

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

L. SIEBENMANN

L. GUILLOU

H. HÄHL

Les voisinages ouverts réguliers

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 6, n° 2 (1973), p. 253-293

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1973_4_6_2_253_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LES VOISINAGES OUVERTS RÉGULIERS

PAR L. SIEBENMANN, L. GUILLOU ET H. HÄHL

TABLE DES MATIÈRES

	Pages
Introduction.....	253
Notations et terminologie.....	256
1. Voisinages réguliers.....	257
2. Unicité des voisinages réguliers.....	261
3. Entourages à complément régulier.....	264
4. Critères élémentaires d'identification.....	268
5. Critères locaux d'existence des voisinages I-réguliers.....	271
6. Généralisations formelles.....	284
Appendice 1 : Pathologies.....	288
Appendice 2 : La théorie de Mazur.....	290

Introduction

Ce Mémoire systématise une théorie élémentaire des voisinages ouverts réguliers dont les premiers éléments sont esquissés dans [14]. On démontrera, entre autres résultats, l'existence d'une famille de voisinages réguliers fort agréables autour d'un polyèdre P topologiquement plongé dans \mathbf{R}^n toutes les fois que le couple (\mathbf{R}^n, P) sera localement triangulable. Il se peut (selon [15]) qu'un tel couple (\mathbf{R}^n, P) , P compact, ne soit pas triangulable et qu'il n'existe aucun voisinage E de P tel que $E - P$ soit un produit avec \mathbf{R} . Il n'existe donc aucune théorie classique des voisinages réguliers qui encadre ces exemples.

Les efforts de Mazur pour dégager une nouvelle théorie des voisinages réguliers [10] nous serviront de matrice philosophique ⁽¹⁾. Surtout on adopte son point de vue « formel et hypostatique » qui a depuis longtemps assuré la majorité des applications (par exemple le théorème de Kister-Mazur).

⁽¹⁾ Il conjecture par exemple l'existence de voisinages réguliers dans la situation citée ci-dessus.

Dans un premier temps on analyse l'idée de voisinage ouvert régulier d'un sous-espace (*a priori* arbitraire) d'un espace topologique Y . Soient $V \subset U \subset Y$; on dit que V est compressible vers X en fixant $Y - U$ et l'on écrit $V \searrow X(U)$ si, pour tout voisinage W de X , il existe un automorphisme de Y (i. e. homéomorphisme de Y sur lui-même) $h : Y \rightarrow Y$ tel que $h(V) \subset W$ et h fixe $Y - U$ et un voisinage de X .

Un voisinage ouvert E de X est dit régulier s'il est réunion, $E = \bigcup_n E_n$, d'une suite emboîtée $X \subset E_0 \subset E_1 \subset E_2 \subset \dots$ de voisinages de X tels que, pour $n \geq 0$, $E_n \searrow X(E_{n+1})$. Une telle suite s'appelle une *gigogne*.

Par exemple pour $X =$ origine dans $Y = \mathbf{R}$, on constate aisément que les voisinages ouverts réguliers sont les intervalles ouverts (a, b) avec $-\infty \leq a < 0 < b \leq +\infty$.

La théorie est axée sur un théorème d'unicité (facilement démontré) qui affirme qu'entre deux voisinages (ouverts) réguliers E et E' de X dans Y il y a toujours un homéomorphisme $h : E \rightarrow E'$ qui fixe un voisinage de X (cf. § 2).

Par contre l'existence n'est pas assurée : l'ensemble triadique de Cantor n'a aucun voisinage régulier dans \mathbf{R} . On constate que l'existence des voisinages réguliers équivaut à l'

AXIOME. — *Pour tout voisinage U de X dans Y , il existe un voisinage V de X tel que $V \searrow X(U)$.*

Cet axiome simple clarifie beaucoup la question et permet d'établir au paragraphe 5 un critère local qui suffit pour assurer l'existence de voisinages réguliers si (Y, X) est métrisable et localement triangulable. Mieux, on vérifie même une version isotopique de l'axiome (*l'I-axiome*) qui comporte une unicité à isotopie près des voisinages réguliers. C'est une isotopie non ambiante, dite *glissement*. Dans cette circonstance, les voisinages réguliers s'appellent *I-réguliers*.

Pour identifier les voisinages réguliers dans des situations σ -compactes, il existe des critères pratiques de mobilité des compacts. Par exemple, si (Y, X) est compact et métrisable, un voisinage ouvert E de X est régulier si et seulement si $K \searrow X(U)$ pour tout compact $K \subset U$. Ce critère semble assurer que nous étudions l'unique notion acceptable de voisinage (ouvert) régulier valable dans l'enceinte des couples métrisables (Y, X) où $Y - X$ est localement triangulable (ou plus généralement, où $Y - X$ vérifie près de X la condition de prolongement des isotopies, cf. § 4.4). Plus précisément, si on suppose donnée une classe \mathcal{R} de voisinages ouverts qui jouissent des deux propriétés suivantes :

- (1) Tout voisinage de X contient un élément de \mathcal{R} .

- (2) Si E et E' sont dans \mathcal{R} , il existe un glissement $g_t : E \rightarrow Y$, $0 \leq t \leq 1$, de $g_0 =$ inclusion, tel que g_t fixe un voisinage de X (indépendant de t), $g_1(E) = E'$ et que pour tout t , $g_t(E) \subset E \cup E'$. (C'est l'unicité offerte par l'I-axiome.)

Alors \mathcal{R} consiste de voisinages réguliers : En effet, soient $E \in \mathcal{R}$, $K \subset E$ un compact, et $V \subset E$ un voisinage de X . Selon (1), il existe $E' \in \mathcal{R}$ avec $E' \subset V$; soit $g_t : E \rightarrow Y$ le glissement offert par (2). Le principe de prolongement des isotopies dans E (cf. § 4.4, [13, § 6]) assure l'existence d'une isotopie $h_t : Y \rightarrow Y$, $0 \leq t \leq 1$, de $\text{id} \mid Y$ fixant un voisinage de $X \cup (Y - E)$ telle que, pour tout t , $h_t \mid K = g_t \mid K$. Puisque V est arbitraire on a $K \searrow X(E)$. Donc E est régulier, et même I-régulier.

D'autre part on constate que ce lemme d'identification des voisinages réguliers généralise le théorème de M. Brown [3] disant que toute variété métrisable réunion d'une suite emboîtée $E_0 \subset E_1 \subset E_2 \subset \dots$ d'ouverts homéomorphes à \mathbf{R}^m est elle-même homéomorphe à \mathbf{R}^m .

Un énoncé dual (presque équivalent) s'était révélé essentiel à la solution du problème de Schoenflies : Si un compact K est l'intersection d'une suite $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \dots$ de voisinages ouverts homéomorphes à \mathbf{R}^m alors $E_i - K$ est homéomorphe à $\mathbf{R}^m - 0$.

Or, une idée duale à celle de voisinage régulier s'est révélée essentielle à l'étude homotopique des voisinages réguliers dans deux articles ([4], [16]) qui s'enchaînent avec celui-ci :

Un entourage à complément régulier de X dans Y est l'intersection $\bigcap_n E_n$ d'une suite $E_0 \supset E_1 \supset E_2 \supset \dots$ (appelée anti-gigogne) de voisinages de X dans Y tels que $E_i \searrow X(E_{i-1})$ pour $i \geq 1$. On démontre au paragraphe 3.5 que $Y - \bigcap_n E_n$ est unique à homéomorphisme près dès que Y est (par exemple) métrisable. Si $E_0 = E'_0 \subset E'_1 \subset E'_2 \subset \dots$ est en même temps une gigogne, la différence $\bigcup_n E'_n - \bigcap_n E_n$ s'appelle une frange du voisinage régulier $\bigcup_n E'_n$. Les franges jouent souvent le rôle donné par la topologie PL à la frontière d'un voisinage régulier fermé au sens combinatoire de Whitehead [18].

Il reste quelques points faibles dans cette théorie :

- (a) Une foule de propriétés, trivialement vérifiées si (Y, X) est compact, restent inconnues dans le cas non compact (voir l'Appendice 1).

- (b) Nos critères locaux d'existence supposent Y localement compact et σ -compact. [La métrisabilité (par exemple) suffit-elle ?].
- (c) Il est peut-être décevant de constater qu'étudier les voisinages réguliers de X dans Y n'est rien d'autre qu'étudier les voisinages réguliers de l'image de X dans le quotient Y/X .

Bien que nous ayons su augmenter la portée de cette théorie au moyen de nos formalisations faisant intervenir les pseudo-groupes (§ 6), la théorie combinatoire de Whitehead rappelle constamment la possibilité de nouvelles idées plus fines et plus riches; mais cependant dans une enceinte moins vaste.

Ce Mémoire est le fruit d'un travail commun de rédaction et d'élaboration basé sur quelques conférences du premier auteur (Orsay, hiver 1970-1971).

Notations et terminologie

Dans tout le texte, Y désignera un espace topologique et X une partie de Y . Nos compacts ne seront pas nécessairement hausdorffs, on suppose seulement que tout recouvrement ouvert admet un sous-recouvrement fini.

Soient E et F des espaces topologiques et $f: E \rightarrow F$ une application continue. Une *homotopie* de f est une famille $\{h_t \mid t \in I = [0, 1]\}$ d'applications de E dans F telles que $h_0 = f$ et que l'application $h: E \times I \rightarrow F \times I$ définie par $h(x, t) = (h_t(x), t)$ soit continue. Parfois, h elle-même sera appelée homotopie de f . Si E est un sous-espace de F et si f est l'inclusion $E \hookrightarrow F$, une homotopie de f est appelée *homotopie de E dans F* ; si $E = F$, une homotopie de $\text{id}|_E$ est simplement appelée *homotopie de E* . Si $E \subset F$ on définit le *support* d'une homotopie h_t comme l'adhérence dans E de $\{x \in E \mid \exists t \in I: h_t(x) \neq x\}$. Alors le support de chaque application h_t de la famille (i. e. l'adhérence dans E de $\{x \in E \mid h_t(x) \neq x\}$) est contenu dans le support de l'homotopie $\{h_t\}$. Si $E \subset F$ et si A est une partie de E on dit que f *fixe* A si, pour tout $x \in A$, $f(x) = x$. On dit qu'une homotopie $\{h_t\}$ de f *fixe* A si pour tout $x \in A$ et tout $t \in I$, $h_t(x) = x$. On dit aussi que f *respecte* A si $f(A) = A$.

Un *plongement ouvert* $f: E \rightarrow F$ est une application continue, injective, telle que $f(E)$ soit ouvert dans F et que l'application $E \rightarrow f(E)$ induite par f soit un homéomorphisme.

Un *glissement* d'un plongement ouvert $f: E \rightarrow F$ est une homotopie $\{h_t\}$ de f telle que $h(x, t) = (h_t(x), t)$ soit un plongement ouvert. Chaque h_t est alors un plongement ouvert.

Si f est un homéomorphisme de F , une *isotopie de f* est une homotopie $\{h_t\}$ de f telle que h soit un homéomorphisme de $F \times I$. On a des définitions analogues si I est remplacé par un intervalle quelconque de la droite réelle ou de la droite réelle achevée (i. e. $[-\infty, +\infty]$). Lorsque rien n'est précisé, l'intervalle est I .

1. Voisinages réguliers

Dans ce paragraphe, on va développer deux notions de voisinages réguliers, l'une faisant intervenir des homéomorphismes, l'autre des isotopies. Les variantes pour le deuxième cas seront données entre parenthèses.

1.1. DÉFINITIONS. — Soient U et V deux sous-ensembles de Y et W un voisinage de X dans Y . V est dit *compressible (I-compressible)* jusque dans W en fixant $Y - U$ [notation : $V \searrow W(U)$] s'il existe un homéomorphisme h_1 (une isotopie $\{h_t\}$) de Y , qui fixe $Y - U$ et un voisinage de X dans Y , tel que $h_1(V) \subset W$. On appellera h_1 (resp. $\{h_t\}$) une *compression (I-compression)* de V jusque dans W fixant $Y - U$; et on écrira $h_1 : V \searrow W(U)$ [resp. $\{h_t\} : V \searrow W(U)$]. V est dit *compressible (I-compressible) vers X en fixant $Y - U$* [notation : $V \searrow X(U)$] si pour tout voisinage W de X dans Y il y a une compression (I-compression) de V jusque dans W fixant $Y - U$.

Le signe \searrow désignera indifféremment compression ou I-compression, le contexte précisant la situation. Remarquons que $V \searrow X(U)$ entraîne $V \subset \dot{U}$, où \dot{U} est l'intérieur de U dans Y , toutes les fois que U est un voisinage de X .

1.2. DÉFINITION. — Une (I-) *gigogne* \mathcal{E} de (Y, X) est une chaîne $E_0 \subset E_1 \subset \dots \subset E_n \subset \dots$ de voisinages ouverts de X dans Y tels que E_n soit compressible (I-compressible) vers X en fixant $Y - E_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. On écrira $\mathcal{E} = \{E_n\}$ si l'on veut préciser les éléments de la (I-) *gigogne* et on note $|\mathcal{E}|$ l'ouvert $\bigcup_n E_n$.

1.3. DÉFINITION. — Un *voisinage (I-) régulier* de X dans Y est un voisinage (ouvert) E de X dans Y tel qu'il existe une (I-) *gigogne* \mathcal{E} telle que $E = |\mathcal{E}|$. On appellera une telle (I-) *gigogne* une (I-) *gigogne pour E* .

1.4. REMARQUE. — Soit g un homéomorphisme de Y respectant X . Si $\mathcal{E} = \{E_n\}$ est une (I-) *gigogne*, alors $g(\mathcal{E}) = \{g(E_n)\}$ est aussi une (I-) *gigogne*. Donc si E est un voisinage (I-) régulier de X dans Y , $g(E)$ en est un autre.

Pour clarifier la notion de (I-) compression, on énonce :

1.5. (I-) AXIOME. — On dit que (Y, X) satisfait à l'axiome (I-axiome) de compressibilité, si dans tout voisinage U de X , il existe un voisinage ouvert V de X qui est compressible (I-compressible) vers X en fixant $Y - U$.

Intuitivement l'axiome dit que $Y - X$ est homogène vers X .

1.6. PROPOSITION. — Les affirmations suivantes sont équivalentes :

- (i) Il existe une (I-) gigogne de (Y, X) .
- (ii) (Y, X) satisfait à l'(I-) axiome.
- (iii) Pour tout voisinage U de X dans Y , il existe une (I-) gigogne \mathcal{E} de (Y, X) telle que $|\mathcal{E}| \subset U$.

Preuve. — (i) \Rightarrow (ii) : Soient $\mathcal{E} = \{E_n\}$ une (I-) gigogne et U un voisinage de X . Il existe un homéomorphisme h_1 de Y qui fixe X et tel que $h_1(E_1) \subset U$. Si $V = h_1(E_0)$ alors $V \searrow X(U)$.

(ii) \Rightarrow (iii) (Astuce de Mazur) : Soit U un voisinage de X . Il existe V tel que $V \searrow X(U)$. Soit $W \subset V$, un voisinage de X , tel que $W \searrow X(V)$ et soit h une compression de V jusque dans W fixant $Y - U$. On considère $h(V) \subset V \subset h^{-1}(V) \subset h^{-2}(V) \dots$. On a $h(V) \searrow X(V)$ et puis $V \searrow X(h^{-1}(V))$ et $h^{-1}(V) \searrow X(h^{-2}(V))$, \dots . Si on pose $E_n = h^{-(n-1)}(V)$, $\mathcal{E} = \{E_n\}$ est une (I-) gigogne — dite *canonique* — qui convient. La figure 1 a illustre une I-gigogne canonique dans le cas $Y = \mathbf{R}^2$, $X = \{0\}$.

1.7. REMARQUE. — Si (Y, X) satisfait à l'I-axiome, et si V est un voisinage de X compressible vers X en fixant le complément d'un voisinage U de X , alors V est I-compressible vers X en fixant $Y - U$. En particulier sous l'hypothèse de l'I-axiome toute gigogne est une I-gigogne et tout voisinage régulier de X dans Y est en fait I-régulier.

Preuve. — Il existe un voisinage W de X I-compressible vers X en fixant $Y - U$. Soit h une compression de V jusque dans W qui fixe $Y - U$; alors $h(V) \searrow X(U)$ par isotopies et $V \searrow X(h^{-1}(U) = U)$ par isotopies.

C. Q. F. D.

1.8. LEMME TOPOLOGIQUE. — Supposons que pour tout point $y \in Y - X$, X possède un voisinage fermé dans Y qui ne contient pas y . [Ceci est vérifié e. g. si X est fermé dans Y hausdorff et régulier (T_3).] Alors $V \searrow X(U)$ entraîne que $\bar{V} \subset U \cup X$. En particulier, si $\{E_n\}$ est une gigogne, on a $\bar{E}_n \subset E_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Preuve. — On montre que si $y \notin U \cup X$ alors $y \notin \bar{V}$. Soit F un voisinage fermé de X qui ne contient pas y . Soit h une compression de V jusque

dans F fixant $Y - U$. Puisque $h(y) = y$, on a $h^{-1}(F) \subset Y - \{y\}$; $h(V) \subset F$ entraîne $h(\bar{V}) \subset F$ et donc on a $\bar{V} \subset h^{-1}(F) \subset Y - \{y\}$.

1.9. EXEMPLES :

- (i) $Y = \mathbf{R}^n$, $X = \{0\}$: alors (Y, X) vérifie évidemment l'I-axiome. La figure 1 a illustre une I-gigogne pour $n = 2$.

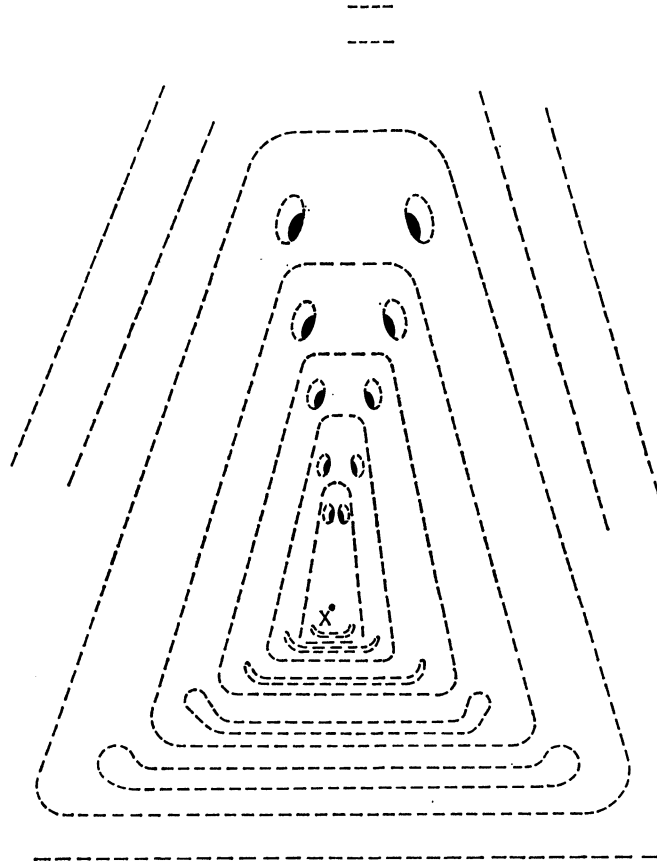


Fig. 1 a

- (ii) Soit Y/X l'espace quotient obtenu en écrasant X sur un point et soit \star l'image de X dans le quotient. Alors :
 - (a) (Y, X) vérifie l'I-axiome si et seulement si $(Y/X, \star)$ le vérifie.
 - (b) U est un voisinage (I-) régulier de X dans Y si et seulement si l'image de U dans le quotient est un voisinage (I-) régulier de \star dans Y/X .

(c) Si X est un compact cellulaire (par exemple un arc sauvage cellulaire) dans une variété Y sans bord alors (Y, X) satisfait à l'I-axiome. En effet Y/X est homéomorphe à Y . (M. Brown [2], ou § 3.)

(iii) Soit Z un espace hausdorff paracompact; $f: Z \rightarrow X$ une application continue. On identifie X à son image dans le « mapping cylinder »

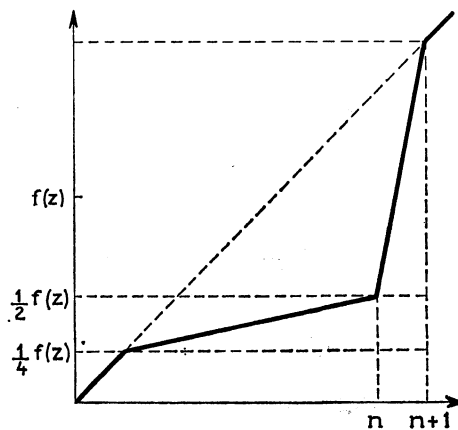
$$C(f) = (Z \times [0, \infty) \amalg X) / \{ (z, 0) = f(z); z \in Z \}.$$

Alors $(C(f), X)$ vérifie l'I-axiome et $C(f)$ est un voisinage I-régulier de X dans lui-même.

Preuve. — Le quotient $C(f)/X$ est homéomorphe au cône

$$cZ = Z \times [0, \infty) / Z \times \{0\}.$$

Vu l'exemple (ii), il suffit de montrer que $Z \times [0, \infty)$ est un voisinage I-régulier de $Z \times \{0\}$ dans lui-même. On va montrer que $\{Z \times [0, n+1]\}$ est une I-gigogne. Soit W un voisinage de $Z \times \{0\}$ dans $Z \times [0, \infty)$; alors pour tout $z \in Z$, il existe un voisinage ouvert N_z de z et un $\varepsilon_z > 0$ tels que $N_z \times [0, \varepsilon_z) \subset W$. Soit $\{U_\alpha\}$ un recouvrement de Z localement fini subordonné au recouvrement $\{N_z, z \in Z\}$; alors, pour tout α , il existe un $\varepsilon_\alpha > 0$ tel que $U_\alpha \times [0, \varepsilon_\alpha) \subset W$. Soit $f_\alpha: Z \rightarrow [0, \infty)$ l'application (non nécessairement continue) définie par $f_\alpha(z) = \varepsilon_\alpha$ si $z \in U_\alpha$ et $f_\alpha(z) = 0$ sinon. Soit $\{\varphi_\alpha\}$ une partition de l'unité associée à $\{U_\alpha\}$. Alors $f = \sum_\alpha \varphi_\alpha f_\alpha$ est une application continue et $\{(z, \tau) \in Z \times [0, \infty) \mid \tau < f(z)\} \subset W$. Donc l'isotopie $\{h_t\}$, $t \in I$, de $Z \times [0, \infty)$ définie par $h_t(z, \tau) = (z, (1-t)\tau + t.F_z(\tau))$ où $F_z: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ est l'application de graphe :



est une I-compression de $Z \times [0, n)$ jusque dans W fixant $Z \times [n+1, \infty)$.

- (iv) $Y = \mathbf{R}$; $X = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbf{N} - \{0\} \right\}$. (Y, X) vérifie l'I-axiome. Il est à noter que dans cet exemple, X n'est pas fermé dans Y .
- (v) $Y = \mathbf{R}$; $X = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbf{N} - \{0\} \right\}$. (Y, X) ne vérifie pas l'axiome; en effet un voisinage de X n'a qu'un nombre fini de composantes connexes qui rencontrent X , et ce nombre, invariant par un homéomorphisme de Y qui fixe X croît arbitrairement lorsque ce voisinage se rapproche de X .

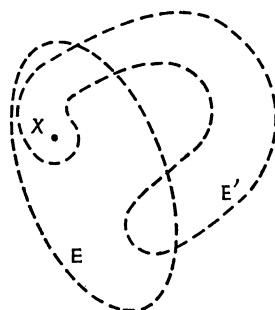


Fig. 1 b

- (vi) $Y = \mathbf{Q}$, $X = \{0\}$. (Y, X) vérifie l'axiome (prendre les graphes des compressions à pentes rationnelles), mais non l'I-axiome car \mathbf{Q} est totalement disconnexe.
- (vii) $Y =$ l'ensemble triadique de Cantor de $[0, 1]$, $X = \{0\}$. Ici encore, (Y, X) vérifie l'axiome mais non l'I-axiome.

1.10. REMARQUE. — La réunion de deux ensembles (I-) compressibles vers X en fixant $Y - U$ n'est pas nécessairement (I-) compressible vers X en fixant $Y - U$. En particulier la réunion de deux voisinages (I-) réguliers n'est pas toujours un voisinage (I-) régulier comme le montre la figure 1 b (cf. 2.1).

2. Unicité des voisinages réguliers

L'essentiel de ce paragraphe est constitué par :

2.1. THÉORÈME D'UNICITÉ. — Soient E et E' deux voisinages réguliers de X dans Y . Alors il existe un homéomorphisme de E sur E' qui fixe un voisinage de X .

La version isotopique de ce résultat est :

2.2. THÉORÈME D'UNICITÉ (isotopique). — Si E et E' sont deux voisinages I -réguliers de X dans Y , il existe un glissement $g_t : E \rightarrow E \cup E' \subset Y$, $0 \leq t \leq 1$ de $g_0 : E \hookrightarrow E \cup E'$, tel que g_t fixe un voisinage de X (indépendant de t) et que $g_1(E) = E'$. De plus, il existe une isotopie h_t , $0 \leq t < 1$, de Y , fixant $Y - (E \cup E')$ telle que $g_t = h_t|E$ pour $t < 1$ (h_1 n'est pas défini).

Preuve de 2.1 (resp. 2.2). — Par définition $E = |\mathcal{E}|$ avec $\mathcal{E} = \{E_n, n \geq 0\}$ et $E' = \mathcal{E}'$ avec $\mathcal{E}' = \{E'_n, n \geq 0\}$. Par 1.6 et un raisonnement de transitivité, on se ramène au cas où $E' \subset E_0$. Puisque $E_0 \searrow X(E_1)$ il existe un homéomorphisme h_1 (resp. une isotopie h_t , $0 \leq t \leq 1$) de Y fixant $Y - E_1$ et un voisinage de X tel (le) que $h_1 E_0 \subset E'_0$. Supposons par récurrence

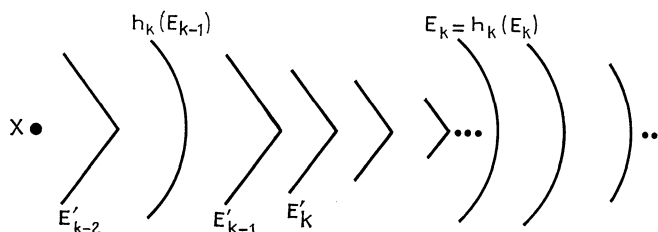


Fig. 2 a

avoir obtenu un homéomorphisme h_k , $k \geq 1$ (resp. une isotopie h_t , $0 \leq t \leq k$) de Y , fixant $Y - E_k$ et un voisinage de X tel (le) que $E'_{k-2} \stackrel{(2)}{\subset} h_k(E_{k-1}) \subset E'_{k-1}$, cf. la figure 2 a. On remarque que $h_k(E_n) = E_n$ pour $n \geq k$.

Puisque $E_k \searrow X(E_{k+1})$, il existe un homéomorphisme f_k (resp. une isotopie $f_k = \{f_{k,t}, 0 \leq t \leq 1\}$) de Y fixant $Y - E_{k+1}$ et un voisinage N de X tel (le) que $f_k(E_k) \subset E'_k$ [resp. $f_{k,t}(E_k) \subset E'_k$]. Puisque $E'_{k-1} \searrow X(E'_k)$, il existe un homéomorphisme g_k de Y fixant $Y - E'_k$ tel que $g_k(E'_{k-1}) \subset N$. Alors $f_k^* = g_k^{-1} f_k g_k$ est un homéomorphisme (resp. une isotopie) de Y fixant $E'_{k-1} \cup (Y - E_{k+1}) \supset h_k(E_{k-1})$ tel (le) que $f_k^*(E_k) \subset E'_k$ [resp. $f_{k,t}^*(E_k) \subset E'_k$]. On termine la construction par récurrence en posant $h_{k+1} = f_k^* h_k$ (resp. $h_t = f_{k,t}^* h_k$, $k \leq t \leq k+1$). Enfin, on définit $h : E \rightarrow E'$ par $h|E_k = h_n|E_k$, $n \geq k+1$ (resp. $g_t : E \rightarrow E \cup E'$ par $g_t = h_{\frac{t}{1-t}}|E$, $t < 1$ et $g_1 = h$).

Ceci est bien défini puisque $h_{k+1}|E_k = h_{k+p}|E_k$, $p \geq 1$, par construction. De $E'_{n-2} \subset h_n(E_{n-1}) \subset E'_{n-1}$ on déduit $E' \subset h(E) \subset E'$ i. e. $h(E) = E'$. Comme h est clairement ouvert et injectif, il réalise l'homéomorphisme

(2) On pose $E'_{-1} = \emptyset$.

cherché [resp. $g(x, t) = g_t(x)$ détermine un plongement ouvert de $E \times I$ dans Y et réalise le glissement cherché].

2.3. REMARQUE. — \mathbf{R} et $(-1, 1)$ sont deux voisinages de 0 dans \mathbf{R} ; il n'y a donc aucun espoir d'obtenir une propriété d'unicité ambiante.

2.4. COROLLAIRE A 2.2. — Si (Y, X) vérifie l'I-axiome et si $E \subset E'$ sont deux voisinages réguliers de X dans Y , alors l'inclusion $E \hookrightarrow E'$ est une équivalence d'homotopie.

Preuve. — Immédiate.

Si Y est lui-même un ouvert d'un espace $Y' \supset Y$ on s'attend à ce qu'un voisinage régulier de X dans Y soit également régulier dans Y' . C'est d'ordinaire vrai (pour un contre-exemple, voir l'Appendice 1).

2.5. PROPOSITION. — Supposons Y hausdorff localement compact, et X compact. Soit U un voisinage de X dans Y . Alors, si U est un voisinage (I-) régulier de X dans U , il est aussi voisinage (I-) régulier de X dans Y .

Preuve. — Laisée au lecteur. C'est aussi conséquence de 4.1 *infra*.

2.6. PROPOSITION. — Soient $X \subset Y \subset Y'$ où Y est un ouvert de Y' . Alors :

- (i) Si (Y', X) vérifie l'(I-) axiome, (Y, X) le vérifie aussi et il existe des voisinages (I-) réguliers de X communs à Y et Y' .
- (ii) Si en outre X possède un voisinage A dans Y qui est fermé dans Y' (e. g. si X est fermé dans Y' normal) alors (Y, X) vérifie l'(I-) axiome si et seulement si (Y', X) le vérifie.

Preuve. — (i) D'après 1.6 il existe un voisinage (I-) régulier U de X dans Y' inclus dans Y . Cet U est aussi voisinage (I-) régulier de X dans Y .

(ii) Soit U un voisinage (I-) régulier de X dans Y inclus dans \mathring{A} (cf. 1.6). Les (I-) compressions associées à une (I-) gigogne de (X, Y) pour U fixent $Y - A$ et s'étendent donc à Y' par l'identité hors de A ; U est donc aussi un voisinage (I-) régulier de X dans Y' , ce qui entraîne l'I-axiome pour (Y', X) (cf. 1.6).

Quant aux voisinages réguliers eux-mêmes, on a :

2.7. PROPOSITION. — Si U_1 et U_2 , ouverts de Y , sont des voisinages (I-) réguliers de X dans eux-mêmes, alors il existe un homéomorphisme de U_1 sur U_2 qui fixe un voisinage de X (resp. un glissement $\{g_t \mid t \in I\}$ de U_1 dans $Y -$ et même dans $U_1 \cup U_2 -$ tel que g_1 soit un homéomorphisme de U_1 sur U_2 qui fixe un voisinage de X).

Preuve. — Soit V_i un voisinage régulier de X commun à U_i et $U_1 \cap U_2$, pour $i = 1, 2$. Par 2.1 on a des homéomorphismes $U_1 \xrightarrow{\approx} V_1 \xrightarrow{\approx} V_2 \xrightarrow{\approx} U_2$ fixant tous un voisinage de X ; et on raisonne d'une manière analogue dans le cas des voisinages I-réguliers en utilisant le glissement de 2.2.

C. Q. F. D.

3. Entourages à complément régulier

On va brièvement développer une notion duale à celle de voisinage régulier qui s'est révélée essentielle dans l'étude homotopique des voisinages réguliers (voir [4]).

3.1. DÉFINITIONS. — Un *entourage* de X à complément (I-) régulier dans Y est l'intersection $\cap \mathfrak{B}$ d'une suite, dite *anti-(I-) gigogne*,

$$\mathfrak{B}: E_0 \supset E_1 \supset E_2 \supset \dots$$

de voisinages ouverts de X tels que E_{n+1} soit (I-) compressible vers X en fixant $Y - E_n$ pour tout $n \geq 0$. On notera $|\mathfrak{B}| = Y - \cap \mathfrak{B}$.

3.2. REMARQUES :

- (i) L'image d'une anti-(I-) gigogne par un homéomorphisme de Y qui respecte X est une anti-(I-) gigogne.
- (ii) Si (Y, X) vérifie l'I-axiome, tout anti-gigogne est une anti-I-gigogne et donc tout entourage à complément régulier est à complément I-régulier (cf. 1.7).
- (iii) Supposons que, pour tout point $y \in Y - X$, X admette un voisinage fermé dans Y qui ne contient pas y . (e. g. si X est fermé dans Y hausdorff régulier). Alors, si $\mathfrak{B} = \{E_n\}$ est une anti-(I-) gigogne, $\cap \mathfrak{B}$ est fermé et $|\mathfrak{B}|$ est ouvert dans Y . En particulier, tout entourage de X à complément régulier dans Y est fermé dans Y . (En effet, par 1.8 on a $E_n \subset \bar{E}_n \subset E_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, donc $\cap \mathfrak{B} = \bigcap_n \bar{E}_n$ ce qui est fermé.)

3.3 EXEMPLES :

- (i) Supposons l'(I-) axiome et soit V un voisinage de X compressible vers X . Soit h une compression de V dans un voisinage de X (I-) compressible vers X en fixant $Y - V$, alors

$$V \supset h(V) \supset h(h(V)) \supset \dots$$

est une anti-(I-) gigogne dite canonique.

(ii) Si (Y, X) vérifie l'(I-) axiome et si X est un G_δ -ensemble ⁽³⁾ de Y , alors X est un entourage à complément (I-) régulier.

3.4. PROPOSITION. — Supposons l'(I-) axiome. Soit U un voisinage de X et A un sous-ensemble de U tel que $A \searrow X(U)$. Alors il existe une anti-(I-) gigogne $\{E_n\}$ telle que $A \subset \bigcap_n E_n \subset E_0 \subset U$.

Preuve. — Soit V un voisinage de X tel que $V \searrow X(U)$. Soit h une compression de V dans un voisinage de X (I-) compressible vers X en fixant $Y - V$. Soit $E_n = h^n(V)$, $n \in \mathbf{N}$. Un voisinage W inclus dans V de X est fixé par h et on a $W \subset \bigcap_n E_n$. Soit f une compression de A jusque dans W qui fixe $Y - U$. Alors l'anti-(I-) gigogne $\{f^{-1}(E_n)\}$ convient.

3.5. THÉORÈME D'UNICITÉ. — Soient $\mathfrak{B} = \{E_n\}$ et $\mathfrak{B}' = \{E'_n\}$ deux anti-gigognes de (Y, X) . Supposons que pour tout $y \in Y - X$, X admette un voisinage fermé dans Y qui ne contient pas y (e. g. si X est fermé dans Y hausdorff et régulier). Alors il existe un homéomorphisme de $|\mathfrak{B}|$ sur $|\mathfrak{B}'|$ qui fixe $Y - (E_0 \cup E'_0)$.

3.6. THÉORÈME D'UNICITÉ (isotopique). — Soient $\mathfrak{B} = \{E_n\}$ et $\mathfrak{B}' = \{E'_n\}$ deux anti-I-gigognes de (Y, X) . Supposons que pour tout $y \in Y - X$, X admette un voisinage fermé dans Y qui ne contient pas y (e. g. si X est fermé dans Y hausdorff et régulier). Alors il existe un glissement $g_t : |\mathfrak{B}| \rightarrow Y - X$, $0 \leq t \leq 1$, de $g_0 : |\mathfrak{B}| \hookrightarrow Y - X$, tel que g_t fixe $Y - (E_0 \cup E'_0)$ et que $g_1(|\mathfrak{B}|) = |\mathfrak{B}'|$. De plus il existe une isotopie h_t , $0 \leq t < 1$, de Y , fixant $(Y - (E_0 \cup E'_0)) \cup X$ telle que $g_t = h_t|_{|\mathfrak{B}|}$ pour $t < 1$.

Preuve de 3.5 (resp. 3.6). — Puisque $E_1 \searrow X(E_0)$ il existe un homéomorphisme f_1 (resp. une isotopie f_t , $0 \leq t \leq 1$ de Y fixant $Y - E_0$ et X tel (le) que $f_1(E_1) \subset E'_1$. Puisque $E'_2 \searrow X(E'_1)$ il existe un homéomorphisme g_1 (resp. une isotopie g_t , $0 \leq t \leq 1$) de Y fixant $Y - E'_1$ et X tel (le) que $g_1(E'_2) \subset f_1(E_1)$. Alors l'homéomorphisme $h_1 = g_1^{-1} f_1$ (resp. l'isotopie $h_t = g_t^{-1} f_t$, $0 \leq t \leq 1$) de Y fixe $(Y - (E_0 \cup E'_1)) \cup X$ et vérifie $E'_2 \subset h_1(E_1) \subset E'_1$. Supposons par récurrence avoir obtenu un homéomorphisme h_k , $k \geq 1$ (resp. une isotopie h_t , $0 \leq t \leq k$) de Y fixant $Y - h_{k-1}(E_{k-1})$ et X (si $k \geq 2$) tel (le) que $E'_{k+1} \subset h_k(E_k) \subset E'_k$. Puisque $h_k(E_{k+1}) \searrow X(h_k(E_k))$, il existe un homéomorphisme f_k (resp. une isotopie $f_k = \{f_{k,t}, 0 \leq t \leq 1\}$) de Y fixant $Y - h_k(E_k)$ et X tel (le) que

⁽³⁾ Rappelons que tout fermé d'un espace métrique est un G_δ -ensemble (i. e. intersection dénombrable d'ouverts).

$f_k h_k (E_{k+1}) \subset E'_{k+1}$ [resp. $f_{k,1} h_k (E_{k+1}) \subset E'_{k+1}$]. Puisque $E'_{k+2} \searrow X (E'_{k+1})$, il existe un homéomorphisme g_k (resp. une isotopie $g_{k,t}$, $0 \leq t \leq 1$) de Y fixant $Y - E'_{k+1}$ et X tel (le) que $g_k (E'_{k+2}) \subset f_k h_k (E_{k+1})$ [resp. $g_{k,1} (E'_{k+2}) \subset f_{k,1} h_k (E_{k+1})$]. On termine la construction par récurrence en posant $h_{k+1} = g_k^{-1} f_k h_k$ (resp. $h_t = g_{k,t}^{-1} f_{k,t} h_k$, $k \leq t \leq k+1$). Enfin, on définit $h : |\mathfrak{B}| \rightarrow |\mathfrak{B}'|$ par $h|_{Y - \bar{E}_k} = h_n|_{Y - \bar{E}_k}$, $n \geq k+1$ (resp. $g_t : |\mathfrak{B}| \rightarrow Y - X$ par $g_t = h_{\frac{t}{1-t}}|_{|\mathfrak{B}|}$, $0 \leq t < 1$ et $g_1 = h$). Ceci est bien défini vu que $h_{k+p}|_{Y - \bar{E}_k} = h_k|_{Y - \bar{E}_k}$, $p \geq 0$, par construction même et que $\bigcup_k (Y - E_k) = \bigcup_k (Y - \bar{E}_k)$ [cf. 3.2 (iii)]. Il est alors clair que h (resp. g_t , $0 \leq t \leq 1$) convient (cf. 2.1 et 2.2).

3.7. REMARQUE. — Malgré des analogies évidentes entre la preuve de 2.1 et 2.2 et celle de 3.5 ou 3.6 cette dernière semble plus élémentaire en ce qu'elle n'utilise pas d'astuce de conjugaison. Néanmoins on pourrait grâce à une telle astuce exiger que l'isotopie de 3.6 fixe un voisinage de X (indépendant de t) lorsque $\cap \mathfrak{B}$ et $\cap \mathfrak{B}'$ sont des voisinages de X .

3.8. COROLLAIRE. — *Toujours avec les hypothèses de 3.6, supposons que X soit un G_δ -ensemble de Y . Soient $A \subset B$ deux entourages de X à complément I -régulier. Alors l'inclusion $Y - B \hookrightarrow Y - A$ est une équivalence d'homotopie.*

Preuve. — Grâce à 3.3 (ii) et à 3.6 on sait que les inclusions $Y - B \hookrightarrow Y - X$ et $Y - A \hookrightarrow Y - X$ sont des équivalences d'homotopie. D'où la conclusion.

La proposition suivante sera d'importance technique par la suite :

3.9. PROPOSITION. — *Supposons Y hausdorff régulier (T_3) et X G_δ -ensemble de Y . Soit $\mathcal{E} = \{E_n\}$ une gigogne. Alors, pour tout $i \in \mathbf{N}$, il existe un entourage (fermé) A_i de X à complément régulier dans Y tel que $E_i \subset A_i \subset E_{i+1}$ et que le couple $(Y - A_i, |\mathcal{E}| - A_i)$ soit homéomorphe au couple $(Y - X, |\mathcal{E}| - X)$.*

Preuve. — Par 3.4 il existe des anti-gigognes $\mathfrak{F}^i = \{F_n^i\}$ telles que $E_i \subset \bigcap_n F_n^i \subset F_0^i \subset E_{i+1}$; on pose $A_i = \bigcap_n F_n^i$. D'autre part, par (3.3) (ii) il existe une anti-gigogne $\mathfrak{F} = \{F_n\}$ telle que $|\mathfrak{F}| = Y - X$ et $F_0 \subset E_0$. Le théorème 3.6 donne alors un homéomorphisme h de $Y - A_i$ sur $Y - X$ tel que $h|_{Y - F_0^i} = \text{id}|_{Y - F_0^i}$; or $F_0^i \subset E_{i+1} \subset |\mathcal{E}|$, donc h est un homéomorphisme des couples $(Y - A_i, |\mathcal{E}| - A_i)$ et $(Y - X, |\mathcal{E}| - X)$.

3.10. PROPOSITION (M. BROWN [2]). — Si Y est une variété de dimension n sans bord et si $A \subset Y$ est un compact dont tout voisinage contient un voisinage homéomorphe à \mathbb{R}^n ⁽⁴⁾, alors il existe un homéomorphisme $h: Y \rightarrow Y/A$ qui fixe tout point hors d'un voisinage prescrit de A .

Preuve. — Si X est un point de A , on constate facilement que A est un entourage de X à complément régulier comme l'est X lui-même. Notre théorème d'unicité offre alors un homéomorphisme $Y - A \xrightarrow{\approx} Y - X$ qui induit un homéomorphisme $Y/A \xrightarrow{\approx} Y/X \equiv Y$.

3.11. DÉFINITION. — Une *frange* est une différence $E - A$ où E est un voisinage régulier de X et où A est un entourage de X à complément régulier tel que $A = \bigcap \mathfrak{B}$ pour une anti-gigogne \mathfrak{B} contenue dans E .

Il est facile de voir que les franges ont les mêmes propriétés d'unicité que les entourages à compléments réguliers et que les voisinages réguliers en utilisant ces dernières. Une frange joue le rôle d'un ouvert de E de la forme $\partial E \times (0, 1)$ dans un collier ouvert $\partial E \times (0, 1]$ de la frontière $\bar{E} - E = \partial E = \partial E \times \{1\}$ dans l'adhérence \bar{E} de E dans Y . On sait que de tels colliers n'existent pas en général, même pour choix convenable de E dans un couple (Y, X) localement triangulable, car $Y - X$ et $(Y - E) \cup \partial E \times (0, 1)$ seraient deux voisinages réguliers de $Y - E$ dans Y (E est supposé compressible vers X) donc il y aurait un homéomorphisme $E - X \approx E \times (0, 1)$ qui souvent n'existe pas ([12], [11, chap. 5], [6]).

Il est utile dans les processus infinis d'engouffrement (à la Stallings) de multiplier les franges. Soit, par exemple, $E - A$ un frange et h un homéomorphisme de (Y, X) tel que $h(E) \searrow X(A)$. Alors,

$$(\star) \quad \dots \subset h(A) \subset h(E) \subset A \subset E \subset h^{-1}(A) \subset h^{-1}(E) \subset \dots$$

est une double gigogne qui offre une infinité de franges $h^n(E) - h^n(A)$, où $m \leq n$ sont des entiers. D'ailleurs si $V \subset U$ sont des voisinages de X tels que $V \searrow X(U)$, il est facile de trouver un système (\star) qui vérifie

$$V \subset \bigcap_n h^n(A) \subset \bigcup_n h^n(E) \subset U, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Pour résumer, on a dans un voisinage régulier U de X de jolies propriétés de subdivision indéfinie en franges qui généralisent commodément celles du cas où U est radial ⁽⁵⁾.

⁽⁴⁾ Cette propriété s'appelle la cellularité.

⁽⁵⁾ *Radial* veut dire que $U - X = K \times \mathbb{R}$ pour un espace K , de sorte que $X \cup K \times (-\infty, r]$ est un voisinage fermé de X pour tout $r \in \mathbb{R}$.

4. Critères élémentaires d'identification

Le point de départ pour les théorèmes de ce paragraphe a été le résultat suivant, qui, dans un cas particulier, identifie les voisinages réguliers par le comportement des compacts qu'ils contiennent :

4.1. PROPOSITION. — *Supposons Y hausdorff localement compact et X compact. Soit U un voisinage de X . Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

- (i) U est un voisinage (I-) régulier de X dans Y ,
- (ii) U est σ -compact, et pour tout compact K de U il existe un compact $K' \subset U$ tel que $K \searrow X(K')$.

Preuve. — (i) \Rightarrow (ii) : On a $U = |\mathcal{E}|$ où $\mathcal{E} = \{E_n\}$ est une (I-) gigogne, et \bar{E}_n est compact pour tout $n \in \mathbf{N}$, car on peut comprimer E_n dans un voisinage compact de X . Ceci permet de conclure.

(ii) \Rightarrow (i) : Par la σ -compacité de U , il existe une suite $\{K_i\}$ de voisinages compacts de X dans U , telle que $K_0 \subset \overset{\circ}{K}_1 \subset K_1 \subset \overset{\circ}{K}_2 \subset \dots$ et que $U = \bigcup_n \overset{\circ}{K}_n$.

On extrait alors une sous-suite qui est une (I-) gigogne.

On remarque que dans 4.1 l'(I-)axiome n'est pas supposé *a priori*, ce qui n'est malheureusement pas le cas dans le théorème suivant :

4.2. THÉORÈME. — *Soit U un voisinage de X dans Y . Soit \mathcal{K} une famille de compacts de Y invariante par les homéomorphismes de Y qui fixent un voisinage de X et $Y - U$.*

Pour deux voisinages A et B de X dans Y on définit une propriété $\underline{\underline{C}}(U; B, A) \equiv \underline{\underline{C}}(U; B, A; \mathcal{K})$ par

$$\boxed{\underline{\underline{C}}(U; B, A)}$$

Tout compact $K \subset U$ élément de \mathcal{K} est (I-) compressible jusque dans B par une (I-) compression qui fixe $(Y - U) \cup A$.

On considère ensuite les affirmations suivantes :

- (i) U est un voisinage (I-) régulier de X dans Y .
- (ii) Il existe un voisinage (I-) régulier E de X dans Y , $E \subset U$, et un voisinage V de X dans Y tels que $\underline{\underline{C}}(U; E, V)$ soit vérifiée.
- (iii) Il existe un voisinage B de X dans Y qui vérifie $B \searrow X(U)$ et un voisinage A de X dans Y tels que $\underline{\underline{C}}(U; B, A)$ soit vérifiée.

(iv) Pour tout voisinage B de X dans Y , $B \subset U$, et tout voisinage A de X dans Y tels que $A \searrow X(B)$ on a $\underline{\underline{C}}(U; B, A)$.

Alors :

- (a) On a les implications suivantes : (i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv).
- (b) Si en plus (Y, X) vérifie l' (I-) axiome et si $U - X$ est contenu dans une réunion dénombrable de compacts de \mathcal{K} dans U , alors les affirmations (i)-(iv) sont équivalentes.

Remarque. — C'est la partie (b) qui constitue le théorème d'identification proprement dit.

Preuve de (a). — (i) \Rightarrow (ii) est trivial : On pose $E = U$ et on choisit V comme on veut; les (I-) compressions de $\underline{\underline{C}}(U, E, V)$ seront toujours l'identité.

(ii) \Rightarrow (iii) : Soit $E = \bigcup E_i$, où $\{E_i\}$ est une (I-) gigogne. On choisit $B = E_1$; $A = E_0 \cap V$. Pour vérifier $\underline{\underline{C}}(U; B, A)$, soit $K \in \mathcal{K}$. Par $\underline{\underline{C}}(U; E, V)$ il existe un homéomorphisme h_1 (une isotopie $\{h_t\}$) de Y qui fixe $Y - U$ et V et tel (le) que $h_1(K) \subset E$. Étant compact, $h_1(K) \subset E_n$ pour un $n \geq 1$ convenable. Soit g_1 (resp. g_t) une (I-) compression de E_n jusque dans $E_1 = B$ fixant $Y - E_{n+1}$ et un voisinage W de X . Soit $f: E_0 \searrow W(E_1)$ une compression. Alors l'homéomorphisme $f^{-1} g_1 f h_1$ (resp. l'isotopie $\{f^{-1} g_t f h_1\}$) est une (I-) compression de K jusque dans $B = E_1$ qui fixe $Y - U$ et A .

(iii) \Rightarrow (iv) : Soient C et D des voisinages de X dans Y tels que $C \subset U$ et $D \searrow X(C)$. Pour vérifier $\underline{\underline{C}}(U; C, D)$, soit $K \in \mathcal{K}$. Soit g_1 (resp. $\{g_t\}$) une (I-) compression de B jusque dans C fixant $Y - U$. Elle fixe un voisinage W de X . Soit $f: D \searrow W \cap A(C)$ une compression. Ensuite $K \in \mathcal{K}$ entraîne $f(K) \in \mathcal{K}$. Selon $\underline{\underline{C}}(U; B, A)$ il existe un homéomorphisme h_1 (une isotopie $\{h_t\}$) de Y qui fixe $Y - U$ et A tel (le) que $h_1(f(K)) \subset B$. Alors $f^{-1} g_1 h_1 f$ (resp. $\{f^{-1} g_t h_1 f\}$) est une (I-) compression de K jusque dans C qui fixe $Y - U$ et D .

Preuve de (b). — Il suffit de démontrer que (iv) \Rightarrow (i). Par les hypothèses supplémentaires sur U et \mathcal{K} , on a une suite $\{K_i\}$ de compacts éléments de \mathcal{K} telle que $U = X \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i \right)$. Par l' (I-) axiome, on a un voisinage (I-) régulier E de X dans Y contenu dans U ; soit $E = \bigcup E_i$, où $\{E_i\}$ est une (I-) gigogne. Par récurrence, on va construire une suite d'homéomorphismes $h_0 = \text{id}, h_1, h_2, \dots$ fixant $Y - U$ et un voisinage de X tels que $h_m|E_n = h_n|E_n$ pour $m \geq n$ et que $h_n(E_n) \supset X \cup \left(\bigcup_{i=1}^n K_n \right)$ pour $n \geq 1$.

On suppose h_n construit. D'après (iv), on a $\underline{C}(U; h_n(E_{n+1}), h_n(E_n))$; il existe donc un homéomorphisme g de Y fixant $Y - U$ et $h_n(E_n)$ tel que $gh_n(E_{n+1}) \supset K_{n+1}$. Alors $h_{n+1} = gh_n$ convient.

Par les propriétés des h_n , on a

$$h_n(E_n) = h_{n+1}(E_n) \searrow X(h_{n+1}(E_{n+1})),$$

[donc $\{h_n(E_n)\}$ est une (I-) gigogne] et $\bigcup_n h_n(E_n) = U$. Donc U est un voisinage (I-) régulier.

4.3. COROLLAIRE. — *Supposons que pour un voisinage régulier E de X (et donc pour tous) $E - X$ soit contenu dans une réunion dénombrable de compacts de E . On considère $E_0 \subset E_1 \subset E_2 \subset \dots$ une suite croissante de voisinages réguliers de X dans Y . Alors $U = \bigcup_n E_n$ est aussi un voisinage régulier de X dans Y .*

Preuve de 4.3. — Soit \mathcal{K} la famille de tous les compacts de Y . Soit A un voisinage de X , tel que $A \searrow X(E_1)$. D'après 4.2, partie (a), on a $\underline{C}(E_i, E_1, A)$ pour tout $i \in \mathbf{N}$. Tout compact de U est contenu dans un E_i , donc on a $\underline{C}(U; E_1, A)$ ce qui prouve selon 4.2 partie (b) que U est un voisinage régulier.

On utilisera plusieurs fois par la suite la notion suivante :

4.4 DÉFINITION. — On dira qu'un espace B topologique vérifie le *principe de prolongement des isotopies* si — pour tout ouvert A de B et tout glissement $f_t : A \rightarrow B$ et tout fermé C de B inclus dans A , de frontière compacte, tel que $f_t(C)$ soit fermé dans B pour tout t — il existe une isotopie $F_t : B \rightarrow B$ telle que $F_t|C = f_t|C$.

La proposition suivante reprend la question de transitivité posée en 2.5-2.7.

4.5. PROPOSITION. — *Supposons que Y soit hausdorff et que (Y, X) satisfasse à l'I-axiome. Soit U un voisinage localement compact de X dans Y tel que X soit fermé dans U , que $U - X$ soit contenu dans une réunion dénombrable de compacts de U (ceci est vrai par exemple si U ou $U - X$ est σ -compact), et que $U - X$ satisfasse au principe de prolongement des isotopies. Alors, si U est un voisinage régulier de X dans lui-même, U est aussi un voisinage régulier de X dans Y .*

Preuve. — Soit \mathcal{K} la famille de tous les compacts de Y . On va montrer que U satisfait à l'affirmation (iii) de 4.2 ce qui permettra de conclure.

Pour cela soit B un voisinage de X dans Y tel que $B \searrow X(U)$ et soient $A \subset \mathring{A}'$ deux voisinages fermés de X dans U tels que $A' \searrow X(B)$ (A' existe d'après le lemme 1.8 et les hypothèses topologiques de 4.5). Si K est un compact de U , par 4.2 (iv) appliqué dans (U, X) , il existe une isotopie $\{h_t\}$ de U qui fixe A' telle que $h_t(K) \subset B$. Si l'on remarque que, si K' est un voisinage compact de K dans U , $\bigcup \{h_t(K') \mid t \in I\}$ est encore compact, il est facile en utilisant le principe de prolongement des isotopies (cf. 5.8) d'obtenir une isotopie $\{H_t\}$ de $U - X$ telle que $H_t|K - X = h_t|K - X$ et $H_t|N \cap (U - X) = \text{id}|N \cap (U - X)$ où N est la réunion le complément d'un voisinage ouvert de K d'adhérence compacte L contenue dans U [par conséquent $(K - X) \cup (N \cap (U - X))$ est fermé dans $U - X$]. L'isotopie $\{H_t\}$ se prolonge alors à Y par l'identité sur l'ouvert $\mathring{A} \cup (Y - L)$ et établit $\underline{\underline{C}}(U; B, A)$.

5. Critères locaux d'existence des voisinages I-réguliers

Quittant maintenant les généralités pour vérifier l'I-axiome dans des situations géométriques plus concrètes, on suppose dans tout ce paragraphe

Y hausdorff et X fermé dans Y .

On commence par introduire la notion de pincement qui nous permettra en 5.4, le principal théorème de ce paragraphe, de formuler des critères de caractère local (suffisants mais non nécessaires) pour la validité de l'I-axiome. Ce théorème sera ensuite utilisé pour montrer que l'I-axiome est vérifié par exemple dans un couple (Y, X) localement triangulable et métrisable.

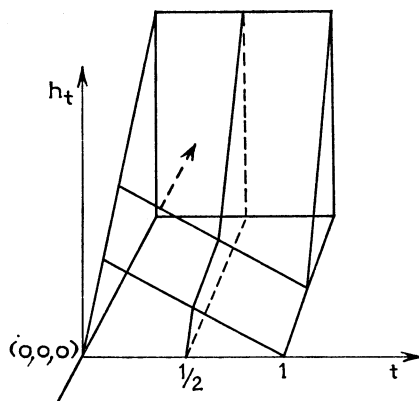
5.1. DÉFINITIONS. — Soient A une partie de X et U un voisinage de A dans Y .

Un *pseudo-pincement* de (Y, X) autour de A dans U est une homotopie $\{h_t\}$ de Y telle que :

- (i) h_t fixe $Y - U$ et $h_t(x) = x$ pour tout $x \in X$ et tout $t \in I$;
- (ii) pour tout $\tau \in (0, 1)$, la famille $\{h_t \mid t \in [0, \tau]\}$ est une isotopie;
- (iii) $h_1^{-1}(X)$ est un voisinage de A dans Y .

Un *pincement* autour de A dans U est un pseudo-pincement $\{h_t\}$ autour de A dans U tel que, pour tout $\tau \in (0, 1)$, l'isotopie $\{h_t \mid t \in [0, \tau]\}$ fixe $Y - U$ et un voisinage N_τ de X indépendant de $t \in [0, \tau]$.

Le diagramme suivant présente le graphe d'un pincement autour de 0 dans $[0, 1]$ où $(Y, X) = ([0, \infty), 0)$.



Tout h_t est linéaire par au plus trois morceaux. Mais il n'est pas de pincements dont le graphe total soit linéaire par morceaux près de $t = 1$, car tout triangle dont la base se trouve sur la droite $t = 1$ du plan horizontal de niveau zéro a toutes ses t -sections horizontales. Donc pour définir un pincement « PL », on demandera seulement que $\{f_t, 0 \leq t < 1\}$ soit une isotopie PL.

5.2. AXIOME. — Soit A une partie de X . On dit que (Y, X) satisfait à l'axiome du (pseudo-) pincement autour de A , si l'affirmation suivante est vérifiée :

$$\boxed{P(A) \text{ [resp. } P'(A)]}$$

Pour tout voisinage U de A dans Y , il existe un (pseudo-) pincement autour de A dans U .

5.3. QUESTION TECHNIQUE. — Si l'on suppose que $Y - X$ vérifie le principe de prolongement des isotopies, est-ce que $P'(A)$ entraîne $P(A)$? Si oui, l'énoncé suivant se simplifie.

5.4 THÉORÈME DE GLOBALISATION. — Supposons Y localement compact et σ -compact. Alors :

- (α) Si $P(x)$ est vérifié pour tout $x \in X$, alors (Y, X) vérifie l'I-axiome.
- (β) Si $P'(x)$ est vérifié pour tout $x \in X$ et si Y satisfait au principe de prolongement des isotopies, alors (Y, X) vérifie l'I-axiome.

La démonstration exige quelques préparatifs :

5.5. LEMME. — Si $\{f_t\}$ et $\{g_t\}$ sont des (pseudo-) pincements autour de A dans U et de B dans U , respectivement, alors $\{g_t f_t\}$ est un (pseudo-) pincement autour de $A \cup B$ dans U .

Preuve. — Immédiate.

5.6. COROLLAIRE. — Si $P(x)$ [resp. $P'(x)$] est vérifié pour tout $x \in X$, alors $P(A)$ [resp. $P'(A)$] est vérifié pour tout compact A de X (cf. aussi 5.11).

On peut dès maintenant obtenir un cas particulier de 5.4 qui fait apparaître l'idée sous-jacente à la notion de pincement :

5.7. PROPOSITION. — Supposons Y localement compact (non nécessairement σ -compact) et X compact. Alors, si $P(x)$ est vérifié pour tout $x \in X$, (Y, X) vérifie l'I-axiome.

Preuve. — Soit U un ouvert de Y contenant X . On a $P(X)$ par 5.6, soit donc $\{h_t\}$ un pincement autour de X dans U . Soit V un voisinage relativement compact de X dont l'adhérence est contenue dans $h_1^{-1}(X)$. Si W est un voisinage de X dans Y , on a $h_1(\bar{V}) \subset X \subset W$; par compacité de \bar{V} , il existe donc $\tau \in (0, 1)$ tel que $h_\tau(V) \subset W$. Par définition, $\{h_t \mid t \in [0, \tau]\}$ est une I-compression de V jusque dans W fixant $Y - U$.

C. Q. F. D.

5.4 (β) exige une préparation pour l'application du prolongement des isotopies. En gros, quand on coupe des pseudo-pincements près de $t = 1$, on obtient des isotopies qui ne fixent pas nécessairement un voisinage de X , ce qu'on demande cependant des compressions. Le lemme suivant permettra de construire à partir d'isotopies fixant X des isotopies fixant tout un voisinage de X en conservant certaines inclusions :

5.8. LEMME. — Supposons que Y soit localement compact et vérifie le principe du prolongement des isotopies. Soit $\{f_t\}$ une isotopie de Y à support compact contenu dans un ouvert U de Y telle que $f_t|_X = \text{id}|_X$ pour tout $t \in I$. Soit W un voisinage ouvert de X dans Y . Alors il existe une isotopie $\{f'_t\}$ de Y telle que :

- (i) f'_t est à support compact contenu dans $W \cap U$ [en particulier, pour toute partie C de Y , $f'^{-1}_t(C) \subset W \cup C$].
- (ii) $f'_t = f_t$ sur un voisinage de X indépendant de t .

5.9. COROLLAIRE (Hypothèses et notations de 5.8; preuve immédiate)
 — L'isotopie $\bar{f}_i = f_i^{-1} \circ f_i$ a les propriétés suivantes :

- (i) \bar{f}_i est à support compact contenu dans $U - X$ (et fixe donc un voisinage de X).
- (ii) Si B et C sont des parties de Y telles que $f_i(B) \subset C$, alors $\bar{f}_i(B) \subset C \cup W$; en particulier $f_i(B) \subset W$ entraîne $\bar{f}_i(B) \subset W$.

Preuve de 5.8. — Soit $K \subset U$ un voisinage compact du support de $\{f_i\}$. Puisque $f_i|_X = \text{id}|_X$, il existe un voisinage $W_0 \subset W$ de X tel que $f_i(W_0) \subset W$ pour tout $t \in I$ et que — en posant $f_i'' = \text{id}$ près de $Y - (\bar{K} \cap W)$, $f_i'' = f_i$ sur W_0 — on obtienne un glissement $\{f_i''\}$ d'un ouvert V de Y contenant $(Y - (\bar{K} \cap W)) \cup W_0$ dans Y . Alors V contient un voisinage fermé C de $X \cup (Y - U)$, de frontière compacte, tel que $f_i''(C)$ soit fermé pour tout $t \in I$ et que $\overline{Y - C} \subset W$. En appliquant le prolongement des isotopies, on obtient une isotopie $\{f_i'\}$ de Y telle que $f_i'|_C = f_i''|_C$ pour tout $t \in I$. Il est immédiat que $\{f_i'\}$ convient.

Preuve de 5.4. — Donnons d'abord l'idée de cette démonstration assez technique. Elle est de décomposer X en deux familles de compacts disjoints $\{A_i\}$ et $\{B_i\}$, de considérer des pincements $\{f_i^t\}$ et $\{g_i^t\}$ autour de A_i et B_i respectivement donnés par 5.6, de régler la vitesse d'approche individuellement pour chaque i par des changements de paramètres, de bâtir deux homotopies $\{\bar{f}_i\}$ et $\{\bar{g}_i\}$ qui pour ainsi dire reglobalisent les $\{f_i^t\}$ et $\{g_i^t\}$ respectivement après ce réglage et de considérer $\{h_i\} = \{\bar{g}_i \bar{f}_i\}$. Il est clair que les conditions à imposer sur les changements de paramètres doivent être assymétriques en $\{f_i^t\}$ et $\{g_i^t\}$: pour ne pas perdre par $\{\bar{g}_i\}$ ce qu'on a gagné par $\{\bar{f}_i\}$. Voici la formalisation de cette idée : soit U un voisinage ouvert de X dans Y . Pour vérifier l'I-axiome, on veut trouver un ouvert V de Y , $X \subset V \subset U$, tel que V soit I-compressible vers X en fixant $Y - U$.

Première partie [commune à (α) et (β) , les variantes pour (β) sont indiquées entre parenthèses]. — Par compacité locale et σ -compacité de Y on trouve des compacts A_i et B_i de X et des ouverts U_i, V_i relativement compacts de Y (où i parcourt \mathbf{N}) tels que

$$A_i \subset U_i; \quad B_i \subset V_i; \quad \cup \{A_i \cup B_i \mid i \in \mathbf{N}\} = X;$$

$$\bar{U}_i \cap \bar{U}_j = \emptyset = \bar{V}_i \cap \bar{V}_j \quad \text{si } i \neq j;$$

et que $\cup \{\bar{U}_i \mid i \in \mathbf{N}\}$ et $\cup \{\bar{V}_i \mid i \in \mathbf{N}\}$ soient des fermés de Y contenus dans U .

D'après les hypothèses [existence des (pseudo-) pincements locaux] et 5.6, il existe, pour tout $i \in \mathbf{N}$, des (pseudo-) pincements $\{f_i^t\}$ autour de A_i dans U_i ; $\{g_i^t\}$ autour de B_i dans V_i , qui soient à supports contenus dans U_i et V_i respectivement. Les (pseudo-) pincements fixent X ; en utilisant l'hypothèse sur leurs supports et un argument de compacité on obtient :

- (1) Pour tout voisinage N de $x \in X$ dans Y , il existe un voisinage ouvert $N' \subset N$ de x dans Y tel que $f_i^t(N') \subset N$ et $g_i^t(N') \subset N$ pour tout $t \in I$ et $i \in \mathbf{N}$.

Soient A'_i et B'_i des voisinages compacts dans Y de A_i et B_i respectivement, tels que $A'_i \subset (f_i^1)^{-1}(X) \cap U_i$ et $B'_i \subset (g_i^1)^{-1}(X) \cap V_i$. D'après (1), il existe pour tout $x \in B_i$, un voisinage $N'(x) \subset B'_i$ de x dans Y tel que $f_i^t(N'(x)) \subset B'_i$ pour tout $j \in \mathbf{N}$ et tout $t \in I$. Soit $C_i = \bigcup \{N'(x) \mid x \in B_i\} \subset B'_i$, alors on a

$$(2) \quad f_i^t(A'_i) \subset X; \quad g_i^t(B'_i) \subset X;$$

$$(3) \quad f_i^t(C_i) \subset B'_i \quad \text{pour tout } i, j \in \mathbf{N} \quad \text{et tout } t \in I.$$

On pose

$$F_1 = \bigcup \{A'_i \mid i \in \mathbf{N}\}; \quad F_2 = \bigcup \{C_i \mid i \in \mathbf{N}\}; \\ V = F_1 \cup F_2.$$

V est alors un voisinage ouvert de X . Soit maintenant W un voisinage de X quelconque; on veut construire une I-compression \bar{h}_i de V jusque dans W fixant $Y - U$. Par (1), il existe un voisinage $W' \subset W$ de X dans Y tel que

$$(4) \quad g_i^t(W') \subset W \quad \text{pour tout } i \in \mathbf{N} \quad \text{et tout } t \in I.$$

En usant de (2) et d'un argument de compacité on montre que pour tout $i \in \mathbf{N}$ il existe $\tau_i \in (0, 1)$ tel que $f_{\tau_i}^t(A'_i) \subset W'$ et $g_{\tau_i}^t(B'_i) \subset W$. Un changement de paramètre (effectué indépendamment pour chaque i) permet donc de supposer :

$$(5) \quad f_{1/2}^t(A'_i) \subset W' \quad \text{et} \quad g_{1/2}^t(B'_i) \subset W \quad \text{pour tout } i \in \mathbf{N}.$$

On voudrait bâtir l'I-compression $\{\bar{h}_i\}$ cherchée à partir des isotopies $\{f_i^t \mid t \in [0, 1/2]\}$ et $\{g_i^t \mid t \in [0, 1/2]\}$; pour le cas (β) on est gêné par le fait que ces isotopies, provenant de pseudo-pincements, ne fixent peut-être pas un voisinage de X . Ici, 5.8 sera utile :

Deuxième partie : Réajustement des $\{f_i^t\}$ et $\{g_i^t\}$.

Cas (α) : On pose $\bar{f}_i^t = f_i^t$ et $\bar{g}_i^t = g_i^t$, $0 \leq t \leq 1/2$.

Cas (β) : 5.9 nous fournit des isotopies $\{\bar{f}_i^t \mid t \in [0, 1/2]\}$ et $\{\bar{g}_i^t \mid t \in [0, 1/2]\}$ à support dans $U_i - X$ et $V_i - X$ respectivement qui satisfont encore

à l'inclusion de (4) au moins pour $t_j = 1/2$ et à (5) et telles que, au lieu de (3), on ait $\bar{f}_{1/2}^j(C_i) \subset B'_i \cup W'$ pour tout $i, j \in \mathbf{N}$. Dans les deux cas, on a donc des isotopies $\{\bar{f}_t^i \mid t \in [0, 1/2]\}$ et $\{\bar{g}_t^i \mid t \in [0, 1/2]\}$ à support dans $U_i - X$ et $V_i - X$ respectivement telles que :

$$\begin{aligned} (\bar{3}) \quad & \bar{f}_{1/2}^i(C_i) \subset B'_i \cup W'; \\ (\bar{4}) \quad & \bar{g}_{1/2}^i(W') \subset W; \\ (\bar{5}) \quad & \bar{f}_{1/2}^i(A'_i) \subset W'; \quad \bar{g}_{1/2}^i(B'_i) \subset W \quad \text{pour tout } i, j \in \mathbf{N}. \end{aligned}$$

Troisième partie [commune à (α) et (β)]. — Si on pose pour $t \in I$ et $x \in Y$:

$$\begin{aligned} \bar{f}_t(x) &= \bar{f}_{t/2}^i(x) && \text{pour } x \in U_i, \\ &= x && \text{pour } x \notin \bigcup_i (\text{support } \{\bar{f}_t^i\}), \\ \bar{g}_t(x) &= \bar{g}_{t/2}^i(x) && \text{pour } x \in V_i, \\ &= x && \text{pour } x \notin \bigcup_i (\text{support } \bar{g}_t^i) \end{aligned}$$

[on remarque que $\bigcup_i (\text{support } \{\bar{f}_t^i\})$ et $\bigcup_i (\text{support } \{\bar{g}_t^i\})$ sont des fermés de Y], alors $\{\bar{h}_t\} = \{\bar{g}_t \circ \bar{f}_t\}$ est une isotopie à support dans $U - X$ telle que

$$\begin{aligned} \bar{h}_1(F_1) &= \bar{g}_1 \circ \bar{f}_1(F_1) \subset \bar{g}_1(W') \subset W \quad \text{par } (\bar{5}) \text{ et } (\bar{4}), \\ \bar{h}_1(F_2) &= \bar{g}_1 \circ \bar{f}_1(F_2) \subset \bar{g}_1\left(W' \cup \bigcup_i B'_i\right) \subset W \quad \text{par } (\bar{3}), (\bar{4}) \text{ et } (\bar{5}), \end{aligned}$$

donc $\bar{h}_1(V) \subset W$ et $\{\bar{h}_t\}$ est une I-compression convenable.

5.10. REMARQUE. — Le théorème 5.4 reste valable si l'hypothèse Y localement compact σ -compact est remplacée par une des hypothèses suivantes :

- soit (i) Y localement compact paracompact,
- soit (ii) X σ -compact et X possède un voisinage localement compact dans Y .

Preuve. — (i) Dans ce cas, Y est la somme topologique d'une famille $\{Y_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ d'espaces localement compacts σ -compacts. Chaque Y_α est alors réunion de composantes connexes de Y et on construit les I-compressions cherchées séparément dans chaque Y_α comme dans 5.4 (cf. [1], § 9, th. 5).

(ii) Dans la démonstration de 5.4 on a seulement besoin du fait que X possède un voisinage localement compact et σ -compact dans Y, le voisinage U de X du départ pouvant être supposé contenu dans ce voisinage. Mais les hypothèses (ii) garantissent l'existence d'un tel voisinage.

5.11. COROLLAIRE 1 A LA PREUVE DE 5.4. — *Sous les hypothèses de 5.4 ou 5.10, si $P(x)$ [resp. $P'(x)$] est vérifié pour tout $x \in X$, alors $P(X)$ [resp. $P'(X)$] est vérifié.*

Preuve. — On a seulement besoin du début de la démonstration de 5.4, précisément de la définition des $\{f_i^t\}$ et $\{g_i^t\}$. Si on définit alors pour $t \in I$ et $x \in Y$:

$$\begin{aligned} f_t(x) &= f_i^t(x) && \text{pour } x \in U_i, \\ &= x && \text{pour } x \notin \bigcup_i (\text{support } \{f_i^t\}), \\ g_t(x) &= g_i^t(x) && \text{pour } x \in V_i \\ &= x && \text{pour } x \notin \bigcup_i (\text{support } \{g_i^t\}) \end{aligned}$$

alors $\{h_t \mid t \in I\}$ défini par $\{h_t\} = \{g_t \circ f_t\}$ est un (pseudo-)pincement de (Y, X) autour de X dans U.

5.12. PROPOSITION. — *Supposons $P'(X)$. Soit E un voisinage I-régulier de X dans Y. Alors il existe une homotopie $\{h_t \mid t \in I\}$ de E telle que :*

- (i) $\{h_t \mid t \in [0, 1]\}$ se prolonge en une isotopie, $\{H_t \mid t \in [0, 1]\}$ de Y qui fixe $(Y - E) \cup X$;
- (ii) $h_t(E) = E$ pour $0 \leq t < 1$;
- (iii) h_1 est une rétraction de E sur X.

En particulier, X est un rétract par déformation fort de E; donc l'inclusion $X \hookrightarrow E$ est une équivalence d'homotopie.

Preuve. — Soit $\{f_t\}$ un pseudo-pincement autour de X dans E. Alors $V = f_1^{-1}(X)$ est un voisinage de X dans E; soit E' un voisinage I-régulier de X dans Y contenu dans V. D'après 2.4, il existe un glissement $\{g_t\}$ de E tel que $g_t(E) \subset E$ pour tout $t \in I$, que $h_1(E) = E'$ et que $\{g_t \mid t \in [0, 1]\}$ se prolonge en une isotopie $\{G_t \mid t \in [0, 1]\}$ de Y qui fixe $Y - E$ et un voisinage de X. Alors $h_t = f_t g_t$ ($t \in I$) et $H_t = f_t G_t$ ($0 \leq t < 1$) conviennent.

5.13. COROLLAIRE 2 A LA PREUVE DE 5.4. — *Soient X et Y comme dans 5.4 ou 5.10 et supposons que (Y, X) satisfait à $P(x)$ [resp. $P'(x)$]*

pour tout $x \in X$. Soit U un voisinage de X dans Y ; E un sous-ensemble de Y tel que $U \subset E \subset Y$. Alors il existe un voisinage ouvert V de X et une famille d'isotopies $\{F_t^W \mid t \in I\}$ de Y à support dans $U - X$ (resp. à support dans U et fixant X) indexée par les voisinages W de X telle que :

(i) $F_1^W(V) \subset W$.

(ii) Pour tout compact K de E il existe un compact K' de E (indépendant de W) tel que $F_t^W(K) \subset K'$

pour tout $t \in I$ et tout voisinage W de X .

Preuve. — On adopte les notations de la démonstration de 5.4. V sera défini comme dans cette démonstration; pour un voisinage W de X donné, $\{F_t^W\}$ sera définie à partir des (pseudo-)pincements $\{f_t^i \mid t \in [0, 1/2]\}$ et $\{g_t^i \mid t \in [0, 1/2]\}$ [après le changement de paramètres effectué dans la démonstration de 5.4 pour obtenir la propriété (5)] comme suit :

$$\begin{aligned} F_t^W &= \tilde{g}_t \tilde{f}_t & \text{ou } \tilde{f}_t &= f_{t/2}^i(x) & \text{pour } x \in U_i, \\ & & &= x & \text{pour } x \notin \bigcup_i (\text{support } \{f_t^i\}), \\ \tilde{g}_t &= g_{t/2}^i(x) & \text{pour } x \in V_i, \\ & & & & \text{pour } x \notin \bigcup_i (\text{support } \{g_t^i\}). \end{aligned}$$

On remarque que, dans le cas $P(x)$, $\{F_t^W\}$ n'est autre chose que l'I-compression $\{\bar{h}_t\}$ de la démonstration de 5.4; dans le cas $P'(x)$, on s'est cette fois abstenu de faire le réajustement de la deuxième partie de la démonstration de 5.4, qui risquerait de détruire la propriété (ii). Or, la propriété (i) se vérifie comme dans la troisième partie de la démonstration de 5.4 avec les propriétés (3), (4), (5) au lieu de $(\bar{3})$, $(\bar{4})$, $(\bar{5})$. Pour la vérification de (ii), soit K un compact de E . Alors, pour tout voisinage W de Y , on a

$$\cup \{F_t^W(K) \mid t \in I\} \subset \bigcup_{i,j \in \mathbf{N}} \left(\bigcup_{t \in I} g_t^i f_t^j(K) \right);$$

le membre de droite est indépendant de W ; il est compact (puisque les $i \in \mathbf{N}$ tels que $\text{support } \{f_t^i\}$ ou $\text{support } \{g_t^i\}$ rencontre un compact donné de Y sont en nombre fini) et convient comme K' , puisqu'il est contenu dans E , vu les supports des $\{f_t^i\}$ et $\{g_t^i\}$.

5.13 permet, sous l'hypothèse des pseudo-pincements locaux, d'obtenir à partir du théorème d'identification 4.2, un théorème d'identification plus simple qui se rapproche de 4.1.

5.14. THÉORÈME D'IDENTIFICATION DANS LE CAS DES PSEUDO-PINCEMENTS. — Supposons que X soit σ -compact et possède un voisinage localement compact dans Y . En plus on suppose l'I-axiome pour (Y, X) et $P'(x)$ pour tout $x \in X$. Soit U un voisinage de X dans Y , et soit \mathcal{K} une famille de compacts de Y , invariante par les homéomorphismes de Y qui fixent $Y - U$ et un voisinage de X , et telle que $U = \bigcup \{ K \mid U \supset K \in \mathcal{K} \}$. Alors les affirmations suivantes sont équivalentes :

- (i) U est un voisinage I-régulier de X dans Y .
- (ii) U est localement compact, σ -compact et tout compact de U élément de \mathcal{K} est compressible vers X en fixant $Y - U$.

Preuve. — (i) \Rightarrow (ii) : Soit $U = |\mathcal{E}|$, où $\mathcal{E} = \{E_i\}$ est une I-gigogne. X possède des voisinages localement compacts, σ -compacts; par des compressions on voit alors que tout E_i et donc U est localement compact, σ -compact. Le reste suit de 4.2 (a) [affirmation (iii)].

(ii) \Rightarrow (i) : Puisque U est σ -compact, U est réunion dénombrable d'éléments de \mathcal{K} . Par 4.2 (b), il suffit alors de vérifier le critère 4.2 (iii). Puisque, sous l'hypothèse de l'I-axiome, tout voisinage régulier est I-régulier, il suffit de considérer des compressions. L'I-axiome assure l'existence d'un voisinage B de X tel que $B \searrow X(U)$; 5.13 nous donne une famille d'isotopies $\{F_t^W\}$ de Y à support dans B indexée par les voisinages W de X et un voisinage A de X tels que :

- (1) $F_1^W(A) \subset W$, et
- (2) pour tout compact K de U il existe un compact K' de U indépendant de W tel que $F_1^W(K) \subset K'$.

Pour vérifier alors la propriété $\underline{C}(U; B, A)$ de 4.2, soit K un compact de U . D'après l'hypothèse (ii), pour le compact K' donné par (2), il existe une compression f de K' jusque dans B fixant $Y - U$; f fixe un voisinage W de X . Alors l'homéomorphisme $g = (F_1^W)^{-1} \circ f \circ F_1^W$ de Y fixe $(Y - U) \cup A$ et on a $g(K) \subset B$.

C. Q. F. D.

Maintenant, on va tirer des conclusions pratiques de 5.4 et de 5.14.

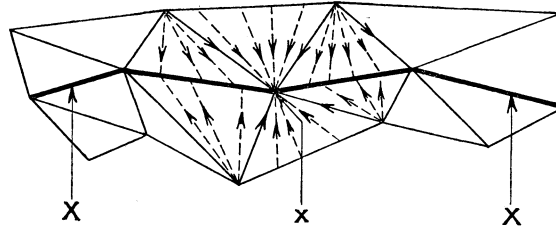
5.15. THÉORÈME. — Soit (Y, X) un couple localement triangulable et supposons X σ -compact. Alors :

- (a) (Y, X) vérifie l'I-axiome.
- (b) Un voisinage U de X dans Y est un voisinage I-régulier si et seulement si U est localement compact σ -compact et si tout compact de U est compressible vers X en fixant $Y - U$.

Preuve. — Par 5.4, 5.10 (ii) et 5.14 c'est une conséquence immédiate de

5.16. LEMME. — Si (Y, X) est un couple simplicial fini, alors on a $P(x)$ pour tout $x \in X$.

Preuve. — Soit U un voisinage de x dans Y . En subdivisant convenablement, on se ramène au cas où x est un sommet d'une triangulation de (Y, X) , où X est plein dans Y et où l'étoile (fermée) de x dans Y est incluse dans U . On veut construire un pincement de (Y, X) autour de x dans U . L'idée est de regarder un voisinage simplicial de X dans Y comme joint du link de X dans Y avec X , de glisser un voisinage de X le long des segments du joint pour l'écraser sur X à la fin et d'atténuer le candidat à un pincement obtenu ainsi pour ne rien bouger hors de l'étoile de x :



Formellement : Soit $\chi : Y \rightarrow I$ l'application linéaire sur chaque simplexe définie sur les sommets par $\chi(v) = 0$ si $v \in X$ et $\chi(v) = 1$ si $v \notin X$. Alors $\chi^{-1}(0) = X$ puisque X est plein, et $\chi^{-1}(1) = X^c$ est l'union des simplexes fermés de Y qui ne rencontrent pas X . On plonge Y dans \mathbb{R}^N (N un entier suffisamment grand) de manière linéaire sur chaque simplexe. Tout $y \in Y$ s'écrit alors sous la forme $y = (1 - u) \cdot p(y) + u \cdot q(y)$, ce qu'on notera $y = [p(y), u, q(y)]$ où $u = \chi(y) \in I$ et $p(y) \in X$, $q(y) \in X^c$. D'ailleurs $p(y)$ [resp. $q(y)$] est uniquement déterminé et fonction continue de y si $\chi(y) < 1$ [resp. $\chi(y) > 0$]. Soit $\alpha : X \rightarrow I$ une fonction qui est nulle hors de l'étoile de x dans X et telle que $\chi^{-1}(1)$ soit un voisinage de x dans X . Soit $\{h_t\}$ le pincement autour de 0 dans I donné après 5.1. Alors l'homotopie $\{H_t \mid t \in I\}$ de Y définie par

$$H_t(y) = [p(y), h_{\alpha(p(y)) \cdot t}(\chi(y)), q(y)]$$

est un pincement autour de x dans U .

Maintenant, on introduit une classe d'espaces topologiques qui permet de généraliser la notion de couple triangulable (cf. les exemples de [13, § 1.3]) et par suite de généraliser 5.15.

NOTATIONS. — Si A est un ensemble, le cône ouvert de rayon λ sur A est $c_\lambda A = A \times [0, \lambda) / A \times 0$, $0 \leq \lambda \leq \infty$. On écrit $c A$ pour $c_\infty A$. Le sommet du cône, noté v , est l'image de $A \times 0$ dans le quotient.

5.17. DÉFINITION (par récurrence sur la dimension). — Un *CS ensemble récurrent* [bref un CSR ⁽⁶⁾] de dimension $\leq d$ est un espace métrisable Y muni d'une filtration par des fermés, $\dots \subset Y^{(-1)} \subset Y^{(0)} \dots \subset Y^{(k)} \subset \dots$, telle que $Y^{(d)} = Y$, $Y^{(-1)} = \emptyset$, et que :

- (1) Pour tout n , $Y^{(n)} - Y^{(n-1)}$ (la *strate* de dim n) est une variété topologique sans bord de dimension n .
- (2) Pour tout n et pour tout $x \in Y^{(n)} - Y^{(n-1)}$; il existe un CSR L (un *link*) compact, de dimension $\leq d - 1$ et un homéomorphisme d'espaces filtrés $\varphi : c L \times \mathbb{R}^n \rightarrow U$, où U est un voisinage ouvert de x dans Y . Ici

$$(c L \times \mathbb{R}^n)^{(j+1+n)} = c(L^{(j)}) \times \mathbb{R}^n \quad \text{et} \quad U^{(k)} = U \cap Y^{(k)}.$$

Un *CSR quelconque* admet la même définition sauf que l'on omet $Y^{(d)} = Y$, bien que les links restent des CSR compacts de dimension finie.

5.18. DÉFINITION. — Un sous-CSR du CSR Y est un fermé X de Y qui est un CSR pour la filtration $X^{(n)} = Y^{(n)} \cap X$. On note $X < Y$.

5.19. LEMME. — Si L est un CSR compact de dimension finie, tout sous-CSR de $cL \times \mathbb{R}^n$ est de la forme $c K \times \mathbb{R}^n$ où $K < L$.

Preuve. — Par récurrence sur la dimension de L en utilisant [13, § 4.7].

5.20. THÉORÈME. — Soit Y un CSR et X un sous-CSR de Y [plus généralement, soit (Y, X) un couple d'espaces qui est localement de la forme d'un CSR et d'un sous-CSR], où X est σ -compact. Alors :

- (a) (Y, X) satisfait à l'*I*-axiome.
- (b) Un voisinage U de X dans Y est un voisinage *I*-régulier si et seulement si U est localement compact σ -compact et si tout compact de U est compressible vers X en fixant $Y - U$.

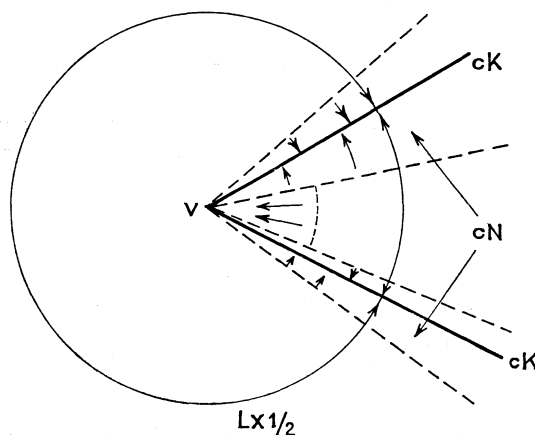
Preuve. — Dans [13] il est montré que les CSR satisfont au principe du prolongement des isotopies; en vertu de 5.4 (β), 5.10 et 5.14 il suffit donc d'établir :

5.21. LEMME. — Soit Y un CSR et X un sous-CSR de Y . Alors (Y, X) satisfait à $P'(x)$ pour tout $x \in X$.

(6) Les lettres CSR rappellent les mots conique, stratifié et récurrent.

Preuve. — $P'(x)$ est une propriété locale; d'après 5.19 il suffit donc d'établir l'existence d'un pseudo-pincement $\{h_t\}$ de $(cL \times \mathbb{R}^n, cK \times \mathbb{R}^n)$ autour de $(v, 0)$ dans $c_1 L \times B$ (où L est un link compact de Y en x et $K < L$, où v est le sommet de cL et où on note εB la boule fermée de \mathbb{R}^n centré en 0 et de rayon ε , $0 < \varepsilon < \infty$). Les éléments de cL seront notés $[y, r]$, où $y \in L$ et $r \in [0, \infty)$. On procède par récurrence sur la dimension de Y (finie ou non). Puisque la dimension de L est finie et inférieure à celle de Y , on peut supposer par récurrence que le lemme est vrai pour (L, K) . Grâce à 5.7 on déduit pour un voisinage arbitraire N' de K dans L , l'existence d'un pseudo-pincement $\{f_t\}$ autour de K dans N' . Alors $N = f_1^{-1}(K)$ est un voisinage de K dans N' . On va bâtir le pseudo-pincement $\{h_t\}$ à partir de deux homotopies de cL : l'une [étape (i)] est obtenue en soumettant $\{f_t\}$ à une opération de cône, l'autre [étape (ii)] en écrasant tout un voisinage de v dans cL sur v . Il faut cependant atténuer la deuxième pour ne pas toucher à cK et les deux pour fixer $cL - c_1 L$. Le facteur \mathbb{R}^n sera ajouté à la fin par une simple opération de produit [en atténuant encore une fois; étape (iii)].

Figure pour $L = S^1$, $K =$ deux points sur S^1 :



Formellement :

Étape (i). — Soit $\alpha : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ une fonction continue telle que $\alpha = 1$ sur $[0, 1/2]$ et $\alpha = 0$ sur un voisinage de $[1, \infty)$. L'homotopie $\{F_t\}$ de cL définie par

$$F_t[y, r] = [f_{\alpha(r) \cdot t}(y), r]$$

est une isotopie pour $t \in [0, 1)$ et fixe $cK \cup (cL - c_1 L)$.

Étape (ii). — Soit $\{g_t\}$ une homotopie de $[0, \infty)$ qui fixe $\{0\} \cup [1/2, \infty)$, qui est une isotopie pour $t \in [0, 1)$, et telle que $g_1([0, 1/4]) = 0$. Soit

$\beta : L \rightarrow [0, 1]$ une application continue qui est 0 sur K et 1 hors de N . Soit $\{G_t\}$ l'homotopie de cL définie par

$$G_t[y, r] = [y, g_{\beta^{(0)} \cdot t}(r)].$$

Alors l'homotopie $\{H_t\}$ de cL définie par $H_t = F_t \circ G_t$ est une isotopie pour $t \in [0, 1]$, fixe $cK \cup (cL - c_1L)$ et vérifie $H_1(c_{1/4}L) \subset cK$.

Étape (iii). — Soit $\mu : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ une application continue telle que $\mu = 1$ sur $1/2B$ et $\mu = 0$ hors de $3/4B$. Alors les applications $h_t : cL \times \mathbb{R}^n \rightarrow cL \times \mathbb{R}^n : ([y, r], z) \mapsto (H_{\mu(z) \cdot t}[y, r], z)$ définissent le pseudo-pincement cherché.

C. Q. F. D.

5.22. QUESTION. — Peut-on vérifier l'I-axiome pour un couple (Y, X) de WCS ensembles de [13, § 4]. La notion de WCS ensemble est moins restrictive que celle de CSR ensemble. En particulier, on voudrait supprimer la condition récurrente sur les links et remplacer tout « open cone » par un « mock open cone » ou un voisinage I-régulier d'un point. Si la réponse est OUI, le quotient Y/X est aussi un WCS ensemble dès que X est compact. Curieusement les CSR ensembles ne sont pas ainsi stables par passage au quotient, même si $X = [0, 1]$, voir [15].

Pour terminer voici encore un exemple qui montre que l'existence des pincements locaux est plus que l'existence de voisinages I-réguliers.

5.23. EXEMPLE :

$$Y = \mathbb{R}^2; \quad X = \left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x} \right) \mid x \in \left(0, \frac{1}{\pi} \right) \right\} \cup \{0\} \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^2.$$

Alors (Y, X) vérifie l'I-axiome [cf. 1.9 (ii)]; mais on n'a pas $P'(x)$ car alors, d'après 5.12, X serait rétract d'un ouvert connexe de \mathbb{R}^2 ce qui contredit le fait que X n'est pas connexe par arcs.

On peut donc se poser la question de l'existence d'une forme locale de l'I-axiome qui impliquerait l'existence des pincements. Par exemple il est clair que si $X = \{x_0\}$ où x_0 est un point de Y admettant une base dénombrable de voisinages, alors l'I-axiome pour (Y, X) entraîne $P(x_0)$.

5.24. QUESTIONS. — Existe-t-il un couple (Y, X) tel que X n'ait pas de voisinage régulier dans Y , mais tel que tout $x \in X$ admette un voisinage ouvert U dans Y tel que $U \cap X$ ait des voisinages réguliers dans U ? Cette dernière propriété est-elle même distincte de la propriété : « pour tout $x \in X$ on a $P(x)$ » ?

6. Généralisations formelles

Le but de cette section est d'indiquer que la théorie développée ci-dessus admet une généralisation permettant de considérer que tout les homéomorphismes rencontrés appartiennent à un pseudo-groupe $\underline{\text{Cat}}$ donné sur l'espace Y dans lequel on veut étudier les voisinages de X .

6.1. Tout d'abord rappelons (cf. [8], p. 1), qu'un pseudo-groupe $\underline{\text{Cat}}$ sur un espace topologique Y est une sous-catégorie de la catégorie des homéomorphismes entre ouverts de Y telle que :

(i) $\text{id} | Y$ appartient à $\underline{\text{Cat}}$.

(ii) Tout morphisme de $\underline{\text{Cat}}$ est inversible.

(iii) (Stabilité par restriction). Si $h : U \rightarrow V$ appartient à $\underline{\text{Cat}}$ et si U' est un ouvert de U , alors l'homéomorphisme $(h | U') : U' \rightarrow h(U') \subset V$ est dans $\underline{\text{Cat}}$.

(iv) (Globalisation). Soit $h : U \rightarrow V$ un homéomorphisme; si pour tout $x \in U$ il existe un ouvert U' , $x \in U' \subset U$, tel que $(h | U') : U' \rightarrow h(U')$ appartienne à $\underline{\text{Cat}}$, alors $h \in \underline{\text{Cat}}$.

6.2. EXEMPLES. — (i) Si Y est un complexe simplicial localement fini, les homéomorphismes PL (= linéaires par morceaux) entre ouverts de Y forment un pseudo-groupe.

(ii) Si Y est une $\underline{\text{Cat}}$ -variété où $\underline{\text{Cat}}$ est un pseudo-groupe sur \mathbb{R}^n , les $\underline{\text{Cat}}$ -isomorphismes d'ouverts de Y forment un pseudo-groupe sur Y . Les variétés DIFF (= différentiables de classe C^∞) forment l'exemple central.

(iii) Si $\{Y_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ est une famille de sous-espaces de Y , on considère les homéomorphismes $h : U \rightarrow V$ d'ouverts de Y tels que pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$, $h | U \cap Y_\alpha$ soit un homéomorphisme sur $V \cap Y_\alpha$. On obtient ainsi un pseudo-groupe.

(iv) Si $\underline{\text{Cat}}$ et $\underline{\text{Cat}}'$ sont deux pseudo-groupes sur Y , alors l'intersection $\underline{\text{Cat}} \cap \underline{\text{Cat}}'$ est un pseudo-groupe sur Y .

Supposons maintenant donné un certain pseudo-groupe $\underline{\text{Cat}}$ d'homéomorphismes entre ouverts de l'espace Y . Alors pour tout sous-ensemble X de Y il y a une notion de voisinages $\underline{\text{Cat}}$ -régulier ouverts qui diffère de la notion développée ci-dessus simplement en ce qu'on demande que tout homéomorphisme que l'on rencontre (ou pourrait naturellement rencontrer) soit dans $\underline{\text{Cat}}$. On dit qu'un plongement ouvert est $\underline{\text{Cat}}$ si c'est un homéomorphisme $\underline{\text{Cat}}$ sur son image. Les versions $\underline{\text{Cat}}$ (sans I-) du théorème

d'unicité 2.1 et du théorème d'identification 4.2 se démontrent alors par simple traduction.

Pour formuler une notion de voisinage I-régulier $\underline{\text{Cat}}$ on a besoin que $\underline{\text{Cat}}$ soit un pseudo-groupe sur la somme $Y \amalg Y \times \mathbb{R}$ qui satisfasse à la condition :

Si $h : U \rightarrow V$ est un morphisme de $\underline{\text{Cat}}$ entre ouverts de Y et $\alpha : (a, b) \rightarrow (c, d)$ un homéomorphisme affine, alors le produit $h \times \alpha : U \times (a, b) \rightarrow V \times (c, d)$ est dans $\underline{\text{Cat}}$.

Maintenant on peut définir les isotopies et glissements $\underline{\text{Cat}}$ ayant un intervalle ouvert de paramètre. Les glissements sur des intervalles fermés doivent être remplacés par des glissements sur des intervalles ouverts conditionnés aux extrémités dans le sens suivant :

6.3. DÉFINITION. — *Un glissement $\underline{\text{Cat}}$ $F : U \times (a, b) \rightarrow Y \times (a, b)$, où U est un ouvert de Y est dit conditionné en $c \in [a, b]$ par un plongement $\underline{\text{Cat}}$ $f : U \rightarrow Y$ si $F = f \times (\text{id} \mid \mathbb{R})$ sur un voisinage ouvert de $U \times c$ dans $U \times [a, b]$.*

Ces notions évitent tout embarras lorsqu'on compose des glissements définis sur des intervalles adjacents.

Enfin un pincement $\{h_t \mid t \in I\}$ autour de $A \subset X$ dans $U \subset Y$ sera dit $\underline{\text{Cat}}$ si $\{h_t \mid t \in (0, 1)\}$ est une isotopie $\underline{\text{Cat}}$ conditionnée en 0 par $\text{id} \mid Y$ et en chaque point $1 - \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, par un morphisme de $\underline{\text{Cat}}$. (Rappelons qu'au paragraphe 5 nous avons construit des isotopies en coupant des pincements.)

A ce point, on est en mesure de formuler et d'établir les analogues $\underline{\text{Cat}}$ de tous les résultats de cet article à l'exception des propositions qui affirment $P'(x)$ dans un complexe simplicial localement fini ou dans un CSR-ensemble (5.16 et 5.21) et qui ne se généralisent pas automatiquement parce qu'on y a utilisé des changements de paramètres non affines. Néanmoins elles admettent toutes deux une version DIFF et on peut établir facilement une version PL de la première. (Pour traduire 2.2 on peut remplacer les intervalles $[0, n]$ par des intervalles $\left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$.)

Passons à une application agréable de ces notions.

6.4. THÉORÈME DE REPRÉSENTABILITÉ DES MICROFIBRES (Kister-Mazur [7], [9], un peu généralisé). — *Soit F un espace hausdorff localement compact; soit 0 un point de F admettant une base dénombrable de voisinages et dont F soit voisinage I-régulier. Soit X un espace hausdorff localement compact et paracompact, et soit $Y \xrightarrow{\pi} X$, $\pi \mid X = \text{id} \mid X$, un microfibré de base X*

et de fibre $(F, 0)$. Alors il existe un ouvert E de Y tel que $E \xrightarrow{\pi} X$ soit un fibré (localement trivial) de fibre $(F, 0)$. De plus ce fibré est unique à un isomorphisme de fibré près (et même à un glissement de fibré près) qui fixe un voisinage de $i(X)$.

6.5. REMARQUES. — (1) Vu les hypothèses, on a $P(0)$ dans $(F, 0)$ car F est σ -compact (cf. 4.1 et la fin du paragraphe 5). D'ailleurs la situation qu'on rencontre classiquement est $(\mathbb{R}^n, 0)$.

(2) Il est vraisemblable que ce résultat est valable sans hypothèses sur X , pourvu que le microfibré soit numérable. Notre développement des propriétés des pincements n'est pas assez général pour ce cas là. [Voir Holm [5] pour le cas où $(F, 0) = (\mathbb{R}^n, 0)$.]

(3) Pour la première fois l'existence du fibré résulte d'un théorème général d'existence des voisinages réguliers. Mazur a seulement utilisé l'unicité et un bricolage local.

(4) Les analogues DIFF et PL de ce résultat se démontrent parallèlement, sans grandes difficultés. (Il faut éviter les multiplications de paramètres dans le cas PL.)

Preuve de 6.4. — On peut supposer Y (et donc X) localement compact et σ -compact (voir 5.10). Puisque $\pi i = \text{id} \mid X$, on peut aussi supposer que i est une inclusion $X \hookrightarrow Y$. Rappelons que $Y \xrightarrow{\pi} X$ est appelé microfibré si, pour tout $x \in X$, il existe un ouvert U de x dans Y tel que $U \xrightarrow{\pi} U \cap X$ soit isomorphe au diagramme $(U \cap X) \times F' \xrightarrow{\cong} U \cap X$ où F' est un voisinage de 0 dans F . C'est la condition de trivialité locale. Soit $\underline{\text{Cat}}$ le pseudo-groupe d'homéomorphismes $h : U \rightarrow V$ entre ouverts de $Y \amalg Y \times \mathbb{R}$ qui respectent la projection $\pi' \equiv \pi \amalg \pi \times \text{id} \mid \mathbb{R}$ sur $X \amalg X \times \mathbb{R}$, i. e. tels que $\pi' h = \pi'$.

AFFIRMATION 1. — *Le couple (Y, X) vérifie la version $\underline{\text{Cat}}$ de l'I-axiome.*

Preuve. — Selon la version $\underline{\text{Cat}}$ de 5.4, il suffit de vérifier que l'on a $P(x)$ pour tout $x \in X$; ce qui résulte facilement de la trivialité locale à x et de l'existence des pincements de $(F, 0)$. Maintenant l'I-axiome offre des voisinages I-réguliers de X dans Y arbitrairement petits et uniques à un glissement près (glissement $\underline{\text{Cat}}$ qui fixe un voisinage de X). Donc il ne reste qu'à démontrer :

AFFIRMATION 2 (pour l'existence). — *Tout voisinage I-régulier E de X dans Y (au sens $\underline{\text{Cat}}$) est un fibré de fibre $(F, 0)$.*

AFFIRMATION 3 (pour l'unicité). — Réciproquement, si $E \xrightarrow{\pi} X$ est un fibré de fibre $(F, 0)$, alors E est un voisinage I-régulier $\underline{\text{Cat}}$ de X dans lui-même.

Preuve de l'affirmation 2. — Soit $x \in X$. On cherche un voisinage K de x dans X tel que $E_K \equiv \pi^{-1}(K) \cap E \xrightarrow{\pi} K$ soit un diagramme isomorphe au diagramme $K \times F \xrightarrow[\times 0]{p_1} K$. Soit donc un voisinage K de x dans X , compact et assez petit pour que, par trivialité locale, il existe un voisinage ouvert U de K dans $\pi^{-1}(K)$ tel que $U \xrightarrow{\pi} K$ soit isomorphe à $K \times F \xrightarrow[\times 0]{p_1} K$. L'opérateur de restriction au-dessus de $K \subset X$ envoie le voisinage I-régulier E sur E_K et les restrictions d'éléments de $\underline{\text{Cat}}$ forment un pseudo-groupe $\underline{\text{Cat}}_K$ sur $\pi^{-1}(K)$. Or E_K est un voisinage I-régulier de K au sens de $\underline{\text{Cat}}_K$ dans $\pi^{-1}(K)$; en effet la restriction d'une gigogne $\underline{\text{Cat}}$ est clairement une gigogne $\underline{\text{Cat}}_K$ autour de K dans $\pi^{-1}(K)$. Étant régulier, E_K est $\underline{\text{Cat}}_K$ -isomorphe à U car ce dernier, isomorphe à $K \times F$, est un voisinage régulier de K au sens de $\underline{\text{Cat}}_K$ dans lui-même vu que K est compact. On conclut. L'existence d'un fibré dans le microfibré est donc établie; reste à prouver l'unicité.

Preuve de l'affirmation 3. — On va vérifier pour E un critère $\underline{\text{C}}$ ($E; B, A; \mathcal{K}$) ⁽⁷⁾ (voir 4.2) d'identification de E comme voisinage $\underline{\text{Cat}}$ -régulier de X dans Y par absorption de compacts. On choisit pour \mathcal{K} la famille des compacts K de Y tels qu'il existe pour chacun d'eux un compact K' voisinage de $\pi(K)$ dans X avec $\pi^{-1}(K') \xrightarrow{\pi} K'$ isomorphe au fibré trivial $K' \times F \xrightarrow[\times 0]{p_1} K'$. Par compacité de K' , $K' \times F$ est un voisinage I-régulier de K' ⁽⁸⁾, et le même critère appliqué à $K' \times F$ fournit une isotopie $\underline{\text{Cat}} \{ h_t, 0 \leq t \leq 1 \}$, de $\text{id} | \pi^{-1}(K')$ qui fixe A et envoie K dans B . Soit $\alpha : X \rightarrow I$ une fonction continue qui vaut 1 sur $\pi(K)$ et 0 près de $X - K'$. L'isotopie $\underline{\text{Cat}}_K$ définie par

$$(+) \quad H_t(y) = h_{\alpha(\pi(y), t)}(y) \quad \text{pour } y \in \pi^{-1}(K')$$

se prolonge sur E par l'identité en une topologie $\underline{\text{Cat}}$ et permet de conclure.

Remarques sur la preuve de 6.4 :

(1) Les frais pour une démonstration de 6.4 à partir des définitions sont bien modestes dans le cas où X est compact car la version compacte de globalisation des pinces 5.7 remplace 5.4 pour la vérification de l'I-axiome et le premier critère d'identification 4.1 remplace 5.14.

⁽⁷⁾ D'aucuns préféreront utiliser 5.14 (ii).

⁽⁸⁾ Au sens de $\underline{\text{Cat}}$, où $\underline{\text{Cat}}$ est le pseudo-groupe des homéomorphismes d'ouverts de $(K' \times F) \sqcup (K' \times F) \times \mathbb{R}$ qui respectent la projection $p_1 \sqcup p_1 \times \text{id} | \mathbb{R}$.

(2) La formule (+) ci-dessus doit être modifiée dans une version PL car la multiplication des réels n'est pas une opération PL. La modification est bien connue (*cf.* [17], p. 67).

APPENDICE 1 : Pathologies

Nous posons ici une liste de questions concernant les pathologies qui risquent d'intervenir lorsque (Y, X) n'est pas compact et métrisable. Si (Y, X) est compact et métrisable, la réponse à toutes les questions est non.

(1) Existe-t-il des voisinages $V \subset U$ de X (fermé) tels que V admette des compressions vers X qui fixent $Y - U$ mais que V n'admette pas de compressions vers X à support dans U ? (*cf.* 1.8).

(2) Soient E un voisinage régulier de X dans Y et $h : E \rightarrow Y$ un plongement ouvert. Est-ce que $h(E)$ peut ne pas être un voisinage régulier de X dans Y ? (*cf.* 2.5 et 4.2). La réponse est oui (*voir* ci-dessous).

(3) Existe-t-il une suite croissante de voisinages réguliers de X dans Y dont la réunion ne soit pas un voisinage régulier de X dans Y ? (*cf.* 4.3).

(4) Existe-t-il une suite décroissante d'entourages de X à complément régulier dans Y dont l'intersection soit un entourage de X qui n'est pas à complément régulier dans Y ?

(5) Existe-t-il deux entourages A et B à complément régulier de X dans Y tels que $Y - A$ et $Y - B$ ne soient pas homéomorphes ? [Certainement Y est alors non régulier (T_3), *cf.* 3.5.]

(6) Existe-t-il un voisinage régulier E de X dans Y et un entourage A de X à complément régulier dans Y tels que $A \searrow X(E)$ et $E \searrow X(Y)$ et que (a) E ne soit pas un voisinage régulier de A dans Y et/ou, (b) $Y - A$ ne soit pas un voisinage régulier de $Y - E$ dans Y ?

(7) Existe-t-il un voisinage régulier E de X dans Y et un entourage A de X à complément régulier dans Y tel que $A \searrow X(E)$ mais tel que $E - A$ ne soit pas une frange ? (*cf.* 3.9).

(8) Existe-t-il un voisinage ouvert E de X dans Y (métrisable et localement compact) dont tous les compacts K vérifient $K \searrow X(E)$ mais qui ne soit pas un voisinage régulier de X dans Y (*cf.* 4.1 et 5.14).

(9) L'hypothèse de compacité locale en 5.4 est-elle nécessaire ? Autrement dit, existe-t-il un couple métrisable (ou même quelconque) (Y, X) qui satisfasse à $P(x)$ [ou même $P'(x)$] pour tout $x \in X$, mais non à l'axiome 1.5 ?

Voici maintenant une réponse positive à la question (2); c'est la seule question à laquelle nous savons répondre.

(a) Soit $X = \{0\} \times [-1, 1]$ et $Y = X \cup C \times (-1, 1) \subset \mathbb{R}^2$ où Y a la topologie induite par \mathbb{R}^2 et où $C = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ (ou bien l'ensemble triadique de Cantor, cf. 1.9). Alors tout voisinage régulier E de X dans Y est de la forme $E = X \cup N \times (-1, 1)$ où N est un voisinage régulier de $\{0\}$ dans C , bien que, si $\alpha : C - \{1\} \rightarrow (0, 1]$ est une fonction continue égale à 1 près de 0 et non identique à 1, $U = \{(x, t) \in Y \mid x \in C - \{1\}, |t| < \alpha(x)\}$ soit l'image par un plongement ouvert d'un voisinage régulier de X dans Y (voir la figure A a).

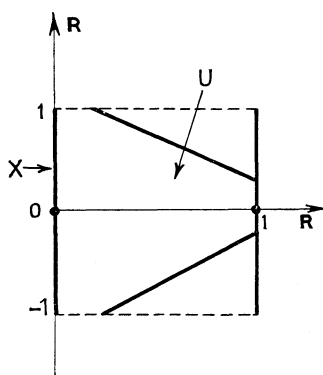


Fig. A a

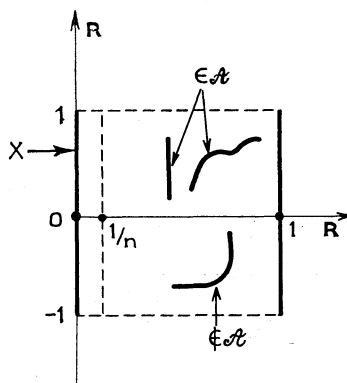


Fig. A b

L'exemple précédent ne vérifie par l'I-axiome. En voici une modification, inspirée du « Woven Square » de Zeeman ([18], II, p. 7), qui n'a pas cet inconvénient :

(b) Dans l'exemple (a) on change C en $C = [0, 1]$, puis on introduit une topologie \mathfrak{C} sur Y telle que :

(i) $X \cup \left(0, \frac{1}{n}\right) \times (-1, 1)$, $n = 1, 2, 3, \dots$, soit une base de voisinages de X ;

(ii) si $U_{\mathfrak{C}}$ est un ouvert de $(Y - X)$, les plongements ouverts $U_{\mathfrak{C}} \rightarrow (Y - X)_{\mathfrak{C}}$ respectent le feuilletage par les droites verticales $\{x\} \times (-1, 1)$, $x \in C$, et

(iii) tout plongement ouvert $U \rightarrow Y - X$ qui est C^1 non singulier et qui respecte ce feuilletage est un plongement ouvert $U_{\mathfrak{C}} \rightarrow (Y - X)_{\mathfrak{C}}$.

On peut définir une telle topologie \mathfrak{C} d'abord sur $Y - X$ en termes de la famille \mathfrak{A} des arcs (homéomorphes à $[0, 1]$) dans $Y - X$ qui sont C^1 -plongés de sorte que la projection sur $C \times \{0\}$ soit ou bien un plongement C^1

non singulier, ou bien un point (voir la figure A b). On admet comme fermé de $(Y - X)_{\mathfrak{C}}$ tout ensemble S tel que $S \cap A$ soit un compact de A pour tout arc $A \in \mathfrak{A}$. Finalement la condition (i) détermine uniquement \mathfrak{C} sur Y telle que X soit indiscret (i. e. X hérite la topologie grossière). On peut rendre Y hausdorff en écrasant X sur un point. Il est alors facile de vérifier (iii), mais (ii) semble difficile : on constate qu'un arc A (plongé) de $(Y - X)_{\mathfrak{C}}$ est vertical (de la forme $\{x\} \times [a, b]$, $x \in C$) si et seulement si A rencontre tout autre arc de $(Y - X)$ en un nombre fini de composantes connexes. [Indication pour la partie « si » : on montre que tout arc de $(Y - X)_{\mathfrak{C}}$ qui rencontre toute droite de \mathbf{R}^2 en un nombre fini de composantes connexes admet en chaque point une droite tangente à gauche et une autre à droite.]

APPENDICE 2 : La théorie de Mazur

On va clarifier la relation entre notre idée de voisinage régulier et celle de B. Mazur [10]. Mazur obtient des voisinages « réguliers » (ce sont ses « dilatation neighborhoods ») d'un sous-espace X d'un espace Y toutes les fois qu'il y a un voisinage ouvert E de X dans Y et un plongement ouvert $i : E \rightarrow E$ qui fixe X et qui vérifie quatre axiomes — (1), (2), (3), (4) — qui disent que (E, X, i) est un « dilatation space » ([10], § 4, déf. 5). On a la :

PROPOSITION. — *Dans cette situation, (E, X) vérifie notre axiome de compressibilité et $i(E) \searrow X(E)$.*

Preuve. — (a) Selon l'axiome (1), il existe un automorphisme h de E qui fixe X tel que $hi^2 = i$ et dont le support est « bounded » (i. e. son image par i est un fermé de E).

(b) Il existe pour tout $n \geq 1$ un automorphisme h_n de E qui fixe X , dont le support est « bounded » et inclus dans $i^{n-1}(E)$ et qui vérifie $h_n i^{n+1} = i^n$. En effet h_{k+1} est le transporté h^* de h par i^k (voir [10], p. 207, prop. 1 et p. 208, lemma 4]). On a $h_{k+1} i^k = i^k h$.

(c) Alors $j_n = h_{n+2} h_n^{-1}$, $n \geq 1$ est un automorphisme de E qui fixe X et $i^{n+2}(E) \cup (E - i^{n-1}(E))$ tel que $j_n(i^n(E)) = i^{n+1}E$.

(d) Soit U un voisinage de X et soit $n \geq 1$. Alors il existe un automorphisme γ_n^U de E fixant X , à support « bounded » inclus dans $i^n(E)$ tel que $\gamma_n^U(i^{n+1}(E)) \subset U$. En effet $\gamma_n^U = cc^*$ où c est l'automorphisme offert par l'axiome (3) pour le voisinage U de X et où c^* est le transporté de c par i^n .

(e) *Affirmation* : $i^n(E) \searrow X(i^{n-1}(E))$, $n \geq 1$. En effet, si U est un voisinage donné de X , la compression voulue de $i^n(E)$ jusque dans U fixant $E - i^{n-1}(E)$ est $\gamma_n^U j_n (\gamma_n^U)^{-1}$. On remarque que cette compression fixe un voisinage de X ($i^{n+2}(E)$) tandis que (d) n'a pas assuré cette propriété pour γ_n^U . Cette affirmation implique la proposition.

Il est alors clair que $E(i)$, i. e. la limite injective du système $E \xrightarrow{i} E \xrightarrow{i} E \xrightarrow{i} \dots$, (cf. [10], § 5) est, dans notre sens un voisinage régulier de X dans lui-même (comparer avec 1.6).

Pour savoir dans quelle mesure nos voisinages réguliers (en eux-mêmes) sont des « dilatation neighbourhood » de Mazur, examinons les axiomes des « dilatation spaces ». Remarquons d'abord que pour démontrer la proposition on n'a utilisé que les axiomes (1) et (3); on constate d'ailleurs que l'axiome (4) est redondant : on a $i(E) \searrow X(E)$, donc, pour tout voisinage U de X dans E , un plongement ouvert $x : i(E) \rightarrow i(U)$ qui fixe un voisinage de X . L'axiome suit après conjugaison par $i : E \approx i(E)$.

Soit maintenant un voisinage E de X régulier dans lui-même (en notre sens) qui est la réunion d'une gigogne $\{E_n \mid n \geq 0\}$. On choisit un voisinage $E' \subset E_0$ régulier dans E , (cf. 1.6), $E' = \bigcup_n E'_n$ où $\{E'_n \mid n \geq 0\}$ est une gigogne. On choisit aussi une compression j de E' vers X qui fixe $E - E_1$ et telle que $j(E') \searrow X(E')$. Considérons le triplé (E', X, i) où $i = j|_{E'}$.

- (a) Il vérifie trivialement l'axiome (3) des « dilatation spaces ».
- (b) Pour vérifier l'axiome (1) on va supposer que X est fermé et que E est hausdorff et « régulier » (i. e. T_3) auquel cas j a son support inclus dans E_2 (cf. 1.8). On obtient alors l'automorphisme h de E' en conjuguant convenablement j^{-1} (qui fixe un voisinage de X) par des compressions de $i^2(E')$ et du support de j . L'hypothèse T_3 assure que h est l'identité hors d'un ensemble « bounded ».
- (c) L'axiome (4) est alors automatiquement vérifié (sous les mêmes hypothèses topologiques).
- (d) Pour vérifier l'axiome (2) on suppose X compact et E localement compact et hausdorff. Soit alors $K \subset E'$ un ensemble « bounded ». On peut compresser $i(K)$ dans un voisinage compact de X et donc $i(K)$ est compact; par suite il existe un entier n tel que $i(K) \subset i(E'_n)$. Si θ est une compression de $i(E'_n)$ dans $i^2(E')$ qui fixe $E' - i(E')$ alors $i^{-1} \circ \theta^{-1} \circ i$ est le « stretching map » cherché.

On peut alors conclure que si X est compact et E localement compact et hausdorff, le triplé (E', X, i) est un « dilatation space » donc $E'(i)$

la limite injective du système $E' \xrightarrow{i} E' \xrightarrow{i} E' \xrightarrow{i} \dots$, est un « dilatation neighbourhood » ainsi qu'un voisinage régulier de X ; donc $E \approx E' (i)$ (cf. 2.7) est un « dilatation neighbourhood ».

En définitive on voit donc que si X est un compact inclus dans un espace localement compact et hausdorff Y , nos voisinages réguliers (en eux-mêmes) coïncident avec les « dilatation neighbourhoods » de Mazur. En général notre notion d'un voisinage régulier en lui-même risque d'être strictement plus générale à cause des axiomes (1) et (2) de Mazur; la question est d'un genre « pathologique » (cf. Appendice 1).

L'axiome (2) de Mazur est archi-restrictif : Si (E, X, i) est un « dilatation space » avec X compact et E localement compact, σ -compact et hausdorff, alors E est déjà un « dilatation neighbourhood » de X aussi bien qu'un voisinage régulier de X et donc le processus $(E, X, i) \mapsto E (i)$ n'apporte rien de neuf. En effet si K est un compact de E , il existe un plongement ouvert $s : E \rightarrow E$ tel que $si(E) \supset K$. Puisque $i(E) \searrow X(E)$ on a $si(E) \searrow X(s(E) \subset E)$ donc $K \searrow X(E)$; on conclut, par 4.1, que E est régulier. Par exemple la gigogne canonique de la figure 1 *a* ne présente pas un « dilatation space » de Mazur.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] N. BOURBAKI, *Éléments de mathématiques, Topologie générale*, Livre I (4^e éd.), Hermann, Paris, 1965.
- [2] M. BROWN, *A proof of the generalized Schoenflies theorem* (*Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 66, 1960, p. 74-76). Cf. aussi A. DOUADY, *Plongement des sphères* [*Séminaire Bourbaki*, 13^e année (1960-1961), fasc. 1 (2^e éd.), n^o 205].
- [3] M. BROWN, *The monotone union of open n-cells is an open n-cell* (*Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 12, 1961, p. 812-814).
- [4] L. GUILLOU et H. HÄHL, *Les voisinages ouverts réguliers : Critères homotopiques d'identification* (à paraître).
- [5] P. HOLM, *The microbundle representation theorem* (*Acta Mathematica*, vol. 117, 1967, p. 191-213).
- [6] R. C. KIRBY et L. C. SIEBENMANN, *Some basic theorems for topological manifolds* (preprint).
- [7] J. M. KISTER, *Microbundles are fiber bundles* (*Ann. of Math.*, vol. 80, 1964, p. 190-199).
- [8] S. KOBAYASHI et K. NOMIZU, *Foundations of Differential Geometry*, I, Interscience, New-York, 1963.
- [9] N. H. KUIPER et R. K. LASHOF, *Microbundles and bundles*, I (*Invent. Math.*, vol. 1, 1966, p. 1-17).
- [10] B. MAZUR, *The method of infinite repetition in pure topology I* (*Ann. of Math.*, vol. 80, 1964, p. 201-226).
- [11] L. C. SIEBENMANN, *The obstruction to finding a boundary for an open manifold of dimension ≥ 5* (*Thesis*, Princeton, 1965).
- [12] L. C. SIEBENMANN, *On the homotopy type of compact topological manifolds* (*Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 74, 1968, p. 738-742).
- [13] L. C. SIEBENMANN, *Deformation of homeomorphisms on stratified sets* (*Comment. Math. Helv.*, vol. 47, 1972, p. 123-163).

- [14] L. C. SIEBENMANN, *Regular open neighborhoods (General Topology and its applications*, vol. 6, 1973, p. 51-61).
- [15] L. C. SIEBENMANN, *Some locally triangulable compact metric spaces that are not simplicial complexes*.
- [16] L. C. SIEBENMANN, L. GUILLOU et H. HÄHL, *Les voisinages ouverts réguliers : Critères homotopiques d'existence* (à paraître).
- [17] J. R. STALLINGS, *Lectures on polyhedral topology*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1968.
- [18] E. C. ZEEMAN, *Seminar on combinatorial topology*, mimeographed, Bures-sur-Yvette and University of Warwick, 1963.

(Manuscrit reçu le 18 décembre 1972.)

L. SIEBENMANN,
Math.,
Faculté des Sciences,
91 Orsay;
L. GUILLOU,
Centre de Math.,
École Polytechnique,
14, rue Descartes,
75005 Paris;
H. HÄHL,
Math. Inst.
Univ. Tübingen,
D 74 Tübingen,
Hölderlinstr. 19 R. F. A.

