} g^2 (1 + k^2) \dots \right],$$

$$1 + \nu(z') = 2 - \frac{1}{2} g^2 k^2 z'^2 + \frac{k^2 g^4}{2.3} \left( 1 + \frac{k^2}{4} \right) z'^4 + \dots,$$

$$[1 - \mu(z')]^{-1} = \frac{2}{g^2 z'^2} \left[ 1 + \frac{g^2}{3} \left( \frac{1}{4} + k^2 \right) z'^2 + \dots \right],$$

$$[\mu(z') - \nu(z')]^{-1} = -\frac{2}{k'^2 g^2 z'^2} \left[ 1 + \frac{g^2 (1 + k^2)}{12} z'^2 + \dots \right],$$

et

$$\begin{aligned} & \left[ t - (2p+1)\frac{\omega}{2} - (2q+1)\omega' - z' \right]^{-1} \\ &= \frac{1}{t - (2p+1)\frac{\omega}{2} - (2q+1)\omega'} \left[ 1 + \frac{z'}{t - (2p+1)\frac{\omega}{2} - (2q+1)\omega'} + \frac{z'^2}{(t - \dots)^2} \right], \end{aligned}$$

il s'ensuit

$$\begin{aligned}
 f(t) &= -\frac{4}{hg^2} \mathcal{E} \frac{1}{z'} \left[ -\frac{g^2(1+k^2)}{2.3} z - \frac{1}{2} g^2 k^2 + \frac{g^2}{3} \left( \frac{1}{4} + k^2 \right) z + \frac{g^2(1+k^2)}{12} z + \frac{2}{(t-\dots)^2} \right] \frac{1}{t-\dots} \\
 &= -\frac{4}{hg^2} \sum \frac{2}{\left[ t - (2p+1)\frac{\omega}{2} - (2q+1)\omega' \right]^3} \\
 &= -\frac{4}{hg^2} \sum_{q=-q'}^{q=q'-1} \sum_{p=-p'}^{p=p'-1} \frac{2}{\left[ t - (2p+1)\frac{\omega}{2} - (2q+1)\omega' \right]^3},
 \end{aligned}$$

$p'$  et  $q'$  allant à  $+\infty$ , d'où

$$f(z) = \varpi_1 \left( z + \frac{\omega'}{2} \right) = -\frac{16\pi^3}{hg^2\omega^3} \sum_{q=-q'}^{q=q'-1} \sum_{p=-p'}^{p=p'-1} \frac{4}{\left[ \frac{2\pi z}{\omega} - (2q+1)2\pi\rho - (2p+1)\pi \right]^3}.$$

Cela posé, si l'on prend

$$\varphi(z) = \frac{1}{1 + \cos z}, \quad \text{d'où} \quad \varphi'(z) = \frac{\sin z}{(1 + \cos z)^2},$$

on aura

$$\varphi'(t) = \mathcal{E} \frac{\sin z}{(1 + \cos z)^2} \frac{1}{t-z},$$

les infinis étant triples,  $z = (2p+1)\pi$ , de sorte que

$$\begin{aligned}
 \varphi'(t) &= \mathcal{E} \frac{-z' + \frac{z'^3}{1.2.3} - \dots}{\left( \frac{z'^2}{1.2} - \frac{z'^4}{1.2.3.4} + \dots \right)^2} \frac{1}{t - (2p+1)\pi - z'} \\
 &= \mathcal{E} \frac{4}{z'} \left\{ \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.2} - \frac{1}{[t - (2p+1)\pi]^2} \right\} \frac{1}{t-\dots} \\
 &= -4 \sum_{p=-p'}^{p=p'-1} \frac{1}{[t - (2p+1)\pi]^3},
 \end{aligned}$$



c'est-à-dire qu'on a

$$\frac{\sin z}{(1 + \cos z)^2} = -4 \sum_{p=-p'}^{p=p'-1} \frac{1}{[z - (2p+1)\pi]^3}.$$

D'après quoi

$$\begin{aligned} \omega_1 \left( z + \frac{\omega'}{2} \right) &= \frac{16\pi^3}{kg^2\omega^2} \lim_{q' \rightarrow \infty} \sum_{q=-q'}^{q=q'-1} \frac{\sin \left[ \frac{2\pi z}{\omega} - (2q+1)2\pi\rho \right]}{\left[ 1 + \cos \left( \frac{2\pi z}{\omega} - (2q+1)2\pi\rho \right) \right]^2} \\ &= \frac{16\pi^3}{kg^2\omega^2} \left\{ \sum_{q=1}^{q=\infty} \frac{\sin \left[ \frac{2\pi z}{\omega} - (2q-1)2\pi\rho \right]}{\left[ 1 + \cos \left( \frac{2\pi z}{\omega} - (2q-1)2\pi\rho \right) \right]^2} + \sum_{q=1}^{q=\infty} \frac{\sin \left[ \frac{2\pi z}{\omega} + (2q-1)2\pi\rho \right]}{\left[ 1 + \cos \left( \frac{2\pi z}{\omega} + (2q-1)2\pi\rho \right) \right]^2} \right\}, \end{aligned}$$

et de là

$$\omega_1 \left( z + \frac{\omega'}{2} \right) = \frac{4\pi^2}{kg^2\omega^2} \left\{ \sum_{q=1}^{q=\infty} \frac{1}{\cos^2 \left[ \frac{\pi z}{\omega} - (2q-1)\pi\rho \right]} + \sum_{q=1}^{q=\infty} \frac{1}{\cos^2 \left[ \frac{\pi z}{\omega} + (2q-1)\pi\rho \right]} \right\} + \frac{A_1}{k}$$

ou

$$h\omega_1 \left( z + \frac{\omega'}{2} \right) = \frac{1-\nu(z)}{1-\mu(z)} = \frac{4\pi^2}{g^2\omega^2} \sum_{q=1}^{q=\infty} \left\{ \frac{1}{\cos^2 \left[ \frac{\pi z}{\omega} - (2q-1)\pi\rho \right]} + \frac{1}{\cos^2 \left[ \frac{\pi z}{\omega} + (2q-1)\pi\rho \right]} \right\} + A_1;$$

d'où

$$\begin{aligned} h\omega_1(z) &= \frac{4\pi^2}{g^2\omega^2} \sum_{q=1}^{q=\infty} \left\{ \frac{1}{\cos^2 \left[ \frac{\pi z}{\omega} - (4q-1)\frac{\pi\rho}{2} \right]} + \frac{1}{\cos^2 \left[ \frac{\pi z}{\omega} + (4q-3)\frac{\pi\rho}{2} \right]} \right\} + A_1 \\ &= \frac{4\pi^2}{g^2\omega^2} \sum_{q=0}^{q=\infty} \frac{1}{\cos^2 \left[ \frac{\pi z}{\omega} + (-1)^q (2q+1)\frac{\pi\rho}{2} \right]} + A_1. \end{aligned}$$

25. *Développements de*  $\varpi_2(z)$ . — Considérons la fonction

$$f(z) = \varpi_2\left(z + \frac{\omega'}{2}\right) = igk \frac{\varpi_2\left(z + \frac{\omega'}{2}\right)}{\nu_1\left(z + \frac{\omega'}{2}\right)} = -gk^2k' \frac{[1 - \mu(z)]\lambda(z)}{[1 - \nu(z)][\mu(z) + \nu(z)]}$$

Les infinis sont triples, ayant pour expression

$$z = (2p + 1)\frac{\omega}{2} + 2q\omega';$$

la fonction est impaire, d'une valeur finie sur le contour du parallélogramme qui s'étend de

$$z = -p'\omega \text{ à } z = p'\omega \text{ et de } z = -(2q' - 1)\omega' \text{ à } z = (2q' - 1)\omega';$$

et les infinis compris dans ce parallélogramme répondent à

$$p = 0, 1, 2, \dots, p' - 1, \quad -1, -2, \dots, -p'$$

et à

$$q = 0, 1, 2, \dots, q' - 1, \quad \text{puis} \quad -1, -2, \dots, -(q' - 1).$$

La formule de Cauchy donnant

$$f(t) = \varpi_2\left(t + \frac{\omega'}{2}\right) = \mathcal{E} \frac{\varpi_2\left(z + \frac{\omega'}{2}\right)}{t - z} = -gk^2k' \mathcal{E} \frac{[1 - \mu(z)]\lambda(z)}{[1 - \nu(z)][\mu(z) + \nu(z)](t - z)},$$

si l'on y fait  $z = (2p + 1)\frac{\omega}{2} + 2q\omega' + z'$ , devient

$$f(t) = -gk^2k' \mathcal{E} \frac{[1 + \mu(z')]\lambda(z')}{[1 - \nu(z')][\mu(z') - \nu(z')]} \frac{1}{t - (2p + 1)\frac{\omega}{2} - 2q\omega' - z'}$$

$$= \frac{4}{k'g^2} \mathcal{E} \frac{1}{z'} \frac{2}{(t - \dots)^3} = \frac{8}{k'g^2} \lim \sum_{q=-(q'-1)}^{q=q'-1} \sum_{p=-p'}^{p=p'-1} \frac{1}{\left[t - (2p + 1)\frac{\omega}{2} - 2q\omega'\right]^3};$$

d'où

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{64\pi^3}{k'g^2\omega^3} \lim \sum_{q=-(q'-1)}^{q=q'-1} \sum_{p=-p'}^{p=p'-1} \frac{1}{\left[ \frac{2\pi z}{\omega} - 2q2\pi\rho - (2p+1)\pi \right]^2} \\
&= -\frac{16\pi^3}{k'g^2\omega^3} \lim \sum_{q=-(q'-1)}^{q=q'-1} \frac{\sin\left(\frac{2\pi z}{\omega} - 2q2\pi\rho\right)}{\left[ 1 + \cos\left(\frac{2\pi z}{\omega} - 2q2\pi\rho\right) \right]^2} \\
&= -\frac{16\pi^3}{k'g^2\omega^3} \left\{ \frac{\sin\frac{2\pi z}{\omega}}{\left(1 + \cos\frac{2\pi z}{\omega}\right)^2} + \sum_{q=1}^{q=\infty} \frac{\sin\left(\frac{2\pi z}{\omega} - 2q2\pi\rho\right)}{\left[ 1 + \cos\left(\frac{2\pi z}{\omega} - 2q2\pi\rho\right) \right]^2} + \frac{\sin\left(\frac{2\pi z}{\omega} + 2q2\pi\rho\right)}{\left[ 1 + \cos\left(\frac{2\pi z}{\omega} + 2q2\pi\rho\right) \right]^2} \right\},
\end{aligned}$$

et de là

$$\begin{aligned}
k'w_2\left(z + \frac{\omega'}{2}\right) &= -\frac{8\pi^2}{\omega^2g^2} \left[ \frac{1}{1 + \cos\frac{2\pi z}{\omega}} + \sum_{q=1}^{q=\infty} \frac{1}{1 + \cos\left(\frac{2\pi z}{\omega} - 2q2\pi\rho\right)} + \frac{1}{1 + \cos\left(\frac{2\pi z}{\omega} + 2q2\pi\rho\right)} \right] + A_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k'w_2\left(z + \frac{\omega'}{2}\right) &= -k'^2 \frac{1 - \mu(z)}{\mu(z) + \nu(z)} \\
&= -\frac{4\pi^2}{\omega^2g^2} \left[ \frac{1}{\cos^2\frac{\pi z}{\omega}} + \sum_{q=1}^{q=\infty} \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi z}{\omega} - q2\pi\rho\right)} + \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi z}{\omega} + q2\pi\rho\right)} \right] + A_2,
\end{aligned}$$

puis

$$k'w_2(z) = -\frac{4\pi^2}{\omega^2g^2} \sum_{q=0}^{q=\infty} \frac{1}{\cos^2\left[\frac{\pi z}{\omega} - (-1)^q(2q+1)\frac{\pi\rho}{2}\right]} + A_2.$$

Il est à remarquer qu'on a

$$\begin{aligned}
h'w_2\left(z + \frac{\omega'}{2} - \omega'\right) &= \frac{1 + \mu(z)}{\mu(z) + \nu(z)} k'^2 \\
&= -\frac{4\pi^2}{\omega^2g^2} \sum_{q=1}^{q=\infty} \left\{ \frac{1}{\cos^2\left[\frac{\pi z}{\omega} - (2q-1)\pi\rho\right]} + \frac{1}{\cos^2\left[\frac{\pi z}{\omega} + (2q-1)\pi\rho\right]} \right\} + A_2
\end{aligned}$$

et par suite

$$\frac{1 - \nu(z)}{1 - \mu(z)} + k'^2 \frac{1 + \mu(z)}{\mu(z) + \nu(z)} = A_1 + A_2,$$

ce qui exige

$$A_1 + A_2 = 1,$$

et l'on a ainsi

$$k \varpi_1 \left( z + \frac{\omega'}{2} \right) + k' \varpi_2 \left( z + \frac{\omega'}{2} + \omega' \right) = 1 \quad \text{ou} \quad k \varpi_1(z) + k' \varpi_2(z + \omega') = 1.$$

26. *Développements de  $\varpi_3(z)$ .* — Soit la fonction

$$f(z) = \varpi_3 \left( z + \frac{\omega'}{2} \right) = -i g \frac{\varpi_3 \left( z + \frac{\omega'}{2} \right)}{\mu_1 \left( z + \frac{\omega'}{2} \right)} = g \frac{k}{k'} \frac{[\mu(z) + \nu(z)] \lambda(z)}{[1 - \nu(z)] [1 - \mu(z)]}$$

qui est impaire, a ses infinis triples s'exprimant par

$$z = p \omega + 2q \omega',$$

est d'un module fini sur le contour du parallélogramme qui s'étend de

$$z = -p' \omega - \frac{\omega}{2} \text{ à } z = p' \omega + \frac{\omega}{2} \quad \text{et de} \quad z = -2q' \omega' - \omega' \text{ à } z = 2q' \omega' + \omega',$$

les infinis contenus dans le parallélogramme répondant à

$$q = -q', \quad -q' + 1, \dots, \quad q' - 1, \quad q',$$

et à

$$p = -p', \quad -p' + 1, \dots, \quad p' - 1, \quad p'.$$

En posant  $z = p \omega + 2q \omega' + z'$ , on a, par la formule de Cauchy,

$$\begin{aligned} f(t) &= g \frac{k}{k'} \mathcal{E} \frac{[\mu(z') + \nu(z')] \lambda(z')}{[1 - \nu(z')] [1 - \mu(z')] (t - p \omega - 2q \omega' - z')} \\ &= \frac{4}{k k' g^2} \sum_{q=-q'}^{q=q'} \sum_{p=-p'}^{p=p'} \frac{1}{(t - p \omega - 2q \omega' - z')^2}; \end{aligned}$$

de sorte que

$$f(z) = \omega'_3 \left( z + \frac{\omega'}{2} \right) = -ig' \frac{\omega_3 \left( z + \frac{\omega'}{2} \right)}{\mu_1 \left( z + \frac{\omega'}{2} \right)} = \frac{4}{kk'g^2} \frac{\pi^3}{\omega^3} \sum_{q=-q'}^{q=q'} \sum_{p=-p'}^{p=p'} \frac{2}{\left[ \frac{\pi z}{\omega} - 2q\pi\rho - p\pi \right]^3}$$

Or il est aisé de voir que

$$\frac{\cos z}{\sin^3 z} = \lim_{p=-p'}^{p=p'} \sum \frac{1}{(z - p\pi)^3};$$

d'où

$$\lim_{p=-p'}^{p=p'} \sum \frac{2}{\left( \frac{\pi z}{\omega} - 2q\pi\rho - p\pi \right)^3} = 2 \frac{\cos \left( \frac{\pi z}{\omega} - 2q\pi\rho \right)}{\sin^3 \left( \frac{\pi z}{\omega} - 2q\pi\rho \right)}.$$

On a donc

$$kk' \omega'_3 \left( z + \frac{\omega'}{2} \right) = \frac{4\pi^3}{g^2\omega^3} \lim_{q=-q'}^{q=q'} \sum \frac{2 \cos \left( \frac{\pi z}{\omega} - 2q\pi\rho \right)}{\sin^3 \left( \frac{\pi z}{\omega} - 2q\pi\rho \right)};$$

d'où

$$\begin{aligned} kk' \omega_3 \left( z + \frac{\omega'}{2} \right) &= -\frac{4\pi^2}{g^2\omega^2} \sum_{q=-\infty}^{q=\infty} \frac{1}{\sin^2 \left( \frac{\pi z}{\omega} - 2q\pi\rho \right)} + A_3 \\ &= -\frac{4\pi^2}{g^2\omega^2} \left\{ \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi z}{\omega}} + \sum_{q=1}^{q=\infty} \frac{1}{\sin^2 \left( \frac{\pi z}{\omega} - 2q\pi\rho \right)} + \frac{1}{\sin^2 \left( \frac{\pi z}{\omega} + 2q\pi\rho \right)} \right\} + A_3. \end{aligned}$$

et de là.

$$\begin{aligned} \omega_3(z) &= -\frac{4\pi^2}{\omega^2 g^2} \left\{ \frac{1}{\sin^2 \left( \frac{\pi z}{\omega} + \frac{\pi\rho}{2} \right)} + \sum_{q=1}^{q=\infty} \frac{1}{\sin^2 \left[ \frac{\pi z}{\omega} - (4q+1) \frac{\pi\rho}{2} \right]} + \frac{1}{\sin^2 \left[ \frac{\pi z}{\omega} + (4q-1) \frac{\pi\rho}{2} \right]} \right\} \\ &= -\frac{4\pi^2}{\omega^2 g^2} \sum_{q=0}^{q=\infty} \frac{1}{\sin^2 \left( \frac{\pi z}{\omega} - (-1)^q (2q+1) \frac{\pi\rho}{2} \right)} + A_3. \end{aligned}$$

Il y a lieu de remarquer que

$$\begin{aligned}
 kh' \varpi_3 \left( z + \frac{\omega'}{2} + \frac{\omega}{2} - \omega' \right) &= k^2 \frac{\nu(z) - \mu(z)}{1 + \nu(z)} \\
 &= - \frac{4\pi^2}{g^2 \omega^2} \sum_{q=1}^{q=\infty} \left\{ \frac{1}{\cos^2 \left[ \frac{\pi z}{\omega} - (2q-1)\pi\rho \right]} + \frac{1}{\cos^2 \left[ \frac{\pi z}{\omega} + (2q-1)\pi\rho \right]} \right\}
 \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$k \varpi_1 \left( z + \frac{\omega'}{2} \right) + kh' \varpi_3 \left( z + \frac{\omega'}{2} + \frac{\omega}{2} + \omega' \right) = A_1 + A_3$$

ou bien

$$\frac{1 - \nu(z)}{1 - \mu(z)} + k^2 \frac{\nu(z) - \mu(z)}{1 + \nu(z)} = A_1 + A_3,$$

ce qui exige

$$A_1 + A_3 = k^2,$$

de sorte que

$$\varpi_1 \left( z + \frac{\omega'}{2} \right) + k' \varpi_3 \left( z + \frac{\omega'}{2} + \frac{\omega}{2} + \omega' \right) = k$$

ou

$$\varpi_1(z) + k' \varpi_3(z) = k \quad \text{et} \quad A_1 + A_3 = k^2.$$

On a également

$$\begin{aligned}
 k' \varpi_2 \left( z + \frac{\omega'}{2} - \omega' \right) - kh' \varpi_3 \left( z + \frac{\omega'}{2} + \frac{\omega}{2} - \omega' \right) \\
 = k'^2 \frac{1 + \mu(z)}{\mu(z) + \nu(z)} - k^2 \frac{\nu(z) - \mu(z)}{1 + \nu(z)} = A_2 - A_3,
 \end{aligned}$$

ce qui a lieu par

$$A_2 - A_3 = 1 - k^2,$$

résultat qui s'accorde bien avec les deux relations

$$A_1 + A_2 = 1, \quad A_1 + A_3 = k^2.$$

En faisant  $z = 0$  dans le développement de  $k \varpi_1 \left( z + \frac{\omega'}{2} \right)$ , on obtient

$$A_1 = k^2 - \frac{8\pi^2}{\omega^2 g^2} \sum_{q=0}^{q=\infty} \frac{1}{\cos^2(2q+1)\pi\rho}.$$

Par  $z = 0$  dans l'expression de  $\varpi_3(z)$ , on a

$$(1+k)k = -\frac{4\pi^2}{\omega^2 g^2} \sum_{q=0}^{q=\infty} \frac{1}{\sin^2(2q+1) \frac{\pi\rho}{2}} + A_3,$$

d'où

$$A_1 = -k - \frac{4\pi^2}{\omega^2 g^2} \sum_{q=0}^{q=\infty} \frac{1}{\sin^2(2q+1) \frac{\pi\rho}{2}}.$$

Si l'on fait  $z = 0$  dans  $k\varpi_1(z)$ , on trouve

$$A_1 = k - \frac{4\pi^2}{\omega^2 g^2} \sum_{q=0}^{q=\infty} \frac{1}{\cos^2(2q+1) \frac{\pi\rho}{2}},$$

On a donc

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{2\pi^2}{\omega^2 g^2} \sum_{q=0}^{q=\infty} \frac{1}{\sin^2(2q+1) \frac{\pi\rho}{2}} + \frac{1}{\cos^2(2q+1) \frac{\pi\rho}{2}} \\ &= -\frac{2\pi^2}{\omega^2 g^2} \sum_{q=0}^{q=\infty} \frac{1}{\sin^2(2q+1) \frac{\pi\rho}{2} \cos^2(2q+1) \frac{\pi\rho}{2}} \\ &= -\frac{8\pi^2}{\omega^2 g^2} \sum_{q=0}^{q=\infty} \frac{1}{\sin^2(2q+1)\pi\rho}. \end{aligned}$$

27. En égalant cette valeur à la première, il vient

$$\begin{aligned} k^2 &= \frac{8\pi^2}{\omega^2 g^2} \sum_{q=0}^{q=\infty} \frac{1}{\cos^2(2q+1)\pi\rho} - \frac{1}{\sin^2(2q+1)\pi\rho} \\ &= -\frac{8\pi^2}{\omega^2 g^2} \sum_{q=0}^{q=\infty} \frac{\cos(2q+1)2\pi\rho}{\cos^2(2q+1)\pi\rho \sin^2(2q+1)\pi\rho} \\ &= -\frac{32\pi^2}{\omega^2 g^2} \sum_{q=0}^{q=\infty} \frac{\cos(2q+1)2\pi\rho}{\sin^2(2q+1)2\pi\rho}. \end{aligned}$$

En égalant deux valeurs précédentes de  $\Lambda_1$ , on a encore

$$\begin{aligned} k &= \frac{2\pi^2}{\omega^2 g^2} \sum_{q=0}^{q=\infty} \frac{1}{\cos^2(2q+1)\frac{\pi\rho}{2}} \frac{1}{\sin^2(2q+1)\frac{\pi\rho}{2}} \\ &= -\frac{2\pi^2}{\omega^2 g^2} \sum_{q=0}^{q=\infty} \frac{\cos(2q+1)\pi\rho}{\sin^2(2q+1)\frac{\pi\rho}{2} \cos^2(2q+1)\frac{\pi\rho}{2}} \\ &= -\frac{8\pi^2}{\omega^2 g^2} \sum_{q=0}^{q=\infty} \frac{\cos(2q+1)\pi\rho}{\sin^2(2q+1)\pi\rho}, \end{aligned}$$

de sorte que

$$k = 4 \frac{\sum_{q=0}^{q=\infty} \frac{\cos(2q+1)2\pi\rho}{\sin^2(2q+1)2\pi\rho}}{\sum_{q=0}^{q=\infty} \frac{\cos(2q+1)\pi\rho}{\sin^2(2q+1)\pi\rho}}.$$

Si l'on fait  $z = 0$ , dans la formule qui donne  $\mu_1\left(\frac{\omega'}{2} + z\right)$  (15), en observant que la limite de  $\frac{\mu_1\left(\frac{\omega'}{2} + z\right)}{\sin \frac{2\pi z}{\omega}}$  est  $i \frac{\omega g}{4\pi}$ , on trouve

$$\begin{aligned} 1 &= \left(\frac{4\pi}{\omega g}\right)^2 \left[ \frac{1}{4} + \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{\cos m 2\pi\rho + (-1)^m} \right] \\ &= \frac{8\pi^2}{\omega^2 g^2} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{\cos^2 2m\pi\rho} - \frac{1}{\sin^2(2m-1)\pi\rho} \right]; \end{aligned}$$

c'est la relation

$$1 = \Lambda_2 + \Lambda_1,$$

en raison de ce que

$$\Lambda_1 = -\frac{8\pi^2}{\omega^2 g^2} \sum_{q=0}^{q=\infty} \frac{1}{\sin^2(2q+1)\pi\rho}$$



et de ce que par  $z = 0$ , dans l'expression de  $k' \varpi_2 \left( z + \frac{\omega'}{2} \right)$ , on obtient

$$A_2 = \frac{4\pi^2}{\omega^2 g^2} \left( 1 + 2 \sum_{q=1}^{q=\infty} \frac{1}{\cos^2 2q\pi\rho} \right).$$

28. *Autres développements.* — La formule

$$\varpi_1 \left( z + \frac{\omega'}{2} \right) = -\frac{4}{k g^2} \lim_{\substack{p=p'-1 \\ p=-p'}} \sum_{q=q'-1}^{q=q'-1} \frac{2}{\left[ z - (2p+1) \frac{\omega}{2} - (2q+1) \omega' \right]^2}$$

pouvant se changer en

$$\varpi_1 \left( z + \frac{\omega'}{2} \right) = -\frac{4\pi^2}{k g^2 \omega'^3} \lim_{\substack{p=p'-1 \\ p=-p'}} \sum_{q=q'-1}^{q=q'-1} \frac{2}{\left[ \frac{\pi z}{\omega'} - (2p+1) \frac{\pi}{2\rho} - (2q+1)\pi \right]^2},$$

$$\varpi_1 \left( z + \frac{\omega'}{2} \right) = \frac{2\pi^3}{k g^2 \omega'^3} \lim_{p=-p'}^{p=p'-1} \frac{\sin \left[ \frac{\pi z}{\omega'} - (2p+1) \frac{\pi}{2\rho} \right]}{\left\{ 1 + \cos \left[ \frac{\pi z}{\omega'} - (2p+1) \frac{\pi}{2\rho} \right] \right\}^2},$$

on a

$$k \varpi_1 \left( z + \frac{\omega'}{2} \right) = A'_1 + \frac{\pi^2}{g^2 \omega'^2} \lim_{p=-p'}^{p=p'} \frac{1}{\cos^2 \left[ \frac{\pi z}{2\omega'} - (2p+1) \frac{\pi}{4\rho} \right]},$$

$$k \varpi_1 \left( z + \frac{\omega'}{2} \right) = \frac{1 - \nu(z)}{1 - \mu(z)} = A'_1 + \frac{\pi^2}{g^2 \omega'^2} \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{1}{\cos^2 \left[ \frac{\pi z}{2\omega'} - (2q+1) \frac{\pi}{4\rho} \right]} + \frac{1}{\cos^2 \left[ \frac{\pi z}{2\omega'} + (2p+1) \frac{\pi}{4\rho} \right]}$$

d'où, par  $z = 0$ ,

$$k^2 = A'_1 + \frac{2\pi^2}{g^2 \omega'^2} \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{1}{\cos^2 (2p+1) \frac{\pi}{4\rho}}.$$

De même, la formule

$$k' \varpi_2 \left( z + \frac{\omega'}{2} \right) = \frac{8}{g^2} \lim_{\substack{p=p'-1 \\ p=-p'}} \sum_{q=-(q'-1)}^{q=q'-1} \frac{1}{\left[ z - (2p+1) \frac{\omega}{2} - 2q\omega' \right]^2}$$

donnant

$$h' \varpi_2 \left( z + \frac{\omega'}{2} \right) = \frac{\pi^3}{g^2 \omega'^3} \lim_{p=-p'}^{p=p'-1} \frac{\cos \left[ \frac{\pi z}{2 \omega'} - (2p+1) \frac{\pi}{4 \rho} \right]}{\sin^3 \left[ \frac{\pi z}{2 \omega'} - (2p+1) \frac{\pi}{4 \rho} \right]}$$

on a

$$h' \varpi_2 \left( z + \frac{\omega'}{2} \right) = A'_2 - \frac{\pi^2}{g^2 \omega'^2} \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{1}{\sin^2 \left[ \frac{\pi z}{2 \omega'} - (2p+1) \frac{\pi}{4 \rho} \right]} + \frac{1}{\sin^2 \left[ \frac{\pi z}{2 \omega'} + (2p+1) \frac{\pi}{4 \rho} \right]};$$

d'où, par  $z = 0$ ,

$$A'_2 = \frac{2\pi^2}{g^2 \omega'^2} \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{1}{\sin^2 (2p+1) \frac{\pi}{4 \rho}}.$$

Puis la formule

$$kk' \varpi_3 \left( z + \frac{\omega'}{2} \right) = \lim_{p=-p'}^{p=p'} \frac{4}{g^2} \sum_{q=-q'}^{q=q'} \frac{2}{(z - p\omega - 2q\omega')^3}$$

donne

$$kk' \varpi_3 \left( z + \frac{\omega'}{2} \right) = \frac{\pi^3}{g^2 \omega'^3} \lim_{p=-p'}^{p=p'} \frac{\cos \left( \frac{\pi z}{2 \omega'} - p \frac{\pi}{2 \rho} \right)}{\sin^3 \left( \frac{\pi z}{2 \omega'} - p \frac{\pi}{2 \rho} \right)},$$

et de là

$$\begin{aligned} kk' \varpi_3 \left( z + \frac{\omega'}{2} \right) &= A'_3 - \frac{\pi^2}{g^2 \omega'^2} \lim_{p=-p'}^{p=p'} \frac{1}{\sin^2 \left( \frac{\pi z}{2 \omega'} - p \frac{\pi}{2 \rho} \right)} \\ &= A'_3 - \frac{\pi^2}{g^2 \omega'^2} \left[ \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi z}{2 \omega'}} + \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{1}{\sin^2 \left( \frac{\pi z}{2 \omega'} - p \frac{\pi}{2 \rho} \right)} + \frac{1}{\sin^2 \left( \frac{\pi z}{2 \omega'} + p \frac{\pi}{2 \rho} \right)} \right]; \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} &kk' \varpi_3 \left( z + \omega' + \frac{\omega}{2} + \frac{\omega'}{2} \right) \\ &= A'_3 - \frac{\pi^2}{g^2 \omega'^2} \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{1}{\cos^2 \left[ \frac{\pi z}{2 \omega'} - (2p+1) \frac{\pi}{4 \rho} \right]} + \frac{1}{\cos^2 \left[ \frac{\pi z}{2 \omega'} + (2p+1) \frac{\pi}{4 \rho} \right]} = k^2 \frac{\nu(z) - \mu(z)}{1 + \nu(z)} \end{aligned}$$

avec

$$A'_3 = \frac{2\pi^2}{g^2\omega'^2} \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{1}{\cos^2(2p+1) \frac{\pi}{4\rho}}.$$

On déduit de ces formules

$$A'_1 + A'_3 = k^2,$$

et comme on a

$$k' \varpi_2 \left( z + \omega' + \frac{\omega'}{2} \right) = A'_2 - \frac{\pi^2}{g^2\omega'^2} \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{1}{\cos^2 \left[ \frac{\pi z}{2\omega'} - (2p+1) \frac{\pi}{4\rho} \right]} + \frac{1}{\cos^2 \left[ \frac{\pi z}{2\omega'} + (2p+1) \frac{\pi}{4\rho} \right]},$$

il vient

$$k \varpi_1 \left( z + \frac{\omega'}{2} \right) + k' \varpi_2 \left( z + \omega' + \frac{\omega'}{2} \right) = A'_1 + A'_2;$$

donc

$$A'_1 + A'_2 = 1,$$

par suite

$$k^2 - \frac{2\pi^2}{g^2\omega'^2} \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{1}{\cos^2(2p+1) \frac{\pi}{4\rho}} + \frac{2\pi^2}{g^2\omega'^2} \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{1}{\sin^2(2p+1) \frac{\pi}{4\rho}} = 1$$

ou

$$k'^2 = \frac{2\pi^2}{g^2\omega'^2} \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{1}{\sin^2(2p+1) \frac{\pi}{4\rho}} - \frac{1}{\cos^2(2p+1) \frac{\pi}{4\rho}} = \frac{8\pi^2}{g^2\omega'^2} \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{\cos(2p+1) \frac{\pi}{2\rho}}{\sin^2(2p+1) \frac{\pi}{2\rho}}.$$

En faisant  $z = \frac{\omega}{4}$  dans l'expression de  $k \varpi_1 \left( z + \frac{\omega'}{2} \right)$ , on a

$$1 - k' = A'_1 + \frac{\pi^2}{g^2\omega'^2} \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{1}{\cos^2(2p+1) \frac{\pi}{8\rho}};$$

en le faisant dans  $k k' \varpi_3 \left( z + \frac{\omega'}{2} \right)$ , on a

$$-k'(1+k') = A'_3 - \frac{\pi^2}{g^2\omega'^2} \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{1}{\sin^2(2p+1) \frac{\pi}{8\rho}}$$

ou

$$-(1+k') = -A' - \frac{\pi^2}{g^2 \omega'^2} \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{1}{\sin^2(2p+1) \frac{\pi}{8\rho}}.$$

Il en résulte

$$-2k' = \frac{\pi^2}{g^2 \omega'^2} \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{1}{\cos^2(2p+1) \frac{\pi}{8\rho}} - \frac{1}{\sin^2(2p+1) \frac{\pi}{8\rho}}$$

$$k' = \frac{2\pi^2}{g^2 \omega'^2} \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{\cos(2p+1) \frac{\pi}{4\rho}}{\sin^2(2p+1) \frac{\pi}{4\rho}},$$

de sorte que

$$k' = 4 \frac{\sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{\cos(2p+1) \frac{\pi}{2\rho}}{\sin^2(2p+1) \frac{\pi}{2\rho}}}{\sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{\cos(2p+1) \frac{\pi}{4\rho}}{\sin^2(2p+1) \frac{\pi}{4\rho}}}.$$

## VII.

*Développements en fonctions circulaires.*

29. Développement de  $\varpi_1(z)$ . — Prenons

$$\varpi_1\left(\frac{\omega'}{2} + z\right) = \frac{1 - \nu(z)}{h[1 - \mu(z)]}.$$

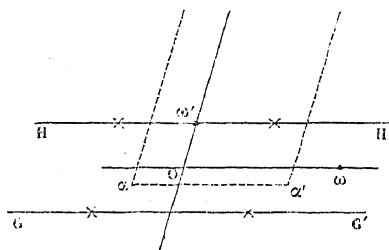
Les infinis de cette fonction sont donnés par

$$z = (2n+1) \frac{\omega}{2} + (2m-1) \omega'.$$

Il n'y en a aucun dans la bande comprise entre deux droites de direction  $\omega$  (*fig. 5*) passant aux points  $z = (2m-1) \omega'$ ,  $z = (2m+1) \omega'$ .

La bande répondant à  $m = 0$  s'étend de  $z = -\omega'$  à  $z = \omega'$ ; la variable  $y$  est susceptible de valeurs égales et de signes contraires. Comme la

Fig. 4.



fonction est paire, elle s'y développera en

$$\varpi_1\left(\frac{\omega'}{2} + z\right) = A_0 + \sum_{p=1}^{p=\infty} A_p \left( e^{p \frac{2\pi z i}{\omega}} + e^{-p \frac{2\pi z i}{\omega}} \right),$$

et l'on aura

$$\omega A_p = \int_{\alpha}^{\alpha+\omega} \varpi_1\left(z + \frac{\omega'}{2}\right) e^{p \frac{2\pi z i}{\omega}} dz \quad \text{et} \quad \omega A_0 = \int_{\alpha}^{\alpha+\omega} \varpi_1\left(z + \frac{\omega'}{2}\right) dz.$$

Pour  $\omega A_p$  l'intégration suivant  $\alpha\alpha'$ , si le module de  $q = e^{2\pi\rho i}$ , est moindre que 1, peut se remplacer par les intégrations relatives aux points que donne

$$z = \frac{\omega}{2} + (2m-1)\omega',$$

en attribuant à  $m$  les valeurs 1, 2, 3, ...

Or, par  $z = \frac{\omega}{2} + (2m-1)\omega' + z'$ , on a

$$\begin{aligned} \varpi_1\left(z + \frac{\omega'}{2}\right) e^{p \frac{2\pi z i}{\omega}} dz &= \frac{1}{k} q^{(2m-1)p} (-1)^p e^{p \frac{2\pi z' i}{\omega}} \frac{1 + \nu(z')}{1 - \mu(z')} dz' \\ &= \frac{2}{g^2 z'^2} \left[ 1 + \frac{g^2}{2} \left( \frac{1}{4} + k^2 \right) z'^2 + \dots \right] \left( 2 - \frac{g^2}{2} k^2 z'^2 + \dots \right) \\ &\quad \times \left( 1 + p \frac{2\pi z' i}{\omega} - \dots \right) \frac{1}{k} q^{(2m-1)p} (-1)^p dz'; \end{aligned}$$

d'où

$$\int \varpi_1 \left( z + \frac{\omega'}{2} \right) e^{p \frac{2\pi z i}{\omega}} dz = - \frac{16 \pi^2}{g^2 \omega} p \frac{1}{k} (-1)^p q^{(2m-1)p}$$

et

$$A_p = - \frac{16 \pi^2}{k \omega^2 g^2} (-1)^p p \sum_{m=1}^{m=\infty} q^{(2m-1)p} = - \frac{16 \pi^2}{k \omega^2 g^2} (-1)^p \frac{pq^p}{1-q^{2p}}.$$

D'autre part, si l'on considère un parallélogramme  $\alpha\alpha'\alpha_1\alpha'_1$  où le côté  $\alpha'\alpha_1$  parallèle à  $O\omega'$  soit de longueur  $\omega'$ , il n'y aura aucun infini à l'intérieur ou il s'en trouvera un pour lequel le résidu sera nul; l'intégrale le long de son contour sera donc nulle, et comme les éléments se détruisent sur les parallèles à  $\omega'$ , il en sera de même sur les deux autres. On a en conséquence

$$\begin{aligned} \int_z^{z+\omega} \varpi_1 \left( z + \frac{\omega'}{2} \right) dz &= \int_z^{z+\omega} \varpi_1 \left( z + \omega' + \frac{\omega'}{2} \right) dz \\ &= \frac{1}{2k} \int_z^{z+\omega} \left[ \frac{1-\nu(z)}{1-\mu(z)} + \frac{1+\nu(z)}{1+\mu(z)} \right] dz = \frac{1}{k} \int_z^{z+\omega} \frac{1-\nu(z)\mu(z)}{\lambda^2(z)} dz \\ &= \frac{1}{k} \int_z^{z+\omega} \frac{dz}{\lambda^2(z)} - \frac{1}{kg} \int_z^{z+\omega} \frac{\lambda'(z) dz}{\lambda^2(z)} = \frac{1}{k} \int_z^{z+\omega} \frac{dz}{\lambda^2(z)}. \end{aligned}$$

Donc

$$A_0 = \frac{1}{k\omega} \int_z^{z+\omega} \frac{dz}{\lambda^2(z)},$$

et ainsi

$$\varpi_1 \left( z + \frac{\omega'}{2} \right) = \frac{1}{k\omega} \int_z^{z+\omega} \frac{dz}{\lambda^2(z)} - \frac{32\pi^2}{k\omega^2 g^2} \sum_{p=1}^{p=\infty} (-1)^p \frac{pq^p}{1-q^{2p}} \cos p \frac{2\pi z}{\omega},$$

pour la bande qui s'étend de  $z = -\omega'$  à  $z = \omega'$ .

De là

$$\varpi_1(z) = \frac{1}{k\omega} \int_z^{z+\omega} \frac{dz}{\lambda^2(z)} - \frac{32\pi^2}{k\omega^2 g^2} \sum_{p=1}^{p=\infty} (-1)^p \frac{pq^p}{1-q^{2p}} \cos p \left( \frac{2\pi z}{\omega} - \pi p \right),$$

pour la bande qui s'étend de  $-\frac{\omega'}{2}$  à  $z = \frac{3\omega'}{2}$ , et pour la bande allant

de  $z = (4m - 1) \frac{\omega'}{2}$  à  $z = (4m + 3) \frac{\omega'}{2}$ ,

$$\varpi_1(z) = \frac{1}{k\omega} \int_z^{z+\omega} \frac{dz}{\lambda^2(z)} - \frac{3\omega\pi^2}{k\omega^2 g^2} \sum_{p=1}^{p=\infty} (-1)^p \frac{pq^p}{1-q^{2p}} \cos p \left[ \frac{2\pi z}{\omega} - (4m+1)\pi p \right];$$

d'ailleurs  $z$  peut là être d'une valeur quelconque.

30. *Développement de  $\varpi_2(z)$ .* — Considérons

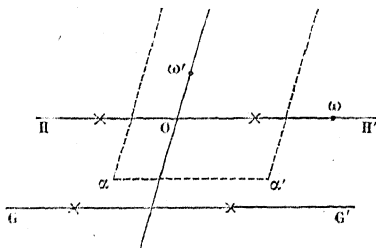
$$\varpi_2\left(z + \frac{\omega'}{2}\right) = -k' \frac{1 - \mu(z)}{\mu(z) + \nu(z)}$$

Les infinis de la fonction, qui sont doubles, ont pour expression

$$z = n\omega + \frac{\omega}{2} + 2m\omega'.$$

Il n'y en a aucun à l'intérieur de la bande GG'HH', GG' (fig. 5) pas-

Fig. 5.



sant au point  $z = -2\omega'$  et HH' au point  $z = 0$ ; on aura dans cette bande

$$\varpi_2\left(z + \frac{\omega'}{2}\right) = \sum_{p=-\infty}^{p=\infty} A_p e^{p \frac{2\pi zi}{\omega}};$$

d'où

$$\int_z^{z+\omega} \varpi_2\left(z + \frac{\omega'}{2}\right) e^{-p \frac{2\pi zi}{\omega}} dz = \omega A_p, \quad p \geq 0$$

et

$$\int_z^{z+\omega} \varpi_2\left(z + \frac{\omega'}{2}\right) dz = \omega A_0.$$

Soit  $p < 0$ . Alors l'intégration se fera par les infinis (mod.  $q < 1$ ) qui donne  $z = \frac{\omega}{2} + 2m\omega'$ , en prenant  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ . En posant  $z = \frac{\omega}{2} + 2m\omega' + z'$ , on obtient

$$\begin{aligned} \varpi_2 \left( z + \frac{\omega'}{2} \right) e^{-p \frac{2\pi zi}{\omega}} dz &= -k' (-1)^p q^{-2mp} \left( 1 - p \frac{2\pi z' i}{\omega} - \dots \right) \left( 2 - \frac{g^2 z'^2}{2} - \dots \right) \\ &\times \left[ 1 + \frac{g^2 (1+k^2) z'^2}{12} - \dots \right] \frac{2 dz'}{k'^2 g^2 z'^2}; \end{aligned}$$

d'où pour l'intégrale

$$-p \frac{16\pi^2}{k' \omega g^2} (-1)^p q^{-2mp},$$

puis

$$A_p = -\frac{16\pi^2}{k' \omega^2 g^2} (-1)^p \frac{p}{1 - q^{-2p}}.$$

Soit en second lieu  $p > 0$ . Alors le module de  $q$  étant  $< 1$ , il faudra prendre les infinis qui répondent à  $m = -1, -2, \dots$  et, les intégrations se faisant en sens contraire des précédentes, il s'ensuivra

$$A_p = \frac{16\pi^2}{k' \omega^2 g^2} (-1)^p \frac{pq^{2p}}{1 - q^{2p}},$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \varpi_2 \left( z + \frac{\omega'}{2} \right) &= A'_0 + \frac{16\pi^2}{k' \omega^2 g^2} \left[ \sum_{p=1}^{p=\infty} (-1)^p \frac{pq^{2p}}{1 - q^{2p}} e^{p \frac{2\pi zi}{\omega}} - \sum_{p=-1}^{p=\infty} (-1)^p \frac{p}{1 - q^{-2p}} e^{p \frac{2\pi z}{\omega}} \right] \\ &= A'_0 + \frac{16\pi^2}{k' \omega^2 g^2} \sum_{p=1}^{p=\infty} (-1)^p \frac{pq^{2p} e^{p \frac{2\pi zi}{\omega}} + p e^{-p \frac{2\pi zi}{\omega}}}{1 - q^{2p}} \\ &= A'_0 + \frac{16\pi^2}{k' \omega^2 g^2} \sum_{p=1}^{p=\infty} p (-1)^p \frac{q^{2p} e^{p \frac{2\pi zi}{\omega}} + e^{-p \frac{2\pi zi}{\omega}}}{1 - q^{2p}} \\ &= A'_0 + \frac{16\pi^2}{k' \omega^2 g^2} \sum_{p=1}^{p=\infty} (-1)^p p \left( \frac{1 + q^{2p}}{1 - q^{2p}} \cos p \frac{2\pi z}{\omega} - i \sin p \frac{2\pi z}{\omega} \right); \end{aligned}$$



on a d'ailleurs, comme pour  $\varpi_2\left(z + \frac{\omega'}{2}\right)$ ,

$$\begin{aligned} \int_z^{z+\omega} \varpi_2\left(z + \frac{\omega'}{2}\right) dz &= \int_\alpha^{\alpha+\omega} \varpi_2\left(z + \frac{\omega'}{2} + \omega'\right) dz \\ &= -\frac{k'}{2} \int_\alpha^{\alpha+\omega} \left[ \frac{1-\mu(z)}{\mu(z)+\nu(z)} - \frac{1+\mu(z)}{\mu(z)+\nu(z)} \right] dz \\ &= k' \int_\alpha^{\alpha+\omega} \frac{\mu(z) dz}{\mu(z)+\nu(z)} = k' \int_\alpha^{\alpha+\omega} \frac{1-\lambda^2(z) - \mu(z)\nu(z)}{-k'^2\lambda^2(z)} dz \\ &= \frac{\omega}{k'} - \frac{1}{k'} \int_\alpha^{\alpha+\omega} \frac{dz}{\lambda^2(z)}; \end{aligned}$$

donc

$$A'_0 = \frac{1}{k} - \frac{1}{k'\omega} \int_\alpha^{\alpha+\omega} \frac{dz}{\lambda^2(z)},$$

c'est-à-dire que, pour la bande qui va du point  $z = -2\omega'$  à  $z = 0$ ,

$$\varpi_1\left(\frac{\omega'}{2} + z\right) = \frac{1}{k} - \frac{1}{k'\omega} \int_\alpha^{\alpha+\omega} \frac{dz}{\lambda^2(z)} + \frac{16\pi^2}{k'\omega^2 g^2} \sum_{p=1}^{p=\infty} (-1)^p p \left( \frac{1+q^{2p}}{1-q^{2p}} \cos p \frac{2\pi z}{\omega} - i \sin p \frac{2\pi z}{\omega} \right)$$

et pour la bande qui va de  $z = -\frac{3\omega'}{2}$  à  $z = \frac{\omega'}{2}$ ,

$$\begin{aligned} \varpi_1(z) &= \frac{1}{k} - \frac{1}{k'\omega} \int_\alpha^{\alpha+\omega} \frac{dz}{\lambda^2(z)} + \frac{16\pi^2}{k'\omega^2 g^2} \sum_{p=1}^{p=\infty} (-1)^p p \left[ \frac{1+q^{2p}}{1-q^{2p}} \cos p \left( \frac{2\pi z}{\omega} - \pi\rho \right) \right. \\ &\quad \left. - i \sin p \left( \frac{2\pi z}{\omega} - \pi\rho \right) \right], \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} \varpi_2(z) &= \frac{1}{k} - \frac{1}{k'\omega} \int_\alpha^{\alpha+\omega} \frac{dz}{\lambda^2(z)} + \frac{16\pi^2}{k'\omega^2 g^2} \sum_{p=1}^{p=\infty} (-1)^p p \left\{ \frac{1+q^{2p}}{1-q^{2p}} \cos p \left[ \frac{2\pi z}{\omega} - (4m+1)\pi\rho \right] \right. \\ &\quad \left. - i \sin p \left[ \frac{2\pi z}{\omega} - (4m+1)\pi\rho \right] \right\}, \end{aligned}$$

pour la bande comprise de  $z = 2m\omega' - \frac{3\omega'}{2}$  à  $z = 2m\omega' + \frac{\omega'}{2}$ .

31. Développement de  $\varpi_3(z)$ . — Soit

$$\varpi_3\left(z + \frac{\omega'}{2}\right) = -\frac{k}{k'} \frac{\mu(z) + \nu(z)}{1 - \nu(z)}.$$

Les infinis de cette fonction ont pour expression

$$z = n\omega + 2m\omega'.$$

Considérons la bande qui s'étend de  $-2\omega'$  à zéro. On aura dans cette bande

$$\varpi_3\left(z + \frac{\omega'}{2}\right) = \sum_{p=-\infty}^{p=\infty} A_p e^{p \frac{2\pi z i}{\omega}},$$

d'où

$$\omega A_p = \int_{\alpha}^{\alpha+\omega} \varpi_3\left(z + \frac{\omega'}{2}\right) e^{-p \frac{2\pi z i}{\omega}} dz, \quad \omega A'_0 = \int_{\alpha}^{\alpha+\omega} \varpi_3\left(z + \frac{\omega'}{2}\right) dz.$$

Soit  $p < 0$ . L'intégration se fera par les infinis qui répondent à  $m = 0, 1, 2, \dots$ , et l'on trouve

$$A_p = -\frac{16\pi^2 p}{kk' \omega^2 g^2} \frac{1}{1 - q^{-2p}},$$

le module de  $q$  étant  $< 1$ .

Soit  $p > 0$ . Alors les infinis à prendre répondent à  $m = -1, -2, \dots$ , et, eu égard au sens contraire des intégrations, on a

$$A_p = \frac{16\pi^2 p}{kk' \omega^2 g^2} \frac{q^{2p}}{1 - q^{2p}},$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \varpi_3\left(z + \frac{\omega'}{2}\right) &= A'_0 + \frac{16\pi^2}{kk' \omega^2 g^2} \sum_{p=1}^{p=\infty} p \frac{q^{2p} e^{p \frac{2\pi z i}{\omega}} + e^{-p \frac{2\pi z i}{\omega}}}{1 - q^{2p}} \\ &= A'_0 + \frac{16\pi^2}{kk' \omega^2 g^2} \sum_{p=1}^{p=\infty} p \left( \frac{1 + q^{2p}}{1 - q^{2p}} \cos p \frac{2\pi z}{\omega} - i \sin p \frac{2\pi z}{\omega} \right). \end{aligned}$$

On a d'autre part

$$\begin{aligned} \omega A_0'' &= \int_{\alpha}^{\alpha+\omega} \varpi_3 \left( z + \frac{\omega'}{2} \right) dz = \int_{\alpha}^{\alpha+\omega} \varpi_3 \left( z + \frac{\omega'}{2} + \omega' \right) dz \\ &= -\frac{k}{2k'} \int_{\alpha}^{\alpha+\omega} [\mu(z) + \nu(z)] \left[ \frac{1}{1-\nu(z)} - \frac{1}{1+\nu(z)} \right] dz = -\frac{k}{k'} \int_{\alpha}^{\alpha+\omega} \frac{[\mu(z) + \nu(z)]\nu(z)}{k^2 \lambda^2(z)} dz \\ &= -\frac{1}{kk'} \int_{\alpha}^{\alpha+\omega} \frac{1-k^2 \lambda^2(z)}{\lambda^2(z)} dz = \frac{k\omega}{k'} - \frac{1}{kk'} \int_{\alpha}^{\alpha+\omega} \frac{dz}{\lambda_2(z)}. \end{aligned}$$

Pour la bande qui s'étend de  $z = -\frac{3\omega'}{2}$  à  $z = \frac{\omega'}{2}$ , on aura

$$\begin{aligned} \varpi_3(z) &= \frac{k}{k'} - \frac{1}{kk' \omega} \int_{\alpha}^{\alpha+\omega} \frac{dz}{\lambda^2(z)} \\ &\quad + \frac{16\pi^2}{kk' \omega^2 g^2} \sum_{p=1}^{p=\infty} p \left[ \frac{1+q^{2p}}{1-q^{2p}} \cos p \left( \frac{2\pi z}{\omega} - \pi\rho \right) - i \sin p \left( \frac{2\pi z}{\omega} - \pi\rho \right) \right] \end{aligned}$$

et pour celle qui va de  $z = (4m-3)\frac{\omega'}{2}$  à  $z = (4m+1)\frac{\omega'}{2}$ ,

$$\begin{aligned} \varpi_3(z) &= \frac{k}{k'} - \frac{1}{kk' \omega} \int_{\alpha}^{\alpha+\omega} \frac{dz}{\lambda^2(z)} \\ &\quad + \frac{16\pi^2}{kk' \omega^2 g^2} \sum_{p=1}^{p=\infty} p \left\{ \frac{1+q^{2p}}{1-q^{2p}} \cos p \left[ \frac{2\pi z}{\omega} - (4m+1)\pi\rho \right] - i \sin p \left[ \frac{2\pi z}{\omega} - (4m+1)\pi\rho \right] \right\}, \end{aligned}$$

par suite

$$\begin{aligned} \varpi_3 \left( z + \frac{\omega}{2} \right) &= \frac{k}{k'} - \frac{1}{kk' \omega} \int_{\alpha}^{\alpha+\omega} \frac{dz}{\lambda^2(z)} \\ &\quad + \frac{16\pi^2}{kk' \omega^2 g^2} \sum_{p=1}^{p=\infty} (-1)^p p \left\{ \frac{1+q^{2p}}{1-q^{2p}} \cos p \left[ \frac{2\pi z}{\omega} - (4n+1)\pi\rho \right] - i \sin p \left[ \frac{2\pi z}{\omega} - (4m+1)\pi\rho \right] \right\}, \end{aligned}$$

ce qui ramène à la relation

$$\varpi_2(z) - k\varpi_3 \left( z + \frac{\omega}{2} \right) = k'.$$

Les trois constantes  $A_0, A'_0, A''_0$ , relatives aux développements précédents de  $\varpi_1(z), \varpi_2(z), \varpi_3(z)$ , sont liées par les relations

$$A_0 k + A'_0 k' = 1, \quad A_0 + A''_0 k' = k, \quad A'_0 - A''_0 k = k'.$$

On connaît (Traité de MM. Briot et Bouquet, liv. IV, n° 161) la formule

$$\int_{\frac{\omega}{4}}^z \frac{dz}{\lambda^2(z)} = \left(z - \frac{\omega}{4}\right) \theta''_1(0) - \left[\frac{d \log \theta_3(z)}{dz}\right]_{\frac{\omega}{4}}^z.$$

Elle donne

$$\frac{1}{\omega} \int_{\frac{\omega}{4}}^{\frac{\omega}{4} + \omega} \frac{dz}{\lambda^2(z)} = A_0 = \theta''_1(0) - \frac{1}{\omega} \left[\frac{d \log \theta_3(z)}{dz}\right]_{\frac{\omega}{4}}^{\frac{\omega}{4} + \omega},$$

et comme on a (Traité de MM. Briot et Bouquet, liv. IV, n° 131)

$$\log \theta_3(z) = \log \frac{\omega}{2\pi} + \log \sin \frac{2\pi z}{\omega} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \log \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{2\pi z}{\omega}}{\sin^2 2n\pi\rho}\right),$$

il s'ensuit

$$A_0 = \theta''_1(0);$$

puis la formule

$$\theta_1(z) = \sqrt{\frac{2\pi}{k'\omega}} \left[1 + 2 \sum_{m=1}^{m=\infty} (-1)^m q^{m^2} \cos \frac{4m\pi z}{\omega}\right]$$

donnant

$$\theta''_0(z) = -2 \sqrt{\frac{2\pi}{k'\omega}} \sum_{m=1}^{m=\infty} (-1)^m q^{m^2} \left(\frac{4m\pi}{\omega}\right)^2 \cos \frac{4m\pi z}{\omega},$$

on a

$$A_0 = \sqrt{\frac{2\pi}{k'\omega}} \sum_{m=1}^{m=\infty} (-1)^{m+1} q^{m^2} \left(\frac{4m\pi}{\omega}\right)^2 = \frac{16\pi^2}{\omega^2} \sqrt{\frac{2\pi}{k'\omega}} \sum_{m=1}^{m=\infty} (-1)^{m+1} q^{m^2} m^2.$$