

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

MICHÈLE RAYNAUD

Théorèmes de Lefschetz en cohomologie des faisceaux cohérents et en cohomologie étale. Application au groupe fondamental

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 7, n° 1 (1974), p. 29-52

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1974_4_7_1_29_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

THÉORÈMES DE LEFSCHETZ EN COHOMOLOGIE DES FAISCEAUX COHÉRENTS ET EN COHOMOLOGIE ÉTALE APPLICATION AU GROUPE FONDAMENTAL

Par Michèle RAYNAUD

Soient X un schéma, Y une partie fermée de X , U l'ouvert complémentaire. Dans tout ce travail, on se place dans l'un des deux cas suivants : le *cas global* où X est un schéma projectif sur une base S noethérienne et Y une section hyperplane de X , le *cas local* où X est le complémentaire du point fermé d'un schéma local noethérien complet et Y défini par une équation.

Soit F un faisceau sur X pour la topologie étale ([SGA 4], VII, 1.3). Lorsque F est un faisceau en groupes commutatif, on sait, d'après [SGA 2], XIV, 4, que, si F satisfait à certaines conditions locales sur U , exprimables en termes de profondeur étale aux points de U , alors l'application canonique des groupes de cohomologie étale

$$\theta_i : H^i(X, F) \rightarrow H^i(Y, F|_Y)$$

est bijective pour certaines valeurs précisées de i . Ces hypothèses locales sur F sont en un certain sens les plus faibles possibles; par exemple, dans le cas global, elles sont nécessaires si l'on veut obtenir la bijectivité des θ_i non seulement pour X et F mais aussi pour tout compactifié X' d'un schéma U' étale sur U , affine sur S , et tout faisceau F' prolongeant $F|_{U'}$ ([SGA 2], XIV, 4.2, (i) \Rightarrow (ii)).

Le but de ce travail est d'étendre les résultats précédents au cas où F est un faisceau d'ensembles ou de groupes non nécessairement commutatif, i. e. d'établir la bijectivité des morphismes canoniques

$$\theta_0 : H^0(X, F) \rightarrow H^0(Y, F|_Y) \quad \text{ou} \quad \theta_1 : H^1(X, F) \rightarrow H^1(Y, F|_Y)$$

lorsque F satisfait à des hypothèses de profondeur convenables aux points de U (III, 1.3). Vu le caractère souvent technique des démonstrations, nous donnons seulement un résumé ne contenant que les étapes essentielles des raisonnements. Les démonstrations complètes se trouvent dans [7].

Lorsque F est un faisceau d'ensembles constant non trivial, la bijectivité de θ_0 est équivalente à celle du morphisme canonique

$$\varphi : \pi_0(Y) \rightarrow \pi_0(X).$$

Si Y est connexe et si ξ est un point géométrique de Y , la bijectivité de θ_1 quel que soit le faisceau en groupes constant constructible F , équivaut à la bijectivité du morphisme des groupes fondamentaux

$$\psi : \pi_1(Y, \xi) \rightarrow \pi_1(X, \xi).$$

D'autre part les théorèmes de comparaison des H^0 ou H^1 , dans le cas d'un faisceau non constant, se déduisent de façon formelle des énoncés relatifs aux faisceaux constants (III, 1). Plus généralement, si F est un champ sur X ([4], II), on peut prouver, sous des hypothèses de profondeur étale convenables sur F aux points de U , que le foncteur canonique

$$F(X) \rightarrow F(Y)$$

est une équivalence de catégories. L'intérêt de ces énoncés généraux apparaît lorsque l'on veut étendre les théorèmes de comparaison à d'autres cas que le cas global ou le cas local considérés ci-dessus. On obtient ainsi la bijectivité de φ et ψ quand X est un schéma lisse quasi projectif (non nécessairement propre) sur un corps de caractéristique zéro, à condition de prendre pour Y une section hyperplane « assez générale » (III, 2.1). Si X est le complémentaire d'un diviseur à croisements normaux d'un schéma projectif, on peut préciser les sections hyperplanes pour lesquelles le résultat est valable.

Revenons au cas où F est un faisceau d'ensembles constant. La bijectivité de φ résulte de celle du morphisme canonique

$$H^0(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow H^0(Y, \mathcal{O}_Y).$$

On voit ainsi apparaître le problème qui nous intéresse comme cas particulier d'un théorème de comparaison entre groupes de cohomologie sur X et Y de faisceaux cohérents. Ce théorème de comparaison et ses variantes font l'objet du chapitre I. La démonstration, basée sur le théorème de dualité locale et globale et l'usage du foncteur $Rf_!$ de Deligne, est analogue à celle qui permet de démontrer les théorèmes de Lefschetz en cohomologie étale dans le cas des faisceaux abéliens. L'intérêt de cette méthode, par rapport à [SGA 2], IX, 1, est qu'elle ne nécessite aucune hypothèse de profondeur cohérente aux points de Y . Elle permet aussi de remplacer la condition Y défini par une équation par la condition U affine et l'on obtient aussi des résultats si U est réunion d'ouverts affines en nombre fixé.

La méthode utilisée pour prouver la bijectivité de ψ est analogue à celle de [SGA 2] (X, 2 et XII, 3), qui consiste à interpréter un revêtement étale de X comme un faisceau de modules cohérent sur X . L'injectivité de ψ se déduit alors du théorème de comparaison des H^0 sur X et sur Y de ce faisceau. Compte tenu du fait que la catégorie des revêtements étales sur Y est équivalente à la catégorie des revêtements étales sur le complété formel \hat{X} de X le long de Y , la surjectivité de ψ se déduit d'un théorème « d'algébrisation » qui donne des conditions sous lesquelles un faisceau de modules cohérent sur \hat{X} est isomorphe au complété formel d'un faisceau de modules cohérent sur X . Les théorèmes d'algébrisation font l'objet de chapitre II. On élimine, dans les énoncés, les hypothèses de profondeur aux points de Y qui figurent dans [SGA 2] (X, 2.1 et XII, 3.1) et, dans le cas global, les

hypothèses de platitude relative. La méthode utilisée consiste à se ramener au cas où toutes les hypothèses de *loc. cit.* sont satisfaites. On a besoin en particulier d'hypothèses de profondeur ≥ 3 sur le faisceau à algébriser. On utilise, pour les obtenir, la méthode de « Cohen-Macaulisation » par éclatement, expliquée dans II, 1. On reprend alors pas à pas les démonstrations de [SGA 2]. Ceci nécessite des généralisations techniques (II, 2) des théorèmes de finitude et d'existence de [SGA 2] (VIII et IX).

Cet article a été inspiré par A. Grothendieck qui a suggéré les principaux énoncés sous forme de conjectures ([SGA 2], XIV, 6). Je le remercie également de toute l'aide qu'il m'a apporté au cours de ce travail.

I. — Théorèmes de comparaison en cohomologie des faisceaux cohérents

0. Dans tout ce paragraphe, si les notations ne sont pas précisées, on suppose donné un schéma noethérien S (resp. un schéma local noethérien S), un morphisme propre $f : X \rightarrow S$ (resp. on désigne par X le complémentaire du point fermé t de S), un faisceau d'idéaux I de \mathcal{O}_X . On suppose que S est localement immersible dans un schéma régulier de dimension finie (resp. que S est complet pour la topologie I-adique). On note Y le sous-schéma fermé défini par I , U l'ouvert complémentaire de Y , \hat{X} le complété formel de X le long de Y . Si F est un faisceau de modules cohérent sur X , on note \hat{F} le complété formel de F . On désigne par $\text{prof}_x F$ la profondeur du faisceau F au point x de X ([SGA 2], III, 2).

1. ÉNONCÉ DES THÉORÈMES DE COMPARAISON.

THÉORÈME 1.1. — *Soit n un entier ≥ 0 . Supposons l'ouvert U affine sur S . Soit F un faisceau de modules cohérent sur X tel que, pour tout point $u \in U$ tel que $\overline{\{u\}} \cap Y \neq \emptyset$, on ait*

$$\text{prof}_u F \geq n - \text{deg tr } k(u)/k(f(u))$$

(resp. $\text{prof}_u F \geq n - \dim \overline{\{u\}}$, où $\overline{\{u\}}$ désigne l'adhérence de u dans X).

Alors on peut y trouver un voisinage ouvert V_0 de Y dans X tel que, pour tout ouvert V tel que $Y \subset V \subset V_0$, les morphismes canoniques

$$(\star) \quad \begin{array}{ccc} H^i(V, F) & \longrightarrow & \lim_{\longleftarrow m} H^i(X, F/I^m F) \\ & \searrow & \nearrow \\ & & H^i(\hat{X}, \hat{F}) \end{array}$$

soient bijectifs pour $i < n-1$, injectifs pour $i = n-1$. De plus le système projectif des $H^i(X, F/I^m F)$ satisfait à la condition de Mittag-Leffler pour $i \leq n-2$.

REMARQUE 1.2. — Si l'on suppose seulement satisfaite la relation

$$\text{prof}_u F \geq \text{Inf}(n-1, n - \text{deg tr } k(u)/k(f(u)),$$

on peut affirmer que les morphismes du diagramme (\star) sont bijectifs pour $i < n-1$.

COROLLAIRE 1.3. — *Sous les hypothèses de 1.1, on suppose de plus que, pour tout point $u \in U$ tel que $\overline{\{u\}} \cap Y = \emptyset$, on a*

$$\text{prof}_u F \geq n.$$

Alors les morphismes canoniques

$$\begin{array}{ccc} H^i(X, F) & \xrightarrow{\varphi_i} & \lim H^i(X, F/I^m F) \\ & \searrow \psi_i & \xleftarrow{m} \nearrow \theta_i \\ & & H^i(\hat{X}, \hat{F}) \end{array}$$

sont bijectifs pour $i < n-1$, injectifs pour $i = n-1$.

Appliqué au faisceau des homomorphismes de deux faisceaux cohérents F et G et à l'entier $n = 2$, le corollaire donne des conditions sous lesquelles un homomorphisme $F \rightarrow G$ est algébrisable. Soit en effet C la catégorie des faisceaux de modules cohérents F sur X qui satisfont aux conditions suivantes :

(a) Pour tout point $u \in U$ tel que $\overline{\{u\}} \cap Y = \emptyset$, on a

$$\text{prof}_u F \geq 2.$$

(b) Pour tout point $y \in Y$, fermé dans sa fibre (resp. pour tout point $y \in Y$ tel que $\dim \overline{\{y\}} = 0$) et pour toute généralisation $u \in U$ de y , telle que $\text{codim}(\overline{\{y\}}, \overline{\{u\}}) \leq 1$, on a

$$\text{prof}_u F \geq 1.$$

Si F et G sont dans C , il en est de même de $\text{Hom}_X(F, G)$. Soit \mathcal{C} la catégorie des faisceaux de modules cohérents \mathcal{F} sur \hat{X} et φ le foncteur de C dans \mathcal{C} qui, à un faisceau cohérent F , associe son complété formel \hat{F} . On obtient alors les corollaires suivants (cf. [SGA 2], X, 2.1 et XII, 2.4).

COROLLAIRE 1.4. — *Le foncteur φ est pleinement fidèle.*

COROLLAIRE 1.5. — *Supposons que U vérifie la condition (S_2) ([EGA], IV, 5.7.2) et que les composantes irréductibles des fibres de f soient de dimension ≥ 2 (resp. que les composantes irréductibles de X soient de dimension ≥ 2). Alors la condition de Lefschetz $\text{Lef}(X, Y)$ ([SGA 2], X, 2) est satisfaite.*

Les conséquences de la condition $\text{Lef}(X, Y)$ ont été développées dans [SGA 2], X, 2. Rappelons l'énoncé suivant relatif au groupe fondamental.

COROLLAIRE 1.6. — *Sous les hypothèses de 1.5, supposons Y connexe. Alors il en est de même de tout voisinage ouvert V de Y . De plus, si ξ est un point géométrique de Y , le morphisme canonique*

$$\pi_1(Y, \xi) \rightarrow \pi_1(V, \xi)$$

est surjectif.

2. DÉMONSTRATION DES ÉNONCÉS DU N° 1. — On démontre d'abord le corollaire 1.3 en se plaçant dans le cas plus général où F est un complexe de faisceaux sur X , à cohomologie cohérente bornée. Le théorème 1.1 s'en déduit en modifiant F sur une partie fermée convenable, de façon à obtenir un complexe satisfaisant aux hypothèses de 1.3 ([7], 3.7 et 3.9). Les deux énoncés, global et local, de 1.3 se déduisent du résultat général 2.3 ci-dessous. Si $g : U \rightarrow S$ est un morphisme de type fini et T une partie fermée de S , si $u \in U$ et si $s = g(u)$, on introduit l'entier

$$\delta_T u = \deg \operatorname{tr} k(u)/k(s) + \operatorname{codim}(T \cap \overline{\{s\}}, \overline{\{s\}}).$$

Le cas global est alors obtenu en faisant $T = S$, U et S désignant les schémas qui interviennent dans 1.3; la fonction $\delta_T u$ se réduit alors à $\deg \operatorname{tr} k(u)/k(s)$. La conclusion de 2.3 se traduit en effet par le fait que, pour tout entier $m \geq 0$, on peut trouver un entier $k(m) \geq 0$ tel que le morphisme canonique

$$R^i f_* (I^{m+k(m)} F) \rightarrow R^i f_* (I^m F)$$

soit nul pour $i < n$. On considère alors le diagramme commutatif suivant, dont les lignes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} H^i(X, I^{m+k(m)} F) & \longrightarrow & H^i(X, F) & \longrightarrow & H^i(X, F/I^{m+k(m)} F) & \longrightarrow & H^{i+1}(X, I^{m+k(m)} F) \\ \downarrow \alpha_i & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \alpha_{i+1} \\ H^i(X, I^m F) & \longrightarrow & H^i(X, F) & \longrightarrow & H^i(X, F/I^m F) & \longrightarrow & H^{i+1}(X, I^m F). \end{array}$$

Du fait que $\alpha_i = 0$ pour $i < n$ résulte alors que le système projectif des $H^i(X, F/I^m F)$ satisfait à la condition de Mittag-Leffler pour $i \leq n-2$ et que le morphisme φ_i est bijectif pour $i < n-1$, injectif pour $i = n-1$. Les assertions relatives au morphisme θ_i résultent alors de [EGA], O_{III}, 13.3.1. Le cas local se déduit de même de 2.3 en prenant pour T le point fermé du schéma local S .

Le résultat 2.3 se démontre en traduisant les hypothèses de profondeur par dualité. Il fait intervenir le foncteur $R g_!$ et nécessite de se placer dans la catégorie $\operatorname{pro} D_{\text{coh}}^b(U)$ introduite dans [5] (appendice). Rappelons que tout objet F de $\operatorname{pro} D_{\text{coh}}^b(U)$ peut être représenté par un système projectif $\leftarrow_m F_m$ de complexes à cohomologie cohérente,

uniformément bornée. Nous aurons besoin de définir une notion de profondeur d'un tel système projectif. Ceci est possible grâce à la proposition suivante.

PROPOSITION 2.1. — Soient S un schéma noethérien, $F = \leftarrow_m F_m$ un objet de $\operatorname{pro} D_{\text{coh}}^b(S)$, T une partie fermée de S , n un entier. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Pour tout $m \geq 0$, il existe un entier $k(m) \geq 0$ tel que, pour tout point $t \in T$, le morphisme canonique

$$H_t^i(F_{m+k(m)}) \rightarrow H_t^i(F_m)$$

soit nul pour $i < n$.

(ii) Pour tout $m \geq 0$, il existe un entier $k'(m) \geq 0$ tel que le morphisme canonique

$$H_T^i(F_{m+k'(m)}) \rightarrow H_T^i(F_m)$$

soit nul pour $i < n$.

(iii) Pour tout $m \geq 0$, il existe un entier $k''(m)$ tel que, pour tout ouvert V de S , le morphisme canonique

$$H_T^i(V, F_{m+k''(m)}) \rightarrow H_T^i(V, F_m)$$

soit nul pour $i < n$.

Supposons les conditions ci-dessus satisfaites. Alors, pour tout ouvert V de S , le morphisme canonique

$$\varprojlim_m H^i(V, F_m) \rightarrow \varprojlim_m H^i(V - (T \cap V), F_m)$$

est bijectif pour $i < n-1$, injectif pour $i = n-1$.

La démonstration est basée sur le fait que, pour tout point $t \in T$ et tout entier i , les $H_t^i(F_m)$ sont des modules artiniens ([5], V, 6.5). Il en résulte que le système projectif des $H_t^i(F_m)$, $m \in \mathbb{N}$, satisfait à la condition de Mittag-Leffler. On en déduit l'équivalence des conditions (i), (ii) et (iii), en considérant les suites spectrales que relie H_t^i , H_T^i et H_T^i ([7], I, 1.6).

DÉFINITION 2.2. — Étant donné un objet F de $\text{pro } D_{\text{coh}}^b(S)$, une partie fermée T de S , on appelle profondeur de F le long de T et on note

$$\text{prof}_T F$$

le plus grand entier n tel que les conditions de 2.1 soient satisfaites.

THÉORÈME 2.3. — Soient S un schéma noethérien qui a localement un complexe dualisant ([5], V, 2) (par exemple un schéma localement immersible dans un schéma régulier de dimension finie), $g : U \rightarrow S$ un morphisme affine de type fini, T une partie fermée de S , n un entier. Soit F un objet de $\text{pro } D_{\text{coh}}^b(U)$ tel que, pour tout point $u \in U$, on ait

$$\text{prof}_u F \geq n - \delta_T u.$$

Alors on a

$$\text{prof}_T(R g_* F) \geq n.$$

On peut supposer que S est affine et a un complexe dualisant K . Comme U est affine, on peut trouver une compactification de U ,

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{i} & X \\ & \searrow g & \swarrow f \\ & & S \end{array}$$

où f est un morphisme projectif et U le complémentaire d'une section hyperplane Y de X . Soient L un faisceau f -ample, σ une section de L définissant Y , I l'idéal de \mathcal{O}_X défini par σ .

Grâce à [SGA 6], II, 2.2.2.1, on peut trouver un système projectif de complexes $G = \ll \lim_{\leftarrow m} \gg G_m$ sur X , les objets des G_m étant cohérents, nuls en dehors d'un intervalle ne dépendant pas de m , dont la restriction à U soit isomorphe à F . On peut supposer de plus que, pour tout $m \geq 0$ et tout r, σ n'est pas diviseur de zéro dans $(G_m)^r$; par suite la multiplication par $\sigma^k, k \geq 0$, induit un isomorphisme

$$(\star) \quad G_m(-k) \simeq I^k G_m.$$

D'après [5] (appendice), on a

$$R g_! F = \ll \lim_{\leftarrow m} \gg R f_* (I^m G_m).$$

Nous allons montrer que l'on peut trouver des entiers $k(m), k'(m)$ positifs, tels que, pour tout $k \geq k(m), k' \geq k'(m)$ et tout point $t \in T$ en lequel K est normalisé, le morphisme canonique

$$\varphi_i : H_r^i(R f_* (I^{k+k'} G_{m+k})) \rightarrow H_r^i(R f_* (I^{k'} G_m))$$

soit nul pour $i < n$.

Notons K' le complexe dualisant $f^! K$ et D_X la dualité par rapport à K' . Soient t_0 un point en lequel K est normalisé et U_0 le schéma $U \times_S \text{Spec } \mathcal{O}_{S, t_0}$. Les hypothèses de profondeur sur F entraînent la relation

$$\text{prof}_u G \geq n - \delta_{t_0} u$$

en tout point $u \in U_0$. Appliquant le théorème de dualité locale ([5], V, 6.2) aux $H_u^i G_m$, on en déduit la relation

$$\lim_{\rightarrow m} (H^q(D_X G_m | U_0)) = 0 \quad \text{pour } q > -n.$$

Comme les faisceaux $H^q(D_X G_m)$ sont cohérents et sont nuls, sauf pour un nombre fini de valeurs de q , on peut trouver un entier $k_1(m) \geq 0$, tel que le morphisme de transition

$$H^q(D_X G_m) | U_0 \rightarrow H^q(D_X(G_{m+k_1(m)})) | U_0$$

soit nul pour $q > -n$. Quitte à restreindre S à un ouvert contenant t_0 , on peut donc supposer que l'image du morphisme

$$H^q(D_X G_m) \rightarrow H^q(D_X(G_{m+k_1(m)}))$$

est concentrée sur Y , donc annulée par une puissance $I^{k_2(m)}$. On pose

$$k(m) = \sup(k_1(m), k_2(m)).$$

Le morphisme composé

$$H^q(D_X G_m) \xrightarrow{0} H^q(D_X G_{m+k}) \xrightarrow{\sigma^k} H^q(D_X G_{m+k})(k),$$

où θ est déduit du morphisme de transition $G_{m+k} \rightarrow G_m$, est donc nul pour $k \geq k(m)$ [relation (\star)].

D'autre part, d'après [EGA], III, 2.2.1, on peut trouver un entier $k'(m)$ tel que pour tout $k' \geq k'(m)$, on ait des isomorphismes

$$\begin{aligned} H^q(\mathbf{R}f_*(\mathbf{D}_X G_m(k'))) &\simeq f_*(H^q(\mathbf{D}_X G_m(k'))), \\ H^q(\mathbf{R}f_*(\mathbf{D}_X G_{m+k(m)}(k'+k(m)))) &\simeq f_*(H^q(\mathbf{D}_X G_{m+k(m)}(k'+k(m)))). \end{aligned}$$

Il en résulte que le morphisme

$$H^q(\mathbf{R}f_*(\mathbf{D}_X G_m(k'))) \rightarrow H^q(\mathbf{R}f_*(\mathbf{D}_X G_{m+k(m)}(k'+k(m))))$$

est nul pour tout $q > -n$ et tout $k' \geq k'(m)$ et il en est *a fortiori* de même quand on remplace $k(m)$ par un entier $k \geq k(m)$. D'après le théorème de dualité globale ([5], III, 11.1), cela revient à dire que le morphisme canonique

$$H^q(\mathbf{D}_S(\mathbf{R}f_*(I^{k'} G_m))) \rightarrow H^q(\mathbf{D}_S(\mathbf{R}f_*(I^{k+k'} G_{m+k})))$$

est nul pour $k \geq k(m)$, $k' \geq k'(m)$ et $q > -n$. Le théorème de dualité locale ([5], V, 6.2), appliqué en un point t de T en lequel K est normalisé entraîne alors la nullité de φ_i pour tout $i < n$. Le théorème en résulte facilement, compte tenu du fait que S est quasi compact et que le nombre d'entiers q tels que l'on ait

$$H^q(\mathbf{D}_S(\mathbf{R}f_*(I^{k'} G_m))) = 0$$

est fini.

II. — Théorèmes d'algébrisation

0. Reprenons les notations de I, 0, et posons la définition suivante (*cf.* [EGA], III, 5.2.1):

Un faisceau de modules cohérent \mathcal{F} sur \hat{X} est dit *algébrisable* si l'on peut trouver un voisinage ouvert V de Y dans X et un faisceau de modules cohérent F sur V tel que l'on ait un isomorphisme $\hat{F} \simeq \mathcal{F}$.

On se propose d'algébriser les faisceaux formels cohérents sur \hat{X} , sous des hypothèses plus faibles que celles qui figurent dans [SGA 2] (XII, 3.1 et X, 2.1) (3.3, ci-dessous); en particulier on ne suppose pas \mathcal{F} de profondeur ≥ 3 aux points fermés de \hat{X} , et, dans le cas global, on ne suppose pas f plat. La méthode utilisée est celle de [SGA 2], basée sur l'usage de la suite spectrale d'un système projectif de complexes filtrés ([EGA], O_{III}, 13.7.7). On ne peut appliquer [EGA], O_{III}, 13.7.7, qu'à des faisceaux satisfaisant à des hypothèses de profondeur ≥ 3 aux points fermés de \hat{X} . On surmonte cette difficulté en prouvant l'existence d'un morphisme propre $g : Z \rightarrow X$, qui induit un isomorphisme au-dessus d'un ouvert « assez gros » de X , tel que le faisceau $\hat{g}^* \mathcal{F}$ soit de Cohen-Macaulay. [On a noté \hat{g} le morphisme déduit de g par passage aux complétés formels le long de Y et de $g^{-1}(Y)$ respectivement.] Cette possibilité d'étendre la propriété d'être de Cohen-Macaulay fait l'objet du n° 1. On prouve alors des formes techniques des théorèmes de finitude et d'existence de [SGA 2] (VIII et IX, 2), qui font intervenir le morphisme g (n° 2). Elles permettent d'étendre la démonstration classique des théorèmes d'algébrisation au cas qui nous intéresse.

1. **PROLONGEMENT DE LA PROPRIÉTÉ D'ÊTRE DE COHEN-MACAULAY.** — Soient S un schéma local noethérien de point fermé t , F un faisceau cohérent, de Cohen-Macaulay, sur $S - \{t\}$. On se demande s'il est possible de trouver un morphisme propre $g : X \rightarrow S$ tel que $g|_{S - \{t\}}$ soit un isomorphisme et tel que F se prolonge en un faisceau de modules cohérent, de Cohen-Macaulay, sur X . Le problème est trivial si S est régulier de dimension 2, en prenant $X = S$ et en prolongeant F par image directe ([EGA], O_{IV}, 17.3.4). On a également une réponse affirmative si S est régulier complet et si $\dim S = 3$, ou, plus généralement, si $\dim S \geq 3$ et si F se prolonge en un faisceau cohérent sur S , de profondeur $n - 1$. Il suffit alors de prendre pour X un schéma obtenu en faisant éclater un idéal primaire de S . On passe de là au cas où S est équidimensionnel, immersible dans un schéma régulier; le morphisme g a seulement les propriétés indiquées dans 1.3.

PROPOSITION 1.1. — Soient A un anneau local régulier complet de dimension $n \geq 3$, S son spectre. Soit M un A -module de type fini, de profondeur $\geq n - 1$, tel que $F = \tilde{M}$ soit localement libre dans le complémentaire du point fermé de S . Alors on peut trouver un éclatement $g : X \rightarrow S$ d'un idéal primaire de A , tel que X soit régulier et que le quotient de $g^* F$ par son sous-module de torsion soit localement libre.

Bornons-nous au cas où A est un anneau d'égales caractéristiques, le cas d'inégales caractéristiques se traitant de façon voisine ([7], II, 1.3). Si k est le corps résiduel de A , on a un isomorphisme

$$A \simeq k[[X_1, \dots, X_n]]$$

([EGA], O_{IV}, 19.6.3-6.4). Comme on a $\text{prof } M \geq n - 1$, donc $\dim \text{proj } M \leq 1$ ([EGA], O_{IV}, 17.3.4), on peut trouver des A -modules libres de type fini L_0 et L_1 et une suite exacte

$$(\star) \quad 0 \rightarrow L_1 \rightarrow L_0 \rightarrow M \rightarrow 0.$$

Comme le module M est localement libre dans le complémentaire du point fermé de S , $\text{Ext}_A^1(M, A)$ est un module de longueur finie; si \mathfrak{m} est l'idéal maximal de A , on peut donc trouver un entier r tel que l'on ait

$$(\star\star) \quad \mathfrak{m}^r \text{Ext}_A^1(M, A) = 0.$$

Définissons un morphisme de k -algèbres

$$\psi : B = k[[X_1, \dots, X_n]] \rightarrow A,$$

en posant $\psi(X_i) = X_i^r$ pour $1 \leq i \leq n$. Le morphisme ψ est fini, injectif et A est un B -module libre. Soit $R = \text{Spec } B$ et soient s le point fermé de S , t le point fermé de B et $\varphi : S \rightarrow R$ le morphisme déduit de ψ . Si $N = M_{[\psi]}$ et si $G = \tilde{N}$, on a $G = \varphi_* F$. La restriction de G à l'ouvert $R - \{t\}$ est localement libre et l'on a

$$\text{prof}_B N = \text{prof}_A M \geq n - 1$$

([EGA], O_{IV}, 16.4.8).

Comme R et S sont réguliers, \mathcal{O}_R et \mathcal{O}_S sont des complexes dualisants sur R et S respectivement et l'on a $\varphi^! \mathcal{O}_R \simeq \mathcal{O}_S$. D'après le théorème de dualité globale ([5], III, 6.7), on a un isomorphisme

$$R \varphi_* R \text{Hom}_S(F, \mathcal{O}_S) \xrightarrow{\sim} R \text{Hom}_R(R \varphi_* F, \mathcal{O}_R).$$

Comme φ est fini, l'isomorphisme ci-dessus définit des isomorphismes

$$\varphi_* \operatorname{Ext}_S^i(F, \mathcal{O}_S) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Ext}_R^i(\varphi_* F, \mathcal{O}_R).$$

Si \mathfrak{n} est l'idéal maximal de B , la relation (★★) entraîne alors la relation

$$\mathfrak{n} \operatorname{Ext}_B^1(N, B) = 0.$$

Cela revient à dire que $\operatorname{Ext}_B^1(N, B)$ est un module sur le corps résiduel k de B ; si l est sa longueur, on a un isomorphisme

$$\operatorname{Ext}_B^1(N, B) \simeq k^l.$$

Soit $P = B^n/(X_1, \dots, X_n)$; un calcul immédiat montre que l'on a un isomorphisme

$$\operatorname{Ext}_B^1(P, B) \simeq k.$$

On peut donc appliquer [6], 7.4, à N et à P^l . Les modules N et P sont réflexifs et, par construction même, on a un isomorphisme

$$\operatorname{Ext}_B^1(N, B) \simeq \operatorname{Ext}_B^1(P^l, B).$$

Il résulte donc de *loc. cit.* que l'on peut trouver des entiers m, m' positifs, tels que l'on ait un isomorphisme

$$N \oplus B^m \simeq P^l \oplus B^{m'}.$$

Soit $h : Z \rightarrow R$ le schéma obtenu en faisant éclater l'idéal maximal \mathfrak{n} . D'après [EGA] (IV, 19.4.3 et 19.4.4), Z est régulier. Soient d'autre part x_1, \dots, x_n les sections globales de $\mathcal{O}_Z(1)$, images inverses respectivement de X_1, \dots, X_n . Si Q est le quotient de $h^* \tilde{P}$ par son sous-module de torsion, la restriction de Q à l'ouvert $Z_i = D^+(x_i)$ n'est autre que le quotient de $\mathcal{O}_{Z_i}^n$ par l'élément $(x_1/x_i, x_2/x_i, \dots, x_n/x_i)$. Par suite Q est localement libre et il en est de même du quotient K de $h^* G$ par son sous-module de torsion.

On considère alors le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\theta} & Z \\ g \downarrow & & \downarrow h \\ S & \xrightarrow{\varphi} & R \end{array}$$

Comme φ est fidèlement plat, X se déduit de S en faisant éclater l'idéal $\mathfrak{n}A$. Si T désigne le sous-module de torsion de $g^* F$, on a un isomorphisme

$$\theta_*(g^* F/T) \simeq K.$$

Comme K est localement libre, il en est de même de $g^* F/T$.

PROPOSITION 1.2. — *Soit S un schéma local, équidimensionnel, de dimension $n \geq 3$, immersible dans un schéma régulier. Soient t le point fermé de S , $U = S - \{t\}$ et soit F un faisceau de \mathcal{O}_S -modules cohérent, de support S , vérifiant la propriété (S_{n-1}) ([EGA], IV, 5.7.2). Alors on peut trouver un morphisme propre $g : X \rightarrow S$ et un faisceau g -ample L , tels que les propriétés suivantes soient satisfaites :*

(a) *Le morphisme g induit un isomorphisme $g^{-1}(U) \simeq U$ et $L|_{g^{-1}(U)}$ est isomorphe à \mathcal{O}_U .*

(b) *Le faisceau $g^* F$ est de Cohen-Macaulay.*

(c) *Toutes les composantes irréductibles de X sont de dimension n .*

On se ramène, grâce à [2], 2.6, au cas où S est complet. Utilisant [EGA], IV, 19.8.6, on voit que l'on peut trouver un schéma local régulier R de dimension $n+1$, un sous-schéma fermé S' de R et un morphisme local, fini, surjectif, $S \rightarrow S'$. Soit k l'application canonique de S dans R . On écrit $k_* F$ comme quotient d'un faisceau de \mathcal{O}_R -modules L_0 , libre de type fini, d'où une suite exacte

$$(\star) \quad 0 \rightarrow K \rightarrow L_0 \rightarrow k_* F \rightarrow 0.$$

On vérifie facilement que la restriction de K au complémentaire du point fermé de R est localement libre. D'après 1.1, on peut trouver un éclatement $h : Z \rightarrow R$ d'un idéal primaire I de R tel que Z soit régulier et le quotient de $h^* K$ par son sous-module de torsion localement libre. On considère le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{m} & Z \\ g \downarrow & & \downarrow h \\ S & \xrightarrow{k} & R \end{array}$$

Si V est le complémentaire du point fermé de R , le morphisme g induit un isomorphisme $k^{-1}(V) \simeq V$; comme k est fini, on a $k^{-1}(k(t)) = t$ et, par suite, g induit un isomorphisme $g^{-1}(U) \simeq U$. Le faisceau $L = m^* h^* I$ est un faisceau g -ample tel que l'on ait un isomorphisme $L|_{g^{-1}(U)} \simeq \mathcal{O}_U$. Comme $m(X)$ est défini par l'annulation d'une section globale de \mathcal{O}_R , les composantes irréductibles de $m(X)$ sont de dimension n et il en est de même des composantes irréductibles de X .

Enfin on déduit de (\star) la suite exacte

$$0 \rightarrow L_1 \xrightarrow{a} h^* L_0 \rightarrow h^* k_* F \rightarrow 0,$$

où L_1 est le quotient de $h^* K$ par son sous-module de torsion donc est localement libre. Comme Z est régulier de dimension $n+1$, le faisceau $m_* g^* F = h^* k_* F$ est de profondeur n en tout point fermé de Z donc est de Cohen-Macaulay et il en est de même de $g^* F$.

2. THÉORÈMES DE FINITUDE ET THÉORÈMES D'EXISTENCE. — Dans tout ce numéro, S désigne un schéma noethérien localement immersible dans un schéma régulier de dimension finie. On se donne un morphisme propre $f : X \rightarrow S$ et un faisceau f -ample L (resp. un ouvert X de S), un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} Z & & \\ g \downarrow & \searrow h & \\ V & \xrightarrow{i} & X \end{array}$$

où i est une immersion ouverte et g un morphisme propre, un faisceau g -ample L' . Soit $T = X - V$ et notons V_1 l'ensemble des points x de V tels que x soit fermé dans S

fibre au-dessus de S ou tels que l'on ait

$$\text{codim}(\{\overline{x}\} \cap T, \{\overline{x}\}) = 1$$

[resp. tels que l'on ait $\text{codim}(\{\overline{x}\} \cap T, \{\overline{x}\}) = 1$].

L'énoncé ci-dessous est une généralisation technique du théorème de finitude de [SGA 2], VIII, 2.4.

PROPOSITION 2.1. — Soient k un entier et F un complexe de faisceaux de modules sur Z , à cohomologie cohérente, bornée. On suppose que, pour tout point z de Z , fermé dans sa fibre au-dessus de V , tel que $f(z)$ appartienne à V_1 , on a

$$H_z^k F = 0.$$

Alors on peut trouver un entier n'_0 et, pour tout $n' \geq n'_0$, un entier n_0 (dépendant de n') tels que, pour tout $n \geq n_0$, on ait

$$R^k(fh)_*(F \otimes L'^{\otimes -n'} \otimes h^*(L^{\otimes -n})) = 0$$

[resp. on peut trouver un entier n'_0 tel que, pour tout $n' \geq n'_0$, le faisceau $R^k h_*(F \otimes L'^{\otimes -n'})$ soit cohérent].

La démonstration est analogue à celle de [SGA 2], VIII, 2.1. On écrit l'isomorphisme de bidualité

$$F \simeq D_Z D_Z F.$$

On en déduit, après application du foncteur $R(fh)_*$ (resp. $R h_*$) une suite spectrale dont l'aboutissement est le terme

$$R^{p+q}(fh)_* F \quad (\text{resp. } R^{p+q} h_* F).$$

On montre alors que les termes E_2^{p+q} sont cohérents pour $p+q = k$, du moins si l'on remplace F par $F \otimes L'^{\otimes -n'} \otimes h^*(L^{\otimes -n})$ (resp. $F \otimes L'^{\otimes -n'}$) avec n et n' assez grands. (Voir [7], III, 1.1-1.2).

On suppose maintenant le schéma S affine (resp. on suppose S local complet de point fermé t et on pose $X = S - \{t\}$). Soient s une section globale de L définissant une section hyperplane Y de X (resp. soit s une section globale de \mathcal{O}_S et Y la partie fermée de X définie par s). On note \hat{S} le complété formel de S le long de l'idéal zéro [resp. le complété formel de S le long de $V(s)$]. On note \hat{X} le complété formel de X le long de Y , \hat{Z} le complété formel de Z le long de $h^{-1}(Y)$. Les morphismes $\hat{f}, \hat{g}, \hat{h}$ désignent les complétés formels respectifs des morphismes f, g, h . Enfin, si z est un point de Z , on note \hat{Z}_z le spectre de l'anneau local de \hat{Z} en z . Si \mathcal{F} est un faisceau de modules cohérent sur \hat{Z} , on note \mathcal{F}_z l'image inverse de \mathcal{F} sur \hat{Z}_z . Pour tous entiers n, n' , on pose

$$\mathcal{F}_{-n'}(n) = \mathcal{F} \otimes \hat{L}'^{\otimes -n'} \otimes \hat{h}^* \hat{L}^{\otimes n} \quad [\text{resp. } \mathcal{F}_{-n'} = \hat{h}_*(\mathcal{F} \otimes \hat{L}'^{\otimes -n'})].$$

Comme dans [SGA 2], IX, 2.2, le théorème de finitude sert à prouver, sous des hypothèses convenables, que l'image directe d'un faisceau formel cohérent est cohérente. Nous donnons ci-dessous une forme technique de ce théorème d'existence. Il résulte encore

de [EGA], O_{III}, 13.7.7; cependant, si l'on ne suppose pas s non diviseur de zéro, on a besoin d'une généralisation de *loc. cit.* au cas d'un système projectif de complexes filtrés ([7], III, 2.1).

PROPOSITION 2.2. — Soit \mathcal{F} un faisceau de modules cohérent sur \hat{Z} . Supposons que, pour tout point x de $\hat{X} \cap V_1$ et, pour tout point z de \hat{Z} , fermé dans sa fibre au-dessus d'un tel point x , on ait

$$\text{prof}_z \mathcal{F}_z \geq 3.$$

Alors on peut trouver un entier n'_0 tel que, pour tout $n' \geq n'_0$ et tout n , le faisceau $(f\hat{h})_*(\mathcal{F}_{-n'}(n))$ [resp. $\hat{h}_*(\mathcal{F}_{-n'})$] soit cohérent.

Dans le cas global, on a de plus la propriété suivante :

Si W est un ouvert de V tel que g induise un isomorphisme $g^{-1}(W) \simeq W$ et $n' \geq n'_0$ entier fixé, on peut trouver un entier n_0 (dépendant de n') et, pour tout $n \geq n_0$, un ensemble fini $(s_i)_{i \in I}$ de sections globales de $\hat{h}_* \mathcal{F}_{-n'}(n)$ tel que les $s_i|_W$, $i \in I$, engendrent $\hat{h}_* \mathcal{F}_{-n'}(n)|_W$.

3. ALGÈBRISATION DES FAISCEAUX FORMELS COHÉRENTS. — On reprend les notations de I, 0. Si x est un point de \hat{X} , on note \hat{X}_x le spectre de l'anneau local de \hat{X} en x , d'où un morphisme de schémas

$$\hat{X}_x \rightarrow X.$$

Si E est une partie de X , on désigne par E_x l'image inverse de E par le morphisme précédent. En particulier U_x désigne un ouvert de \hat{X}_x . On dit qu'un morphisme $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ de faisceaux de modules cohérents sur \hat{X} est un isomorphisme au-dessus de U si, pour tout point x de \hat{X} , il en est ainsi du morphisme $\mathcal{F}_x|_{U_x} \rightarrow \mathcal{G}_x|_{U_x}$.

Si l'on suppose U affine, le théorème 3.3 ci-dessous permet d'algébriser un faisceau de modules cohérent \mathcal{F} qui satisfait à des hypothèses de profondeur aux seuls points des U_x . Nous aurons besoin, pour le démontrer, d'un théorème d'algébrisation relatif au cas d'un faisceau formel engendré par ses sections (3.1 ci-dessous). Cette dernière hypothèse simplifie beaucoup l'algébrisation car, si $a : \hat{\mathcal{O}}_X^n \rightarrow \mathcal{F}$ est un homomorphisme surjectif, on peut ramener l'algébrisation de \mathcal{F} à celle de $\text{Ker } a$; si X est régulier de dimension ≥ 3 , des hypothèses de profondeurs ≥ 2 sur \mathcal{F} entraînent des hypothèses de profondeurs ≥ 3 sur $\text{Ker } a$.

PROPOSITION 3.1. — On suppose l'ouvert U affine [resp. de la forme $V(f)$ où f est une section globale de \mathcal{O}_S]. Soit \mathcal{F} un faisceau de modules cohérent sur \hat{X} qui satisfait aux conditions suivantes :

(a) \mathcal{F} est engendré par ses sections.

(b) Pour tout point x de \hat{X} , fermé dans sa fibre (resp. fermé), pour tout point z de \hat{X}_x , appartenant à U_x , on a

$$\text{prof}_z \mathcal{F}_x \geq 2 - \dim \overline{\{z\}}$$

(où $\overline{\{z\}}$ désigne l'adhérence de z dans \hat{X}_x). Alors \mathcal{F} est algébrisable.

COROLLAIRE 3.2. — On suppose U affine [resp. de la forme $V(f)$, où f est une section globale de \mathcal{O}_S]. Soit \mathcal{C} la catégorie des faisceaux de modules cohérents \mathcal{F} sur \hat{X} qui satisfont à la condition suivante :

(i) Pour tout point x de \hat{X} , fermé dans sa fibre (resp. fermé), pour tout point z de \hat{X}_x , appartenant à U_x , on a

$$\text{prof}_z \mathcal{F}_x \geq 3 - \dim \overline{\{z\}}.$$

Soit $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un monomorphisme d'objets de \mathcal{C} . Alors, si \mathcal{G} est algébrisable, il en est de même de \mathcal{F} .

Plaçons-nous dans le cas global et supposons S affine. On considère la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{K} \rightarrow 0.$$

Le fait que \mathcal{G} soit algébrisable et satisfasse à (i) entraîne que, pour un entier n convenable, $\mathcal{K}(n)$ satisfait aux hypothèses de 3.1, donc est algébrisable. Le fait qu'il soit de même de \mathcal{F} résulte alors de I, 1.4.

THÉORÈME 3.3. — On suppose l'ouvert U affine. Alors tout faisceau de modules cohérent \mathcal{F} sur \hat{X} qui satisfait à la condition (i) de 3.2 est algébrisable.

Démonstration :

(1) Cas où l'on suppose satisfaites les conditions suivantes :

(i) S est affine, X est projectif sur S , Y est une section hyperplane de X (resp. S est un schéma local complet et I est engendré par une section globale de S).

(ii) X est irréductible, le support de \mathcal{F} est \hat{X} et \mathcal{F} vérifie la condition (S_2) [i. e. \mathcal{F}_x vérifie (S_2) pour tout $x \in \hat{X}$].

Nous allons voir que l'on peut trouver une partie fermée T de Y , un ouvert W de $V = X - T$ contenant U , un morphisme propre $g : Z \rightarrow V$ qui induit un isomorphisme $g^{-1}(W) \simeq W$, un faisceau g -ample L' , tels que les conditions suivantes soient satisfaites :

(a) On a $\text{codim}(T, X) \geq 4$ et $\text{codim}(V - W, V) \geq 3$.

(b) Si \hat{Z} désigne le complété formel de Z le long de $H = g^{-1}(Y \cap V)$ et $\hat{g} : \hat{Z} \rightarrow \hat{V}$ le morphisme déduit de g par complétion formelle, le faisceau $\hat{g}^*(\mathcal{F}|_V)$ vérifie la condition (S_3) .

(c) Pour tout point $z \in Z$, fermé dans sa fibre au-dessus de V , on a

$$\dim \mathcal{O}_{Z, z} = \dim \mathcal{O}_{V, g(z)}.$$

Soit en effet E l'ensemble des points y de Y tels que \mathcal{F}_y ne vérifie pas (S_3) . D'après [EGA], IV, 6.11.2, E est une partie fermée de Y . Comme \mathcal{F} vérifie (S_2) , on a

$$\dim \mathcal{O}_{\hat{X}, y} \geq 3$$

en tout point $y \in E$. Notons $(y_i)_{i \in I}$ l'ensemble des points de E tels que l'on ait $\dim \mathcal{O}_{\hat{X}, y_i} = 3$. Cet ensemble est contenu dans l'ensemble des points maximaux de E donc est fini. Pour

tout $i \in I$, l'anneau local \mathcal{O}_{X, y_i} est formellement équidimensionnel ([EGA], IV, 7.1.10 et 7.1.8). Par suite $\mathcal{O}_{\hat{X}, y_i}$ est équidimensionnel de dimension 3. Comme \mathcal{F}_{y_i} vérifie (S₂) on peut appliquer 1.3 relativement à l'entier 3. Soit $W_{y_i} = \text{Spec } \mathcal{O}_{\hat{X}, y_i} - \{y_i\}$. D'après *loc. cit.*, on peut trouver un morphisme propre

$$g_{y_i} : Z_{y_i} \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_{\hat{X}, y_i}$$

qui induit un isomorphisme $g_{y_i}^{-1}(W_{y_i}) \simeq W_{y_i}$, un faisceau g_{y_i} -ample L'_{y_i} , tel que $L'_{y_i} | g_{y_i}^{-1}(W_{y_i})$ soit isomorphe au faisceau structural de W_{y_i} et tels que le faisceau $g_{y_i}^* \mathcal{F}_{y_i}$ vérifie (S₃). D'après [EGA], IV, (8.2, 8.10.5, 8.5.2, 8.10.5.2), il existe un voisinage ouvert V_i de y_i dans X , un morphisme propre

$$g_i : Z_i \rightarrow V_i,$$

un faisceau g_i -ample L'_i , tels que l'image inverse de g_i par le morphisme canonique $\text{Spec } \mathcal{O}_{\hat{X}, y_i} \rightarrow V_i$ s'identifie à g_{y_i} , l'image inverse de L'_i étant alors L'_{y_i} . Soit

$$W_i = V_i - (\overline{\{y_i\}} \cap V_i).$$

Quitte à restreindre V_i à un voisinage ouvert de y_i dans V_i on peut supposer que g_i induit un isomorphisme $g_i^{-1}(W_i) \simeq W_i$ et que $L'_i | W_i$ est isomorphe à \mathcal{O}_{W_i} ([EGA], IV, 8.5.2.4, 8.10.5). On peut aussi supposer que les points maximaux de Z_i sont ceux de Z_{y_i} ; il en résulte que les V_i satisfont à la condition (c). On note \hat{Z}_i le complété formel de Z_i le long de $g_i^{-1}(Y \cap V_i)$, etc. Comme l'ensemble des points de Z_i où $\hat{g}_i^*(\mathcal{F} | \hat{V}_i)$ ne vérifie pas (S₃) est une partie fermée ne rencontrant pas $g_i^{-1}(y_i)$, on peut supposer, quitte à restreindre V_i , que $\hat{g}_i^*(\mathcal{F} | V_i)$ vérifie (S₃). Quitte à enlever à chaque V_i la réunion des $\overline{\{y_j\}}$ pour $j \neq i$, on peut supposer que l'on a

$$V_i \cap V_j \cap \overline{\{y_i\}} \cap \overline{\{y_j\}} = \emptyset \quad \text{pour tous } i, j \in I, i \neq j.$$

Soient T' l'ensemble des points de $Y - \bigcup_{i \in I} (V_i \cap Y)$ en lesquels \mathcal{F} ne vérifie pas (S₃), $T'_i = \{y_i\} \cap (X - \bigcup_{i \in I} V_i)$ et soit

$$T = T' \cup \left(\bigcup_{i \in I} T'_i \right).$$

Comme la réunion des V_i contient les points y_i , i. e. les points en lesquels \mathcal{F} ne vérifie pas (S₃), tels que l'on ait $\dim \mathcal{O}_{X, y_i} = 3$, on a

$$\text{codim}(T, X) \geq 4.$$

Soient $V = X - T$ et $W = V - \bigcup_{i \in I} \overline{\{y_i\}}$. Comme les y_i sont les points maximaux de $V - W$, on a bien $\text{codim}(V - W, V) \geq 3$, d'où la condition (a).

On définit alors Z en recollant la famille de V -schémas formée de W et des Z_i . Si g est le morphisme canonique $Z \rightarrow V$, g est propre et l'on obtient un faisceau g -ample par recollement de \mathcal{O}_W et des L'_i . Les conditions (a), (b) et (c), sont satisfaites par construction.

Montrons que l'on peut appliquer 2.2. Comme \mathcal{F} vérifie (i), les fibres de f sont de dimension ≥ 3 (resp. on a $\dim X \geq 3$). On a donc $\dim \mathcal{O}_{\hat{Z}, z} \geq 3$ en tout point z de \hat{Z} , fermé dans sa fibre au-dessus de \hat{V} , de projection un point $x \in V_1$. Comme $\hat{g}^* \mathcal{F}$ vérifie (S₃), on a bien

$$\text{prof}_z(\hat{g}^*(\mathcal{F} | \hat{V})_z) \geq 3.$$

Plaçons-nous dans le cas global. Il résulte de 2.2, dont on reprend les notations, que l'on peut trouver des entiers n'_0, n_0 , des sections globales $s_j, j \in J$, de $\hat{h}_* \hat{h}^* \mathcal{F}_{-n'_0}(n_0)$, tels que les $s_j | \hat{W}$ engendrent le faisceau $\hat{h}_* \hat{h}^* \mathcal{F}_{-n'_0}(n_0) | \hat{W}$. Ce dernier faisceau n'est autre que $\mathcal{F}(n_0) | \hat{W}$. Si k est l'immersion ouverte canonique de W dans X , on peut donc trouver un faisceau de \mathcal{O}_X -modules L , libre de type fini, et un morphisme

$$a : \hat{L} \rightarrow \hat{k}_*(\mathcal{F}(n_0) | \hat{W}),$$

tel que $a | \hat{W}$ soit surjectif.

Soit $\mathcal{G} = \text{Im } a$. Le faisceau \mathcal{G} est engendré par ses sections et, comme $\hat{k}_*(\mathcal{F}(n_0) | \hat{W})$ vérifie la condition (S₁), il en est de même du sous-faisceau \mathcal{G} . Comme les fibres de f sont de dimension ≥ 3 , on peut appliquer 3.2 à \mathcal{G} , ce qui montre que \mathcal{G} est algébrisable. Soit G un faisceau de modules cohérent sur X tel que l'on ait un isomorphisme $\hat{G} \simeq \mathcal{G}$. Le faisceau $\hat{G} | \hat{W}$ est isomorphe à $\mathcal{F}(n_0) | \hat{W}$. On a alors des isomorphismes canoniques

$$(k_*(G | W))^\wedge \simeq \hat{k}_*(\hat{G} | \hat{W}) \simeq \hat{k}_*(\mathcal{F}(n_0) | \hat{W}), \quad \mathcal{F}(n_0) \simeq \hat{k}_*(\mathcal{F}(n_0) | \hat{W}).$$

Ceci prouve que \mathcal{F} est algébrisable par le faisceau $k(G_*(-n_0) | W)$.

Le cas local est analogue. D'après 2.2, on peut trouver un entier n' tel que le faisceau $\hat{h}_* \mathcal{F}_{-n'}$ soit cohérent. Comme S est complet, $\hat{h}_* \mathcal{F}_{-n'}$ est algébrisable et la démonstration s'achève comme dans le cas global.

(2) *Cas général.* — Dans le cas global, on se ramène au cas où S est régulier, où X est de la forme \mathbb{P}_S^r , avec $r \geq 3$, et Y une section hyperplane de X . On montre alors que l'on peut trouver des faisceaux formels cohérents $\mathcal{F}_i, 1 \leq i \leq n$, qui vérifient (S₂), tels que, pour tout point $x \in \hat{X}$, tout point associé à l'un des \mathcal{F}_{ix} soit associé à \mathcal{F}_x , et un monomorphisme

$$\mathcal{F} \rightarrow \bigoplus_{1 \leq i \leq n} \mathcal{F}_i,$$

La condition (i) sur \mathcal{F} entraîne alors que, en tout point maximal u du support de \mathcal{F}_{ix} , on a $\dim \overline{\{u\}} \geq 3$, d'où le fait que \mathcal{F}_i appartient à \mathcal{C} . Il suffit donc, pour prouver que \mathcal{F} est algébrisable, de montrer qu'il en est ainsi des \mathcal{F}_i . On est donc ramené au cas où \mathcal{F} vérifie (S₂) et un raisonnement analogue permet de se ramener au cas où toutes les hypothèses de (1) sont satisfaites.

Le cas local se traite de façon identique au cas global, à l'exception de la réduction du cas U affine au cas U défini par une équation. Cette réduction se fait par une méthode très technique, qui consiste à considérer U comme ouvert d'un schéma de dimension $\dim S + c$ (c entier ≥ 0 convenablement choisi), complémentaire d'une partie fermée Y définie

par $c+1$ équations. On applique alors une généralisation du théorème 3.3, (1), valable pour Y comme ci-dessus.

Étant donné un objet \mathcal{F} de \mathcal{C} et un faisceau cohérent F sur X tel que l'on ait $\hat{F} \simeq \mathcal{F}$, on peut supposer, quitte à modifier F sur un ouvert ne rencontrant pas Y , que l'on a $\text{prof}_u F \geq 2$ en tout point u tel que $\overline{\{u\}} \cap Y = \emptyset$. Compte tenu de I, 1.4, on obtient le corollaire suivant :

COROLLAIRE 3.4. — *Soit \mathcal{C} la catégorie des faisceaux de modules cohérents sur X qui satisfont aux conditions suivantes :*

(i) *Pour tout point y de Y , fermé dans sa fibre (resp. tel que $\delta, y = 1$), pour toute généralisation u de y , appartenant à U , on a*

$$\text{prof}_u F \geq 3 - \text{codim}(\overline{\{y\}}, \overline{\{u\}}).$$

(ii) *Pour tout point u de U tel que $\overline{\{u\}} \cap Y = \emptyset$, on a*

$$\text{prof}_u F \geq 2.$$

Soit \mathcal{C} la catégorie des faisceaux de modules cohérents sur \hat{X} , qui satisfont à la condition (i) de 3.2. Alors le foncteur de \mathcal{C} dans \mathcal{C} qui, à un faisceau, associe son complété formel, est une équivalence de catégories.

Dans le cas des faisceaux formels localement libres, le théorème 3.3 fournit des exemples où la condition Leff de [SGA 2], X, 2, est satisfaite :

COROLLAIRE 3.5 (cf. [SGA 2], X, 2.1 et 2.2). — *Supposons que U soit affine, vérifie la condition (S_2) et que les composantes irréductibles des fibres de f soient de dimension ≥ 3 (resp. que les composantes irréductibles de X soient de dimension ≥ 3). Alors la condition Leff(X, Y) est satisfaite.*

COROLLAIRE 3.6. — *Sous les hypothèses de 3.5, si V est un voisinage ouvert de Y dans X , le morphisme canonique*

$$\pi_0(Y) \rightarrow \pi_0(V)$$

est bijectif. Si Y est connexe et si ξ est un point géométrique de Y , le morphisme canonique

$$\pi_1(Y, \xi) \rightarrow \lim_{\substack{\leftarrow \\ V}} \pi_1(V, \xi),$$

où V parcourt les voisinages ouverts de Y dans X , est bijectif.

III. — Théorèmes de comparaison en cohomologie étale des faisceaux d'ensembles ou de groupes non nécessairement commutatifs

1. THÉORÈMES DE COMPARAISON.

1.1. On désigne toujours par S un schéma noethérien localement immersible dans un schéma régulier (resp. un schéma local noethérien), par $f : X \rightarrow S$ un morphisme propre

(resp. par X le complémentaire du point fermé t de S); U est un ouvert de X , Y son complémentaire, $j: Y \rightarrow X$ l'immersion canonique. Dans le cas local, on note S' le complété de S .

L'énoncé II, 3.6, peut s'exprimer, en termes de cohomologie étale [SGA 4], de la façon suivante :

Sous les hypothèses de *loc. cit.*, pour tout faisceau en groupes finis constant F , les morphismes canoniques

$$\varphi_0: H^0(X, F) \rightarrow H^0(Y, j^*F), \quad \varphi_1: \varinjlim_V H^1(V, F) \rightarrow H^1(Y, j^*F),$$

où V parcourt les voisinages ouverts de Y dans X , sont bijectifs.

Si X est connexe, la bijectivité de φ_0 traduit le fait que Y est connexe. Supposons seulement que les composantes irréductibles des fibres du morphisme f soient de dimension ≥ 2 (resp. que X soit de dimension ≥ 2) et que X soit intègre [ne vérifiant pas nécessairement la condition (S_2)]; alors, si \tilde{X} est le normalisé de X dans une extension finie $\overline{k(X)}$ de son corps des fractions, la bijectivité de φ_1 implique que le fermé $\tilde{Y} = Y \times_X \tilde{X}$ est connexe.

Dans le cas local, l'énoncé II, 3.6, a été démontré sous l'hypothèse S complet. Par descente, on étend le résultat précédent au cas où l'hypothèse S complet est remplacée par l'une des deux conditions suivantes :

(a) S est hensélisé d'une algèbre de type fini sur un anneau de Dedekind excellent (utiliser [1], 2.2).

(b) S est hensélien, de caractéristique zéro et le morphisme canonique $S' \rightarrow S$ est régulier (utiliser [SGA 4], XIX, 4.1).

Les résultats précédents sont des analogues, dans le cas des faisceaux en groupes constants constructibles, non nécessairement commutatifs, des théorèmes de Lefschetz démontrés, dans [SGA 2], XIV, 4, pour les faisceaux en groupes commutatifs. On aura besoin, dans le n° 2, d'étendre ces résultats au cas d'un faisceau en groupes non nécessairement constant et plus généralement au cas d'un champ Φ ([4], II). La démonstration de ces énoncés généraux, à partir des résultats relatifs aux faisceaux constants est formelle quoique fastidieuse. Donnons l'énoncé général valable pour un champ et les corollaires relatifs au cas d'un faisceau d'ensembles ou de groupes F ; ceux-ci sont les cas particuliers obtenus en considérant respectivement le champ en catégories discrètes associé à F et le champ des toseurs sous F . Si $i: W \rightarrow X$ est une immersion ouverte, on dit que la profondeur de Φ le long de $X - W$ est ≥ 1 (resp. ≥ 2 , resp. ≥ 3) si le foncteur

$$\Phi \rightarrow i_* i^* \Phi$$

est fidèle (resp. pleinement fidèle, resp. une équivalence) ([7], 5.2).

THÉORÈME 1.2. — Soient Φ un champ sur X et supposons U affine sur S .

(1) On suppose que, pour tout point $u \in U$ tel que $\overline{\{u\}} \cap Y \neq \emptyset$, on a

$$\text{prof}_u \Phi \geq 2 - \text{deg tr } k(u)/k(f(u)) \quad (\text{resp. } \text{prof}_u \Phi \geq 2 - \dim \overline{\{u\}})$$

$\overline{\{u\}}$ désigne l'adhérence de u dans X). Dans le cas local, on suppose que le morphisme $S' \rightarrow S$ vérifie la condition (S_2) ([EGA], IV, 5.7.1). Alors le foncteur

$$\varphi : \lim_{\substack{\longrightarrow \\ \mathcal{V}}} \Phi(V) \rightarrow j^* \Phi(Y),$$

où \mathcal{V} parcourt les voisinages ouverts de Y dans X , est pleinement fidèle.

(2) On suppose que, pour tout point $u \in U$ tel que $\overline{\{u\}} \cap Y \neq \emptyset$, on a

$$\text{prof}_u \Phi \geq 3 - \text{deg tr } k(u)/k(f(u)) \quad (\text{resp. } \text{prof}_u \Phi \geq 3 - \dim \overline{\{u\}}).$$

On suppose le champ Φ ind-fini ([SGA 1], XIII, 0) et, dans le cas local, on suppose que S est complet ou que l'une des conditions (a) ou (b) de 1.1 est satisfaite. Alors le foncteur φ est une équivalence de catégories.

Sous les hypothèses de (1), soit x un point de U tel que $\overline{\{x\}} \cap Y \neq \emptyset$. Si la fibre de f en $f(x)$ est de dimension ≥ 2 (resp. si l'on a $\dim \overline{\{x\}} \geq 2$), on a vu, dans 1.1, que, pour toute extension finie $\widetilde{k}(x)$ de $k(x)$, le fermé \widetilde{Y} est connexe. Par suite, pour tout point $x \in U$ tel que $\overline{\{x\}} \cap Y \neq \emptyset$, l'une des conditions suivantes est satisfaite :

- (i) On a $\text{prof}_x F \geq 1$.
- (ii) Pour toute extension finie $\widetilde{k}(x)$ de $k(x)$, \widetilde{Y} est connexe.

On va déduire de ces conditions la possibilité de prolonger α .

Soit $k : X' \rightarrow X$ un morphisme étale séparé de type fini, tel que l'on ait $k(X') \supset Y$ et tel qu'il existe une section $\beta \in F(X')$ dont la restriction à $Y' = Y \times_X X'$ soit égale à l'image inverse de α . On considère le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} X' \times_X X' & \xrightarrow{p_1} & X' \\ p_2 \downarrow & \searrow p & \downarrow \\ X' & \longrightarrow & X \end{array}$$

et on pose $\beta_1 = p_1^{-1} \beta$, $\beta_2 = p_2^{-1} \beta$. Soit Z l'ensemble des points de $X' \times_X X'$ où l'on a $\beta_1 \neq \beta_2$. On peut supposer, quitte à restreindre X' à un ouvert, que, pour tout point maximal z de Z , on a

$$(\star) \quad \overline{p_1(z)} \cap Y' \neq \emptyset, \quad \overline{p_2(z)} \cap Y' \neq \emptyset.$$

On va montrer qu'alors $Z = \emptyset$. Supposons que l'on ait $Z \neq \emptyset$; soit $T = p(Z)$ et x un point maximal de T . Comme x est maximal, on a $\text{prof}_x F = 0$ et, par suite, la condition (ii) est satisfaite en x . D'après [EGA], IV, 18.10.8, on peut trouver une extension finie séparable $\widetilde{k}(x)$ de $k(x)$ telle que \widetilde{X}' soit somme de schémas intègres X_c , $c \in C$, et que les morphismes structuraux $X_c \rightarrow \widetilde{X}$ soient des immersions ouvertes. A la section β correspond, par image inverse, une famille de sections $\beta_c \in F(X_c)$. Comme $x \in T$, il existe deux indices a ,

$b \in C$ tels que l'on ait

$$\beta_a \neq \beta_b$$

au point générique \tilde{x} de \tilde{X} . D'autre part on a une partition de C en sous-ensembles C_1, \dots, C_r tels que $(\beta_c)_{\tilde{x}} = (\beta_d)_{\tilde{x}}$ si et seulement si c et d appartiennent à un même ensemble C_i . D'après ce qui précède, on a $r \geq 2$. Comme les sections β_c sont égales en tout point de Y et comme l'ensemble des points où deux sections sont différentes est une partie fermée, les r ouverts

$$Y_i = \bigcup_{c \in C_i} X_c \cap \tilde{Y}$$

de Y n'ont aucun point commun. Les relations (★) montrent que l'on a

$$X_a \cap \tilde{Y} \neq \emptyset, \quad X_b \cap \tilde{Y} \neq \emptyset,$$

ce qui prouve que \tilde{Y} est disconnexe, contrairement à (ii). On a donc $Z = \emptyset$ et la section β se descend en une section de F au-dessus de $k(X')$ qui prolonge α .

Le fait que le foncteur φ soit essentiellement surjectif se démontre de façon analogue ([7], V, 4.2). Donnons seulement de brèves indications. On suppose, pour fixer les idées, que Φ est le champ des toseurs sous un faisceau en groupes ind-fini F . On remarque qu'en tout point $x \in U$, l'une des conditions suivantes est satisfaite :

(i) On a $\text{prof}_x F \geq 2$.

(ii) On a $\text{prof}_x F \geq 1$ et, pour toute extension finie $\overline{k(x)}$ de $k(x)$, \tilde{Y} est connexe.

(iii) Pour toute extension finie $\overline{k(x)}$ de $k(x)$, \tilde{Y} est connexe et, pour tout faisceau en groupes constant fini G , tout toseur sur \tilde{Y} de groupe G se prolonge à un voisinage ouvert de \tilde{Y} .

Soit P un toseur sur Y de groupe $j^* F$. On lui associe un recouvrement $(X_i)_{i \in I}$ d'un voisinage de Y , par des schémas étales sur X , et, pour tous $i, j \in I \times I$, un recouvrement de $X_{ij} = X_i \times_X X_j$ par des schémas étales $(V_a)_{a \in A_{ij}}$, des sections $u_a \in F(V_a)$ telles que les restrictions à Y des u_a , $a \in A_{ij}$, se recollent en une section $v_{ij} \in j^* F(Y_{ij})$ et que les v_{ij} , $i, j \in I \times I$, définissent un 1-cocycle correspondant à P . On montre alors que, quitte à remplacer le recouvrement $(X_i)_{i \in I}$ par un recouvrement plus fin, les u_a , $a \in A_{ij}$, se recollent en une section u_{ij} et que les u_{ij} , $i, j \in I \times I$, définissent un 1-cocycle d'un recouvrement étale d'un voisinage de Y à valeurs dans F . On interprète, pour cela, le fait que deux sections u_a diffèrent en un point au-dessus d'un point $x \in X$ ou le fait que la condition de cocycle n'est pas vérifiée au-dessus de x , après un changement de base $\tilde{X} \rightarrow X$ correspondant à une extension $\overline{k(x)}$ de $k(x)$ convenablement choisie et on utilise les conditions (i), (ii), (iii).

COROLLAIRE 1.3. — Comme dans 1.2, on suppose U affine sur S .

(1) Soit F un faisceau d'ensembles sur X tel que, pour tout point $u \in U$ tel que $\overline{\{u\}} \cap Y \neq \emptyset$, on ait

$$\text{prof}_u F \geq 2 - \text{deg tr } k(u)/k(f(u)) \quad (\text{resp. } \text{prof}_u F \geq 2 - \dim \overline{\{u\}}).$$

Dans le cas local, on suppose que le morphisme $S' \rightarrow S$ vérifie la condition (S_2) . Alors le morphisme canonique

$$\lim_{\vec{V}} H^0(V, F) \rightarrow H^0(Y, j^*F),$$

où V parcourt les voisinages ouverts de Y dans X , est bijectif.

Si l'on a de plus

$$\text{prof}_u F \geq 2$$

en tout point $u \in U$ tel que $\overline{\{u\}} \cap Y = \emptyset$, il en est de même du morphisme

$$H^0(X, F) \rightarrow H^0(Y, j^*F).$$

(2) Soit F un faisceau en groupes ind-fini sur X . On suppose que, pour tout point $u \in U$ tel que $\overline{\{u\}} \cap Y \neq \emptyset$, on a

$$\text{prof}_u F \geq 3 - \text{deg tr } k(u)/k(f(u)) \quad (\text{resp. } \text{prof}_u F \geq 3 - \dim \overline{\{u\}}).$$

Dans le cas local, on suppose que S est complet ou que S vérifie l'une des conditions (a) ou (b) de 1.1. Alors le morphisme canonique

$$\lim_{\vec{V}} H^1(V, F) \rightarrow H^1(Y, j^*F)$$

est bijectif.

Si l'on a de plus

$$\text{prof hop}_u F \geq 3$$

([SGA 2], XIV, 1) en tout point $u \in U$ tel que $\overline{\{u\}} \cap Y = \emptyset$, il en est de même du morphisme

$$H^1(X, F) \rightarrow H^1(Y, j^*F).$$

2. CAS D'UN SCHÉMA QUASI-PROJECTIF SUR UN CORPS. — Soient k un corps algébriquement clos et X un sous-schéma d'un espace projectif type $P = \mathbf{P}_k^r$. On se propose de comparer le groupe fondamental de X et de sections hyperplanes convenablement choisies. Soit S l'espace projectif dual de P ; l'ensemble des sections hyperplanes de P s'identifie à l'ensemble des points rationnels de S . On emploiera l'expression « pour toute section hyperplane assez générale, ... » dans le sens suivant : il existe un ouvert non vide U de S tel que, pour toute section hyperplane correspondant à un point rationnel de U , ...

THÉORÈME 2.1. — Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique zéro, X un sous-schéma connexe d'un espace projectif type P . Supposons que, pour tout point $x \in X$, on ait

$$(\star) \quad \text{prof hop}_x X \geq 3 - \dim \overline{\{x\}},$$

([SGA 2], XIV, 1) (condition réalisée si X est régulier de dimension ≥ 3). Alors, si Y est une section hyperplane assez générale de X , Y est connexe et, si ξ est un point géométrique

de Y , le morphisme canonique

$$\pi_1(Y, \xi) \rightarrow \pi_1(X, \xi)$$

est bijectif.

Soient Q l'adhérence schématique de X dans P , Z une section hyperplane de Q , Y sa trace sur X , d'où un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{j} & X \\ g \downarrow & & f \downarrow \\ Z & \xrightarrow{i} & Q \end{array}$$

où f est une immersion ouverte dominante et i une immersion fermée. Si C est un groupe fini, on note Φ_C le champ des toseurs sous le faisceau en groupes constant associé à C . On doit montrer que, pour tout groupe fini C et toute section hyperplane « assez générale » Z , le foncteur canonique

$$\varphi : \Phi_C(X) \rightarrow j^* \Phi_C(Y)$$

est une équivalence de catégories. Pour tout point $p \in Q$, on a

$$\text{prof}_p(f_* \Phi_C) \geq 3 - \dim \overline{\{p\}};$$

cette relation résulte en effet de l'hypothèse si $p \in X$; elle est vraie, par définition de la profondeur, si $p \notin X$. D'après 1.2, le foncteur canonique

$$\psi : f_* \Phi_C(Q) \rightarrow i^* f_* \Phi_C(Z)$$

est une équivalence de catégories. On considère le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \Phi_C(X) & \xrightarrow{\varphi} & j^* \Phi_C(Y) & \xrightarrow{\beta} & g_* j^* \Phi_C(Z) \\ \uparrow \eta & & & & \uparrow \theta \\ f_* \Phi_C(Q) & \xrightarrow{\psi} & i^* f_* \Phi_C(Z) & & \end{array}$$

où θ est le morphisme de changement de base ([4], VII, 2.1.2.2) et où α et β sont des équivalences. Le théorème sera prouvé si l'on montre que, pour toute section hyperplane assez générale Z et tout groupe fini C , le foncteur θ est une équivalence de catégories.

Soient S l'espace projectif dual de P , H le sous-schéma fermé de $P_{(S)}$ défini par la section hyperplane générale de $P_{(S)}$ et posons $H_Q = H \times_{P_{(S)}} Q$, $H_X = H \times_{P_{(S)}} X$. Si s est un point rationnel de S , on considère le diagramme suivant, dont tous les carrés sont cartésiens :

$$\begin{array}{ccccc} Y_s & \xrightarrow{n_s} & H_X & \xrightarrow{m} & X \\ g_s \downarrow & & h \downarrow & & f \downarrow \\ Z_s & \xrightarrow{l_s} & H_Q & \xrightarrow{k} & Q \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ s & \longrightarrow & S & & \end{array}$$

Par définition de H , Z_s est la section hyperplane de Q définie par s . Comme k est lisse, le morphisme canonique

$$k^* f_* \Phi_C \rightarrow h_* m^* \Phi_C$$

est une équivalence de catégories ([4], VII, 2.1.2). D'autre part, d'après [SGA 1], XIII, 3.1, on peut trouver un ouvert U de S tel que $((m^* \Phi_C)_{(U)}, h_{(U)})$ soit cohomologiquement propre en dimension ≥ 1 , quel que soit C . Cela entraîne que, pour tout point s de U , le foncteur canonique

$$l_s^* h_* (m^* \Phi_C) \rightarrow g_{s*} n_s^* (m^* \Phi_C)$$

est une équivalence de catégorie, ce qui achève la démonstration.

On démontre, comme 2.1, le résultat suivant :

THÉORÈME 2.2. — Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique zéro, Q un k -schéma projectif, D un diviseur ≥ 0 , à croisements normaux, X le complémentaire du support de D . Soit H une section hyperplane de Q telle que l'image inverse de D sur H soit un diviseur à croisements normaux et soit $Y = X \times_Q H$. On suppose que X est connexe et vérifie la relation (★) de 2.1. Alors Y est connexe et, si ξ est un point géométrique de Y , le morphisme canonique

$$\pi_1(Y, \xi) \rightarrow \pi_1(X, \xi)$$

est bijectif.

REMARQUE 2.3. — Soit k un corps de caractéristique $p > 0$ et supposons que les schémas de type fini sur k soient fortement désingularisables. Alors les énoncés 2.1 et 2.2 sont encore valables, à condition de remplacer les groupes fondamentaux par leurs plus grands quotients d'ordre premier à p .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. ARTIN, *Algebraic approximation of structures over complete local rings* (Publications I. H. E. S., Paris, n° 36, 1969, p. 23-58).
- [2] M. ARTIN, *Algebraization of formal moduli. II, Existence of modifications* (Annals of Maths, vol. 91, n° 1, 1970, p. 88-135).
- [3] N. BOURBAKI, *Algèbre*, chap. VII, Hermann, Paris, 1952.
- [4] J. GIRAUD, *Cohomologie non abélienne* (Die grundlehren der math. Wissenschaften in Einzeldarstellungen, n° 179, Springer-Verlag, Berlin, 1971).
- [EGA] A. GROTHENDIECK et J. DIEUDONNÉ, *Éléments de Géométrie Algébrique* (Publications I. H. E. S., n° 4, 8, 20, 24, 28 et 32, Paris, 1960-1967).
- [SGA 1] A. GROTHENDIECK, *Revêtements étales et groupe fondamental* (Lecture Notes, n° 224, Springer-Verlag, Berlin, 1971).
- [SGA 2] A. GROTHENDIECK, *Cohomologie locale des faisceaux cohérents et Théorèmes de Lefschetz locaux et globaux*, North-Holland, Amsterdam, 1968.
- [SGA 4] A. GROTHENDIECK, *Théorie des Topos et Cohomologie Étale des Schémas* (Lecture Notes, n° 269, 270, 305, Springer-Verlag, Berlin, 1972-1973).
- [SGA 6] A. GROTHENDIECK, *Théorie des Intersections et Théorème de Riemann-Roch* (Lecture Notes, n° 225, Springer-Verlag, Berlin, 1971).

- [5] R. HARTSHORNE, *Residues and duality (Lecture Notes, n° 20, Springer-Verlag, Berlin, 1966).*
- [6] G. HORROCKS, *Vector Bundles on the punctured spectrum of a local ring (Proc. of the London Math. Soc., n° 56, Oxford, 1964, p. 689-713).*
- [7] M. RAYNAUD, *Théorèmes de Lefschetz en cohomologie cohérente et en cohomologie étale [Thèse, (à paraître aux Mémoires de la Société Mathématique de France)].*

(Manuscrit reçu le 19 juin 1973.)

Michèle RAYNAUD,
Les Bruyères,
91, rue du Colonel-Fabien,
92160 Antony.