ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ALAIN CONNES

Une classification des facteurs de type III

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 6, nº 2 (1973), p. 133-252

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1973_4_6_2_133_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 6, 1973, p. 133 à 252.

UNE CLASSIFICATION DES FACTEURS DE TYPE III

PAR ALAIN CONNES

Le problème principal de la théorie des algèbres de von Neumann est celui de la classification à isomorphisme près des algèbres de von Neumann opérant dans un espace hilbertien séparable. Un théorème de von Neumann permet de se limiter au cas des facteurs (i. e. des algèbres de von Neumann dont le centre est réduit aux scalaires). La théorie de la dimension relative des projecteurs (de Murray et von Neumann) répartit les facteurs en types I, II et III. A tout facteur M de type I est associé un entier $n \in [1, \infty]$ et M est isomorphe à $F_n = \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$ où $\mathcal{H}_n$ est un espace hilbertien de dimension n. Mc Duff a montré (en 1968) l'existence d'une infinité continue de facteurs de type II deux à deux non isomorphes. R. T. Powers a montré (en 1967) l'existence d'une infinité continue $(R_\lambda)_{\lambda \in]0,1[}$ de facteurs de type III deux à deux non isomorphes. De plus, dans [40], E. J. Woods a prouvé l'impossibilité de construire « effectivement » une bijection entre l'ensemble des classes d'isomorphismes de facteurs de type III et l'ensemble des nombres réels.

Cependant, dans [2], H. Araki et E. J. Woods ont défini, par référence aux facteurs R_λ de Powers, deux invariants algébriques r_∞ et ρ, et ont donné une classification des facteurs produits tensoriels infinis de facteurs de type I; cette classification a été généralisée par W. Krieger (*cf.* [23] à [27]) aux facteurs construits à partir de transformations ergodiques.

Rappelons qu'un facteur est de type $\neq$ III si et seulement s'il possède une trace normale fidèle semi-finie. La donnée d'un couple (algèbre de von Neumann, trace normale fidèle semi-finie) est équivalente à la donnée d'une algèbre hilbertienne achevée. Plus généralement F. Combes, G. Pedersen et M. Takesaki ont montré l'équivalence entre la donnée d'un couple (algèbre de von Neumann, poids normal fidèle semi-fini) et celle d'une algèbre hilbertienne à gauche achevée (notion due à M. Tomita [36]). Sur toute algèbre de von Neumann M il existe des poids normaux fidèles semi-finis. L'écart entre un tel poids φ sur M et une trace donne naissance à un groupe à un paramètre σ_t^φ d'automorphismes de M, associé à l'opérateur modulaire Δ_φ de l'algèbre hilbertienne à gauche du couple (M, φ).

Le point de départ de notre travail a été la confrontation de la théorie de Tomita et Takesaki [36] avec la classification d'Araki et Woods [2]. Cela nous a amené à définir deux invariants S et T : S (M) est l'intersection des Sp Δ_φ pour φ poids normal fidèle semi-fini sur M, et T (M) est l'ensemble des périodes possibles des groupes d'automorphismes modulaires de M. Les invariants r_∞ et ρ se calculent en fonction de S et T dans le cas des facteurs d'Araki et Woods. Cependant, les formules définissant S et T dans le cas général étaient d'un emploi difficile : en effet, le plus souvent, une algèbre de von Neumann est donnée avec un poids particulier facile à analyser, mais il est très rarement possible de passer en revue l'ensemble de tous les poids sur M. Il était donc nécessaire de déterminer les propriétés d'un couple (M, φ) qui ne dépendent que de M et non de l'éclairage particulier provenant de φ. C'est là qu'intervient l'idée essentielle de ce texte : pour comparer deux poids φ_1 et φ_2 sur M on considère un troisième poids φ, défini sur $M \otimes F_2$ par l'égalité

$$\varphi\left(\sum x_{ij} \otimes e_{ij}\right) = \varphi_1(x_{11}) + \varphi_2(x_{22}).$$

Il en résulte facilement que l'automorphisme σ_t^φ est, à t fixé, indépendant de φ modulo les automorphismes intérieurs de M. On en déduit alors l'existence d'un homomorphisme canonique δ de R dans le groupe Out M des classes d'automorphismes. Cet homomorphisme est trivial si et seulement si M est semi-finie. De plus, T (M) est le noyau de δ et $S(M) \cap \mathbf{R}_+^*$ est le spectre (au sens de 2.2) de δ. En corollaire T (M) et $S(M) \cap \mathbf{R}_+^*$ sont des groupes, propriété qui était loin d'être immédiate à partir de leurs anciennes définitions. Enfin, bien que les invariants S et T soient indépendants, T (M) est l'orthogonal de $S(M) \cap \mathbf{R}_+^*$ quand $S(M) \neq \{0, 1\}$. Ce fait, traduit sur r_∞ et ρ, a pour corollaire le principal résultat de la classification d'Araki et Woods (*cf.* 3.6).

Pour les facteurs M construits à partir de groupes ergodiques de transformations $\mathcal{G}$, les invariants S (M) et T (M) se calculent simplement en fonction des invariants $r(\mathcal{G})$ et $\rho(\mathcal{G})$ de W. Krieger (*voir* 1.4 et 3.3).

Ce calcul prouve que les relations entre S, T et r_∞, ρ valables pour les facteurs d'Araki-Woods ne sont pas valables en général.

La nature de S (M) $\cap \mathbf{R}_+^*$, sous-groupe fermé de $\mathbf{R}_+^*$, permet de subdiviser le type III en types III_λ, $\lambda \in [0, 1]$. Le résultat principal sur la structure des facteurs de type III est la possibilité de synthétiser tout facteur M de type III_λ, $\lambda \neq 1$, par produit croisé à partir d'une algèbre de von Neumann semi-finie N et d'un automorphisme θ de N. Les critères obtenus pour l'unicité du couple (N, θ) associé à M ramènent le problème de classification des facteurs de type III_λ, $\lambda \neq 1$, à un problème de classification d'automorphismes d'une algèbre de von Neumann de type II. Pour $\lambda \in]0, 1[$ on peut choisir pour N un facteur, et la classification des facteurs de type II retentit ainsi sur celle des facteurs de type III. Le cas $\lambda = 0$ correspond à l'impossibilité de choisir pour N un facteur, mais permet par exemple, d'obtenir M comme limite inductive, en un sens très strict (*cf.* 5.3), d'une suite d'algèbres de von Neumann semi-finies. Les résultats obtenus dans le cas III_λ, $\lambda \neq 1$, ne restent en général pas vrais dans le cas III_1. Par exemple, M. Takesaki et R. Herman ont montré dans [18] l'existence d'un facteur de type III et d'un état normal fidèle dont le centralisateur est réduit aux scalaires. A l'opposé le centralisateur de tout état normal fidèle sur un facteur de type III_λ, $\lambda \neq 1$, contient une sous-algèbre de von Neumann abélienne maximale du facteur. Ce qui précède montre ainsi l'existence de trois degrés principaux (III_0, III_λ pour $\lambda \in]0, 1[$, et III_1) dans le caractère « purement infini » des facteurs de type III.

En application, nous avons pu résoudre certains problèmes de la théorie des algèbres d'opérateurs. Les conclusions sont les suivantes :

1° Il existe un facteur hyperfini, qui opère dans un espace séparable, et qui n'est pas un produit tensoriel infini de facteurs de type I (*cf.* [33], Pb. 4.4.10).

2° Pour $\lambda \in]0, 1/2[$, la propriété L_λ de Powers n'est pas équivalente à la propriété L'_λ d'Araki (question posée dans [1]).

3° Tout facteur normal opérant dans un espace séparable est de type I (Pb. 10 de *On rings of Operators* de Murray et von Neumann).

4° La classification des facteurs non hyperfinis opérant dans un espace séparable n'est pas standard (question posée dans [40]).

5° Pour tout facteur d'Araki-Woods M, l'ensemble des $T_0 \geq 0$ tels que $\exp(-2\pi/T_0) \in \rho$ (M) est la partie positive d'un sous-groupe de $\mathbf{R}$ (question posée dans [2], p. 124).

6° Le groupe d'automorphismes modulaires σ_t^φ dépend continument (pour la topologie simple-forte) de l'état normal fidèle φ ([1]).

7° L'automorphisme modulaire d'indice t est unique modulo les automorphismes intérieurs (6° et 7° répondent à une question de M. Takesaki dans [38]).

Un des résultats de cet article (*voir* [12]) a été obtenu en collaboration avec A. Van Daele. Dans [17], V. Ya. Golodets a étudié les propriétés spectrales des opérateurs modulaires à l'aide de suites centrales. Nous montrons ci-dessous que pour tout $\lambda \in]0, 1[$ il existe un facteur de type III, P_λ, sur lequel toute suite centrale est équivalente à une suite de scalaires mais tel que $\lambda \in S(P_\lambda)$. Il en résulte que les deux invariants S et S′ de [17] ne coïncident pas en général avec l'invariant S que nous avons défini ci-dessus.

Les principaux résultats de ce texte ont été annoncés dans [7], [8], [9], [10] et [11]. Araki, Størmer et Takesaki ont obtenu récemment d'autres applications des invariants S et T (travaux à paraître).

Nous remercions J. Dixmier pour son aide au cours de l'élaboration de ce travail.

Nous utilisons la terminologie courante de la théorie des algèbres d'opérateurs, avec les précisions suivantes : les topologies faible et $\star$-forte sont définies par référence au prédual M_* de l'algèbre de von Neumann M comme dans [33], p. 20. Sur le groupe des automorphismes de M les topologies de la convergence simple forte et de la convergence simple faible coïncident. Une partition de l'unité dans M est une famille $(e_\alpha)_{\alpha \in A}$ de projecteurs non nuls deux à deux orthogonaux de somme 1. Une représentation normale fidèle π d'une algèbre de von Neumann M est dite standard s'il existe une involution isométrique J qui commute avec les projections du centre de $\pi(M)$ et vérifie $J\pi(M)J = \pi(M)'$. Une algèbre de von Neumann dans $\mathcal{H}$ est dite standard quand la représentation identité est standard. Nous écrirons automorphisme au lieu de $\star$-automorphisme; de plus nous dirons qu'un automorphisme σ de M est intérieur s'il existe un unitaire u de M tel que $\sigma(x) = uxu^*$ pour $x \in M$. Enfin, si $(a_\alpha)_{\alpha \in A}$ est une famille d'éléments d'un espace topologique, indexée par un ensemble filtrant A, nous écrirons « $a_\alpha \to a$ quand $\alpha \to \infty$ » au lieu de « $a_\alpha \to a$ selon A ».

([1]) La réponse à cette question a été annoncée dans [9]. Par la suite, H. Araki en a obtenu une démonstration plus simple, à paraître, nous n'avons donc pas jugé nécessaire de publier la nôtre.

PLAN

Index des notations

Index terminologique

I. — Invariant T

Le résultat principal obtenu ici est le théorème 1.2.1 qui montre que modulo les automorphismes intérieurs de l'algèbre de von Neumann M, l'automorphisme modulaire σ_t^φ d'indice t, est indépendant du poids normal fidèle semi-fini φ sur M.

Nous étudions ensuite l'homomorphisme correspondant δ de $\mathbf{R}$ dans le groupe Out M quotient du groupe des automorphismes de M par le sous-groupe normal des automorphismes intérieurs.

Dans 1.1 nous rappelons les éléments de la théorie des poids sur les algèbres de von Neumann et nous prouvons un lemme technique caractérisant le groupe d'automorphismes σ_t^φ à partir de φ.

Dans 1.2 nous démontrons d'abord le résultat annoncé plus haut. Puis, à partir d'un poids normal fidèle semi-fini arbitraire φ sur M, nous définissons une bijection $\psi \to (D\psi : D\varphi)$ entre poids normaux fidèles semi-finis sur M et applications fortement continues de $\mathbf{R}$ dans le groupe unitaire de M telles que $u_{t_1+t_2} = u_{t_1} \sigma_{t_1}^\varphi (u_{t_2})$ pour t_1 et t_2 dans R.

Quand ψ est σ_t^φ-invariant pour tout $t \in \mathbf{R}$, l'unique opérateur positif h affilié à M, tel que $h^{it} = (D\psi : D\varphi)_t$ pour tout $t \in \mathbf{R}$, est la dérivée de Radon-Nikodym [30] de ψ par rapport à φ.

Dans 1.3 nous étudions le noyau T (M) de l'homomorphisme δ défini plus haut. Nous montrons que $T(M_1 \otimes M_2) = T(M_1) \cap T(M_2)$ et nous calculons T (M) pour les facteurs d'Araki-Woods. Nous donnons de plus un exemple de famille continue de facteurs non hyperfinis deux à deux non isomorphes.

Dans 1.4 nous relions, pour les facteurs construits à partir d'un groupe ergodique de transformations bimesurables, l'invariant T à un invariant ρ introduit par Krieger [23].

Dans 1.5 nous étendons à des produits croisés plus généraux les résultats de 1.4. En particulier, utilisant 1.2.1, nous montrons l'unicité de l'espérance conditionnelle normale fidèle d'une algèbre de von Neumann M sur une sous-algèbre N qui contient son commutant relatif. En application nous montrons que pour tout sous-groupe G de $\mathbf{R}$ il existe un facteur de genre dénombrable M tel que T (M) = G.

Enfin dans 1.6 nous démontrons que tout facteur normal dans un espace de Hilbert séparable est de type I.

1.1. Préliminaires. — Dans la suite, M désigne une algèbre de von Neumann. Un poids φ sur M est une application de M_+ dans $[0, \infty]$ telle que $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ pour x et y dans M_+ et $\varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x)$ pour $\lambda > 0$ et $x \in M_+$ (*cf.* [5], p. 50).

Le sous-espace vectoriel complexe $\mathfrak{M}_\varphi$ de M,

$$\mathfrak{M}_\varphi = \{ x_1 - x_2 + ix_3 - ix_4,\ x_j \in \mathrm{M}_+,\ \varphi(x_j) < \infty \}$$

est égal à $\mathfrak{N}_\varphi^* \mathfrak{N}_\varphi$ où $\mathfrak{N}_\varphi = \{ x \in \mathrm{M},\ \varphi(x^* x) < \infty \}$ ([5], p. 50).

Définition 1.1.1. — *On dit qu'un poids* φ *sur* M *est :*

(*a*) *Normal, s'il existe une famille* (ω_α) *de formes linéaires positives normales sur* M *telles que, pour tout* $x \in \mathrm{M}_+$, $\varphi(x) = \operatorname{Sup} \omega_\alpha(x)$.

(*b*) *Fidèle, si pour tout* $x \in \mathrm{M}_+$, $x \neq 0$ *entraîne* $\varphi(x) \neq 0$.

(*c*) *Semi-fini, si* $\mathfrak{M}_\varphi$ (*ou de manière équivalente* $\mathfrak{N}_\varphi$) *est faiblement dense dans* M.

Sur toute algèbre de von Neumann il existe un poids normal fidèle semi-fini. Soient $\mathfrak{U}$ une algèbre hilbertienne à gauche achevée ([36], déf. 5.1), $\mathcal{L}(\mathfrak{U})$ l'algèbre de von Neumann engendrée par les opérateurs $\pi_{\mathfrak{U}}(\xi)$ pour $\xi \in \mathfrak{U}$ [pour ξ et η dans $\mathfrak{U}$, par définition, on a $\pi_{\mathfrak{U}}(\xi)(\eta) = \xi\eta$]. L'application de $\mathcal{L}(\mathfrak{U})_+$ dans $[0, +\infty]$, qui à x associe $+\infty$ si x n'est pas de la forme

$$\pi_{\mathfrak{U}}(\xi)^* \pi_{\mathfrak{U}}(\xi) \qquad \text{et} \qquad \|\xi\|^2 \qquad \text{si} \quad x = \pi_{\mathfrak{U}}(\xi)^* \pi_{\mathfrak{U}}(\xi)$$

est un poids semi-fini normal fidèle sur $\mathcal{L}(\mathfrak{U})$, canoniquement associé à $\mathfrak{U}$ ([37], p. 308).

Soit φ un poids semi-fini normal fidèle sur M, nous noterons η_φ l'injection canonique de l'espace préhilbertien $\mathfrak{N}_\varphi$ muni du produit scalaire associé à la forme sesquilinéaire $\varphi(y^* x)$, $y \in \mathfrak{N}_\varphi$, $x \in \mathfrak{N}_\varphi$, dans l'espace de Hilbert complété $\mathcal{H}_\varphi$. Pour tout $x \in \mathrm{M}$, on a $x\,\mathfrak{N}_\varphi \subset \mathfrak{N}_\varphi$ et l'application $\eta_\varphi(y) \to \eta_\varphi(xy)$ de $\eta_\varphi(\mathfrak{N}_\varphi)$ dans $\eta_\varphi(\mathfrak{N}_\varphi)$ se prolonge en un opérateur borné $\pi_\varphi(x)$ de $\mathcal{H}_\varphi$. L'application π_φ est un isomorphisme de M sur une sous-algèbre de von Neumann $\pi_\varphi(\mathrm{M})$ de l'algèbre des opérateurs bornés sur $\mathcal{H}_\varphi$.

L'espace vectoriel $\eta_\varphi(\mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*)$ muni du produit $\eta_\varphi(x)\,\eta_\varphi(y) = \eta_\varphi(xy)$, de l'involution $\eta_\varphi(x) \to \eta_\varphi(x^*)$ et du produit scalaire de $\mathcal{H}_\varphi$ est une algèbre hilbertienne à gauche achevée $\mathfrak{U}$ telle que $\mathcal{L}(\mathfrak{U}) = \pi_\varphi(\mathrm{M})$ et que le poids canoniquement associé à $\mathfrak{U}$ sur $\mathcal{L}(\mathfrak{U})$, transporté sur M par l'isomorphisme π_φ, soit égal à φ ([37], p. 308). La fermeture S_φ de l'application antilinéaire $\eta_\varphi(x) \to \eta_\varphi(x^*)$ admet une décomposition polaire $\mathrm{S}_\varphi = \mathrm{J}_\varphi \Delta_\varphi^{1/2} = \Delta_\varphi^{-1/2} \mathrm{J}_\varphi$ dans laquelle J_φ désigne une involution isométrique (J_φ est antilinéaire et $\mathrm{J}_\varphi^2 = 1$) et Δ_φ un opérateur positif autoadjoint non singulier, appelé opérateur modulaire de φ.

On a $\mathrm{J}_\varphi \pi_\varphi(\mathrm{M}) \mathrm{J}_\varphi = (\pi_\varphi(\mathrm{M}))'$. Pour tout $t \in \mathrm{R}$, on a

$$\Delta_\varphi^{it} \pi_\varphi(\mathrm{M}) \Delta_\varphi^{-it} = \pi_\varphi(\mathrm{M}).$$

Le groupe fortement continu à un paramètre d'automorphismes de M déterminé par l'égalité $\pi_\varphi(\sigma_t^\varphi(x)) = \Delta_\varphi^{it}\, \pi_\varphi(x)\, \Delta_\varphi^{-it}$ pour tout $x \in \mathrm{M}$ et tout $t \in \mathrm{R}$ est appelé groupe d'automorphismes modulaires associé à φ.

La sous-algèbre de von Neumann M_φ de M, $\mathrm{M}_\varphi = \{ x \in \mathrm{M}, \sigma_t^\varphi(x) = x$ pour tout $t \in \mathrm{R} \}$ est appelée centralisateur du poids normal fidèle semi-fini φ. Soient $\mathfrak{A}_1$ et $\mathfrak{A}_2$ des algèbres hilbertiennes à gauche achevées, $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ leur produit tensoriel algébrique. Il existe une algèbre hilbertienne à gauche achevée $\mathfrak{A}_1 \overline{\otimes}\, \mathfrak{A}_2$ équivalente à $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ ([36], p. 58).

Soient M_1 et M_2 des algèbres de von Neumann, φ_j, $j = 1, 2$, des poids normaux fidèles semi-finis sur M_j, $j = 1, 2$, $\mathfrak{A}_j$ les algèbres hilbertiennes à gauche achevées associées et $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \overline{\otimes}\, \mathfrak{A}_2$. L'application $\pi_{\varphi_1} \otimes \pi_{\varphi_2}$ est un isomorphisme de $\mathrm{M}_1 \otimes \mathrm{M}_2$ sur $\mathcal{L}(\mathfrak{A})$ et le poids ψ canoniquement associé à $\mathfrak{A}$ sur $\mathrm{M}_1 \otimes \mathrm{M}_2$ par l'intermédiaire de cet isomorphisme vérifie les conditions :

1.1.2 (*a*) : $x_j \in \mathfrak{M}_{\varphi_j}$ pour $j = 1, 2$ entraîne $x_1 \otimes x_2 \in \mathfrak{M}_\psi$ et

$$\psi(x_1 \otimes x_2) = \varphi_1(x_1)\, \varphi_2(x_2).$$

1.1.2 (*b*) : On a $\sigma_t^\psi = \sigma_t^{\varphi_1} \otimes \sigma_t^{\varphi_2}$ pour tout $t \in \mathrm{R}$.

Soit ψ_1 un poids normal fidèle semi-fini sur $\mathrm{M}_1 \otimes \mathrm{M}_2$ vérifiant les conditions 1.1.2. Le poids ψ_1 est σ_t^ψ invariant pour tout $t \in \mathrm{R}$ et il existe une sous-algèbre involutive faiblement dense de $\mathfrak{M}_\psi$, invariante par σ_t^ψ pour $t \in \mathrm{R}$ sur laquelle ψ et ψ_1 coïncident. Le lemme 5.9 de [30] montre que ψ_1 est égal à ψ.

DÉFINITION 1.1.3. — *Soient* M_1 *et* M_2 *des algèbres de von Neumann,* φ_j, $j = 1, 2$ *des poids normaux fidèles semi-finis sur* M_j. *L'unique poids normal fidèle semi-fini sur* $\mathrm{M}_1 \otimes \mathrm{M}_2$ *vérifiant les conditions* (*a*) *et* (*b*) *de* 1.1.2 *est appelé produit tensoriel de* φ_1 *par* φ_2 *et noté* $\varphi_1 \otimes \varphi_2$.

Soit φ un poids semi-fini normal fidèle sur M. Le groupe d'automorphismes modulaires $t \to \sigma_t^\varphi$ est caractérisé par les conditions K. M. S. ([5], déf. 4.1, p. 67).

Nous utiliserons également ces conditions sous la forme suivante :

LEMME 1.1.4. — *Soient* φ *un poids normal fidèle semi-fini sur l'algèbre de von Neumann* M, $z \to x(z)$ *une application de* $\mathbf{C}$ *dans* M.

Pour qu'il existe un élément analytique x *de* σ_t^φ *tel que* $x(z) = \sigma_z^\varphi(x)$ ([30], 3e paragraphe) *pour tout* $z \in \mathbf{C}$, *il faut et il suffit que :*

(*a*) *Pour tout* $\gamma_1 > 0$, *il existe un* $\gamma_2 > 0$ *tel que*

$$|\operatorname{Im} z| \leqq \gamma_1 \quad \text{et} \quad a \in \mathfrak{M}_\varphi^+ \;\Rightarrow\; \varphi(x(z)\, a\, x(z)^*) \leqq \gamma_2\, \varphi(a)$$

et

$$\varphi\left((x(z)^* a x(z))\right) \leqq \gamma_2 \varphi(a).$$

(*b*) *Pour tout* $a \in \mathfrak{M}_\varphi^+$ *les fonctions* $z \to \varphi(x(z)a)$ *et* $z \to \varphi(ax(z))$ *sont définies pour tout* $z \in \mathbf{C}$, *et entières, avec* $\varphi(x(z+i)a) = \varphi(ax(z))$ *pour tout* $z \in \mathbf{C}$.

Démonstration. — Soit $\mathfrak{A} = \{ b \in \mathrm{M},\ b$ analytique pour σ_t^φ avec $\sigma_z^\varphi(b) \in \mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*, \forall z \in \mathbf{C} \}$. Alors $\mathfrak{A}$ est une sous-algèbre involutive faiblement dense dans M, pour tout $b \in \mathfrak{A}$, $\eta_\varphi(b)$ est dans le domaine de tous les Δ_φ^z, $z \in \mathbf{C}$, et $\eta_\varphi(\mathfrak{A})$ est une algèbre hilbertienne modulaire équivalente à $\mathfrak{U}$ (*cf.* [30], 2e paragraphe).

Montrons la nécessité des conditions (*a*) et (*b*) de 1.1.4. Soit x un élément de M, analytique pour σ_t^φ, tel que $x(z) = \sigma_z^\varphi(x)$ pour tout $z \in \mathbf{C}$.

Le lemme 3.5 de [30] montre que la condition (*b*) est vérifiée.

Pour tout $b \in \mathfrak{A}$ les fonctions

$$z \to \Delta_\varphi^{iz} \pi_\varphi(x^*) \eta_\varphi(b^*) \qquad \text{et} \qquad z \to \pi_\varphi(x(\bar{z})^*) \Delta_\varphi^{iz} \eta_\varphi(b^*)$$

sont analytiques (*cf.* [30], prop. 3.3), et sont égales pour tout $z \in \mathbf{R}$. Elles sont donc égales et on a

$$\Delta_\varphi^{1/2} \pi_\varphi(x^*) \eta_\varphi(b^*) = \pi_\varphi(x(i/2))^* \Delta_\varphi^{1/2} \eta_\varphi(b^*).$$

On a alors

$$\begin{aligned} \| \eta_\varphi(bx) \| &= \| \mathrm{J}_\varphi \Delta_\varphi^{1/2} \eta_\varphi(x^* b^*) \| = \| \Delta_\varphi^{1/2} \pi_\varphi(x^*) \eta_\varphi(b^*) \| \\ &\leqq \| \pi_\varphi(x(i/2)^*) \| . \| \Delta_\varphi^{1/2} \eta_\varphi(b^*) \| = \| x(i/2) \| . \| \eta_\varphi(b) \|. \end{aligned}$$

On a montré que pour $z \in \mathbf{C}$ et pour $b \in \mathfrak{N}_\varphi$ on a

$$\| \eta_\varphi(bx(z)) \| \leqq \| x(z + (i/2)) \| . \| \eta_\varphi(b) \|$$

donc que $z \to x(z)$ vérifie la condition (*a*).

Supposons vérifiées les conditions (*a*) et (*b*) de 1.1.4. Pour tout $a \in \mathfrak{N}_\varphi$ on a

$$\left\{ \begin{aligned} &\| \eta(ax(z)) \| \leqq \gamma_2^{1/2} \| \eta(a) \|, \\ &\| \eta(ax(z)^*) \| \leqq \gamma_2^{1/2} \| \eta(a) \| \qquad \text{dès que} \quad | \operatorname{Im} z | \leqq \gamma_1. \end{aligned} \right. \tag{1.1.5}$$

En particulier, pour tout $z \in \mathbf{C}$ on a

$$\mathfrak{N}_\varphi x(z) \subset \mathfrak{N}_\varphi, \qquad \mathfrak{N}_\varphi x(z)^* \subset \mathfrak{N}_\varphi$$

et

$$x(z) \mathfrak{M}_\varphi \subset \mathfrak{M}_\varphi, \qquad \mathfrak{M}_\varphi x(z) \subset \mathfrak{M}_\varphi.$$

Soient a et b dans $\mathcal{A}$, F la fonction de deux variables complexes

$$F(z_1, z_2) = \varphi(x(z_1)\,\sigma^{\varphi}_{z_2}(b^* a)).$$

On a $\sigma^{\varphi}_{z_2}(b^* a) = \sigma^{\varphi}_{z_2}(b^*)\,\sigma^{\varphi}_{z_2}(a) \in \mathcal{A}\mathcal{A} \subset \mathfrak{M}_{\varphi}$. La fonction $z_1 \to F(z_1, z_2)$ est une fonction entière de z_1, par hypothèse, telle que

$$F(z_1 + i, z_2) = \varphi(\sigma^{\varphi}_{z_2}(b^* a)\,x(z_1)).$$

Pour tous z_1 et z_2 on a

$$F(z_1, z_2) = \langle \eta(\sigma^{\varphi}_{z_2}(a)), \eta(\sigma^{\varphi}_{\bar{z}_2}(b^*)^* x(z_1)^*) \rangle,$$

donc la fonction $z_2 \to F(z_1, z_2)$ est une fonction entière, car il existe un opérateur borné A de $\mathcal{H}_{\varphi}$ tel que pour tout $y \in \mathfrak{N}_{\varphi}$ on ait

$$\eta(yx(z_1)^*) = A\,\eta(y).$$

Le théorème 2.2.8 de [19] montre donc que F est une fonction analytique des deux variables complexes z_1 et z_2.

Soit $z_1 \in \mathbf{C}$; le lemme 3.4 de [30] montre qu'il existe une fonction entière f telle que

$$f(t) = \varphi(\sigma^{\varphi}_t(x(z_1))\,b^* a), \qquad f(t+i) = \varphi(b^* a\,\sigma^{\varphi}_t(x(z_1))) \quad \text{pour tout } t \in \mathbf{R}.$$

On a donc

$$f(t) = \varphi(x(z_1)\,\sigma^{\varphi}_{-t}(b^* a)) = F(z_1, -t),$$
$$f(t+i) = \varphi(\sigma^{\varphi}_{-t}(b^* a)\,x(z_1)) = F(z_1 + i, -t).$$

Ce qui montre que $F(z_1, z_2) = F(z_1 + i, z_2 + i)$ pour z_1 et z_2 dans $\mathbf{C}$.

Pour $z \in \mathbf{C}$, soit $G(z) = F(z, z)$; c'est une fonction entière telle que $G(z + i) = G(z)$ pour $z \in \mathbf{C}$. Soient $\gamma_1 = 1$ et γ_2 comme dans (a); on a pour $z \in \mathbf{C}$, $|\operatorname{Im} z| \leq 1$:

$$|G(z)| = |F(z, z)| = |\langle \Delta^{iz}_{\varphi}\,\eta(a), \eta(\sigma^{\varphi}_{\bar{z}}(b^*)^* x(z)^*) \rangle|$$
$$\leq \gamma_2^{1/2}\,\|\Delta^{iz}_{\varphi}\,\eta(a)\|\,\|\eta(\sigma^{\varphi}_{\bar{z}}(b^*)^*)\| = \gamma_2^{1/2}\,\|\Delta^{iz}_{\varphi}\,\eta(a)\|.\|\Delta^{i\bar{z}+1/2}_{\varphi}\,\eta(b^*)\|.$$

La fonction G est donc bornée sur la bande des $z \in \mathbf{C}$ tels que $0 \leq \operatorname{Im} z \leq 1$; comme $G(z + i) = G(z)$ pour tout $z \in \mathbf{C}$ elle est donc bornée sur $\mathbf{C}$ et constante.

On a donc pour $t \in \mathbf{R}$, $\varphi(\sigma^{\varphi}_{-t}(x(t))\,b^* a) = \varphi(x(0)\,b^* a)$. La densité de $\eta(\mathcal{A})$ dans $\mathcal{H}_{\varphi}$ montre donc que $x(t) = \sigma^{\varphi}_t(x(0))$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.

Il reste à montrer que l'application $z \to x(z)$ est analytique. Soient a et b dans $\mathcal{A}$, $z \in \mathbf{C}$, $f_1(z) = \langle \pi_{\varphi}(x(0))\,\Delta^{-iz}_{\varphi}\,\eta(a), \Delta^{i\bar{z}}_{\varphi}\,\eta(b) \rangle$, et $f_2(z)$ tel que

$\overline{f_2(z)} = \langle \eta(a^* x(z)^*),\ J_\varphi \Delta_\varphi^{-1/2} \eta(b) \rangle$. Ce sont des fonctions entières de z et pour $z = t \in \mathbf{R}$ on a

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \langle \Delta_\varphi^{it} \pi_\varphi(x(0)) \Delta_\varphi^{-it} \eta(a), \eta(b) \rangle \\ &= \langle \pi_\varphi(\sigma_t^\varphi(x(0))) \eta(a), \eta(b) \rangle = \langle \eta(x(t)\, a), \eta(b) \rangle \\ &= \langle J_\varphi \Delta_\varphi^{1/2} \eta(a^* x(t)^*), \eta(b) \rangle = (\langle \eta(a^* x(t)^*), J_\varphi \Delta_\varphi^{-1/2} \eta(b) \rangle)^-. \end{aligned}$$

Donc $f_1 = f_2$ et en particulier pour $z = i/2$:

$$\langle \pi_\varphi(x(0)) \Delta_\varphi^{1/2} \eta(a), \Delta_\varphi^{-1/2} \eta(b) \rangle = \langle J_\varphi \Delta_\varphi^{-1/2} \eta(b), \eta(a^* x(i/2)^*) \rangle,$$

c'est-à-dire

$$\langle \pi_\varphi(x(0)) J_\varphi \eta(a^*), \Delta_\varphi^{-1/2} \eta(b) \rangle = \langle J_\varphi \eta(a^* x(i/2)^*), \Delta_\varphi^{-1/2} \eta(b) \rangle.$$

On a donc montré que $J_\varphi \pi_\varphi(x(0)) J_\varphi$ est l'élément de $\pi_\varphi(\mathrm{M})'$ qui, à $\eta(a)$ pour $a \in \mathfrak{A}$, associe $\eta(ax(i/2)^*)$. En remplaçant l'application $z \to x(z)$ par $z \to x(z + z_0)$ où $z_0 \in \mathbf{C}$ on a montré que $J_\varphi \pi_\varphi(x(z_0)) J_\varphi$ est l'élément de $\pi_\varphi(\mathrm{M})'$ qui, à $\eta(a)$, $a \in \mathfrak{N}_\varphi$, associe $\eta(ax(z_0 + (i/2))^*)$. Il résulte donc des inégalités (1.1.5) que $\| \pi_\varphi(x(z)) \|$ est borné sur tout compact de $\mathbf{C}$. L'hypothèse (*b*) montre que l'application $z \to x(z)$ de $\mathbf{C}$ dans M est analytique.

1.2. L'homomorphisme δ de R dans Out M pour les algèbres de von Neumann.

Théorème 1.2.1. — *Soient* M *une algèbre de von Neumann,* φ et ψ *deux poids normaux fidèles semi-finis sur* M.

Il existe une application fortement continue $t \to u_t$ *de* $\mathbf{R}$ *dans le groupe unitaire de* M *telle que* $\sigma_t^\psi(x) = u_t \sigma_t^\varphi(x) u_t^*$ *pour tout* $t \in \mathbf{R}$ *et tout* $x \in \mathrm{M}$.

Démonstration. — Soit $(e_{ij})_{i,j=1,2}$ un système d'unités matricielles dans un facteur de type I_2, noté F_2. Le théorème 1 résulte du lemme plus précis :

Lemme 1.2.2. — *Soit* $\mathrm{P} = \mathrm{M} \otimes \mathrm{F}_2$. *L'application* θ *de* P_+ *dans* $[0, \infty]$ *telle que*

$$\theta\left(\sum x_{ij} \otimes e_{ij}\right) = \varphi(x_{11}) + \psi(x_{22}) \qquad \textit{pour} \quad \sum x_{ij} \otimes e_{ij} \geq 0$$

est un poids semi-fini normal fidèle sur P.

(*a*) *Pour tout* $x \in \mathrm{M}$ *on a*

$$\sigma_t^\theta(x \otimes e_{11}) = \sigma_t^\varphi(x) \otimes e_{11}, \qquad \sigma_t^\theta(x \otimes e_{22}) = \sigma_t^\psi(x) \otimes e_{22}.$$

(*b*) *Pour tout* $t \in \mathbf{R}$ *il existe un unitaire unique* u_t *de* M *tel que*

$$\sigma_t^0(1 \otimes e_{21}) = u_t \otimes e_{21}.$$

(*c*) *Pour tout* $t \in \mathbf{R}$ *on a* $\sigma_t^\psi(x) = u_t\, \sigma_t^\varphi(x)\, u_t^*$ *pour* $x \in \mathrm{M}$. *Pour* $t_1, t_2 \in \mathbf{R}$ *on a*

$$u_{t_1+t_2} = u_{t_1}\, \sigma_{t_1}^\varphi(u_{t_2}).$$

Démonstration. — Comme $\sum x_{ij} \otimes e_{ij} \geqq 0$ entraîne $x_{11} \geqq 0$ et $x_{22} \geqq 0$, θ a un sens. Comme φ et ψ sont des poids fidèles et $x_{11} = 0$, $x_{22} = 0$ entraîne $\sum x_{ij} \otimes e_{ij} = 0$ si $\sum x_{ij} \otimes e_{ij} \geqq 0$, θ est un poids fidèle.

Soit (ω_α) [resp. (ω'_β)] une famille de formes linéaires positives normales sur M avec $\varphi = \sup \omega_\alpha$, $\psi = \sup \omega'_\beta$; on a pour tout $\sum x_{ij} \otimes e_{ij} \geqq 0$:

$$\theta\left(\sum x_{ij} \otimes e_{ij}\right) = \sup_{\alpha,\,\beta}\,(\omega_\alpha(x_{11}) + \omega'_\beta(x_{22})),$$

donc θ est un poids normal sur P.

Pour $x = \sum x_{ij} \otimes e_{ij}$ on a

$$\theta(x^* x) = \varphi(x_{11}^* x_{11} + x_{21}^* x_{21}) + \psi(x_{22}^* x_{22} + x_{12}^* x_{12})$$

donc dès que $x_{ij} \in \mathfrak{N}_\varphi$, pour $j = 1$ et $x_{ij} \in \mathfrak{N}_\psi$, pour $j = 2$, on a

$$\sum x_{ij} \otimes e_{ij} \in \mathfrak{N}_0.$$

Donc θ est semi-fini.

Soit $x = \sum x_{ij} \otimes e_{ij} \in \mathfrak{N}_0$, on a $x_{ij} \otimes e_{kj} \in \mathfrak{N}_0$ pour $i = 1, 2$, $j = 1, 2$, $k = 1, 2$ car $(x_{ij} \otimes e_{kj})^* (x_{ij} \otimes e_{kj}) = (x_{ij}^* x_{ij}) \otimes e_{jj}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}(1 \otimes e_{11})\, x^* x = {} & (x_{11} \otimes e_{11})^* (x_{11} \otimes e_{11}) + (x_{21} \otimes e_{11})^* (x_{21} \otimes e_{11}) \\ & + (x_{11} \otimes e_{11})^* (x_{12} \otimes e_{12}) + (x_{21} \otimes e_{11})^* (x_{22} \otimes e_{12})\end{aligned}$$

est dans $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{N}_0^* \mathfrak{N}_0$.

Soit $f_{ij} = 1 \otimes e_{ij}$ on a donc $f_{11}\, \mathfrak{M}_0 \subset \mathfrak{M}_0$ et $\mathfrak{M}_0 f_{11} \subset \mathfrak{M}_0$. De plus pour $x \in \mathfrak{N}_0$ on vérifie que

$$\theta(f_{11}\, x^* x) = \varphi(x_{11}^* x_{11} + x_{21}^* x_{21}) = \theta(x^* x f_{11}).$$

Le théorème 3.6 de [30] montre donc que $\sigma_t^0(f_{11}) = f_{11}$ pour tout $t \in \mathbf{R}$. Démontrons le (*a*) du lemme. Pour $x \in \mathrm{M}$ on a

$$\sigma_t^0(x \otimes e_{11})\, f_{11} = \sigma_t^0((x \otimes e_{11})(1 \otimes e_{11})) = f_{11}\, \sigma_t^0(x \otimes e_{11}) = \sigma_t^0(x \otimes e_{11}).$$

Ainsi il existe un unique élément $\gamma_t(x)$ de M tel que

$$\sigma_t^0(x \otimes e_{11}) = \gamma_t(x) \otimes e_{11}.$$

Alors γ_t est un groupe, fortement continu, à un paramètre, d'automorphismes de M. Par exemple l'égalité

$$\sigma_t^0(xy \otimes e_{11}) = \sigma_t^0(x \otimes e_{11})\, \sigma_t^0(y \otimes e_{11})$$

pour tout couple (x, y) d'éléments de M montre la multiplicativité des γ_t. Pour tout $x \in M_+$ on a

$$\varphi(\gamma_t(x)) = \theta(\sigma_t^0(x \otimes e_{11})) = \theta(x \otimes e_{11}) = \varphi(x).$$

Pour tout couple (a, b) d'éléments de $\mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*$, on a

$$\varphi(\gamma_t(a)\, b) = \theta(\sigma_t^0(a \otimes e_{11})\, b \otimes e_{11}),$$
$$\varphi(b\, \gamma_t(a)) = \theta((b \otimes e_{11})\, \sigma_t^0(a \otimes e_{11}))$$

et comme $a \otimes e_{11}$ et $b \otimes e_{11}$ sont dans $\mathfrak{N}_0 \cap \mathfrak{N}_0^*$, il existe une fonction F continue bornée dans la bande des $z \in \mathbf{C}$, $0 \leq \operatorname{Im} z \leq 1$, holomorphe dans la bande ouverte, telle que

$$F(t) = \varphi(\gamma_t(a)\, b) \qquad \text{et} \qquad F(t+i) = \varphi(b\, \gamma_t(a)) \qquad \text{pour} \quad t \in \mathbf{R},$$

la proposition 4.8 de [5] montre que $\gamma_t = \sigma_t^\varphi$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.

L'assertion (b) du lemme résulte des égalités $\sigma_t^0(f_{21})\, f_{22} = 0$ et

$$f_{11}\, \sigma_t^0(f_{21}) = 0, \qquad \sigma_t^0(f_{21})\, \sigma_t^0(f_{21})^* = f_{22}, \qquad \sigma_t^0(f_{21})^*\, \sigma_t^0(f_{21}) = f_{11} \qquad \text{pour} \quad t \in \mathbf{R}.$$

Pour $x \in M$ on a $f_{21}(x \otimes e_{11})\, f_{12} = x \otimes e_{22}$ donc pour $t \in \mathbf{R}$,

$$(u_t \otimes e_{21})\, \sigma_t^0(x \otimes e_{11})\, (u_t^* \otimes e_{12}) = \sigma_t^0(x \otimes e_{22}),$$

ce qui démontre la première égalité de (c).

On a enfin, pour t_1 et t_2 dans $\mathbf{R}$:

$$\begin{aligned} u_{t_1+t_2} \otimes e_{21} &= \sigma_{t_1+t_2}^0(1 \otimes e_{21}) = \sigma_{t_1}^0(u_{t_2} \otimes e_{21}) \\ &= \sigma_{t_1}^0(1 \otimes e_{21})\, \sigma_{t_1}^0(u_{t_2} \otimes e_{11}) = (u_{t_1} \otimes e_{21})\, (\sigma_{t_1}^\varphi(u_{t_2}) \otimes e_{11}). \end{aligned}$$

Notation. — L'application fortement continue u de $\mathbf{R}$ dans le groupe unitaire de M, déterminée par le lemme 1.2.2 (b) sera notée $(D\psi : D\varphi)$. Cette notation est justifiée par le lemme suivant :

LEMME 1.2.3. — *Soient* M *une algèbre de von Neumann,* φ, φ_1, φ_2, φ_3 *des poids semi-finis normaux fidèles sur* M; *on a :*

(*a*) $(D\varphi_1 : D\varphi_2) = (D\varphi_2 : D\varphi_1)^{-1}$, $(D\varphi_3 : D\varphi_1) = (D\varphi_3 : D\varphi_2)(D\varphi_2 : D\varphi_1)$ *au sens du produit ponctuel des applications de* $\mathbf{R}$ *dans le groupe unitaire de* M.

(*b*) *Si* φ_2 *est* $\sigma_t^{\varphi_1}$ *invariant pour tout* $t \in \mathbf{R}$, $(D\varphi_2 : D\varphi_1)$ *est l'application* $t \to h^{it}$ *où* h *est l'unique opérateur positif autoadjoint affilié à l'algèbre de von Neumann* M_{φ_1} *tel que* $\varphi_2 = \varphi_1(h.)$ *au sens de* [30] (4.2).

(*c*) *Soient* u *un unitaire de* M, φ_u *le poids tel que* $\varphi_u(x) = \varphi(uxu^*)$ *pour* $x \in M_+$. *On a alors* $\sigma_t^\varphi(u) = u(D\varphi_u : D\varphi)_t$ *pour tout* $t \in \mathbf{R}$.

Démonstration. — Montrons (*a*). La première assertion résulte de l'égalité $e_{21}^* = e_{12}$ dans 1.2.2. Pour la deuxième, notons F_3 le facteur de type I_3 et e_{ij} un système d'unités matricielles dans F_3. Soit ψ le poids construit sur $M \otimes F_3$ en posant

$$\psi(x) = \varphi_1(x_{11}) + \varphi_2(x_{22}) + \varphi_3(x_{33}).$$

On a

$$\sigma_t^\psi(1 \otimes e_{ij}) = (D\varphi_i : D\varphi_j)_t \otimes e_{ij}$$

et l'égalité $e_{31} = e_{32}e_{21}$ permet de conclure.

Montrons (*b*). Sur $P = M \otimes F_2$, le poids ψ défini par

$$\psi\left(\sum x_{ij} \otimes e_{ij}\right) = \varphi_1(x_{11}) + \varphi_2(x_{22})$$

est $\sigma_t^{\varphi_4}$ invariant où

$$\varphi_4\left(\sum x_{ij} \otimes e_{ij}\right) = \varphi_1(x_{11}) + \varphi_1(x_{22}).$$

On a $\psi = \varphi_4(k.)$ où $k = 1 \otimes e_{11} + h \otimes e_{22}$ est positif autoadjoint et $\sigma_t^{\varphi_4}$ invariant. On a donc

$$\sigma_t^\psi(1 \otimes e_{21}) = k^{it}\sigma_t^{\varphi_4}(1 \otimes e_{21})k^{-it} = (h^{it} \otimes e_{22})(1 \otimes e_{21})(1 \otimes e_{11}) = h^{it} \otimes e_{21}.$$

Montrons (*c*). Soient $P = M \otimes F_2$, Tr la trace usuelle sur F_2, θ le poids sur P tel que

$$\theta\left(\sum x_{ij} \otimes e_{ij}\right) = \varphi(x_{11}) + \varphi_u(x_{22}) \qquad \text{pour} \quad \sum x_{ij} \otimes e_{ij} \in P_+.$$

On a

$$\theta(x) = (\varphi \otimes \mathrm{Tr})(vxv^*) \quad \text{pour tout } x \in P_+, \qquad \text{où} \quad v = 1 \otimes e_{11} + u \otimes e_{22}.$$

On a donc, pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$\sigma_t^\theta(1 \otimes e_{21}) = v^*[(\sigma_t^\varphi \otimes 1)(v(1 \otimes e_{21})v^*)]v = (u^*\sigma_t^\varphi(u)) \otimes e_{21}.$$

THÉORÈME 1.2.4. — *Soient* φ *un poids semi-fini normal fidèle sur* M *et* u : $t \to u_t$ *une application fortement continue de* **R** *dans le groupe unitaire de* M *telle que* $u_{t_1+t_2} = u_{t_1} \sigma^\varphi_{t_1}(u_{t_2})$ *pour* t_1 *et* t_2 *dans* **R**. *Il existe un poids semi-fini normal fidèle* ψ *sur* M *et un seul, tel que* $(D\psi : D\varphi) = u$.

Démonstration. — Il existe un poids normal fidèle semi-fini ω, sur le facteur $F_\infty = \mathcal{L}(L^2(\mathbf{R}))$, tel que $\sigma^\omega_t(x) = U_t x U_t^*$ où U_t est l'opérateur de translation de t dans $L^2(\mathbf{R})$, pour tout $t \in \mathbf{R}$ et tout $x \in F_\infty$ (dém. de prop. 5.11 de [30]).

Posons $\overline{\omega} = \varphi \otimes \omega$. C'est un poids normal fidèle semi-fini sur $P = M \otimes F_\infty$ et on a $\sigma^{\overline{\omega}}_t = \sigma^\varphi_t \otimes \sigma^\omega_t$ pour $t \in \mathbf{R}$.

LEMME 1.2.5. — *Soit* $t \to u_t$ *une application fortement continue de* **R** *dans le groupe unitaire de* M *telle que* $u_{t_1+t_2} = u_{t_1} \sigma^\varphi_{t_1}(u_{t_2})$ *pour* $t_1, t_2 \in \mathbf{R}$.

Il existe un unitaire v *de* $M \otimes F_\infty$ *tel que pour tout* $t \in \mathbf{R}$:

$$u_t \otimes 1 = v\, \sigma^{\overline{\omega}}_t(v^*).$$

Démonstration. — L'application qui à $\xi \otimes f$, pour $\xi \in \mathcal{H}_\varphi$ et $f \in L^2(\mathbf{R})$, associe l'élément $t \to f(t)\,\xi$, de $L^2(\mathbf{R}, \mathcal{H}_\varphi)$, se prolonge en un isomorphisme I de $\mathcal{H}_\varphi \otimes L^2(\mathbf{R})$ sur $L^2(\mathbf{R}, \mathcal{H}_\varphi)$.

Soit W l'opérateur unitaire de $L^2(\mathbf{R}, \mathcal{H}_\varphi)$ qui à $\xi \in L^2(\mathbf{R}, \mathcal{H}_\varphi)$ associe la fonction $t \to \pi_\varphi(u_t)\,\xi_t$. Pour $y \in (\pi_\varphi(M))'$ on a

$$I(y \otimes 1) I^{-1} W = W I (y \otimes 1) I^{-1}.$$

On a donc $I^{-1} W I \in \pi_\varphi(M) \otimes F_\infty$ et il existe un unitaire v de $M \otimes F_\infty$ tel que $(\pi_\varphi \otimes 1)\, v = I^{-1} W I$.

Comme $\Delta_\varphi^{it_0}\, \pi_\varphi(x)\, \Delta_\varphi^{-it_0} = \pi_\varphi(\sigma^\varphi_{t_0}(x))$ pour tout $x \in M$ et tout $t_0 \in \mathbf{R}$, l'égalité à démontrer est

$$(\Delta_\varphi^{it_0} \otimes U_{t_0})(\pi_\varphi \otimes 1)(v)(\Delta_\varphi^{-it_0} \otimes U_{-t_0}) = (\pi_\varphi(u_{t_0}^*) \otimes 1)(\pi_\varphi \otimes 1)(v).$$

Il suffit donc de vérifier que pour $f \in L^2(\mathbf{R})$ et $\xi \in \mathcal{H}_\varphi$ les images de $\xi \otimes f$ par les opérateurs $W I (\Delta_\varphi^{-it_0} \otimes U_{-t_0})$ et $I(\Delta_\varphi^{-it_0}\, \pi_\varphi(u_{t_0}^*) \otimes U_{-t_0})\, I^{-1} W I$ coïncident.

La valeur en t de l'image de $\xi \otimes f$ par le premier est $\pi_\varphi(u_t)\, \Delta_\varphi^{-it_0} f(t + t_0)\, \xi$, et la valeur en t de l'image de $\xi \otimes f$ par le second est

$$\Delta_\varphi^{-it_0}\, \pi_\varphi(u_{t_0}^*)\, \pi_\varphi(u_{t+t_0})\, f(t+t_0)\, \xi.$$

L'égalité à démontrer résulte donc de

$$\Delta_\varphi^{it_0}\, \pi_\varphi(u_t)\, \Delta_\varphi^{-it_0} = \pi_\varphi(u_{t_0}^*)\, \pi_\varphi(u_{t+t_0})$$

pour $t \in \mathbf{R}$, $t_0 \in \mathbf{R}$ qui se déduit de $\sigma_{t_0}^{\varphi}(u_t) = u_{t_0}^* u_{t+t_0}$, égalité valable pour t et t_0 dans $\mathbf{R}$ par hypothèse.

LEMME 1.2.6. — *Soient* $t \to u_t$ *et* v *comme dans le lemme* 1.2.5.

(*a*) *Le poids* Φ *défini sur* $M \otimes F_\infty$ *par* $\Phi(x) = \overline{\omega}(v^* x v)$, $x \geqq 0$ *est semi-fini normal fidèle avec* $\sigma_t^\Phi(x \otimes y) = (u_t \sigma_t^\varphi(x) u_t^*) \otimes \sigma_t^\omega(y)$ *pour tout* $x \in M$, *tout* $y \in F_\infty$ *et tout* $t \in \mathbf{R}$.

(*b*) *Pour* $a_0 \in F_\infty$, $a_0 > 0$, $\omega(a_0) < \infty$ *le poids* ψ *défini sur* M *par* $\psi(x) = \Phi(x \otimes a_0)$, $x > 0$ *est semi-fini normal fidèle.*

Démonstration. — Montrons (*a*). Par construction Φ est semi-fini normal fidèle avec $\sigma_t^\Phi(.) = v\, \sigma_t^{\overline{\omega}}(v^* . v)\, v^*$. Comme $v\, \sigma_t^{\overline{\omega}}(v^*) = u_t \otimes 1$ on a

$$\sigma_t^\Phi(x \otimes y) = (u_t \sigma_t^\varphi(x) u_t^*) \otimes \sigma_t^\omega(y) \qquad \text{pour} \quad x \in M, \quad y \in F_\infty.$$

Montrons (*b*). Soit $f \in L^1(R)$ telle que $\hat{f}$ soit à support compact et soit $b = \int f(t)\, u_t\, dt$. Montrons que si $x \in M_+$, $\varphi(x) < \infty$, on a $\psi(bxb^*) < \infty$. Observons que

$$\psi(bxb^*) = \Phi((b \otimes 1)(x \otimes a_0)(b^* \otimes 1)) = \overline{\omega}(v^*(b \otimes 1)(x \otimes a_0)(b^* \otimes 1)v).$$

Comme $x \otimes a_0 \in \mathfrak{M}_{\overline{\omega}}$ il suffit en utilisant la proposition 3.3 (ii) de [30] de montrer que $v^*(b \otimes 1)$ est un élément analytique pour $\sigma_t^{\overline{\omega}}$. On a

$$v^*(b \otimes 1) = v^* \int_{\mathbf{R}} f(t)(u_t \otimes 1)\, dt = v^* \int_{\mathbf{R}} f(t)\, v\, \sigma_t^{\overline{\omega}}(v^*)\, dt = \int_{\mathbf{R}} f(t)\, \sigma_t^{\overline{\omega}}(v^*)\, dt$$

d'où la conclusion.

Par construction ψ est normal fidèle. De plus pour $f \in L^1(R)$, telle que $\hat{f}$ soit à support compact, et $b = \int f(t)\, u_t\, dt$, on a $\mathfrak{N}_\varphi b^* \subset \mathfrak{N}_\psi$. Comme 1 est faiblement adhérent à l'ensemble des b de la forme ci-dessus on en déduit que $\mathfrak{N}_\psi$ est faiblement dense dans M donc que ψ est semi-fini sur M.

LEMME 1.2.7. — *Soient* M *et* N *des algèbres de von Neumann*, Φ *un poids semi-fini normal fidèle sur* $M \otimes N$ *tel que* $\sigma_t^\Phi(M \otimes 1) = M \otimes 1$ *pour tout* $t \in \mathbf{R}$, $a_0 \in N_+$ *tel que le poids* ψ *sur* M, *défini par* $\psi(x) = \Phi(x \otimes a_0)$ *pour* $x \in M_+$, *soit semi-fini normal fidèle.*

On a alors $\sigma_t^\psi(x) \otimes 1 = \sigma_t^\Phi(x \otimes 1)$ *pour tout* $x \in M$ *et tout* $t \in \mathbf{R}$.

Démonstration. — L'ensemble $\mathfrak{M}_0$ des $x \in M$ tels que $x \otimes 1$ soit analytique pour σ_t^Φ, est faiblement dense dans M car pour tout $f \in L^1(\mathbf{R})$ et tout $y \in M$ on a

$$\int f(t)\, \sigma_t^\Phi(y \otimes 1)\, dt \in M \otimes 1.$$

Pour $x \in \mathfrak{M}_0$ l'application $z \to x(z)$ de $\mathbf{C}$ dans M telle que $x(z) \otimes 1 = \sigma_z^\Phi (x \otimes 1)$ pour $z \in \mathbf{C}$, vérifie les conditions (a) et (b) de 1.1.4 relativement à ψ. On a en effet, pour $a \geqq 0$ tel que $\psi(a) < \infty$, les conditions $a \otimes a_0 \geqq 0$, $\Phi(a \otimes a_0) < \infty$ et les égalités

$$\psi(x(z)\,ax(z)^*) = \Phi(x(z)\,ax(z)^* \otimes a_0) = \Phi(\sigma_z^\Phi(x \otimes 1)(a \otimes a_0)(\sigma_z^\Phi(x \otimes 1))^*),$$
$$\psi(x(z)^*\,ax(z)) = \Phi((\sigma_z^\Phi(x \otimes 1))^*(a \otimes a_0)\,\sigma_z^\Phi(x \otimes 1)),$$
$$\psi(x(z)\,a) = \Phi((x(z)\,a) \otimes a_0) = \Phi(\sigma_z^\Phi(x \otimes 1)(a \otimes a_0)),$$
$$\psi(ax(z)) = \Phi((a \otimes a_0)\,\sigma_z^\Phi(x \otimes 1)),$$
$$\psi(a) = \Phi(a \otimes a_0).$$

On a donc $x(z) = \sigma_z^\psi(x(0)) = \sigma_z^\psi(x)$, pour $z \in \mathbf{C}$. Pour tout $t \in \mathbf{R}$ l'égalité $\sigma_t^\psi(x) \otimes 1 = \sigma_t^\Phi(x \otimes 1)$ valable pour $x \in \mathfrak{M}_0$ reste vraie pour $x \in$ M.

Fin de la démonstration de 1.2.4. — Les trois lemmes précédents montrent qu'il existe un poids normal fidèle semi-fini ψ sur M tel que

$$\sigma_t^\psi(x) = u_t\,\sigma_t^\varphi(x)\,u_t^*$$

pour tout $t \in \mathbf{R}$ et tout $x \in$ M. Soit $v_t = (\mathrm{D}\psi : \mathrm{D}\varphi)_t$ pour $t \in \mathbf{R}$. On a

$$v_t\,\sigma_t^\varphi(x)\,v_t^* = u_t\,\sigma_t^\varphi(x)\,u_t^* \quad \text{pour tout } x \in \mathrm{M},$$

donc $v_t^*\,u_t$ est dans le centre de M et égal à $a_t = u_t\,v_t^*$. L'égalité, pour t et t' dans $\mathbf{R}$, $u_t\,\sigma_t^\varphi(u_{t'})\,u_{t+t'}^* = v_t\,\sigma_t^\varphi(v_{t'})\,v_{t+t'}^*$ et le fait que le centre est laissé invariant par les σ_t^φ, montrent que $a_{t+t'} = a_t\,a_{t'}$ pour t et t' dans $\mathbf{R}$.

Il existe donc un opérateur positif h affilié au centre de M tel que $a_t = h^{it}$; on a

$$(\mathrm{D}\psi(h.) : \mathrm{D}\psi)_t = a_t \qquad \text{donc} \quad (\mathrm{D}\psi(h.) : \mathrm{D}\varphi) = a_t\,v_t = u_t.$$

Soit ε l'homomorphisme canonique du groupe Aut M des automorphismes de M sur le groupe Out M, quotient de Aut M par le sous-groupe normal des automorphismes intérieurs.

THÉORÈME 1.2.8. — *Soient* M *une algèbre de von Neumann,* φ *un poids normal fidèle semi-fini sur* M.

(a) *L'homomorphisme* $\delta : t \to \delta_t = \varepsilon(\sigma_t^\varphi)$ de $\mathbf{R}$ *dans* Out M *ne dépend pas de* φ.

(b) *Pour tout* $t \in \mathbf{R}$ *on a* $\delta_t \in$ Centre (Out M).

(c) *Supposons que* M *soit un facteur à prédual séparable. Pour qu'un groupe fortement continu à un paramètre d'automorphismes,* $t \to \alpha_t$, *de* M *soit le groupe d'automorphismes modulaires d'un poids normal fidèle semi-fini sur* M *il faut et il suffit que* $\varepsilon(\alpha_t) = \delta_t$ *pour tout* $t \in \mathbf{R}$.

DÉFINITION 1.2.9. — *Soit* M *une algèbre de von Neumann, on appelle homomorphisme modulaire associé à* M *l'homomorphisme* δ *de* $\mathbf{R}$ *dans* Out M *défini par* 1.2.8 (*a*).

Démonstration de 1.2.8. — L'assertion (*a*) est un corollaire immédiat du théorème 1.2.1. L'assertion (*b*) résulte de :

LEMME 1.2.10. — *Soient* $\theta \in \operatorname{Aut} M$, *et* $\psi = \varphi \circ \theta$ *où* M *et* φ *sont comme dans* 1.2.8. *On a* $\sigma_t^\psi = \theta^{-1} \circ \sigma_t^\varphi \circ \theta$.

Il résulte facilement de l'unicité du groupe d'automorphismes modulaires (*cf.* [18], lemme 1).

Démontrons (*c*). Soit φ un état normal fidèle sur M, et pour $t \in \mathbf{R}$ soit F_t l'ensemble des unitaires u de M tels que $\alpha_t(x) = u\,\sigma_t^\varphi(x)\,u^*$ pour tout $x \in M$. Par hypothèse F_t est non vide pour tout $t \in \mathbf{R}$. Il existe donc une application $t \to u_t$ borélienne de $\mathbf{R}$ dans le groupe unitaire de M muni de la topologie forte telle que $u_t \in F_t$ pour tout $t \in \mathbf{R}$ ([21], p. 47).

Pour t et t' dans $\mathbf{R}$ et $x \in M$ on a

$$u_t\,\sigma_t^\varphi(u_{t'})\,\sigma_{t+t'}^\varphi(x)\,\sigma_t^\varphi(u_{t'}^*)\,u_t^* = \alpha_{t+t'}(x) = u_{t+t'}\,\sigma_{t+t'}^\varphi(x)\,u_{t+t'}^*.$$

On a donc

$$u_t\,\sigma_t^\varphi(u_{t'})\,u_{t+t'}^* \in \text{Centre } M.$$

Il existe donc une application borélienne γ de $\mathbf{R}^2$ dans le tore unidimensionnel T_1, telle que $u_t\,\sigma_t^\varphi(u_{t'})\,u_{t+t'}^* = \gamma(t, t')\,1_M$ pour t et t' dans $\mathbf{R}$.

Pour r, s et t dans $\mathbf{R}$, on a

$$\sigma_r^\varphi(u_s\,\sigma_s^\varphi(u_t)\,u_{s+t}^*) = u_s\,\sigma_s^\varphi(u_t)\,u_{s+t}^*,$$

donc

$$(u_r\,\sigma_r^\varphi(u_s)\,u_{r+s}^*)\,(u_{r+s}\,\sigma_{r+s}^\varphi(u_t)\,u_{r+s+t}^*) = (u_s\,\sigma_s^\varphi(u_t)\,u_{s+t}^*)\,(u_r\,\sigma_r^\varphi(u_{s+t})\,u_{r+s+t}^*).$$

On a donc $\gamma(s, t)\,\gamma(r+s, t)^{-1}\,\gamma(r, s+t)\,\gamma(r, s)^{-1} = 1$ pour r, s et t dans $\mathbf{R}$ et ([20], p. 197) il existe une application borélienne f de $\mathbf{R}$ dans T_1 telle que

$$\gamma(t_1, t_2) = f(t_1 + t_2)\,(f(t_1)\,f(t_2))^{-1}.$$

Soit $v_t = f(t)\,u_t$ pour $t \in \mathbf{R}$. On a $v_{t+t'} = v_t\,\sigma_t^\varphi(v_{t'})$ pour t et t' dans $\mathbf{R}$, l'application $t \to v_t$ est borélienne, et la démonstration du lemme 1.2.5 s'appliquant sans changement, on voit que l'application $t \to v_t$ est fortement continue Le théorème 1.2.4 assure alors l'existence d'un poids normal fidèle semi-fini ψ sur M tel que $\sigma_t^\psi = \alpha_t$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.

1.3. Invariant T pour les algèbres de von Neumann.

Définition 1.3.1. — *Soit* M *une algèbre de von Neumann. On pose*

$$T(M) = \{ T_0 \in \mathbf{R}, \delta_{T_0} = 1 \}.$$

Par construction T (M) est un sous-groupe additif de **R** et un invariant algébrique de M.

Théorème 1.3.2. — *Soit* M *une algèbre de von Neumann et soit* $T_0 \in \mathbf{R}$. *Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(*a*) $T_0 \in T(M)$.

(*b*) *Pour tout poids* φ, *normal fidèle semi-fini sur* M *l'automorphisme* $\sigma_{T_0}^{\varphi}$ *est intérieur.*

(*c*) *Pour tout poids* φ *normal fidèle semi-fini sur* M *il existe un unitaire* u *du centre de* M_{φ} *tel que* $\sigma_{T_0}^{\varphi}(x) = uxu^*$ *pour tout* $x \in M$.

(*d*) *Pour tout poids* φ *normal fidèle semi-fini sur* M *il existe un poids normal fidèle semi-fini* ψ *de la forme* $\psi = \varphi(h.)$ *où* h *est positif autoadjoint affilié au centre de* M_{φ}, *tel que* $\sigma_{T_0}^{\psi} = 1$.

(*e*) *Il existe un poids* φ *normal fidèle semi-fini sur* M *tel que* $\sigma_{T_0}^{\varphi}$ *soit un automorphisme intérieur.*

Démonstration. — Les implications $(d) \Rightarrow (e) \Rightarrow (a) \Rightarrow (b)$ sont immédiates.

$(b) \Rightarrow (c)$: Soit $u \in M$ tel que $\sigma_{T_0}^{\varphi}(x) = uxu^*$ pour tout $x \in M$. On a $\varphi(uyu^*) = \varphi(y)$ pour tout $y \in M_+$, car φ est $\sigma_{T_0}^{\varphi}$-invariant. On a donc

$$\mathfrak{N}_{\varphi} u = \mathfrak{N}_{\varphi}, \qquad \mathfrak{N}_{\varphi} u^* = \mathfrak{N}_{\varphi} \qquad \text{d'où} \qquad u\,\mathfrak{M}_{\varphi} = \mathfrak{M}_{\varphi} \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{M}_{\varphi} u = \mathfrak{M}_{\varphi}$$

et pour $x \in \mathfrak{M}_{\varphi}$, $x = yu^*$ avec $y \in \mathfrak{M}_{\varphi}$ il vient

$$\varphi(ux) = \varphi(uyu^*) = \varphi(y) = \varphi(xu).$$

Le théorème 3.6 de [30] montre donc que $\sigma_t^{\varphi}(u) = u$ pour tout $t \in \mathbf{R}$. Comme $\sigma_{T_0}^{\varphi} = 1$, pour tout $x \in M_{\varphi}$, on a $uxu^* = x$, donc $u \in$ Centre M_{φ}.

$(c) \Rightarrow (d)$: Soit $u \in$ Centre M_{φ} tel que $\sigma_{T_0}^{\varphi}(.) = u.u^*$, et soit h un opérateur positif autoadjoint affilié au centre de M_{φ} tel que $h^{-iT_0} = u$. Le poids normal fidèle semi-fini $\psi = \varphi(h.)$ vérifie

$$\sigma_{T_0}^{\psi}(x) = h^{iT_0}\sigma_{T_0}^{\varphi}(x)\,h^{-iT_0} = x \quad \text{pour tout } x \in M, \qquad \text{donc} \quad \sigma_{T_0}^{\psi} = 1.$$

Remarque 1.3.3. — *Si l'algèbre de von Neumann* M *et de genre dénombrable, soit* φ *une forme linéaire positive normale fidèle sur* M *et soit* $T_0 \in T(M)$. *L'élément* h *de* M_{φ} *tel que* $h^{-iT_0} x h^{iT_0} = \sigma_{T_0}^{\varphi}(x)$ *pour* $x \in M$ *peut être choisi* *positif borné et inversible; dans ce cas* $\psi = \varphi(h.)$ *est une forme linéaire positive normale fidèle sur* M *avec* $\sigma^{\psi}_{T_0} = 1$, *donc :*

$$T(M) = \{ T_0 \in \mathbf{R},\ \textit{il existe un état normal fidèle } \varphi \textit{ sur } M \textit{ tel que } \sigma^{\varphi}_{T_0} = 1 \}.$$

THÉORÈME 1.3.4. — *Soient* M, M_1, M_2 *des algèbres de von Neumann :*

(*a*) *Si* M *est semi-finie on a* $T(M) = \mathbf{R}$.

(*b*) *Si* M *a un prédual séparable et si* $T(M) = \mathbf{R}$, M *est semi-finie.*

(*c*) *On a* $T(M_1 \otimes M_2) = T(M_1) \cap T(M_2)$.

Démonstration. — (*a*) est immédiat car $\sigma^{\tau}_t = 1$, pour tout $t \in \mathbf{R}$ et toute trace normale fidèle τ semi-finie sur M.

(*b*) résulte du théorème 0.1 de [21] qui assure alors l'existence, pour un poids normal fidèle semi-fini arbitraire φ sur M, d'un groupe à un paramètre fortement continu d'opérateurs unitaires u_t de M tels que

$$\sigma^{\varphi}_t(x) = u_t x u_t^* \quad \text{pour} \quad t \in \mathbf{R} \quad \text{et} \quad x \in M.$$

On applique alors le théorème 14.1 de [36].

(*c*) Soient φ_1 et φ_2 des poids normaux fidèles semi-finis sur M_1, et M_2 respectivement. Le théorème 1.3.2 montre que $T(M_1 \otimes M_2)$ est l'ensemble des $T_0 \in \mathbf{R}$ tels que $\sigma^{\varphi_1 \otimes \varphi_2}_{T_0}$ soit un automorphisme intérieur de $M_1 \otimes M_2$. L'égalité $\sigma^{\varphi_1}_{T_0} \otimes \sigma^{\varphi_2}_{T_0} = \sigma^{\varphi_1 \otimes \varphi_2}_{T_0}$ et le corollaire 1.14 de [22] montrent que $T_0 \in T(M_1 \otimes M_2)$ si et seulement si chacun des automorphismes $\sigma^{\varphi_1}_{T_0}$ et $\sigma^{\varphi_2}_{T_0}$ est intérieur, d'où la conclusion.

REMARQUE 1.3.5 :

(*a*) *Soient* M_1 *et* M_2 *des algèbres de von Neumann, on a*

$$T(M_1 \times M_2) = T(M_1) \cap T(M_2).$$

(*b*) *Soient* M *une algèbre de von Neumann, e un projecteur de* M *de support central égal à* 1, *alors* $T(M_e) = T(M)$.

(*c*) *Soit* M *une algèbre de von Neumann opérant dans l'espace de Hilbert* $\mathcal{H}$; *on a* $T(M') = T(M)$ *où* M' *désigne le commutant de* M.

COROLLAIRE 1.3.6. — Soit M *une algèbre de von Neumann, non semi-finie, et à prédual séparable; alors le centre du groupe* Out M *est non trivial.*

Résulte de 1.3.4 (*b*) et 1.2.8 (*b*).

Nous utiliserons les notations de [35] pour les produits tensoriels infinis.

THÉORÈME 1.3.7 :

(*a*) *Soient* $T_0 \neq 0$, *et* $M = \bigotimes_1^{\infty} (M_\nu, \varphi_\nu)$ *un produit tensoriel infini de facteurs selon les états normaux fidèles* φ_ν. *On a* $T_0 \in T(M)$ *si et seulement* *si* $T_0 \in \cap T(M_\nu)$ *et si,* u_ν *désignant un unitaire de* M_ν *tel que* $\sigma_{T_0}^{\varphi_\nu}(x) = u_\nu x u_\nu^*$ *pour tout* $x \in M_\nu$, *on a* $\sum_{\nu=1}^{\infty} |1 - \varphi_\nu(u_\nu)| < \infty$.

(*b*) *Soient* $T_0 \neq 0$, $M = \bigotimes_1^\infty (M_\nu, \varphi_\nu)$ *un produit tensoriel infini de facteurs* M_ν *selon les états normaux fidèles* φ_ν. *On a* $T_0 \in T(M)$ *si et seulement s'il existe une suite* ψ_ν *d'états normaux fidèles sur* M_ν *telle que* $\sigma_{T_0}^{\psi_\nu} = 1$ *pour tout* ν *et que* $P = \bigotimes_1^\infty (M_\nu, \psi_\nu)$ *soit isomorphe à* M.

LEMME 1.3.8. — *Pour chaque entier n, soient* M_n *un facteur opérant dans un espace de Hilbert* $\mathcal{H}_n$, σ_n *un automorphisme de* M_n, $\xi_n \in \mathcal{H}_n$, $\|\xi_n\| = 1$, *et* U_n *un unitaire de* $\mathcal{H}_n$ *tel que* $U_n \xi_n = \xi_n$, et $U_n x U_n^* = \sigma_n(x)$ *pour tout* $x \in M_n$.

(*a*) *Il existe un automorphisme unique* σ *de* $\bigotimes_1^\infty (M_n\ \xi_n)$ *tel que pour tous* $x_1 \in M_1, \ldots, x_n \in M_n$, *on ait*

$$\sigma(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n \otimes 1 \otimes \ldots) = \sigma_1(x_1) \otimes \ldots \otimes \sigma_n(x_n) \otimes 1 \otimes \ldots.$$

(*b*) *Pour que* σ *soit un automorphisme intérieur de* $\bigotimes_1^\infty (M_n, \xi_n)$ *il faut et il suffit qu'il existe une suite* (u_n), u_n *unitaire de* M_n *tel que* $\sigma_n(x) = u_n x u_n^*$ *pour tout* $x \in M_n$, *avec* $\sum_1^\infty (1 - |\langle u_n \xi_n, \xi_n \rangle|) < \infty$.

Démonstration. — Soient $\mathcal{H} = \bigotimes_1^\infty (\mathcal{H}_n, \xi_n)$, $M = \bigotimes_1^\infty (M_n, \xi_n)$; $U = \bigotimes_1^\infty U_n$ a un sens car par hypothèse $U_n \xi_n = \xi_n$. Pour $x_j \in M_j$ et $\alpha_j \in \mathcal{H}_j$, $j \in \{1, \ldots, n\}$ on a

$$\begin{aligned} &U(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n \otimes 1 \otimes \ldots)(\alpha_1 \otimes \ldots \otimes \alpha_n \otimes \xi_{n+1} \otimes \ldots) \\ &\quad = U_1 x_1 \alpha_1 \otimes \ldots \otimes U_n x_n \alpha_n \otimes \xi_{n+1} \otimes \ldots \\ &\quad = (\sigma_1(x_1) \otimes \ldots \otimes \sigma_n(x_n) \otimes 1 \otimes \ldots)\, U(\alpha_1 \otimes \ldots \otimes \alpha_n \otimes \xi_{n+1} \otimes \ldots). \end{aligned}$$

On a donc $UMU^* = M$ et l'automorphisme σ, où $\sigma(x) = U x U^*$ pour tout $x \in M$, vérifie la condition (*a*).

La condition de (*b*) est suffisante car en prenant u_n tel que $\langle u_n \xi_n, \xi_n \rangle \geq 0$, $u = \bigotimes_1^\infty u_n$ a un sens (*cf.* [4]) et l'égalité $\sigma(x) = uxu^*$ pour tout $x \in M$ se vérifie comme ci-dessus pour U.

Inversement, supposons qu'il existe un unitaire $u \in M$ tel que $\sigma(x) = uxu^*$ pour tout $x \in M$. Soit $M^m = \bigotimes_{m+1}^\infty (M_k, \xi_k)$; on a $M = \left(\bigotimes_1^m M_n\right) \otimes M^m$ pour tout entier m et $\sigma = \left(\bigotimes_1^m \sigma_n\right) \otimes \delta_m$, où δ_m est l'automorphisme de M^m obtenu en appliquant le (*a*) du lemme 1.3.8 à la suite des M_{m+k}, ξ_{m+k}, U_{m+k}.

Comme σ est intérieur, chacun des σ_n est intérieur ([22], 1.14) et δ_m est intérieur.

Soient u_k, unitaire de M_k, tel que $\sigma_k(x) = u_k x u_k^*$ pour tout $x \in M_k$ et v_m, unitaire de M^m tel que $\delta_m(x) = v_m x v_m^*$ pour tout $x \in M^m$.

Comme M est un facteur il existe pour tout m un nombre complexe de module 1, λ_m tel que $u = u_1 \otimes \ldots \otimes u_m \otimes \lambda_m v_m$.

Soient $\xi^m = \bigotimes_1^\infty \xi_{m+k}$, et $x_k \in M_k$ pour $1 \leq k \leq m$. On a

$$\langle u\xi^0, (x_1 \otimes \ldots \otimes x_m \otimes 1 \otimes \ldots)\xi^0 \rangle = \langle u_1 \xi_1, x_1 \xi_1 \rangle \ldots \langle u_m \xi_m, x_m \xi_m \rangle \lambda_m \langle v_m \xi^m, \xi^m \rangle.$$

Il existe un entier p et des $a_k \in M_k$, pour $1 \leq k \leq p$, tels que pour $a = a_1 \otimes \ldots \otimes a_p \otimes 1 \otimes \ldots$, on ait $\langle u\xi^0, a\xi^0 \rangle \neq 0$; soient $m > p$, $x_k = a_k$ pour $1 \leq k \leq p$ et $x_k = 1$ pour $p < k \leq m$; l'égalité ci-dessus montre que

$$|\langle u_{p+1}\xi_{p+1}, \xi_{p+1} \rangle \ldots \langle u_m \xi_m, \xi_m \rangle| \geq C,$$

où $C = |\langle u\xi^0, a\xi^0 \rangle| . |\langle u_1 \xi_1, a_1 \xi_1 \rangle|^{-1} \ldots |\langle u_p \xi_p, a_p \xi_p \rangle|^{-1}$ est un nombre positif non nul indépendant de m.

On a prouvé la convergence du produit des $|\langle u_n \xi_n, \xi_n \rangle|$ pour $n > p$, donc de la série $\sum_1^\infty (1 - |\langle u_n \xi_n, \xi_n \rangle|)$.

Démonstration de 1.3.7 (*a*). — On suppose que M_ν opére dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}_\nu$, que $\xi_\nu \in \mathcal{H}_\nu$ est un vecteur totalisateur et séparateur pour M_ν tel que $\langle x\xi_\nu, \xi_\nu \rangle = \varphi_\nu(x)$ pour tout $x \in M_\nu$.

Soient $\xi = \bigotimes_1^\infty \xi_\nu$. On a $\xi \in \mathcal{H} = \bigotimes_1^\infty (\mathcal{H}_\nu, \xi_\nu)$, et $\varphi(x) = \langle x\xi, \xi \rangle$ pour tout $x \in \bigotimes_1^\infty (M_\nu, \xi_\nu)$. On identifie M à $\bigotimes_1^\infty (M_\nu, \xi_\nu)$ ([35], p. 811) et on a $T_0 \in T(M)$ si et seulement si $\sigma_{T_0}^\varphi$ est un automorphisme intérieur.

Pour $\nu = 1, 2, \ldots$, soient Δ_ν l'opérateur modulaire de $(\mathcal{H}_\nu, M_\nu, \xi_\nu)$ et $U_\nu = \Delta_\nu^{iT_0}$.

La suite M_n, $\mathcal{H}_n$, $\sigma_{T_0}^{\varphi_n}$, ξ_n, U_n vérifie les hypothèses du lemme 1.3.8. Pour tout m soit φ^m l'état normal fidèle sur $M^m = \bigotimes_{m+1}^\infty (M_k, \xi_k)$ associé au vecteur $\bigotimes_{m+1}^\infty \xi_k$. L'isomorphisme canonique de $M_1 \otimes M_2 \otimes \ldots \otimes M_m \otimes M^m$ sur M transforme φ en l'état $\varphi_1 \otimes \varphi_2 \otimes \ldots \otimes \varphi_m \otimes \varphi^m$; on a donc pour tout m et tous x_j, $x_j \in M_j$, $1 \leq j \leq m$, l'égalité

$$\sigma_{T_0}^\varphi (x_1 \otimes x_2 \otimes \ldots \otimes x_m \otimes 1 \otimes \ldots) = \sigma_{T_0}^{\varphi_1}(x_1) \otimes \ldots \otimes \sigma_{T_0}^{\varphi_m}(x_m) \otimes 1 \otimes \ldots,$$

ce qui montre que l'unique automorphisme σ associé par 1.3.8 (*a*) à la suite M_n, $\mathcal{H}_n$, $\sigma_{T_0}^{\varphi_n}$, ξ_n, U_n est égal à $\sigma_{T_0}^\varphi$. La conclusion résulte de 1.3.8 (*b*) avec $\langle u_\nu \xi_\nu, \xi_\nu \rangle = \varphi_\nu(u_\nu)$ pour tout entier ν.

Démonstration de 1.3.7 (*b*). — Soient $\mathcal{H}_\nu$ et ξ_ν comme dans la démonstration de 1.3.7 (*a*) et $\mathcal{H} = \bigotimes (\mathcal{H}_\nu, \xi_\nu)$.

Soit f une application borélienne de $\{ z \in \mathbf{C},\ |z| = 1 \}$ dans l'intervalle $[\rho, \rho^{-1}]$ où $\rho = \exp(-2\pi/T_0)$ telle que $f(z)^{-2iT_0} = z$ pour tout z et que dans un voisinage de 1, on ait $f(z) = \exp(\alpha \operatorname{Log} z)$ où $\alpha = -1/(2iT_0)$ et où $\operatorname{Log} z$ est la détermination usuelle du logarithme. Il existe $\gamma > 0$ tel que

$$|f(z) - 1 - \alpha(z-1)| \leq \gamma \operatorname{Re}(1-z)$$

et

$$|(f(z))^2 - 1 - 2\alpha(z-1)| \leq \gamma \operatorname{Re}(1-z)$$

pour tout z, $|z| = 1$. Supposons $T_0 \in T(M)$. Soit (u_ν) une suite d'unitaires, $u_\nu \in M_\nu$, telle que $u_\nu \in M_{\varphi_\nu}$, $\varphi_\nu(u_\nu) \geq 0$, $\sigma_{T_0}^{\varphi_\nu}(x) = u_\nu x u_\nu^*$ pour tout $x \in M_\nu$, et $\sum_{\nu=1}^{\infty} (1 - \varphi_\nu(u_\nu)) < \infty$.

Soit $\eta_\nu = f(u_\nu)\xi_\nu$; on a $\|\eta_\nu\|^2 = \langle f^2(u_\nu)\xi_\nu, \xi_\nu \rangle = \varphi_\nu(f^2(u_\nu))$ pour tout $\nu \in \mathbf{N}$. Pour tout $\nu \in \mathbf{N}$, l'opérateur $f^2(u_\nu) - 1 - 2\alpha(u_\nu - 1)$ est normal et son module est inférieur à $\gamma/2\,[(1-u_\nu) + (1-u_\nu)^*]$. On a donc

$$|\varphi_\nu(f^2(u_\nu) - 1 - 2\alpha(u_\nu - 1))| \leq \gamma/2\,[\varphi_\nu(1-u_\nu) + \varphi_\nu(1-u_\nu)] = \gamma(1 - \varphi_\nu(u_\nu))$$

et

$$|1 - \varphi_\nu(f^2(u_\nu))| \leq (\gamma + 2|\alpha|)(1 - \varphi(u_\nu)) \qquad \text{donc} \quad \sum |1 - \|\eta_\nu\|^2| < \infty.$$

Le même raisonnement appliqué à f au lieu de f^2 montre que

$$\sum |1 - \varphi_\nu(f(u_\nu))| < \infty \qquad \text{donc que} \quad \sum |1 - \langle \eta_\nu, \xi_\nu \rangle| < \infty.$$

Pour $\nu = 1, 2, \ldots$, soit φ'_ν, avec $\varphi'_\nu(x) = \langle x\eta_\nu, \eta_\nu \rangle$ pour tout $x \in M_\nu$. On a $\varphi'_\nu(x) = \varphi_\nu(f^2(u_\nu)x)$ pour tout $x \in M_\nu$, car $u_\nu \in M_{\varphi_\nu}$ pour tout ν, donc $f(u_\nu) \in M_{\varphi_\nu}$. Comme $f(u_\nu)$ est positif inversible, φ'_ν est une forme linéaire positive normale fidèle sur M_ν telle que

$$\sigma_{T_0}^{\varphi'_\nu}(x) = f(u_\nu)^{2iT_0}\sigma_{T_0}^{\varphi_\nu}(x) f(u_\nu)^{-2iT_0} = x \quad \text{pour tout } x \in M_\nu.$$

Soit ψ_ν l'unique état normal fidèle sur M_ν proportionnel à φ_ν; la convergence des séries $\sum (1 - \|\eta_\nu\|^2)$ et $\sum |1 - \langle \eta_\nu, \xi_\nu \rangle|$ montre que les produits tensoriels infinis $\bigotimes_1^\infty (M_\nu, \varphi_\nu)$ et $\bigotimes_1^\infty (M_\nu, \psi_\nu)$ sont unitairement équivalents ([2], 2.13) d'où la nécessité de la condition 1.3.7 (*b*). La suffisance résulte facilement de 1.3.7 (*a*).

COROLLAIRE 1.3.9. — *Soit* $T_0 \in \mathbf{R}$, $M = \bigotimes_1^\infty (M_\nu, \Omega_\nu)$ *un facteur d'Araki-Woods. Pour tout* $\nu \in \mathbf{N}$, $\{\lambda_{\nu,j}\}_{j=1,\ldots,n_\nu}$ *désigne* $\mathrm{Sp}(\Omega_\nu, M_\nu)$. *On a* $T_0 \in T(M)$ *si et seulement si* $\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(1 - \left|\sum_{j=1}^{n_\nu} \lambda_{\nu,j}^{1+iT_0}\right|\right) < \infty$.

Démonstration. — Soit h_ν l'unique opérateur positif de M_ν tel que $\langle x\,\Omega_\nu, \Omega_\nu\rangle = \mathrm{Trace}(h_\nu x)$ pour tout $x \in M_\nu$. Le théorème 1.3.7 s'applique avec $u_\nu = h_\nu^{iT_0}$ car $\sigma_{T_0}^{\varphi_\nu}(x) = h_\nu^{iT_0} x h_\nu^{-iT_0}$ pour tout $x \in M_\nu$, où φ_ν désigne l'état normal fidèle $\varphi_\nu = \mathrm{Trace}(h_\nu .)$ [1.2.3 (*b*)]. On a $\varphi_\nu(u_\nu) = \mathrm{Trace}(h_\nu^{1+iT_0})$ et comme $\mathrm{Sp}(\Omega_\nu, M_\nu)$ est l'ensemble des valeurs propres de h_ν avec les multiplicités correspondantes, on a $\varphi_\nu(u_\nu) = \sum_1^{n_\nu} \lambda_{\nu,j}^{1+iT_0}$.

COROLLAIRE 1.3.10. — *Soit* $\lambda \in]0, 1[$.

(*a*) *Soient* M_ν *le facteur de type* I_2, Ω_ν *tel que* $\mathrm{Sp}(\Omega_\nu, M_\nu) = \{p, q\}$ *avec* $p = \lambda q$ *et* $p + q = 1$, $R_\lambda = \bigotimes_1^\infty (M_\nu, \Omega_\nu)$. *On a*

$$T(R_\lambda) = \{n\,T_0,\ n \in Z\} \qquad \textit{où} \quad \exp(-2\pi/T_0) = \lambda.$$

(*b*) *Soient* G_2 *le groupe libre à deux générateurs*, $U(G_2)$ *l'algèbre de von Neumann associée à la représentation régulière de* G_2 (*cf.* [33], p. 182). *On a* $T(U(G_2) \otimes R_\lambda) = \{n\,T_0,\ n \in Z\}$ *où* $\exp(-2\pi/T_0) = \lambda$.

En particulier les $U(G_2) \otimes R_\lambda$ *forment une famille continue de facteurs non hyperfinis, deux à deux non isomorphes.*

Démonstration :

(*a*) La série $\sum_1^\infty\left(1 - \left|\sum_1^2 \lambda_{\nu,j}^{1+iT}\right|\right) = \sum_1^\infty (1 - |p^{1+iT} + q^{1+iT}|)$ est convergente si et seulement si $|pp^{iT} + qq^{iT}| = 1$ donc si et seulement si $p^{iT} = q^{iT}$ i. e. $\lambda^{iT} = 1$.

(*b*) $U(G_2)$ est un facteur fini, donc [1.3.4 (*a*)], on a $T(U(G_2)) = \mathbf{R}$. On a donc [1.3.4 (*c*)], $T(U(G_2) \otimes R_\lambda) = T(R_\lambda) = \{n\,T_0,\ n \in Z\}$ où $T_0 = 2\pi/\mathrm{Log}\,\lambda$. Les $U(G_2) \otimes R_\lambda$ sont des facteurs non hyperfinis ([33], prop. 4.4.25, p. 212).

1.4. CALCUL DE L'INVARIANT T POUR LES PRODUITS CROISÉS D'ALGÈBRES DE VON NEUMANN SEMI-FINIES PAR DES GROUPES D'AUTOMORPHISMES.

DÉFINITION 1.4.1. — *Soient* M *une algèbre de von Neumann*, E *une espérance conditionnelle normale fidèle de* M *sur une sous-algèbre de von Neumann* N *de* M. *On appelle groupe normalisateur de* E *le groupe* $\mathfrak{N}(E)$

des unitaires u *de* M *tels que* $E(uxu^*) = u\,E(x)\,u^*$ *pour tout* $x \in M$. *Pour* $u \in \mathfrak{N}(E)$ *et* $x \in N$ *on pose* $i_u(x) = uxu^*$.

THÉORÈME 1.4.2. — *Soient* $T_0 \in \mathbf{R}$, M *une algèbre de von Neumann*, E *une espérance conditionnelle normale fidèle de* M *sur une sous-algèbre de von Neumann semi-finie* N *de* M *telle que* $C = N' \cap M \subset N$, C_u *le groupe unitaire de* C, $\mathcal{G}$ *un sous-groupe de* $\mathfrak{N}(E)$ *tel que* M *soit l'algèbre de von Neumann engendrée par* N *et* $\mathcal{G}$. *Pour toute Trace* τ *normale fidèle semi-finie sur* N^+, *et tout* $v \in \mathcal{G}$, *soit* $\rho_{v,\tau}$ *l'unique opérateur positif affilié à* C *tel que* $\tau(vxv^*) = \tau(\rho_{v,\tau}\,x)$ *pour tout* $x \in N_+$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(*a*) $T_0 \in T(M)$.

(*b*) *Pour toute trace normale fidèle semi-finie* τ *sur* N, *il existe un* $v \in C_u$ *tel que pour tout* $u \in \mathcal{G}$ *on ait* $u^*vuv^* = \rho_{u,\tau}^{iT_0}$.

(*c*) *Il existe une trace normale fidèle semi-finie* τ *sur* N *telle que* $\rho_{u,\tau}^{iT_0} = 1$ *pour tout* $u \in \mathcal{G}$.

LEMME 1.4.3. — *Soient* M *une algèbre de von Neumann*, E *une espérance conditionnelle normale fidèle de* M *sur une sous-algèbre de von Neumann* N, φ *un poids semi-fini normal fidèle sur* N. *Le poids* ψ *noté* $\varphi \circ E$, *tel que* $\psi(x) = \varphi(E(x))$ *pour tout* $x \in M_+$, *est semi-fini, normal et fidèle sur* M. *On a pour tout* $t \in \mathbf{R}$ *et tout* $x \in M$ *les égalités*

$$E(\sigma_t^\psi(x)) = \sigma_t^\psi\,E(x) = \sigma_t^\varphi\,E(x).$$

Démonstration. — D'après ([37], remarque, p. 309) le poids ψ est semi-fini normal fidèle et E est l'espérance conditionnelle canonique du triplet (M, N, ψ). En particulier N est σ_t^ψ invariante, la restriction de ψ à N est semi-finie, la restriction de σ_t^ψ à N est égale à σ_t^φ pour tout $t \in \mathbf{R}$. Pour tout $t \in \mathbf{R}$, $\sigma_{-t}^\psi \circ E \circ \sigma_t^\psi$ est l'espérance conditionnelle canonique du triplet M, $\sigma_{-t}^\psi(N)$, $\psi \circ \sigma_t^\psi$, donc on a $E \circ \sigma_t^\psi = \sigma_t^\psi \circ E$.

LEMME 1.4.4. — *Soient* M *et* E *comme dans* 1.4.3., φ_1 *et* φ_2 *des poids normaux fidèles semi-finis sur* $N = E(M)$. *On a alors*

$$(D(\varphi_2 \circ E) : D(\varphi_1 \circ E)) = (D\varphi_2 : D\varphi_1).$$

Démonstration. — L'application $E \otimes 1$ de $M \otimes F_2$ sur $N \otimes F_2$ est une espérance conditionnelle normale fidèle d'aprés ([39], th. 5.1). Soit θ le poids normal fidèle semi-fini sur $N \otimes F_2$ tel que

$$\theta\left(\sum x_{ij} \otimes e_{ij}\right) = \varphi_1(x_{11}) + \varphi_2(x_{22}) \qquad \text{pour} \quad \sum x_{ij} \otimes e_{ij} \in (N \otimes F_2)_+.$$

Le poids $\bar{\theta} = \theta \circ (\mathrm{E} \otimes 1)$ sur $\mathrm{M} \otimes \mathrm{F}_2$ vérifie

$$\bar{\theta}\left(\sum x_{ij} \otimes e_{ij}\right) = \theta\left(\sum \mathrm{E}(x_{ij}) \otimes e_{ij}\right) = (\varphi_1 \circ \mathrm{E})(x_{11}) + (\varphi_2 \circ \mathrm{E})(x_{22})$$

pour

$$\sum x_{ij} \otimes e_{ij} \in (\mathrm{M} \otimes \mathrm{F}_2)_+.$$

Comme $1 \otimes e_{21} \in \mathrm{N} \otimes \mathrm{F}_2$ on a

$$\sigma_t^{\bar{\theta}}(1 \otimes e_{21}) = \sigma_t^{\theta}(1 \otimes e_{21}) \quad (1.4.3).$$

On a donc

$$(\mathrm{D}(\varphi_2 \circ \mathrm{E}) : \mathrm{D}(\varphi_1 \circ \mathrm{E})) = (\mathrm{D}\varphi_2 : \mathrm{D}\varphi_1).$$

Lemme 1.4.5 :

(*a*) *Soient* E *une espérance conditionnelle normale fidèle de l'algèbre de von Neumann* M *sur* $\mathrm{N} \subset \mathrm{M}$, *u un unitaire de* M *tel que* $\mathrm{E}(uxu^*) = u\,\mathrm{E}(x)\,u^*$ *pour tout* $x \in \mathrm{M}$, φ *un poids semi-fini normal fidèle sur* N, φ_u *le poids défini sur* N *par* $\varphi_u(x) = \varphi(uxu^*)$ *pour tout* $x \in \mathrm{N}_+$.

En posant $\psi = \varphi \circ \mathrm{E}$, *on a* $\sigma_t^{\psi}(u) = u\,(\mathrm{D}\varphi_u : \mathrm{D}\varphi)_t$ *pour tout* $t \in \mathbf{R}$.

(*b*) *Soient* M, E, N, C, C_u *et* τ *comme dans* 1.4.2, $\psi = \tau \circ \mathrm{E}$ *et pour tout* $v \in \mathfrak{N}(\mathrm{E})$, *soit* ρ_v *l'unique opérateur positif affilié à* C *tel que* $\tau_v = \tau(\rho_v .)$. *Pour tout* $t \in \mathbf{R}$ *on a* $\sigma_t^{\psi}(v) = v\,\rho_v^{it}$ *pour tout* $v \in \mathfrak{N}(\mathrm{E})$.

Résulte facilement de 1.2.3 et 1.4.4.

Démonstration du théorème 1.4.2 :

(*a*) *entraîne* (*b*) : Soient $\mathrm{T}_0 \in \mathrm{T}(\mathrm{M})$, τ une trace normale fidèle semi-finie sur N et $\psi = \tau \circ \mathrm{E}$ le poids normal fidèle semi-fini correspondant sur M. Par hypothèse il existe un unitaire $v \in \mathrm{M}$ tel que

$$\sigma_{\mathrm{T}_0}^{\psi}(x) = vxv^* \quad \text{pour tout } x \in \mathrm{M}.$$

On a en particulier $vxv^* = x$ pour tout $x \in \mathrm{N}$ car $\sigma_t^{\tau} = 1$ pour tout $t \in \mathbf{R}$. On a donc $v \in \mathrm{N}' \cap \mathrm{M} \subset \mathrm{N}$, donc $v \in \mathrm{C}$. Pour tout $u \in \mathcal{G}$ on a $\sigma_{\mathrm{T}_0}^{\psi}(u) = u\,\rho_u^{i\mathrm{T}_0}$ donc

$$u^*\,vuv^* = \rho_u^{i\mathrm{T}_0}.$$

(*b*) *entraîne* (*c*) : Soient τ_1 une trace normale fidèle semi-finie sur N et $v \in \mathrm{C}_u$ tel que $u^*\,vuv^* = (\mathrm{D}\tau_{1,u} : \mathrm{D}\tau_1)_{\mathrm{T}_0}$ pour tout $u \in \mathcal{G}$.

Soit h un élément positif borné inversible de C tel que $h^{i\mathrm{T}_0} = v^*$.

Le lemme 1.2.3 (*b*) montre que la trace $\tau = \tau_1(h.)$ vérifie

$$(\mathrm{D}\tau : \mathrm{D}\tau_1)_{\mathrm{T}_0} = h^{i\mathrm{T}_0} = v^*.$$

On a donc, pour tout $u \in \mathcal{G}$,

$$(\mathrm{D}\tau_u : \mathrm{D}\tau_{1,u})_{\mathrm{T}_0} = u^* (\mathrm{D}\tau : \mathrm{D}\tau_1)_{\mathrm{T}_0}\, u = u^* v^* u.$$

On a

$$(\mathrm{D}\tau_u : \mathrm{D}\tau)_{\mathrm{T}_0} = (\mathrm{D}\tau_u : \mathrm{D}\tau_{1,u})_{\mathrm{T}_0} (\mathrm{D}\tau_{1,u} : \mathrm{D}\tau_1)_{\mathrm{T}_0} (\mathrm{D}\tau_1 : \mathrm{D}\tau)_{\mathrm{T}_0} = (u^* v^* u)(u^* vuv^*)\, v = 1,$$

et (*c*) en résulte facilement.

(*c*) *entraîne* (*a*) : Soient τ une trace normale fidèle semi-finie sur N telle que $(\mathrm{D}\tau_u : \mathrm{D}\tau)_{\mathrm{T}_0} = 1$ pour tout $u \in \mathcal{G}$, et $\psi = \tau \circ \mathrm{E}$ le poids semi-fini normal fidèle correspondant sur M. Pour tout $u \in \mathcal{G}$ on a $\sigma^{\psi}_{\mathrm{T}_0}(u) = u$ (lemme 1.4.5), et pour tout $x \in \mathrm{N}$ on a $\sigma^{\psi}_{\mathrm{T}_0}(x) = x$. Par hypothèse l'algèbre de von Neumann M est engendrée par $\mathcal{G}$ et N on a donc $\sigma^{\psi}_{\mathrm{T}_0} = 1$ et $\mathrm{T}_0 \in \mathrm{T}(\mathrm{M})$.

Proposition 1.4.6. — *Soient* $\mathfrak{A}$ *une algèbre de von Neumann,* $\mathcal{G}$ *un groupe discret qui opère par automorphismes sur* $\mathfrak{A}$, *et* $\mathrm{M} = \mathrm{W}^*(\mathcal{G}, \mathfrak{A})$ *le produit croisé de* $\mathfrak{A}$ *par* $\mathcal{G}$.

(*a*) *Soit* I *l'application de* $\mathfrak{A}$ *dans* M *qui à* $a \in \mathfrak{A}$ *associe l'élément de* M *décrit par la matrice* $(\mathrm{I}(a))_{t,u} = \delta_t^u\, t^{-1}.a$ *pour* t *et* u *dans* $\mathcal{G}$. *Alors* I *est un isomorphisme de* $\mathfrak{A}$ *sur une sous-algèbre de von Neumann* $\mathrm{I}(\mathfrak{A}) = \mathrm{N}$ *de* M.

(*b*) *L'application* E *de* M *dans* $\mathrm{I}(\mathfrak{A})$ *qui à* x *associe* $\mathrm{I}((x)_{e,e})$ *est une espérance conditionnelle normale fidèle de* M *sur* N.

(*c*) *Soit* U *l'application qui à* $s \in \mathcal{G}$ *associe* $\mathrm{U}_s \in \mathrm{M}$, *où* $(\mathrm{U}_s)_{t,u} = \delta_t^{su}$. *Alors* U *est un isomorphisme de* $\mathcal{G}$ *sur un sous-groupe du groupe normalisateur de* E.

(*d*) *Pour* $s \in \mathcal{G}$ *et* $x \in \mathfrak{A}$ *on a* $\mathrm{U}_s\, \mathrm{I}(x)\, \mathrm{U}_s^* = \mathrm{I}(s.x)$.

(*e*) M *est l'algèbre de von Neumann engendrée par* N *et l'image de* $\mathcal{G}$ *par* U.

Démonstration. — Les assertions (*a*), (*b*), (*d*) et (*e*) résultent facilement de [41], 8e partie. L'ensemble des éléments x de M de la forme $\sum_{i=1}^{n} \mathrm{I}(x_{s_i})\, \mathrm{U}_{s_i}$ pour n fini, $s_i \in \mathcal{G}$ $(1 \leq i \leq n)$ et $x_{s_i} \in \mathfrak{A}$ est une sous-algèbre involutive faiblement dense de M. Pour un tel $x \in \mathrm{M}$ on a $\mathrm{E}(x) = \mathrm{I}(x_e)$. Donc, pour tout $x \in \mathrm{M}$ et tout $s \in \mathcal{G}$, on a $\mathrm{E}(\mathrm{U}_s\, x\, \mathrm{U}_s^*) = \mathrm{U}_s\, \mathrm{E}(x)\, \mathrm{U}_s^*$, d'où (*c*).

Définition 1.4.7. — 1° *Soient* μ *une mesure positive* σ*-finie sur un espace mesurable* Ω, $\mathcal{G}$ *un sous-groupe du groupe des bijections bimesurables* s, *de* Ω *sur* Ω, *telles que la mesure* $s.\mu$ *soit équivalente à* μ.

(*a*) *On dit que* $\mathcal{G}$ *agit presque librement* ([33], p. 175) *dans* Ω *si pour tout sous-ensemble mesurable non négligeable* A *de* Ω *et tout* $s \neq 1$, $s \in \mathcal{G}$ *il existe un sous-ensemble mesurable* $\mathrm{B} \subset \mathrm{A}$, *non négligeable et tel que* $s\mathrm{B} \cap \mathrm{B} = \emptyset$.

(*b*) *On définit l'action de* $\mathcal{G}$ *dans* $L^\infty(\Omega, \mu)$ *par l'égalité* $s.f = f \circ s^{-1}$ *pour* $s \in \mathcal{G}$ *et* $f \in L^\infty(\Omega, \mu)$ *et on note* $W^*(\mathcal{G}, \Omega) = W^*(\mathcal{G}, L^\infty(\Omega, \mu))$.

2° *Soient* N *une algèbre de von Neumann et* $\theta \in \operatorname{Aut} N$. *Le produit croisé de* N *par* **Z**, *où l'action de* **Z** *sur* N *est définie par* $n.x = \theta^n(x)$ *pour* $x \in N$, *est noté* $W^*(\theta, N)$ *et appelé produit croisé de* N *par* θ.

Corollaire 1.4.8 du théorème 1.4.2. — *Soient* $T_0 > 0$,

$$\rho = \exp(-2\pi/T_0),$$

et $\mathcal{G}$ *un groupe agissant presque librement dans* Ω, μ *comme dans* 1.4.7. *On a* $T_0 \in T(W^*(\mathcal{G}, \Omega))$ *si et seulement si il existe une mesure* ν *sur* Ω *positive et équivalente à* μ *telle que pour tout* $s \in \mathcal{G}$ *et tout* $\omega \in \Omega$ *on ait*

$$ds^{-1}\nu/d\nu(\omega) \in \{\rho^n, n \in Z\}.$$

Démonstration. — Toute trace semi-finie normale fidèle τ sur $N = I(L^\infty(\Omega, \mu))$ est de la forme τ_ν où ν est une mesure positive équivalente à μ et où

$$\tau_\nu(I(f)) = \int f(\omega)\, d\nu(\omega) \quad \text{pour tout } f \in L^\infty(\Omega, \mu)_+.$$

Pour tout $x \in N_+$ et tout $s \in \mathcal{G}$, on a $\tau_\nu(U_s x U_s^*) = \tau_{s^{-1}\nu}(x)$ car pour $f \in L^\infty(\Omega, \mu)_+$,

$$\int s.f(\omega)\, d\nu(\omega) = \int f(s^{-1}\omega)\, d\nu(\omega) = \int f(\omega)\, ds^{-1}\nu(\omega).$$

On a donc pour $s \in \mathcal{G}$, $\tau = \tau_\nu$, ρ_s comme dans 1.4.5 (*b*) relativement à U_s, $\rho_s^{iT_0} = I((ds^{-1}\nu/d\nu)^{iT_0})$.

Il suffit alors d'appliquer le théorème 1.4.2, car la condition (*a*) de la définition 1.4.7 montre que N est abélienne maximale dans M donc vérifie $N' \cap M \subset N$.

1.5. Tout sous-groupe de **R** est un T (M) pour un facteur M de genre dénombrable.

Proposition 1.5.1. — *Soient* N *une algèbre de von Neumann et* $\sigma \in \operatorname{Aut} N$. *L'ensemble des projecteurs* $e \in N$ *tels que* $\sigma(e) = e$ *et que l'automorphisme* $x \to \sigma(x)$ *de l'algèbre réduite* N_e *soit un automorphisme intérieur admet un plus grand élément, noté* $p(\sigma)$. *Ce* $p(\sigma)$ *appartient au centre de* N.

La démonstration résulte facilement du lemme suivant et du lemme 1.9 de [22].

LEMME 1.5.2. — *Soient* N *une algèbre de von Neumann,* $\sigma \in \mathrm{Aut}\, \mathrm{N}$, *e un projecteur non nul de* N *tel que* $\sigma(e) = e$, $\bar{e}$ *le support central de e dans* N, *et* $u \in \mathrm{N}$ *tel que* $uu^* = u^* u = e$ et $\sigma(x) = uxu^*$ *pour tout* $x \in \mathrm{N}_e$. *Il existe alors un* $v \in \mathrm{N}$ *unique, tel que* $vv^* = v^* v = \bar{e}$, $\sigma(x) = vxv^*$ *pour tout* $x \in \mathrm{N}_{\bar{e}}$ *et* $ve = ev = u$.

Démonstration. — Le support central de $\sigma(e)$ dans N est $\sigma(\bar{e})$ donc $\sigma(\bar{e}) = \bar{e}$ et on peut supposer que $\bar{e} = 1$. L'unicité de v est immédiate. Pour montrer l'existence de v on peut supposer que N agit dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et qu'un unitaire X de $\mathcal{H}$ vérifie

$$\mathrm{XNX}^* = \mathrm{N}, \qquad \mathrm{XN}'\mathrm{X}^* = \mathrm{N}', \qquad \sigma(x) = \mathrm{X}\, x\, \mathrm{X}^* \quad \text{pour tout } x \in \mathrm{N}.$$

On a $\mathrm{X}\, e\, \mathrm{X}^* = \sigma(e) = e$ donc $u^* \mathrm{X} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_e)$. De plus, par hypothèse la restriction de $u^* \mathrm{X}$ à $e\,\mathcal{H}$ commute avec tout élément de N_e restreint à $e\,\mathcal{H}$. L'induction de N′ sur $e\,\mathcal{H}$ étant un isomorphisme, il existe un unitaire $\mathrm{W} \in \mathrm{N}'$ tel que $e\,\mathrm{W} = u^* \mathrm{X}$. Soit $v = \mathrm{XW}^*$. On a, pour $y \in \mathrm{N}'$,

$$v^* yv = \mathrm{WX}^* y\, \mathrm{XW}^* \in \mathrm{N}' \qquad \text{et} \qquad ev^* yv = e\, \mathrm{WX}^* y\, \mathrm{XW}^* e = u^* yu = ey.$$

On a donc $v^* yv = y$ pour tout $y \in \mathrm{N}'$. De plus

$$\sigma(x) = \mathrm{X}\, x\, \mathrm{X}^* = \mathrm{XW}^* x\, \mathrm{WX}^* = vxv^*$$

pour tout $x \in \mathrm{N}$. On vérifie que $ev = ve = u$.

REMARQUES 1.5.3 :

(*a*) *Soient* N *une algèbre de von Neumann, et* $\sigma \in \mathrm{Aut}\, \mathrm{N}$. *Alors la restriction* σ_1 *de* σ *à* $\mathrm{N}_1 = \mathrm{N}_{p(\sigma)}$ *est un automorphisme intérieur et la restriction* σ_2 *de* σ *à* $\mathrm{N}_2 = \mathrm{N}_{1-p(\sigma)}$ *vérifie la condition suivante* ([22], th. 1.11 et déf. 1.3) :

Pour tout $a \in \mathrm{N}_2$ *tel que* $ab = \sigma_2(b)\, a$ *pour tout* $b \in \mathrm{N}_2$ *on a* $a = 0$.

(*b*) *Soient* N, σ, e, $\bar{e}$, u et v *comme dans* 1.5.2 *et* $a \in \mathrm{N}_{\bar{e}}$ *tel que* $ae = ea = u$ *et* $\sigma(x)\, a = ax$ *pour tout* $x \in \mathrm{N}_{\bar{e}}$. *Alors* $v^* a$ *est dans le centre de* $\mathrm{N}_{\bar{e}}$ *donc* $a = v$.

(*c*) *Soient* N *un facteur,* A *un ensemble filtrant, e un projecteur non nul de* N. *Soient* (σ, u) [*resp.* $(\sigma_\alpha, u_\alpha)$ *pour* $\alpha \in \mathrm{A}$] *un couple vérifiant les conditions de* 1.5.2, *et* v (*resp.* v_α) *l'unitaire correspondant de* N. *Supposons que pour tout* $x \in \mathrm{N}$ *on ait* $\sigma_\alpha(x) \to \sigma(x)$ *faiblement, et que* $u_\alpha \to u$ *faiblement montrons qu'alors* $v_\alpha \to v$ *faiblement.*

En utilisant 1.5.3 (*b*) *et la compacité faible de la boule unité de* N, *il suffit de montrer que si* $v_\alpha \to a \in \mathrm{N}$ *faiblement, on a* $\sigma(x)\, a = ax$ *pour tout* $x \in \mathrm{N}$. *Écrivant x comme combinaison linéaire de quatre opérateurs unitaires* *de* N *on voit que* $\sigma_\alpha(x)^* \to \sigma(x)^*$ *fortement donc que* $\sigma_\alpha(x)\,v_\alpha \to \sigma(x)\,a$ *faiblement. On a donc* $\sigma(x)\,a =$ limite faible $v_\alpha\,x = ax$.

(*d*) *Soient* $\mathcal{S}$ *un sous-groupe de* Aut N *et* $\sigma \in$ Aut N *tel que la borne supérieure des* $p(s^{-1}\sigma)$ *pour* $s \in \mathcal{S}$, *soit égale* à 1. *Soit* $(e_\alpha, u_\alpha, s_\alpha)_{\alpha \in A}$ *une famille de triplets, où* : (1) e_α *est un projecteur non nul du centre de* N *pour* $\alpha \in A$, *et* $e_\alpha\, e_\beta = 0$ *pour* $\alpha \neq \beta$; (2) $u_\alpha \in N$ *avec* $u_\alpha^* u_\alpha = u_\alpha u_\alpha^* = e_\alpha$; (3) $s_\alpha \in \mathcal{S}$ *avec* $s_\alpha^{-1}\sigma(e_\alpha) = e_\alpha$ *et* $s_\alpha^{-1}\sigma(x) = u_\alpha x u_\alpha^*$ *pour tout* $x \in N_{e_\alpha}$. *L'ensemble des familles du type ci-dessus est non vide, inductif pour l'inclusion, et tout élément maximal* $(e_\alpha)_{\alpha \in A}$ *est par hypothèse une partition de l'unité dans le centre de* N.

Les $\sigma(e_\alpha)$ *sont alors une partition de l'unité dans le centre de* N *et pour tout* $x \in N$ *on a* $x = \sum e_\alpha x\, e_\alpha$, $\sigma(x) = \sum s_\alpha(u_\alpha\, x u_\alpha^*)$, *ce qui détermine entièrement l'automorphisme* σ *à partir des* $(e_\alpha, u_\alpha, s_\alpha)$. *Il est facile de vérifier que l'ensemble des* σ *de la forme ci-dessus est un sous-groupe de* Aut N.

Définition 1.5.4. — *Soient* N *une algèbre de von Neumann,* $\mathcal{S}$ *un sous-groupe de* Aut N. *On appelle groupe complet d'automorphismes associé à* $\mathcal{S}$ *le groupe* $[\mathcal{S}]$ *des* $\sigma \in$ Aut N *tels que* $\bigvee_{s \in \mathcal{S}} p(s^{-1}\sigma) = 1$.

Théorème 1.5.5. — *Soient* M *une algèbre de von Neumann,* E *une espérance conditionnelle normale fidèle de* M *sur une sous-algèbre de von Neumann* N *telle que* $N' \cap M \subset N$.

(*a*) *Toute autre espérance conditionnelle normale fidèle de* M *sur* N *est égale à* E. (Pour le cas N abélienne *voir* [39], 6.1.)

(*b*) *Pour qu'un unitaire* u *de* M *vérifie* $u\,N\,u^* = N$ *il faut et il suffit que* $E(uxu^*) = u\,E(x)\,u^*$ *pour tout* $x \in M$.

(*c*) *Soit* $\mathcal{G}$ *un sous-groupe de* $\mathfrak{N}(E)$ *tel que* M *soit l'algèbre de von Neumann engendrée par* N *et* $\mathcal{G}$. *Pour tout* $u \in \mathfrak{N}(E)$ *on a* $i_u \in [i(\mathcal{G})]$ *et tout* $\sigma \in [i(\mathcal{G})]$ *est un* i_u *pour un* $u \in \mathfrak{N}(E)$.

Démonstration de (*a*) *et* (*b*) :

(*a*) Soient E′ une espérance conditionnelle normale fidèle de M sur N, φ un poids normal fidèle semi-fini sur N, $\psi = \varphi \circ E$ et $\psi' = \varphi \circ E'$ les poids normaux fidèles semi-finis correspondants sur M et $C = N' \cap M$. Pour $x \in N$ on a $\sigma_t^{\psi'}(x) = \sigma_t^{\varphi}(x) = \sigma_t^{\psi}(x)$ (1.4.3) donc $(D\psi' : D\psi)_t\, y = y\,(D\psi' : D\psi)_t$ pour tout $y \in N$ et $t \in \mathbf{R}$. Soit $u_t = (D\psi' : D\psi)_t$; on a $u_t \in C$ et pour tout $x \in M_+$:

$$\psi'(\sigma_t^{\psi}(x)) = \varphi(E'(\sigma_t^{\psi}(x))) \qquad \text{et} \qquad \sigma_t^{\psi'}(x) = u_t\,\sigma_t^{\psi}(x)\,u_t^*$$

donc

$$\psi'(\sigma_t^{\psi}(x)) = \varphi(E'(u_t^* \sigma_t^{\psi'}(x) u_t)) = \varphi(u_t^* E'(\sigma_t^{\psi'}(x)) u_t) = \varphi(E' \sigma_t^{\psi'}(x))$$

car u_t commute avec $E'(\sigma_t^{\psi'}(x))$.

On a montré que $\psi'(\sigma_t^{\psi}(x)) = \psi'(\sigma_t^{\psi'}(x)) = \psi'(x)$ pour tout $x \in M_+$, donc ([30], th. 5.12) il existe un unique opérateur h positif affilié à M_ψ tel que $\psi' = \psi(h.)$ et $(D\psi' : D\psi)_t = h^{it}$. On a $h^{it} \in$ Centre N pour tout $t \in \mathbf{R}$ donc h est affilié au centre de N. De plus $\psi'(x) = \psi(x)$ pour tout $x \in N_+$, donc l'unicité dans le théorème 5.12 de [30] montre que $h = 1$. On a donc $\psi' = \psi$. c'est-à-dire $\varphi \circ E = \varphi \circ E'$ pour tout poids normal fidèle semi-fini sur N. L'égalité $E = E'$ en résulte.

(*b*) Soient u un unitaire de M tel que $u N u^* = N$, et E′ l'application linéaire positive normale de M sur N telle que $E'(x) = u^* E(uxu^*) u$; on a pour x et y dans M :

$$\begin{aligned} E'(x E'(y)) &= u^* E(u(xu^* E(uyu^*) u) u^*) u = u^* E(uxu^* E(uyu^*) u) \\ &= u^* E(uxu^*) uu^* E(uyu^*) u = E'(x) E'(y). \end{aligned}$$

Ainsi E′ est une espérance conditionnelle normale fidèle de M sur N et $E' = E$ grâce au (*a*).

LEMME 1.5.6. — *Soient* E *une espérance conditionnelle d'une algèbre de von Neumann* M *sur* $N \subset M$ *telle que* $N' \cap M \subset N$, *u un unitaire de* M *tel que* $E(uxu^*) = u E(x) u^*$ *pour tout* $x \in M$.

(*a*) *Les six éléments* $u E(u^*)$, $E(u) u^*$, $E(u) E(u^*)$, $E(u^*) u$, $E(u^*) E(u)$ et $u^* E(u)$ *sont égaux à un même projecteur e du centre de* N.

(*b*) *On a* $e = p(i_u)$ [*où* $i_u \in \mathrm{Aut}\, N$, $i_u(x) = uxu^*$ *pour tout* $x \in N$].

Démonstration. — On a $u E(u^*) u^* = E(uu^* u^*) = E(u^*)$ donc $u E(u^*) = E(u^*) u$ et de même $E(u) u^* = u^* E(u)$. Pour $x \in N$ on a $uxu^* \in N$ donc $E(uxu^* u) = uxu^* E(u)$. On a

$$E(u) x = E(ux) = uxu^* E(u)$$

ce qui montre que $u^* E(u) \in N' \cap M \subset N$. Soit $C = N' \cap M$. Comme $u^* E(u) \in N$ on a $u^* E(u) = E(u^*) E(u)$; remplaçant u par u^* on a $u E(u^*) = E(u) E(u^*)$; de plus l'égalité $E(u) u^* = u^* E(u)$ montre que $E(u) E(u^*) = E(u^*) E(u)$. Les six éléments de M de (*a*) sont donc égaux à un même élément, e de C. De plus :

$$e^* = E(u^*) u = e \qquad \text{et} \qquad e^2 = u^* E(u) u E(u^*) = E(u^* uu) E(u^*) = E(u) E(u^*) = e.$$

On a donc démontré (*a*). De plus on a $ueu^* = uu^* E(u) u^* = e$, donc e est laissé fixe par i_u. $E(u)$ est un élément unitaire de l'algèbre réduite N_e

car $E(u)E(u^*) = E(u^*)E(u) = e$. Pour tout $x \in N_e$ on a

$$i_u(x) = uxu^* = uexeu^* = uu^* E(u) x E(u)^* uu^* = E(u) x E(u^*).$$

On a montré que $p(i_u) \geqq e$. Soient $e_1 = p(i_u) - e$ et v un unitaire de l'algèbre réduite N_{e_1} tel que $i_u(x) = vxv^*$ pour tout $x \in N_{e_1}$.

On a $u^* v \in M$,

$$v^* uu^* v = v^* v = e_1, \qquad u^* vv^* u = i_{u^*}(e_1) = e_1 \qquad \text{et} \qquad u^* vxv^* u = x \quad \text{pour tout } x \in N_{e_1},$$

donc $u^* v$ est un élément de M qui commute avec tout élément de N car $e_1 \in$ Centre N. On a montré que $u^* v \in N' \cap M \subset N$. Il existe donc un unitaire c du centre de N_{e_1} tel que $v = uc$ et on a

$$E(v)E(v^*) = E(u) cc^* E(u^*) = E(u) e_1 E(u^*) = e_1 e = 0.$$

Comme $v \in N_{e_1}$ on a $vv^* = E(v)E(v^*)$, et on a montré que $e_1 = vv^* = 0$.

Démonstration de 1.5.5 (*c*). — Soit $C = N' \cap M$.

Soit $u \in \mathfrak{N}(E)$. On a $E(uxu^*) = u E(x) u^*$ pour tout $x \in M$.

Le lemme 1.5.6 montre donc que pour tout $v \in \mathcal{G}$ on a $p(i_{v^*u}) =$ Support $E(v^* u)$. On va montrer que pour tout projecteur non nul e de C, il existe un $v \in \mathcal{G}$ tel que $e E(v^* u) \neq 0$. On aura alors prouvé que la borne supérieure des $p(s^{-1} i_u)$ pour $s \in i(\mathcal{G})$ est égale à 1. Il existe, par hypothèse, un élément x de M de la forme $\sum_1^n v_i a_i$ où n est un entier, $v_i \in \mathcal{G}$ pour $i = 1, \ldots, n$ et où $a_i \in N$ pour $i = 1, \ldots, n$, tel que $e E(x^* u) \neq 0$. En effet l'ensemble des éléments de M de la forme ci-dessus est, par hypothèse sur $\mathcal{G}$, une sous-algèbre involutive faiblement dense de M, et E est une application faiblement continue. Il existe donc un $v \in \mathcal{G}$ et un $a \in N$ tels que $e E((va)^* u) \neq 0$ i. e. que $ea^* E(v^* u) \neq 0$. Comme $e \in$ Centre N on a $e E(v^* u) \neq 0$.

On a montré que pour $u \in \mathfrak{N}(E)$ on a $i_u \in [i(\mathcal{G})]$. Inversement, soient $\sigma \in [i(\mathcal{G})]$ et $(e_\alpha, u_\alpha, s_\alpha)$ une famille de triplets telle que : (1) (e_α) soit une partition de l'unité dans le centre de N; (2) $u_\alpha \in N$ avec $u_\alpha u_\alpha^* = u_\alpha^* u_\alpha = e_\alpha$; (3) $s_\alpha \in i(\mathcal{G})$ avec $s_\alpha^{-1} \sigma(e_\alpha) = e_\alpha$ et $\sigma(x) = \sum s_\alpha(u_\alpha x u_\alpha^*)$ pour tout $x \in N$.

Soit (v_α) une famille d'éléments de $\mathcal{G}$ telle que $i(v_\alpha) = s_\alpha$ pour tout α. Alors la famille $(v_\alpha u_\alpha)$ d'opérateurs de M est faiblement sommable car formée d'isométries partielles dont les supports et les images forment des partitions de l'unité. De plus $u = \sum v_\alpha u_\alpha$ est un élément unitaire de M. On a $uxu^* = \sigma(x)$ pour tout $x \in N$ donc $u \in \mathfrak{N}(E)$ et $i_u = \sigma$.

COROLLAIRE 1.5.7. — *Soient* E *une espérance conditionnelle normale fidèle d'une algèbre de von Neumann* M *sur une sous-algèbre de von Neumann* N, *de* M, $\mathcal{G}$ *un sous-groupe de* $\mathfrak{U}$ (E) *tel que* M *soit l'algèbre de von Neumann engendrée par* N *et* $\mathcal{G}$, *et supposons que* $N' \cap M \subset N$.

(*a*) *Soient* $T_0 \in \mathbf{R}$ *et* φ *un poids normal fidèle semi-fini sur* N. *Si* $T_0 \in T(M)$ *on a* $\sigma_{T_0}^{\varphi} \in [i(\mathcal{G})]$.

(*b*) *Soit* φ *un poids normal fidèle semi-fini sur* N. *Si* φ *est* $i(\mathcal{G})$*-invariant et si* $\mathcal{G}$ *est abélien, la condition* $\sigma_{T_0}^{\varphi} \in i(\mathcal{G})$ *entraîne* $T_0 \in T(M)$.

Démonstration :

(*a*) On a $\sigma_{T_0}^{\varphi'}(x) = uxu^*$ pour tout $x \in M$, où φ' désigne le poids normal fidèle semi-fini $\varphi \circ E$ sur M et u un unitaire de M dont l'existence est assurée par le théorème 1.3.2.

Pour $x \in N$ on a donc $\sigma_{T_0}^{\varphi}(x) = uxu^*$. Ainsi $u \in \mathfrak{U}(E)$ et $\sigma_{T_0}^{\varphi} = i_u$; le théorème 1.5.5 (*c*) démontre donc 1.5.7 (*a*).

(*b*) Par hypothèse, on a pour tout $v \in \mathcal{G}$ l'égalité $\varphi_v = \varphi$ où $\varphi_v(x) = \varphi(vxv^*)$ pour tout $x \in N_+$. Le lemme 1.4.5 montre donc que $\sigma_t^{\psi}(v) = v$ pour tout $t \in \mathbf{R}$, où $\psi = \varphi \circ E$.

Par hypothèse il existe $u \in \mathcal{G}$ tel que $uxu^* = \sigma_{T_0}^{\varphi}(x)$ pour tout $x \in N$. Montrons que $\sigma_{T_0}^{\psi}(x) = uxu^*$ pour tout $x \in M$; la conclusion résulte alors de 1.3.2.

Pour $x \in N$ on a $\sigma_{T_0}^{\psi}(x) = \sigma_{T_0}^{\varphi}(x) = uxu^*$. Pour $v \in \mathcal{G}$ on a $\sigma_{T_0}^{\psi}(v) = v$ et $uvu^* = v$ car $\mathcal{G}$ est supposé commutatif.

L'égalité cherchée est donc vraie sur la sous-algèbre de M engendrée par N et $\mathcal{G}$ donc vraie sur M.

COROLLAIRE 1.5.8 :

(*a*) *Pour tout sous-groupe* G *de* R *il existe un facteur* M *de genre dénombrable (ayant la cardinalité c du continu) tel que* $T(M) = G$.

(*b*) *Si* G *est dénombrable, il existe un facteur* M *opérant dans un espace de Hilbert séparable et tel que* $T(M) = G$.

(*c*) *Il existe un facteur de type* III, *de genre dénombrable, tel que* $T(M) = \mathbf{R}$.

Démonstration de 1.5.8 :

(*a*) 1.3.4 (*c*) et 1.3.10 montrent qu'il existe un facteur P, opérant dans un espace séparable tel que $T(P) = \{0\}$. Soient φ un état normal fidèle sur P, et pour tout $x \in P$ et tout $t \in G$, posons $t.x = \sigma_t^{\varphi}(x)$. L'algèbre de von Neumann $M = W^*(G, P)$ est un facteur ([41], p. 212); de plus avec les notations de la proposition 1.4.6, le commutant de $N = I(P)$ dans M est réduit aux scalaires ([41], p. 212). Soit E l'unique espérance conditionnelle normale fidèle de M sur N dont l'existence est assurée par 1.4.6 et soit $\mathcal{G}_1 = \mathrm{U}(\mathrm{G})$ l'image de G par l'application U de 1.4.6 (*b*). Alors E, M, N et $\mathcal{G}_1$ remplissent les hypothèses de 1.5.7; de plus $i(\mathcal{G}_1)$ transporté par I sur P est le groupe des σ_t^φ pour $t \in \mathrm{G}$. Si $\mathrm{T}_0 \in \mathrm{T}(\mathrm{M})$, $\sigma_{\mathrm{T}_0}^\varphi$ est dans le groupe complet associé aux σ_t^φ pour $t \in \mathrm{G}$. Comme P est un facteur, il existe un $t \in \mathrm{G}$ tel que $\sigma_{\mathrm{T}_0 - t}^\varphi$ soit un automorphisme intérieur. On a donc $\mathrm{T}_0 \in \mathrm{G}$.

Inversement, supposons $\mathrm{T}_0 \in \mathrm{G}$. Comme G est abélien et φ est σ_t^φ-invariant pour tout $t \in \mathrm{G}$, le corollaire 1.5.7 (*b*) montre que $\mathrm{T}_0 \in \mathrm{T}(\mathrm{M})$. On a donc $\mathrm{T}(\mathrm{M}) = \mathrm{G}$ et il reste à montrer que M est de genre dénombrable, de cardinalité c.

L'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ où M opère est une somme $\mathcal{H}_t$ où les $\mathcal{H}_t$ sont de même dimension hilbertienne que $\mathcal{H}_\varphi$ et où t décrit G. Il en résulte que $\mathcal{H}$ a une dimension hilbertienne $\leq c$, donc la cardinalité c. Comme M est isomorphe à une sous-algèbre de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ ayant un vecteur séparateur, on a Card $\mathrm{M} = c$.

(*b*) Résulte de la construction (*a*).

(*c*) Résulte de la construction (*a*) pour $\mathrm{G} = \mathrm{R}$ et de [33], p. 100.

1.6. Non-normalité des facteurs de type III. — Soient M un facteur N une sous-algèbre de von Neumann de M; l'ensemble $\mathrm{N}'_\mathrm{M} = \mathrm{N}' \cap \mathrm{M}$ est une sous-algèbre de von Neumann de M appelée commutant relatif de N. Par définition (*cf.* [13], chap. III, § 7, ex. 13) M est normal si et seulement si pour toute sous-algèbre de von Neumann N on a $(\mathrm{N}'_\mathrm{M})'_\mathrm{M} = \mathrm{N}$.

Rappelons (*cf.* [13], chap. I, § 3, cor. 1) que tout facteur de type I est normal.

Théorème 1.6.1. — *Tout facteur normal dans un espace de Hilbert séparable est de type* I.

Lemme 1.6.2 :

(*a*) *Soient* M *un facteur,* φ *un état normal fidèle sur* M, $\xi_\varphi = \eta_\varphi(1)$, *u un unitaire de* M_φ, et $t \in \mathbf{R}$. *Pour que* $\sigma_t^\varphi(x) = uxu^*$ *pour tout* $x \in \mathrm{M}$ *il faut et il suffit que* $\Delta_\varphi^{it} = \pi_\varphi(u)\, \mathrm{J}_\varphi\, \pi_\varphi(u)\, \mathrm{J}_\varphi$.

(*b*) *Soit* M *un facteur de type* III *opérant dans un espace de Hilbert séparable. Alors :* 1° T (M) *est un sous-ensemble analytique de* $\mathbf{R}$; 2° *il existe* $\theta \in \mathrm{Aut}\, \mathrm{M}$ *tel que* $p(\theta^n) = 0$ *pour tout* $n \neq 0$.

Démonstration :

(*a*) Supposons que $\sigma_t^\varphi(x) = uxu^*$ pour tout $x \in \mathrm{M}$. On a alors

$$\Delta_\varphi^{it}\, \pi_\varphi(x)\, \xi_\varphi = \pi_\varphi(u)\, \pi_\varphi(x)\, \mathrm{J}_\varphi\, \Delta_\varphi^{1/2}\, \pi_\varphi(u)\, \xi_\varphi \quad \text{pour tout } x \in \mathrm{M}.$$

Comme $u \in \mathrm{M}_\varphi$ on a

$$\Delta_\varphi^{it} \pi_\varphi(u) \xi_\varphi = \pi_\varphi(u) \xi_\varphi \quad \text{pour tout } t, \qquad \text{donc} \quad \Delta_\varphi^{it} = \pi_\varphi(u) \mathrm{J}_\varphi \pi_\varphi(u) \mathrm{J}_\varphi.$$

Inversement si $\Delta_\varphi^{it} = \pi_\varphi(u) \mathrm{J}_\varphi \pi_\varphi(u) \mathrm{J}_\varphi$, on a, pour tout $x \in \mathrm{M}$:

$$\pi_\varphi(\sigma_t^\varphi(x)) \xi_\varphi = \Delta_\varphi^{it} \pi_\varphi(x) \xi_\varphi = \pi_\varphi(u) \pi_\varphi(x) \pi_\varphi(u^*) \xi_\varphi = \pi_\varphi(uxu^*) \xi_\varphi,$$

d'où 1.6.2 (*a*).

(*b*) Soit φ un état normal fidèle sur M. L'ensemble des unitaires de M_φ muni de la topologie forte est un espace polonais; les applications $u \to \pi_\varphi(u) \mathrm{J}_\varphi \pi_\varphi(u) \mathrm{J}_\varphi$ et $t \to \Delta_\varphi^{it}$ sont fortement continues. L'assertion 1° résulte donc du théorème 1.3.2 (*c*). Comme M et de type III, T (M) qui est un sous-groupe de R distinct de R [1.3.4 (*b*)] est de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue. Soit $\mathrm{T}_0 \in \mathrm{R}$ tel que $n \mathrm{T}_0 \notin \mathrm{T}(\mathrm{M})$ pour tout $n \neq 0$. Soit $\theta = \sigma_{\mathrm{T}_0}^\varphi$; alors pour tout $n \neq 0$ on a $p(\theta^n) = 0$.

LEMME 1.6.3. — *Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert,* N *un facteur dans $\mathcal{H}$,* $\theta \in \mathrm{Aut}\, \mathrm{N}$ *tel que* $p(\theta^n) = 0$ *pour tout* $n \neq 0$, X *un unitaire de $\mathcal{H}$ tel que* $\mathrm{X}\, x\, \mathrm{X}^* = \theta(x)$ *pour tout* $x \in \mathrm{N}$. *Soient λ la représentation régulière de* $\mathbf{Z}$ *dans* $l^2(\mathrm{Z})$, $\mathcal{K} = \mathcal{H} \otimes l^2(\mathrm{Z})$, M *l'algèbre de von Neumann dans $\mathcal{K}$ engendrée par* $\mathrm{N} \otimes 1$ *et* $\mathrm{Y} = \mathrm{X} \otimes \lambda(1)$. *On a alors* $\mathrm{M} \cap (\mathrm{N} \otimes 1)' = \mathbf{C}$.

Démonstration. — Soit $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ la base canonique de $l^2(\mathrm{Z})$. Pour $n \in \mathbf{Z}$, soit K_n l'isométrie $\xi \to \xi \otimes \varepsilon_n$ de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{K}$. Pour $n, m \in \mathbf{Z}$ et $x \in \mathrm{M}$ on a $\mathrm{X}^{n-m} \mathrm{K}_m^* x \mathrm{K}_n \in \mathrm{N}$.

Pour $n, m \in \mathbf{Z}$ et $x \in (\mathrm{N} \otimes 1)'$, on a $\mathrm{K}_m^* x \mathrm{K}_n \in \mathrm{N}'$. Soient $m, n \in \mathbf{Z}$, $x \in \mathrm{M} \cap (\mathrm{N} \otimes 1)'$, $a = \mathrm{X}^{n-m} \mathrm{K}_m^* x \mathrm{K}_n$. Supposons $k = m - n \neq 0$. On a $\mathrm{X}^k a \in \mathrm{N}'$ donc $\mathrm{X}^k ab = b \mathrm{X}^k a$ pour tout $b \in \mathrm{N}$ et $ab = \theta^{-k}(b) a$ pour tout $b \in \mathrm{N}$. Comme $a \in \mathrm{N}$ et $k \neq 0$ la remarque 1.5.3 (*a*) et l'hypothèse $p(\theta^k) = 0$ montrent que $a = 0$. On a donc $\mathrm{K}_m^* x \mathrm{K}_n = 0$ pour $m \neq n$. Pour tout $n \in \mathbf{Z}$ on a $\mathrm{K}_n^* x \mathrm{K}_n \in \mathrm{N} \cap \mathrm{N}' = \mathbf{C}$. Pour n_1 et $n_2 \in \mathbf{Z}$ on a $\mathrm{K}_{n_1}^* x \mathrm{K}_{n_1} = \mathrm{K}_{n_2}^* x \mathrm{K}_{n_2}$ car $x \in \mathrm{M}$. Il en résulte que x est un multiple scalaire, de $1_{\mathcal{K}}$.

LEMME 1.6.4. — *Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert,* N *un facteur standard dans $\mathcal{H}$,* $\theta \in \mathrm{Aut}\, \mathrm{N}$ *tel que* $p(\theta^n) = 0$ *pour tout* $n \neq 0$. *Alors* $\mathrm{N}' \otimes \mathrm{F}_\infty$ *est non normal.*

Démonstration. — Soit X un unitaire de $\mathcal{H}$ tel que $\theta(x) = \mathrm{X}\, x\, \mathrm{X}^*$ pour tout $x \in \mathrm{N}$. Soient λ, $\mathcal{K}$, Y et M comme dans 1.6.3. Le facteur $(\mathrm{N} \otimes 1)'$ est isomorphe à $\mathrm{N}' \otimes \mathrm{F}_\infty$. L'inclusion $\mathrm{N} \otimes 1 \subset \mathrm{M}$ est stricte car $\mathrm{Y} \notin \mathrm{N} \otimes 1$. L'inclusion $\mathrm{M}' \subset (\mathrm{N} \otimes 1)'$ est donc stricte. Soit $\mathrm{P} = \mathrm{M}'$. Le commutant relatif de P dans $(\mathrm{N} \otimes 1)'$ est $\mathrm{P}' \cap (\mathrm{N} \otimes 1)' = \mathrm{M} \cap (\mathrm{N} \otimes 1)'$ donc est réduit aux scalaires. Ainsi P est distinct de son bicommutant relatif dans $(N \otimes 1)'$.

Démonstration de 1.6.1. — D'après [16] il suffit de montrer que tout facteur de type III opérant dans un espace de Hilbert séparable est non normal. Soient donc $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable et Q un facteur de type III dans $\mathcal{H}$, $N = Q'$ son commutant. D'après 1.6.2 (*b*) (2°) il existe $\theta \in \mathrm{Aut}\, N$ tel que $p(\theta^k) = 0$ pour tout $k \neq 0$, De plus N est standard dans $\mathcal{H}$ et Q est isomorphe à $N' \otimes F_\infty$ donc Q n'est pas normal.

II. — **Groupes d'automorphismes**

Le résultat (1.5.8) de la 1re partie montre que la topologie de **R** n'intervient pas dans les propriétés de T (M). Soient G un groupe abélien localement compact, Γ son dual et M un facteur. Nous associons (2.2.1) à tout homomorphisme continu U (2.1.1) de G dans Aut M un sous-groupe fermé $\Gamma(U)$ de Γ. Si G est discret, $\Gamma(U)$ est (2.3.1) l'orthogonal du sous-groupe T (U) des $t_0 \in G$ tels que U_{t_0} soit un automorphisme intérieur associé à un unitaire, U_t-invariant pour tout $t \in G$, de M.

Dans 2.1 nous rappelons (*cf.* [3]) la notion de spectre Sp U d'une représentation U de G dans M.

Dans 2.2 nous définissons $\Gamma(U)$ comme intersection des spectres des représentations réduites de U par les projecteurs U-invariants. Nous définissons une relation d'équivalence $U \sim V$ entre représentations de G dans M, qui est un raffinement topologique et cohomologique [*voir* 1.2.8 (*c*) et 2.3.16 (*a*)] de la relation $\varepsilon \circ U = \varepsilon \circ V$ d'égalité modulo les automorphismes intérieurs. Nous montrons [2.2.4 (*c*)] que $\Gamma(U) = \Gamma(V)$ si $U \sim V$.

Dans 2.3 nous obtenons, quand $\mathrm{Sp}\, U/\Gamma(U)$ est compact, une interprétation (annoncée plus haut dans le cas G discret) de l'orthogonal de $\Gamma(U)$.

En corollaire, nous montrons que pour tout $\sigma \in \mathrm{Aut}\, M$ de spectre distinct de l'ensemble des $z \in \mathbf{C}$, $|z| = 1$, il existe un entier n tel que σ^n soit un automorphisme intérieur de M.

Enfin dans 2.4 nous montrons que si $\Gamma(U)$ est discret, on a $\mathrm{Sp}\, U = \Gamma(U)$ si et seulement si la sous-algèbre de von Neumann M^U de M formée des éléments U-invariants de M est un facteur.

2.1. Préliminaires. — Soient G un groupe abélien localement compact, dt une mesure de Haar sur G, Γ le groupe dual de G, (t, γ) l'image de $t \in G$ par $\gamma \in \Gamma$.

On note G et Γ additivement, donc 0 l'élément neutre de G et Γ. Pour $f \in L^1(G)$ et $\gamma \in \Gamma$,

$$\hat{f}(\gamma) = \int_G f(t)\,\overline{(x, \gamma)}\,dt.$$

Pour $f \in L^1(G)$,

$$Z(f) = \{\gamma \in \Gamma,\ \hat{f}(\gamma) = 0\}.$$

Soient M une algèbre de von Neumann, M_* le prédual de M, Aut M le groupe des automorphismes de M.

Définition 2.1.1 [3]. — *On appelle représentation de* G *dans* M *un homomorphisme* U *de* G *dans* Aut M *tel que pour tout* $x \in M$ *et tout* $\varphi \in M_*$ *la fonction* $t \to \varphi(U_t(x))$ *soit continue.*

Soit U une représentation de G dans M. Pour toute mesure finie μ sur G, l'intégrale $\int_G U_t(x)\,d\mu(t)$ définit une forme linéaire continue sur M_* donc un élément de M noté $U(\mu)\,x$. Alors $U(\mu)$ est un élément de l'algèbre de Banach B (M) des applications linéaires faiblement continues de M dans M et on a

$$\| U(\mu) \| \leq \| \mu \|, \qquad U(\mu_1 \star \mu_2) = U(\mu_1)\,U(\mu_2)$$

pour μ, μ_1 et μ_2 mesures bornées sur G.

Pour $f \in L^1(G)$, $d\mu = f\,dt$ on note $U(f) = U(\mu)$. Alors U est un homomorphisme de l'algèbre de Banach $L^1(G)$ dans l'algèbre de Banach B (M).

Définition 2.1.2. — *Soit* U *une représentation de* G *dans* M.

(*a*) *On appelle spectre de* U *l'ensemble* $\mathrm{Sp}\,U = \bigcap_{f \in L^1(G),\, U(f) = 0} Z(f)$.

(*b*) *Pour* $x \in M$ *on pose* $\mathrm{Sp}_U(x) = \bigcap_{\in L^1(G),\, U(f)\,x = 0} Z(f)$.

(*c*) *Pour un fermé* E *de* Γ *on pose* $M(U, E) = \{x \in M,\ \mathrm{Sp}_U(x) \subset E\}$.

Cette définition est exactement celle de [3] (déf. 2.1). D'après ([3], § 2) pour $x \neq 0$ il existe $f \in L^1(G)$ telle que $U(f)\,x \neq 0$. On a donc $\mathrm{Sp}_U\,x \neq \emptyset$. On a $x \in M(U, \{0\})$ si et seulement si $U_t(x) = x$ pour tout $t \in G$. Ce sous-espace particulier sera noté M^U. C'est une sous-algèbre de von Neumann de M. Pour tout projecteur non nul $e \in M^U$ l'algèbre réduite M_e est globalement invariante par les U_t pour $t \in G$. On note U^e la représentation de G dans M_e obtenue en posant $U_t^e(x) = U_t(x)$ pour $t \in G$ et $x \in M_e$.

[Nous dirons que U^e est la représentation réduite de U par $e \in M^U$.]

LEMME 2.1.3. — *Soient* U *une représentation de* G *dans* M, e, e_1, e_2 *des projecteurs non nuls de* M^U, E *un fermé de* Γ, $f \in L^1(G)$.

(*a*) *On a* $x \in M(U, E)$ *si et seulement si pour tout voisinage compact* $\mathcal{V}$ *de* 0 *dans* Γ *et tout* $g \in L^1(G)$ *tel que* $E + \mathcal{V} \subset Z(g)$ *on a* $U(g)\,x = 0$.

(*b*) M (U, E) *est un sous-espace vectoriel faiblement fermé de* M.

(*c*) $\mathrm{Sp}_U(x^*) = -\mathrm{Sp}_U(x)$.

(*d*) *Soit* X *un sous-ensemble faiblement total de* M. *On a*

$$\mathrm{Sp}\,U = \left(\bigcup_{x \in X} \mathrm{Sp}_U(x)\right)^{-}.$$

(*e*) $M_e(U^e, E) = M(U, E) \cap M_e$.

(*f*) $U_t(M(U, E)) = M(U, E)$ *pour* $t \in G$.

(*g*) $\mathrm{Sp}_U(U(f)\,x) \subset \mathrm{Sp}_U(x) \cap \mathrm{Support}\ \hat{f}$ *pour* $x \in M$.

(*h*) $\gamma \in \mathrm{Sp}\,U$ *si et seulement si pour tout voisinage compact* $\mathcal{V}$ *de* γ *on a* $M(U, \mathcal{V}) \neq \{0\}$.

(*i*) *Pour* $e_1 \leqq e_2$ *on a* $\mathrm{Sp}\,U^{e_1} \subset \mathrm{Sp}\,U^{e_2}$.

(*j*) *Le sous-espace de* M_* *engendré par les* $\varphi \circ U(f)$, $\varphi \in M_*$, $f \in L^1(G)$ *est normiquement dense dans* M_*.

(*k*) *Soient* μ_1 *et* μ_2 *des mesures finies sur* G, *et* $x \in M$. *Si on a* $\hat{\mu}_1(\gamma) = \hat{\mu}_2(\gamma)$ *dans un voisinage de* $\mathrm{Sp}_U\,x$, *on a* $U(\mu_1)\,x = U(\mu_2)\,x$.

(*l*) *Soient* $x \in M$, $a \in M^U$, $b \in M^U$, μ *une mesure finie sur* G. *On a* $U(\mu)(axb) = a[U(\mu)(x)]\,b$.

Démonstration :

(*a*) *Voir* [3], remarque, § 2.

(*b*) Résulte de (*a*).

(*c*) Pour $f \in L^1(G)$, on a $(\bar{f})^{\wedge}(\gamma) = (\hat{f}(-\gamma))^{-}$ pour tout $\gamma \in \Gamma$ et $U(\bar{f})\,x^* = (U(f)\,x)^*$ pour $x \in M$.

(*d*) L'inclusion $\mathrm{Sp}_U(x) \subset \mathrm{Sp}\,U$ pour tout $x \in M$ est immédiate.
Soient $\gamma \in \Gamma$ et $\mathcal{V}$ un voisinage compact de 0 tels que

$$(\gamma + \mathcal{V} + \mathcal{V}) \cap \mathrm{Sp}_U\,x = \emptyset$$

pour tout $x \in X$. Soit $f \in L^1(G)$ telle que $\hat{f}(\gamma) \neq 0$, mais Support $\hat{f} \subset \gamma + \mathcal{V}$. Le (*a*) montre que $U(f)\,x = 0$ pour tout $x \in X$. On a donc $U(f) = 0$ bien que $\hat{f}(\gamma) \neq 0$, d'où $\gamma \notin \mathrm{Sp}\,U$.

(*e*) Pour tout $x \in M_e$ et $f \in L^1(G)$ on a $V(f)\,x = U(f)\,x$ où $V = U_e$ donc $\mathrm{Sp}_V\,x = \mathrm{Sp}_U\,x$.

(*f*) Soient $x \in M$, $f \in L^1(G)$. Définissons $f_t \in L^1(G)$ par $f_t(t') = f(t'-t)$ pour t et t' dans G. On a $U(f_t)x = U(f)[U_t(x)]$ et $Z(f_t) = Z(f)$ pour tout $t \in G$ et tout $x \in M$.

(*g*) On a $\mathrm{Sp}_U(U(f)x) \subset \mathrm{Sp}_U x$ pour $x \in M$, $f \in L^1(G)$. Si $\gamma \notin \mathrm{Support}\ \hat{f}$ il existe $g \in L^1(G)$ avec $\hat{g}(\gamma) \neq 0$ et $g \star f = 0$ d'où $U(g)(U(f)x) = 0$. On a donc $\mathrm{Sp}_U(U(f)x) \subset \mathrm{Support}\ \hat{f}$ pour tout $x \in M$.

(*h*) Pour $x \neq 0$ on a $\mathrm{Sp}_U x \neq \emptyset$. Soit $\gamma \in \Gamma$; si $M(U, \mathcal{V}) \neq \{0\}$ pour tout voisinage compact $\mathcal{V}$ de γ on a $\gamma \in \left\{\bigcup \mathrm{Sp}_U x,\ x \in M\right\}^- = \mathrm{Sp}\ U$.

Soit $\mathcal{V}$ un voisinage compact de γ tel que $M(U, \mathcal{V}) = \{0\}$. Pour tout $f \in L^1(G)$ tel que $\mathrm{Support}\ \hat{f} \subset \mathcal{V}$ et tout $x \in M$ on a $\mathrm{Sp}_U(U(f)x) \subset \mathcal{V}$ donc $U(f)x = 0$. Il existe un tel f avec $\hat{f}(\gamma) \neq 0$ et on a $\gamma \notin \mathrm{Sp}\ U$.

(*i*) Résulte de (*e*) et $M_{e_1} \subset M_{e_2}$ pour $e_1 \leq e_2$.

(*j*) Pour tout $x \neq 0$, $x \in M$ il existe $f \in L^1(G)$ et $\varphi \in M_*$ tels que $\varphi(U(f)x) \neq 0$ car $\mathrm{Sp}_U x \neq \emptyset$. Le théorème de Hahn-Banach montre alors la densité cherchée.

(*k*) Soit μ une mesure finie sur G telle que $\hat{\mu}$ s'annule sur un voisinage de $\mathrm{Sp}_U x$. Pour $f \in L^1(G)$ on a $U(f)U(\mu)x = U(\mu \star f)x = 0$ car $\mu \star f$ est un élément de $L^1(G)$ tel que $(\mu \star f)^\wedge(\gamma) = 0$ sur un voisinage de $\mathrm{Sp}_U x$. On a $U(\mu)x = 0$.

(*l*) On a

$$U(\mu)(axb) = \int_G U_t(axb)\, d\mu(t) = \int_G a\, U_t(x)\, b\, d\mu(t) = a[U(\mu)(x)]\, b.$$

LEMME 2.1.4. — *Soit* U *une représentation de* G *dans* M. *Tout* $x \in M$ *est fortement adhérent à l'ensemble des* $U(k)x$ *pour* $k \in L^1(G)$, $\|k\|_1 \leq 1$, *et* $\hat{k}$ *à support compact.*

Démonstration. — Pour tout compact $K \subset \Gamma$ et tout $\varepsilon > 0$ soit $k(K, \varepsilon)$ un élément de $L^1(G)$ de norme inférieure à 1 tel que $\hat{k}(K, \varepsilon)(\gamma) = 1 - \varepsilon$ pour $\gamma \in K$ et $\hat{k}(K, \varepsilon)$ à support compact ([32], th. 2.6.8). Comme l'idéal des $f \in L^1(G)$, tels que $\hat{f}$ soit à support compact, est normiquement dense dans $L^1(G)$, on a pour tout $f \in L^1(G)$:

$$k(K, \varepsilon) \star f \to f \quad \text{(en norme)} \qquad \text{quand} \quad (K, \varepsilon) \to (\Gamma, 0).$$

Le lemme 2.1.3 (*j*) montre donc que pour $\varphi \in M_*$ on a $\varphi \circ U(k(K, \varepsilon)) \to \varphi$ (en norme) quand $(K, \varepsilon) \to (\Gamma, 0)$.

On a alors $x = $ limite faible $U(k(K, \varepsilon))x$, et la convexité de l'ensemble des $U(k)x$, $\|k\|_1 \leq 1$, $\hat{k}$ à support compact, permet de conclure.

LEMME 2.1.5. — *Soient* E_1 *et* E_2 *des fermés de* Γ, E_3 *la fermeture de* $E_1 + E_2$. *On a* $M(U, E_1) . M(U, E_2) \subset M(U, E_3)$.

Démonstration. — Soient $x_1 \in M(U, E_1)$, $x_2 \in M(U, E_2)$, montrons que $x_1 x_2 \in M(U, E_3)$. Le lemme 2.1.4, la bicontinuité du produit, sur les parties bornées de M, pour la topologie forte, et les lemmes 2.1.3 (*g*) et 2.1.3 (*b*) montrent que l'on peut supposer que $\mathrm{Sp}_U(x_1)$ et $\mathrm{Sp}_U(x_2)$ sont compacts donc que E_1 et E_2 sont compacts. Il suffit de montrer que pour tout voisinage compact $\mathcal{V}$ de 0 dans Γ et tout $f \in L^1(G)$, telle que $E_1 + E_2 + \mathcal{V} + \mathcal{V} \subset Z(f)$, on a $U(f) x_1 x_2 = 0$ et d'utiliser 2.1.3 (*a*). Soient $\mathcal{V}$ un voisinage compact de 0 dans Γ, $f_j \in L^1(G)$ pour $j = 1, 2$, avec $\hat{f}_j(\gamma) = 1$ pour γ dans un voisinage de $\mathrm{Sp}_U(x_j)$, $\hat{f}_j$ à support compact contenu dans $E_j + \mathcal{V}$. On a $x_j = U(f_j) x_j$ pour $j = 1, 2$ [2.1.3 (*k*)]. Pour $t \in G$, $X \in B(M)$ soit $\Phi_t(X) \in B(M)$ tel que $\Phi_t(X)(x) = U_t X U_t^{-1}(x)$. L'application $t \to \Phi_t$ est une représentation au sens de [3] (déf. 1.3) de G dans B (M). Soit Φ la représentation correspondante de $L^1(G)$ dans B (M) et pour $x \in M$ soit $L_x \in B(M)$ l'opérateur de multiplication par x à gauche : on a $L_x(y) = xy$ pour tout $y \in M$.

On a $\Phi_t(L_x)(y) = U_t(x(U_t^{-1} y)) = (U_t x) y = L_{U_t(x)}(y)$ pour x et y dans M et $t \in G$. On a donc $\Phi_t(L_x) = L_{U_t(x)}$ pour tout $x \in M$ et tout $t \in G$.

Comme $x_1 = U(f_1) x_1$, on a

$$L_{x_1} = \int_G L_{U_t(x_1)} f_1(t)\, dt = \Phi(f_1) L_{x_1}.$$

Soit $\varphi \in M_*$; on a

$$\varphi(U(f) x_1 x_2) = \varphi(U(f) L_{x_1}(x_2)) = \varphi(U(f)(\Phi(f_1) L_{x_1})(U(f_2) x_2)).$$

Comme f, f_1 et f_2 sont dans $L^1(G)$, on voit que

$$\varphi(U(f) x_1 x_2) = \iiint f(t) f_1(t_1) f_2(t_2)\, g(t, t_1, t_2)\, dt\, dt_1\, dt_2,$$

où pour t, t_1 et t_2 dans G on a

$$g(t, t_1, t_2) = \varphi(U_t(\Phi_{t_1}(L_{x_1}) U_{t_2}(x_2))) = \varphi((U_{t+t_1} L_{x_1} U_{t_2 - t_1})(x_2)).$$

Il existe donc une fonction h de $G \times G$ dans $\mathbf{C}$, continue et bornée telle que $g(t, t_1, t_2) = h(t + t_1, t_2 - t_1)$ pour t, t_1 et t_2 dans G.

On peut, en utilisant le théorème de Fubini, écrire :

$$\varphi(U(f) x_1 x_2) = \iint k(v, w)\, h(v, w)\, dv\, dw,$$

où

$$k(v, w) = \int f(u) f_1(v - u) f_2(v - u + w)\, du;$$

on a en effet pour $u = t$, $v = t + t_1$, $w = t_2 - t_1$ les égalités

$$v - u = t_1, \qquad v - u + w = t_2 \qquad \text{et} \qquad du\, dv\, dw = dt\, dt_1\, dt_2.$$

La fonction $f_1 f_{2,-w}$ produit ponctuel des fonctions f_1 et $f_{2,-w}$

$$[f_{2,-w}(t) = f_2(t + w) \quad \text{pour tout } t \in G]$$

est le produit de deux fonctions de $L^2(G)$ (car $\hat{f}_j$ est par hypothèse continue à support compact) donc elle est dans $L^1(G)$.

Sa transformée de Fourier vérifie $(f_1 f_{2,-w})^\wedge(\gamma) = (\hat{f}_1 \star \hat{f}_{2,-w})(\gamma)$. Donc, indépendamment de w, on a $(f_1 f_{2,-w})^\wedge(\gamma) = 0$ pour tout γ dans le complémentaire de Support $\hat{f}_1$ + Support $\hat{f}_2$ donc dans le complémentaire de $E_1 + E_2 + \mathcal{V} + \mathcal{V}$. Comme la transformée de Fourier de f s'annule sur $E_1 + E_2 + \mathcal{V} + \mathcal{V}$ on a donc $k(v, w) = 0$ presque partout en v pour tout w donc $\varphi(U(f)\, x_1\, x_2) = 0$, ce que nous voulions prouver.

LEMME 2.1.6. — *Soit* $(\mathcal{V}_\alpha)_{\alpha \in A}$ *un recouvrement ouvert de* Γ.

Il existe un ensemble filtrant B, *et une famille* $(g_{\alpha,\beta})_{\alpha \in A, \beta \in B}$ *d'éléments de* $L^1(G)$, *tels que :*

(*a*) *Pour tout* $\beta \in B$ *l'ensemble des* $\alpha \in A$ *tels que* $g_{\alpha,\beta} \neq 0$ *est fini.*

(*b*) *Pour* $\alpha \in A$, $\beta \in B$ *on a* Support $\hat{g}_{\alpha,\beta} \subset \mathcal{V}_\alpha$.

(*c*) *Pour tout* $x \in M$ *on a* $\sum_\alpha U(g_{\alpha,\beta})\, x \to x$ *faiblement quand* $\beta \to \infty$.

Démonstration. — L'ensemble des $g \in L^1(g)$ qui sont sommes finies de $g_{\alpha_i} \in L^1(G)$ tels que Support $\hat{g}_{\alpha_i} \subset \mathcal{V}_{\alpha_i}$ est un idéal normiquement dense dans $L^1(G)$. L'assertion (*c*) résulte donc du lemme 2.1.3 (*j*).

2.2. ÉQUIVALENCE EXTÉRIEURE ET INVARIANT Γ.

DÉFINITION 2.2.1. — *Soient* M *un facteur*, U *une représentation de* G *dans* M. *On pose* $\Gamma(U) = \bigcap \operatorname{Sp} U^e$ *quand e décrit l'ensemble des projecteurs non nuls de* M^U.

PROPOSITION 2.2.2. — *Soit* U *une représentation de* G *dans le facteur* M.

(*a*) *Soient e un projecteur non nul de* M^U, $\bar{e}$ *son support central relativement à* M^U, E *un fermé de* Γ. *Si* $M(U, E) \cap M_{\bar{e}} \neq \{0\}$ *on a* $M(U, E) \cap M_e \neq \{0\}$.

(*b*) *On a* $\Gamma(U) = \bigcap \operatorname{Sp}(U^e)$ *quand e décrit l'ensemble des projecteurs non nuls du centre de* M^U.

(*c*) *Si* M^U *est un facteur on a* $\operatorname{Sp} U = \Gamma(U)$.

Démonstration :

(a) On a par définition $\bar{e} = \bigvee ueu^*$ pour u unitaire de M^U. Soit $x \neq 0$, $x \in M(U, E) \cap M_{\bar{e}}$. Il existe deux unitaires u et v de M^U tels que $ueu^* xvev^* \neq 0$. Soit $y = eu^* xve$. On a $y \neq 0$, $y \in M_e$, et $y \in M(U, E)$ (lemme 2.1.5).

(b) L'assertion (a) montre que $\mathrm{Sp}\, U^e = \mathrm{Sp}\, U^{\bar{e}}$ avec les notations de (a) [en utilisant le lemme 2.1.3 (e) et (h)] d'où (b).

(c) Immédiat.

DÉFINITION 2.2.3. — *Soient* M *un facteur,* U *et* V *des représentations de* G *dans* M. *On écrit* $U \sim V$ (*et on dit que* U *et* V *sont extérieurement équivalentes*) *quand il existe une application fortement continue* $t \to u_t$ *de* G *dans le groupe unitaire de* M *telle que*

$$u_{t_1+t_2} = u_{t_1} U_{t_1}(u_{t_2}) \quad \textit{pour } t_1 \textit{ et } t_2 \textit{ dans } G,$$
$$V_t(x) = u_t U_t(x) u_t^* \quad \textit{pour tout } x \in M \textit{ et tout } t \in G.$$

Il est immédiat que $\sim$ est une relation d'équivalence, plus fine que la relation $\varepsilon(U_t) = \varepsilon(V_t)$ pour tout $t \in G$. Il est faux en général que $\varepsilon(U_t) = \varepsilon(V_t)$ pour tout $t \in G$ entraîne $U \sim V$. [ε désigne l'homomorphisme de Aut M sur Out M considéré en 1.2.8.]

THÉORÈME 2.2.4. — *Soient* U *et* V *des représentations de* G *dans le facteur* M.

(a) $\Gamma(U)$ *est un sous-groupe fermé de* Γ.

(b) *On a* $\Gamma(U) + \mathrm{Sp}\, U = \mathrm{Sp}\, U$.

(c) $U \sim V$ *entraîne* $\Gamma(U) = \Gamma(V)$.

LEMME 2.2.5. — *Soient* U *une représentation de* G *dans* M, e_1 *et* e_2 *des projecteurs non nuls de* M^U *équivalents relativement à* M. *On a alors :*

$$\Gamma(U^{e_1}) = \Gamma(U^{e_2}).$$

Démonstration. — Par hypothèse il existe une isométrie partielle $u \in M$ telle que $u^* u = e_1$ et $uu^* = e_2$. Soient $\gamma_1 \in \Gamma(U^{e_1})$, $\mathcal{V}$ un voisinage compact de γ_1, e_2' un projecteur non nul de $M^U \cap M_{e_2}$. Il suffit de montrer l'existence d'un élément non nul de $M(U, \mathcal{V}) \cap M_{e_2'}$. On aura ainsi montré que $\Gamma(U^{e_1}) \subset \Gamma(U^{e_2})$ d'où l'égalité cherchée en échangeant e_1 et e_2.

Il existe un voisinage $\mathcal{W}$ de 0 dans Γ, un voisinage $\mathcal{V}'$ de γ_1 tels que $\mathcal{V}' + \mathcal{W} \subset \mathcal{V}$, puis un recouvrement ouvert $(\mathcal{V}_\alpha)_{\alpha \in A}$ de Γ tel que $\mathcal{V}_\alpha - \mathcal{V}_\alpha \subset \mathcal{W}$ pour tout $\alpha \in A$. Il existe donc $g \in L^1(G)$ tel que $U(g)\, e_2' u \neq 0$ et Support

$\hat{g} \subset \mathcal{V}_\alpha$ pour un certain $\alpha \in \mathrm{A}$. (On applique le lemme 2.1.6 en constatant que $e'_2 u \neq 0$.) Posons $x = \mathrm{U}(g)(e'_2 u)$. On a Support $x \leq e_1$, Support $x^* \leq e'_2$. On a, en utilisant le lemme 2.1.3 (g), $\mathrm{Sp}_\mathrm{U} x + \mathcal{V}' - \mathrm{Sp}_\mathrm{U} x \subset \mathcal{V}$. Par hypothèse il existe $y \in \mathrm{M}(\mathrm{U}, \mathcal{V}') \cap \mathrm{M}_{e'_1}$, $y \neq 0$ où e'_1 est le projecteur non nul de $\mathrm{M}^\mathrm{U} \cap \mathrm{M}_{e_1}$ défini par l'égalité

$$e'_1 = \bigvee_{t \in \mathrm{G}} \text{Support } \mathrm{U}_t(x).$$

Il existe $t_1 \in \mathrm{G}$ tel que $\mathrm{U}_{t_1}(x)\, y \neq 0$ car l'image de y est contenue dans l'image de e'_1 et n'est pas réduite à 0.

Il existe ensuite $t_2 \in \mathrm{G}$ tel que $\mathrm{U}_{t_2}(x)(\mathrm{U}_{t_1}(x)\, y)^* \neq 0$ car l'image de $(\mathrm{U}_{t_1}(x)\, y)^*$ est contenue dans celle de y^* donc dans l'image de e'_1. Comme support $x^* \leq e'_2$ on a alors

$$\mathrm{U}_{t_1}(x)\, y\, \mathrm{U}_{t_2}(x^*) \in \mathrm{M}_{e'_2} \cap \mathrm{M}(\mathrm{U}, (\mathrm{Sp}_\mathrm{U} x + \mathcal{V}' - \mathrm{Sp}_\mathrm{U} x))$$

en utilisant les lemmes 2.1.3 (c) et 2.1.5. On a donc montré que $\mathrm{M}_{e'_2} \cap \mathrm{M}(\mathrm{U}, \mathcal{V}) \neq \{0\}$.

LEMME 2.2.6. — *Soient* $\mathrm{U} \sim \mathrm{V}$ *des représentations de* G *dans* M, $(e_{ij})_{i,j=1,2}$ *un système d'unités matricielles pour le facteur* F_2 *de type* I_2. *Il existe une représentation* W *de* G *sur* $\mathrm{M} \otimes \mathrm{F}_2$ *telle que pour* $t \in \mathrm{G}$ *et* $x \in \mathrm{M}$ *on ait*

$$\mathrm{W}_t(x \otimes e_{11}) = \mathrm{U}_t(x) \otimes e_{11}, \qquad \mathrm{W}_t(x \otimes e_{22}) = \mathrm{V}_t(x) \otimes e_{22}.$$

Démonstration. — Pour $t \in \mathrm{G}$, soit $u_t \in \mathrm{M}$ tel que $\mathrm{V}_t(x) = u_t \mathrm{U}_t(x) u_t^*$ pour tout $x \in \mathrm{M}$. Posons $v_t = 1 \otimes e_{11} + u_t \otimes e_{22}$. L'application linéaire W_t définie par l'égalité

$$\mathrm{W}_t\left(\sum x_{ij} \otimes e_{ij}\right) = \mathrm{U}_t(x_{11}) \otimes e_{11} + \mathrm{U}_t(x_{12})\, u_t^* \otimes e_{12} + u_t \mathrm{U}_t(x_{21}) \otimes e_{21} + u_t \mathrm{U}_t(x_{22})\, u_t^* \otimes e_{22}$$

vérifie pour tout $x \in \mathrm{M} \otimes \mathrm{F}_2$, l'égalité $\mathrm{W}_t(x) = v_t(\mathrm{U}_t \otimes 1)(x)\, v_t^*$. Donc W_t est un automorphisme de $\mathrm{M} \otimes \mathrm{F}_2$.

L'application $t \to \mathrm{W}_t$ est une représentation de G sur M dès que l'on a $v_{t_1}(\mathrm{U}_{t_1} \otimes 1)\, v_{t_2} = v_{t_1+t_2}$ pour tout couple (t_1, t_2) d'éléments de G, i. e. dès que $u_{t_1} \mathrm{U}_{t_1}(u_{t_2}) = u_{t_1+t_2}$ pour tout couple (t_1, t_2) d'éléments de G. La définition 2.2.3 permet donc de conclure.

Démonstration du théorème 2.2.4 :

(b) $\Gamma(\mathrm{U})$ contient l'élément 0 de Γ [on a $\mathrm{Sp}_\mathrm{U}(1) = \{0\}$]. Il suffit donc de montrer que pour $\gamma_1 \in \mathrm{Sp}\,\mathrm{U}$ et $\gamma_2 \in \Gamma(\mathrm{U})$ on a $\gamma_1 + \gamma_2 \in \mathrm{Sp}\,\mathrm{U}$, i. e. que pour tout voisinage $\mathcal{V}$ de $\gamma_1 + \gamma_2$ on a $\mathrm{M}(\mathrm{U}, \mathcal{V}) \neq \{0\}$. Pour $j = 1, 2$.

Soit $\mathcal{V}_j$ un voisinage de γ_j, avec $\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 \subset \mathcal{V}$. Soit $x_1 \in M(U, \mathcal{V}_1)$ tel que $x_1 \neq 0$ et $e = \bigvee_{t \in G}$ Support $U_t(x_1)$. Alors e est un projecteur non nul de M^U donc il existe $x_2 \neq 0$, $x_2 \in M(U, \mathcal{V}_2) \cap M_e$.

Il existe $t_1 \in G$ tel que $U_{t_1}(x_1) x_2 \neq 0$. On a donc [lemmes 2.1.3 (*f*) et 2.1.5] $M(U, \mathcal{V}) \neq \{0\}$.

(*a*) Utilisant (*b*) on a, pour tout projecteur non nul e de M^U, l'égalité $\Gamma(U^e) + \mathrm{Sp}\, U^e = \mathrm{Sp}\, U^e$. Donc $\Gamma(U)$ étant contenu dans $\Gamma(U^e)$ on a $\Gamma(U) + \mathrm{Sp}\, U^e = \mathrm{Sp}\, U^e$. Cette égalité valable pour tout e et la définition de $\Gamma(U)$ montrent que $\Gamma(U) + \Gamma(U) = \Gamma(U)$. Comme $\Gamma(U)$ est un sous-ensemble fermé symétrique de Γ on a montré (*a*).

(*c*) Soient U et V des représentations de G dans M avec $U \sim V$. Le lemme 2.2.6 permet de construire une représentation W de G dans $M \otimes F_2$ et deux projecteurs équivalents $1 \otimes e_{11}$ et $1 \otimes e_{22}$ de $M \otimes F_2$, invariants par W_t et tels que, par isomorphisme, on ait

$$\Gamma(W^{1 \otimes e_{11}}) = \Gamma(U), \qquad \Gamma(W^{1 \otimes e_{22}}) = \Gamma(V).$$

Le lemme 2.2.5 montre donc que $\Gamma(U) = \Gamma(V)$.

2.3. Interprétation de l'orthogonal de $\Gamma(U)$.

Théorème 2.3.1. — *Soit* U *une représentation de* G *dans le facteur* M. *Si* $\mathrm{Sp}\, U/\Gamma(U)$ *est compact, l'orthogonal de* $\Gamma(U)$ *est l'ensemble des* $t \in G$ *tels qu'il existe un unitaire* u *du centre de* M^U *vérifiant l'égalité*

$$U_t(x) = uxu^* \quad \textit{pour tout } x \in M.$$

L'idée de la démonstration est d'utiliser un des critères classiques ([33], th. 4.1.19) qui assure qu'un automorphisme de M est intérieur quand son spectre dans B (M) n'est formé que de $z \in \mathbf{C}$ tels que $\mathrm{Re}(z) > 0$.

Lemme 2.3.2. — *Soient* U *une représentation de* G *dans le facteur* M, $\mathcal{V}$ *un voisinage compact de* 0 *dans* Γ, e_1 *et* e_2 *des projecteurs non nuls de* M^U. *Il existe deux projecteurs non nuls* f_1 *et* f_2 *de* M^U, $f_1 \leqq e_1$, $f_2 \leqq e_2$ *tels que* $\mathrm{Sp}\, U^{f_1} \subset \mathcal{V} + \mathrm{Sp}\, U^{f_2}$, $\mathrm{Sp}\, U^{f_2} \subset \mathcal{V} + \mathrm{Sp}\, U^{f_1}$.

Démonstration. — Il existe un $x \neq 0$, $x \in M$ tel que $e_1 x = x$, $x e_2 = x$. Le lemme 2.1.6 montre qu'il existe $g \in L^1(G)$ avec Support $\hat{g}$-Support $\hat{g} \subset \mathcal{V}$ et $U(g)\, x \neq 0$.

Soit $y = U(g)(x)$; on a

$$e_1 y = e_1 U(g)(x) = U(g)(e_1 x) = U(g)\, x = y;$$

de même $ye_2 = y$, et $\mathrm{Sp}_{\mathrm{U}}(y) - \mathrm{Sp}_{\mathrm{U}}(y) \subset \mathcal{V}$ [2.1.3 (g)]. Soient $f_1 = \bigvee_{t \in G}$ Support $\mathrm{U}_t(y^*)$, $f_2 = \bigvee_{t \in G}$ Support $\mathrm{U}_t(y)$. On a $f_j \in \mathrm{M}^{\mathrm{U}}$ par construction, $f_j \neq 0$, et $f_j \leqq e_j$ pour $j = 1, 2$.

Montrons que f_1 et f_2 vérifient les conclusions du lemme. Montrons que $\gamma_1 \in \mathrm{Sp}\,\mathrm{U}^{f_1}$ entraîne $\gamma_1 \in \mathcal{V} + \mathrm{Sp}\,\mathrm{U}^{f_2}$ i. e. que pour tout voisinage compact $\mathcal{V}_1$ de γ_1 on a $(\mathcal{V}_1 - \mathcal{V}) \cap \mathrm{Sp}\,\mathrm{U}^{f_2} \neq \emptyset$ (puisque par hypothèse on a $\mathcal{V}$ compact donc $\mathcal{V} + \mathrm{Sp}\,\mathrm{U}^{f_2}$ fermé). Soit $x_1 \neq 0$, $x_1 \in \mathrm{M}(\mathrm{U}, \mathcal{V}_1) \cap \mathrm{M}_{f_1}$. Il existe $t_1 \in \mathrm{G}$ tel que $\mathrm{U}_{t_1}(y^*)\, x_1^* \neq 0$ puis $t_2 \in \mathrm{G}$ tel que

$$x_2 = \mathrm{U}_{t_2}(y^*)\, x_1\, \mathrm{U}_{t_1}(y) \neq 0.$$

On a $f_2 x_2 = x_2$ car $f_2\, \mathrm{U}_{t_2}(y^*) = (\mathrm{U}_{t_2}(y) f_2)^* = \mathrm{U}_{t_2}(y^*)$. De même, $x_2 f_2 = x_2$. Comme $x_2 \in \mathrm{M}(\mathrm{U}, (-\mathcal{V} + \mathcal{V}_1))$ (lemme 2.1.5) on a

$$\mathrm{M}(\mathrm{U}, (\mathcal{V}_1 - \mathcal{V})) \cap \mathrm{M}_{f_2} \neq \{0\} \qquad \text{donc} \quad (\mathcal{V}_1 - \mathcal{V}) \cap \mathrm{Sp}\,\mathrm{U}^{f_2} \neq \emptyset.$$

La deuxième inclusion du lemme 2.3.2 se démontre de la même manière.

Lemme 2.3.3. — *Soient* U *une représentation de* G *dans le facteur* M, e *un projecteur non nul de* M^{U}. *On a* $\Gamma(\mathrm{U}^e) = \Gamma(\mathrm{U})$.

Démonstration. — On a clairement $\Gamma(\mathrm{U}) \subset \Gamma(\mathrm{U}^e)$. On a

$$\Gamma(\mathrm{U}) = \cap(\mathrm{Sp}\,\mathrm{U}^f + \mathcal{V})$$

pour f projecteur non nul de M^{U} et $\mathcal{V}$ voisinage compact de 0. Le lemme 2.3.2. montre que chaque $\mathrm{Sp}\,\mathrm{U}^f + \mathcal{V}$ contient un $\mathrm{Sp}\,\mathrm{U}^{e_1}$ où $e_1 \leqq e$, d'où le résultat.

Lemme 2.3.4. — *Soit* U *une représentation de* G *dans le facteur* M. *La famille* F (U) *des sous-ensembles de* Γ *de la forme* $\mathcal{V} + \mathrm{Sp}\,\mathrm{U}^e$, *pour* $\mathcal{V}$ *voisinage compact de* 0 *dans* Γ *et* e *projecteur non nul de* M^{U} *est une base de filtre d'intersection* $\Gamma(\mathrm{U})$.

Démonstration. — Montrons que c'est une base de filtre. Soient $\mathcal{V}_1 + \mathrm{Sp}\,\mathrm{U}^{e_1}$ et $\mathcal{V}_2 + \mathrm{Sp}\,\mathrm{U}^{e_2}$ deux éléments de F (U) et $\mathcal{V}$ un voisinage compact de 0 dans Γ tel que $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V} + \mathcal{V} \subset \mathcal{V}_2$. Le lemme 2.3.2 appliqué au triplet $\mathcal{V}$, e_1, e_2 montre l'existence de f_1 et f_2, projecteurs non nuls de M^{U} tels que $f_1 \leqq e_1$, $f_2 \leqq e_2$:

$$\mathcal{V} + \mathrm{Sp}\,\mathrm{U}^{f_1} \subset \mathcal{V}_1 + \mathrm{Sp}\,\mathrm{U}^{e_1} \qquad [\text{car } f_1 \leqq e_1 \text{ et } \mathcal{V} \subset \mathcal{V}_1,\ cf.\ 2.1.3\ (i)],$$
$$\mathcal{V} + \mathrm{Sp}\,\mathrm{U}^{f_1} \subset \mathcal{V} + \mathcal{V} + \mathrm{Sp}\,\mathrm{U}^{f_2} \subset \mathcal{V}_2 + \mathrm{Sp}\,\mathcal{V}^{e_2}.$$

Il suffit donc de constater que $\mathcal{V} + \mathrm{Sp}\,\mathrm{U}^{f_1}$ est un élément de F (U).

Remarque. — Le lemme 2.2.6 et l'argument ci-dessus montrent que si U et V sont des représentations de G sur M, avec $U \sim V$, il existe pour tout $F_1 \in F(U)$ un $F_2 \in F(V)$ tel que $F_2 \subset F_1$.

Les lemmes 2.3.5 à 2.3.9 ont pour but de calculer le spectre de U_t dans l'algèbre de Banach B (M), à partir de Sp U et $t \in G$. L'hypothèse « M facteur » n'intervient pas.

LEMME 2.3.5. — *Soient* $\varepsilon > 0$, M *une algèbre de von Neumann*, U *une représentation de* G *dans* M, K *un compact de* G *et* $\gamma_0 \in \Gamma$. *Il existe un voisinage compact* $\mathcal{V}$ *de* γ_0 *tel que* $\| U_t(x) - (\overline{t, \gamma_0})\, x \| \leqq \varepsilon \| x \|$ *pour tout* $x \in M(U, \mathcal{V})$ *et* $t \in K$.

Démonstration. — Soients $\mathcal{V}_1$ un voisinage compact de γ_0, et $f \in L^1(G)$ tels que $\hat{f}(\gamma) = 1$ pour tout $\gamma \in \mathcal{V}_1$. Pour $t_0 \in K$ soit $F(t_0)$ l'élément de $L^1(G)$ tel que $F(t_0)(t) = f(t - t_0) - (\overline{t_0, \gamma_0})\, f(t)$ pour $t \in G$. On a

$$F(t_0)^\wedge(\gamma) = (\overline{t_0, \gamma})\, \hat{f}(\gamma) - (\overline{t_0, \gamma_0})\, \hat{f}(\gamma) \qquad \text{pour} \quad \gamma \in \Gamma.$$

Il existe ([32], th. 2.6.3) pour $t_0 \in K$ un $k \in L^1(G)$ tel que $\| F(t_0) \star k \| < \varepsilon$ et $\hat{k}(\gamma) = 1$ sur un voisinage de γ_0. La continuité de l'application $t_0 \to F(t_0)$ du compact K dans $L^1(G)$ montre l'existence d'un voisinage $\mathcal{V}_2$ de γ_0 tel que pour tout $t_0 \in K$, il existe un $k \in L^1(G)$ avec $\hat{k}(\gamma) = 1$ pour $\gamma \in \mathcal{V}_2$ et $\| F(t_0) \star k \| < \varepsilon$.

Soient $\mathcal{V}$ un voisinage compact de γ_0 contenu dans l'intérieur de $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2$, $x \in M(U, \mathcal{V})$ et $t_0 \in K$. On a

$$U_{t_0}(x) - (\overline{t_0, \gamma_0})\, x = U(\mu)\, x, \qquad \hat{\mu}(\gamma) = (\overline{t_0, \gamma}) - (\overline{t_0, \gamma_0}) \qquad \text{pour} \quad \gamma \in \Gamma.$$

Il existe $k \in L^1(G)$ avec $\hat{k}(\gamma) = 1$ pour $\gamma \in \mathcal{V}_2$ et $\| F(t_0) \star k \| < \varepsilon$. L'égalité $(F(t_0) \star k)^\wedge(\gamma) = \hat{\mu}(\gamma)$ ayant lieu sur un ouvert contenant $\mathrm{Sp}_U\, x$ on a

$$\| U_{t_0}(x) - (\overline{t_0, \gamma_0})\, x \| = \| U(F(t_0) \star k)\, x \| \leqq \| F(t_0) \star k \| . \| x \| \leqq \varepsilon \| x \|.$$

LEMME 2.3.6. — *Soient* M *une algèbre de von Neumann*, U *une représentation de* G *dans* M. *Soit* $\gamma \in \Gamma$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(*a*) $\gamma \in \mathrm{Sp}\, U$.

(*b*) *Il existe une famille* (x_α), *indexée par un ensemble filtrant* A, *d'éléments de norme* 1 *de* M, *telle que*

$$\| U_t(x_\alpha) - (\overline{t, \gamma})\, x_\alpha \| \to 0 \qquad \textit{pour} \quad \alpha \to \infty,$$

uniformément sur tout compact de G.

(*c*) *Pour toute mesure finie* μ *sur* G *on a* $|\hat{\mu}(\gamma)| \leq \| U(\mu) \|_{B(M)}$.

(*d*) *Pour tout* $f \in L^1(G)$ *on a* $|\hat{f}(\gamma)| \leq \| U(f) \|_{B(M)}$.

Démonstration. — Le lemme 2.3.5 montre que (*a*) entraîne (*b*).

Montrons que (*b*) entraîne (*c*). Soient μ une mesure finie sur G et (x_α) comme dans (*b*). On a pour tout compact K de G :

$$\| U(\mu)(x_\alpha) - \hat{\mu}(\gamma) x_\alpha \| = \left\| \int_G (U_t(x_\alpha) - (\overline{t, \gamma}) x_\alpha) \, d\mu(t) \right\|$$
$$\leq \sup_K \| U_t(x_\alpha) - (\overline{t, \gamma}) x_\alpha \| . \| \mu \| + 2 |\mu| (K^c).$$

On a donc montré que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un élément x_α de M de norme un, tel que $\| U(\mu) x_\alpha \| \geq |\hat{\mu}(\gamma)| - \varepsilon$.

L'implication (*c*) entraîne (*d*) est immédiate et l'implication (*d*) entraîne (*a*), résulte de la définition : $\operatorname{Sp} U = \{ \gamma \in \Gamma, \hat{f}(\gamma) \} = 0$ pour tout $f \in L^1(G)$ tel que $U(f) = \{ 0 \}$.

Proposition 2.3.7. — *Soient* M *une algèbre de von Neumann,* U *une représentation de* G *dans* M, Y *l'algèbre de Banach engendrée par* $U(L^1(G))$ *dans* B (M). *Pour* $\gamma \in \operatorname{Sp} U$ *soit* χ_γ *le caractère de* Y *tel que* $\chi_\gamma(U(f)) = \hat{f}(\gamma)$ *pour tout* $f \in L^1(G)$. *L'application* $\gamma \to \chi_\gamma$ *est un homéomorphisme de* Sp U *sur le spectre de l'algèbre de Banach* Y.

Le lemme 2.3.6 montre que si $\gamma \in \operatorname{Sp} U$, χ_γ est un homomorphisme de $U(L^1(G))$ dans $\mathbf{C}$ qui se prolonge à l'adhérence Y de $U(L^1(G)$ dans B (M). L'application $\gamma \to \chi_\gamma$ est injective car $\chi_{\gamma_1} = \chi_{\gamma_2}$ entraîne $\hat{f}(\gamma_1) = \hat{f}(\gamma_2)$ pour tout $f \in L^1(G)$. Elle est continue car $U(L^1(G))$ est dense dans Y.

Soit *h* un caractère (non nul) de Y; il existe alors $\gamma \in \Gamma$ tel que $h(U(f)) = \hat{f}(\gamma)$ pour $f \in L^1(G)$ [car $h \circ U$ est un caractère (non nul) de $L^1(G)$] et comme $|h(U(f))| \leq \| U(f) \|$ pour tout $f \in L^1(G)$, γ vérifie (*d*) du lemme 2.3.6. i. e. $\gamma \in \operatorname{Sp} U$.

Lemme 2.3.8. — *Soient* M *une algèbre de von Neumann,* U *une représentation de* G *dans* M. *Pour tout* $s \in G$ *le spectre de* U_s *dans l'algèbre de Banach* B (M) *est l'adhérence de l'ensemble des* $(\overline{s, \gamma})$, $\gamma \in \operatorname{Sp} U$.

Démonstration. — Soit $\gamma \in \operatorname{Sp} U$. Il existe une famille $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ d'éléments de M telle que $\| x_\alpha \| = 1$, $\| U_s(x_\alpha) - (\overline{s, \gamma}) x_\alpha \| \to 0$ quand $\alpha \to \infty$. Donc $U_s - (\overline{s, \gamma})$ n'a pas d'inverse dans B (M).

Soit λ un nombre complexe que $\lambda \notin \{ (\overline{s, \gamma}), \gamma \in \operatorname{Sp} U \}^-$. Soit ω un ouvert du cercle unité $T_1 = \{ z, |z| = 1 \}$ contenant $\{ (\overline{s, \gamma}), \gamma \in \operatorname{Sp} U \}^-$ et tel que $\lambda \notin \omega$.

Soit f une fonction de classe C^∞ sur T_1 qui coincide avec $(z-\lambda)^{-1}$ sur ω. On a $f(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n z^n$ pour $z\in T_1$ avec $\sum |a_n| < \infty$.

Soit $X=\sum a_n U_{ns}$. On a $X\in B(M)$ et $X=U\left(\sum a_n \varepsilon_{ns}\right)$ où pour $t\in G$, ε_t désigne la mesure unité portée par $\{t\}$. On a

$$X(U_s-\lambda)=(U_s-\lambda)X=U(\mu),$$

où $\mu=(\varepsilon_s-\lambda\varepsilon_0)\star\left(\sum a_n \varepsilon_{ns}\right)$ donc $\hat{\mu}(\gamma)=\left(\left(\overline{s,\gamma}\right)-\lambda\right)f\left(\left(\overline{s,\gamma}\right)\right)$. Par hypothèse sur f on a donc $\hat{\mu}(\gamma)=1$ pour $\gamma\in\{\gamma\in\Gamma,\ \left(\overline{s,\gamma}\right)\in\omega\}$ qui est un ouvert contenant Sp U. Pour tout $x\in M$ on a $U(\mu)x=x$ [lemme 2.1.3 (k)], donc $U(\mu)=1$.

LEMME 2.3.9. — *Soit σ un automorphisme d'une algèbre de von Neumann* M. *Si le spectre de σ dans* B (M) *est égal à* $\{1\}$ *on a* $\sigma=1$.

Le lemme 2.3.8 montre que la représentation $n\to\sigma^n$ de Z dans M est triviale.

LEMME 2.3.10 :

(a) *Soient* M *un facteur, u un unitaire de* M, *i_u l'automorphisme $x\to uxu^*$ de* M. *Alors le spectre de i_u dans* B (M) *est l'ensemble des $\lambda_1\lambda_2^{-1}$ pour λ_1, $\lambda_2\in$ Sp u.*

(b) *Soient* M *un facteur,* U *une représentation de* G *dans* M, *$t_0\in G$, u un unitaire de M^U tel que $U_{t_0}(x)=uxu^*$ pour tout $x\in M$. Alors $(t_0,\gamma)=1$ pour tout $\gamma\in\Gamma(U)$.*

Démonstration :

(a) Le spectre de L_u dans B (M) est contenu dans Sp u, le spectre de R_{u^*} [$R_{u^*}(x)=xu^*$ pour tout $x\in M$], dans B (M), est contenu dans $(\text{Sp}\ u)^{-1}$. Comme L_u et R_{u^*} commutent, on a

$$\text{Sp}_{B(M)}(i_u)\subset\{\lambda_1\lambda_2^{-1};\ \lambda_1,\lambda_2\in\text{Sp}\ u\}.$$

Soient $\varepsilon>0$, λ_1 (resp. λ_2) $\in$ Sp u, $e_1\in M$ (resp $e_2\in M$) un projecteur $\neq 0$ tel que $\|ue_1-\lambda_1 e_1\|\leq\varepsilon$ (resp. $\|e_2 u-\lambda_2 e_2\|\leq\varepsilon$), $v\in M$ une isométrie partielle telle $vv^*\leq e_1$, $v^*v\leq e_2$, $v\neq 0$. On a

$$\|i_u(v)-\lambda_1\lambda_2^{-1}v\|=\|uv-\lambda_1\lambda_2^{-1}vu\|\leq\|(ue_1-\lambda_1 e_1)v\|+\|v(e_2u-\lambda_2 e_2)\|\leq 2\varepsilon.$$

On a donc

$$\text{Sp}_{B(M)}(i_u)=\{\lambda_1\lambda_2^{-1};\ \lambda_1,\lambda_2\in\text{Sp}\ u\}.$$

(*b*) Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un projecteur spectral $e \neq 0$ de u et un $\lambda \mid |\lambda| = 1$ tels que $\| ue - \lambda e \| < \varepsilon$. Il existe donc un projecteur $e \neq 0$, $e \in M^U$ tel que $\mathrm{Sp}\, U^e_{t_0}$ [dans B (M_e)] $\subset \{ z, |z - 1| \leq \varepsilon \}$. En utilisant le lemme 2.3.8 on a alors $|(t_0, \gamma) - 1| \leq \varepsilon$ pour tout $\gamma \in \mathrm{Sp}\, U^e$. D'où $(t_0, \gamma) = 1$ pour tout $\gamma \in \Gamma(U)$.

Démonstration du théorème 2.3.1. — Le lemme 2.3.10 montre que tout $t \in G$ tel qu'il existe un unitaire u du centre de M^U vérifiant $U_t(x) = uxu^*$ pour tout $x \in M$, appartient à l'orthogonal de $\Gamma(U)$. Soit t dans l'orthogonal de $\Gamma(U)$. Pour $\varepsilon \in]0, 1[$ posons $\mathcal{V}_\varepsilon = \{ \gamma \in \Gamma, \mathrm{Re}\,(t, \gamma) > 1 - \varepsilon \}$; on a $\mathcal{V}_\varepsilon + \gamma = \mathcal{V}_\varepsilon$ pour tout $\gamma \in \Gamma(U)$ donc en notant h l'application canonique de Γ sur $\Gamma/\Gamma(U)$ on a $h^{-1} h(\mathcal{V}_\varepsilon) = \mathcal{V}_\varepsilon$.

Les $h(F_1)$, $F_1 \in F(U)$ (2.3.4) forment une base de filtre d'ensembles compacts [par hypothèse $h(\mathrm{Sp}\, U)$ est compact] tels que $h^{-1} h(F_1) = F_1$ [théorème 2.2.4 (*b*)] et d'intersection $\{0\}$. Pour $\varepsilon > 0$ donné il existe donc un $F_1 \in F(U)$ tel que $h(F_1) \subset h(\mathcal{V}_\varepsilon)$ i. e. que $F_1 \subset \mathcal{V}_\varepsilon$. Il existe donc un projecteur $f \neq 0$ de M^U tel que $\mathrm{Sp}\, U^f \subset \mathcal{V}_\varepsilon$. On a alors

$$\begin{aligned}&\mathrm{Sp}\, U^f_t \text{ [dans B } (M_f)] \\ &\quad = \{ \overline{(t, \gamma)}, \gamma \in \mathrm{Sp}\, U^f \}^- \subset \{ z \in \mathbf{C}, |z| = 1, \mathrm{Re}\, z \geq 1 - \varepsilon \} \quad \text{(lemme 2.3.8).}\end{aligned}$$

Le théorème 4.1.19 de [33] et le lemme 1.5.2 montrent qu'il existe un unitaire u de M tel que $U_t(x) = uxu^*$ pour tout $x \in M$. Montrons que $u \in M^U$ (il est alors clair que $u \in$ Centre de M^U).

Pour tout projecteur non nul f de M^U on a $ufu^* = f$ donc $uf = fu$. De plus comme M_f est un facteur on a [2.3.10 (*a*)] :

Spectre U^f_t [dans B (M_f)] $= \{ \lambda_1 \lambda_2^{-1}, \lambda_j \in$ Spectre uf dans $M_f \}$.

L'égalité $\Gamma(U^e) = \Gamma(U)$ pour toute représentation U^e réduite de U (lemme 2.3.3) montre donc que pour tout projecteur non nul e de M^U et tout $\varepsilon > 0$ il existe un projecteur non nul f de M^U, $f \leq e$ tel que

$$\inf_{|\lambda|=1} \| uf - \lambda f \| < \varepsilon.$$

Soit alors $\varepsilon > 0$ et (f_α) une famille maximale de projecteurs deux à deux orthogonaux de M^U, avec pour tout α, $f_\alpha \neq 0$ et $\inf_{|\lambda|=1} \| uf_\alpha - \lambda f_\alpha \| \leq \varepsilon$.

La maximalité assure que $\sum f_\alpha = 1$; avec des λ_α ($|\lambda_\alpha| = 1$) convenables on a $\left\| u - \sum \lambda_\alpha f_\alpha \right\| \leq \varepsilon$. On a donc $u \in M^U$.

COROLLAIRE 2.3.11. — *Soient* G *un groupe abélien discret,* U *une représentation de* G *dans un facteur* M. *L'ensemble des noyaux des représentations extérieurement équivalentes à* U *admet un plus grand élément qui est l'orthogonal de* $\Gamma(U)$.

Démonstration. — Nous notons T (U) l'orthogonal de Γ (U). Soient V une représentation de G dans M avec $V \sim U$, et $t \in G$ avec $V_t = 1$. Le lemme 2.3.10 montre que t est dans l'orthogonal de $\Gamma(V) = \Gamma(U)$ donc dans T (U). Montrons l'existence de $V \sim U$ avec $V_t = 1$ pour tout $t \in T(U)$.

Soit H le groupe des unitaires u du centre de M^U tels qu'il existe un $t = t(u) \in T(U)$ avec $uxu^* = U_t(x)$ pour tout $x \in M$. Grace au théorème 2.3.1, $u \to t(u)$ est un homomorphisme de H sur T (U)/Noyau de U, de noyau le groupe T_1 des nombres complexes de module 1.

Or T (U) est discret. D'après [15] il existe donc une application $t \to u_t$ de T (U) dans le groupe unitaire du centre de M^U avec $u_{t_1+t_2} = u_{t_1} u_{t_2}$ pour t_1 et t_2 dans T (U) et $U_t(x) = u_t x u_t^*$ pour $x \in M$, $t \in T(U)$. Le corollaire 2.3.11 résulte alors du lemme suivant que nous démontrons dans un cadre plus général pour la suite.

LEMME 2.3.12. — *Soient* $\mathfrak{A}$ *une algèbre de von Neumann*, G *un groupe abélien localement compact*, G_1 *un sous-groupe fermé de* G, u *un homomorphisme fortement continu de* G_1 *dans le groupe unitaire de* $\mathfrak{A}$. *Il existe un prolongement* v *de* u *en un homomorphisme fortement continu de* G *dans le groupe unitaire de* $\mathfrak{A}$.

Démonstration. — On peut supposer que $\mathfrak{A}$ est engendrée par l'image de u et que $\mathfrak{A}$ est de genre dénombrable. En représentant $\mathfrak{A}$ dans un espace de Hilbert dans laquelle elle a un vecteur totalisateur et séparateur on se ramène au cas $\mathfrak{A} = L^\infty(\Gamma_1, \mu_1)$; où μ_1 est une mesure positive finie sur le dual Γ_1 de G_1, et pour $s \in G_1$, u_s est la fonction $\gamma \to (s, \gamma)$, $\gamma \in \Gamma_1$. En décomposant $\mathfrak{A}$ en produit d'algèbres de von Neumann, on peut de plus supposer μ_1 à support compact. Soit alors K un compact de Γ (dual de G) tel que son image p (K) par l'homomorphisme canonique p de Γ sur Γ_1 soit le support de μ_1.

Soit μ un point extrémal dans le convexe faiblement compact des mesures positives sur K telles que $p(\mu) = \mu_1$. D'après [28] l'application I qui à $f \in L^\infty(\mu_1)$ associe $f \circ p \in L^\infty(\mu)$ est bijective. Pour $t \in G$ soit w_t la fonction $\gamma \to (t, \gamma)$, *et* $v_t = I^{-1}(w_t)$. Alors l'application $t \to v_t$ vérifie les conditions du lemme.

COROLLAIRE 2.3.13. — *Soit* U *une représentation de* G *dans le facteur* M. *Si* $\Gamma/\Gamma(U)$ *est compact il existe une représentation* V *de* G *dans* M *telle que* $V \sim U$ *et* $\mathrm{Sp}\, V = \Gamma(V)\ [= \Gamma(U)]$.

Démonstration. — Comme l'orthogonal T (U) de Γ (U) est un groupe discret la démonstration du corollaire 2.3.11 montre qu'il existe une représentation $V \sim U$ telle que $V_t = 1$ pour tout t dans l'orthogonal de $\Gamma(U) = \Gamma(V)$.

On utilise alors le lemme suivant :

Lemme 2.3.14. — *Soit* V *une représentation de* G *dans le facteur* M. *Pour que* $\mathrm{Sp}\,V = \Gamma(V)$ *il faut et il suffit que* $V_t = 1$ *pour tout* t *dans l'orthogonal de* $\Gamma(V)$.

Résulte immédiatement des lemmes 2.3.8, 2.3.9 et de l'inclusion $\Gamma(V) \subset \mathrm{Sp}\,V$.

Corollaire 2.3.15. — *Soit* σ *un automorphisme d'un facteur* M.

(*a*) *Si le spectre de* σ *dans l'algèbre de Banach* B (M) *n'est multiplicativement invariant par aucun nombre complexe différent de* 1, σ *est un automorphisme intérieur de* M.

(*b*) *Si le spectre de* σ *est différent de l'ensemble des nombres complexes de module* 1, *il existe un entier* $n \neq 0$ *tel que* σ^n *soit un automorphisme intérieur de* M.

Démonstration. — Soit U la représentation du groupe additif Z dans M, qui à $n \in \mathrm{Z}$ associe l'automorphisme σ^n de M. Soit $T_1 = \{ z \in \mathbf{C}, |z| = 1 \}$ le groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1 avec $(n, \gamma) = \gamma^n$ pour $n \in \mathrm{Z}$ et $\gamma \in T_1$. On a (lemme 2.3.8) $\mathrm{Sp}\,U = \{ \bar{\gamma}, \gamma \in \text{Spectre } \sigma \text{ dans } B(M) \}$. Dans les hypothèses de (*a*) on a (en utilisant 2.2.4), $\Gamma(U) = \{1\}$; en utilisant le théorème 2.3.1 (et la compacité de T_1), σ est intérieur. Dans les hypothèses de (*b*) on a $\Gamma(U) \neq T_1$ donc l'orthogonal T (U) de $\Gamma(U)$ contient un $n \neq 0$, l'automorphisme $U_n = \sigma^n$ est alors intérieur (théorème 2.3.1).

Remarques 2.3.16 :

(*a*) *Soit* $\mathcal{H}$ *un espace de Hilbert*, $M = \mathcal{L}(\mathcal{H})$; *rappelons que tout automorphisme de* M *est intérieur. Il existe une représentation du groupe additif* $\mathrm{Z} \times \mathrm{Z}$ *dans* M *telle que* $U_t \neq 1$ *pour* $t \neq 0$ *et que* $M^U = \mathbf{C}$. *On a alors* $\mathrm{Sp}\,U = \Gamma(U) =$ dual de $(\mathrm{Z} \times \mathrm{Z})$ *ce qui prouve que* U *n'est pas extérieurement équivalente à la représentation* V *ou* $V_t = 1$ *pour tout* $t \in \mathrm{Z} \times \mathrm{Z}$. *On a cependant* $\varepsilon(U_t) = \varepsilon(V_t)$ *pour tout* $t \in \mathrm{Z} \times \mathrm{Z}$ (*cf.* 2.2.3).

(*b*) *Le corollaire* 2.3.13 *se généralise vraisemblablement au cas où* $\mathrm{Sp}\,U / \Gamma(U)$ *est compact.*

Proposition 2.3.17. — *Soit* U *une représentation de* G *dans le facteur* M.

(*a*) *Pour tout projecteur non nul* e *de* M^U *il existe une représentation* V *de* G *sur* M *telle que* $V \sim U$ *et* $\mathrm{Sp}\,V \subset \mathrm{Sp}\,U^e$.

(*b*) *On a* $\Gamma(U) = \bigcap_{V \sim U} \mathrm{Sp}\,V$.

Démonstration de (a) :

1° *Cas où e est équivalent à* 1 *relativement à* M. — Soit $u \in \mathrm{M}$ avec $uu^* = e$, $u^* u = 1$. Pour $x \in \mathrm{M}$ et $t \in \mathrm{G}$, soit $\mathrm{V}_t(x) = u^* \mathrm{U}_t(uxu^*) u$. On a $u^* \mathrm{U}_t(u) \in \mathrm{M}$, $u^* \mathrm{U}_t(u)$ unitaire pour tout $t \in \mathrm{G}$, avec

$$u^* \mathrm{U}_{t_1}(u) \mathrm{U}_{t_1}(u^* \mathrm{U}_{t_2}(u)) = u^* \mathrm{U}_{t_1}(e) \mathrm{U}_{t_1+t_2}(u) = u^* \mathrm{U}_{t_1+t_2}(u)$$

pour t_1 et t_2 dans G. Donc V est une représentation de G dans M et $\mathrm{V} \sim \mathrm{U}$. En outre V est isomorphe à la représentation réduite U^e de U par e grâce à l'isomorphisme $x \to uxu^*$ de M sur M_e. On a donc $\mathrm{Sp}\,\mathrm{V} = \mathrm{Sp}\,\mathrm{U}^e$.

2° *Cas où e n'est pas équivalent à* 1 *relativement à* M *et où l'algèbre de von Neumann* M^{U} *n'a pas de projecteur minimal.* — Supposons d'abord M fini, et soit τ la trace sur M telle que $\tau(1) = 1$. Par hypothèse il existe pour tout projecteur f non nul de M^{U} et tout $\varepsilon > 0$ un sous projecteur f_1 de f tel que $f_1 \neq 0$, $\tau(f_1) < \varepsilon$ et $f_1 \in \mathrm{M}^{\mathrm{U}}$.

Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $1/n \leq \tau(e)$ et soit (f_α) une famille maximale de projecteurs de M^{U}, non nuls, tels que $f_\alpha \leq e$, que $\sum \tau(f_\alpha) \leq 1/n$ et que $f_{\alpha_1} f_{\alpha_2} = 0$ pour $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Soit $e_1 = \sum f_\alpha$; on a $\tau(e_1) = 1/n$, en utilisant la maximalité de la famille.

Il existe donc, dans ce cas, un projecteur $e_1 \neq 0$, $e_1 \leq e$, $e_1 \in \mathrm{M}^{\mathrm{U}}$ et une famille (e_β) de projecteurs de M deux à deux orthogonaux, équivalents à e_1 relativement à M et tels que $\sum e_\beta = 1$, $e_1 \in \{ e_\beta \}$.

Cette conclusion reste valable quand M n'est pas un facteur fini car par hypothèse e n'est pas équivalent à 1 relativement à M donc $1 - e$ est (quand M n'est pas fini) somme de projecteurs orthogonaux équivalents à e.

Soit alors F un facteur de type I, f un projecteur minimal de F, et I un isomorphisme de M sur $\mathrm{M}_{e_1} \otimes \mathrm{F}$ tel que $\mathrm{I}(x) = x \otimes f$ pour tout $x \in \mathrm{M}_{e_1}$.

Pour $t \in \mathrm{G}$ soit $\mathrm{V}_t = \mathrm{I}^{-1}(\mathrm{U}_t^{e_1} \otimes 1)\,\mathrm{I}$. Alors V est une représentation de G dans M. Pour $f \in \mathrm{L}^1(\mathrm{G})$ on a $\mathrm{V}(f) = \mathrm{I}^{-1}(\mathrm{U}^{e_1}(f) \otimes 1)\,\mathrm{I}$. On a donc $\mathrm{Sp}\,\mathrm{V} = \mathrm{Sp}\,\mathrm{U}^{e_1}$ et comme $e_1 \leq e$ on a $\mathrm{Sp}\,\mathrm{V} \subset \mathrm{Sp}\,\mathrm{U}^e$.

Pour $x \in \mathrm{M}^{e_1}$ on a $\mathrm{I}(x) = x \otimes f$ donc $\mathrm{V}_t(x) = \mathrm{U}_t^{e_1}(x)$. On a donc $\mathrm{V}^{e_1} = \mathrm{U}^{e_1}$. La conclusion $\mathrm{V} \sim \mathrm{U}$ résulte du lemme suivant :

LEMME 2.3.18. — *Soient* U *et* V *des représentations de* G *dans* M *et e un projecteur non nul de* $\mathrm{M}^{\mathrm{U}} \cap \mathrm{M}^{\mathrm{V}}$. *Si* $\mathrm{U}^e \sim \mathrm{V}^e$ *on a* $\mathrm{U} \sim \mathrm{V}$.

Démonstration. — Par hypothèse il existe une application $t \to u_t$ de G dans M_e telle que $u_t u_t^* = u_t^* u_t = e$ pour $t \in \mathrm{G}$, $u_{t_1} \mathrm{U}_{t_1}(u_{t_2}) = u_{t_1+t_2}$ pour t_1 et t_2 dans G et $u_t x u_t^* = \mathrm{V}_t \mathrm{U}_t^{-1}(x)$ pour tout $x \in \mathrm{M}_e$ et $t \in \mathrm{G}$. Le lemme 1.5.2 détermine une application $t \to v_t$ de G dans M telle que $v_t^* v_t = v_t v_t^* = 1$ pour $t \in \mathrm{G}$ et que $v_t x v_t^* = \mathrm{V}_t \mathrm{U}_t^{-1}(x)$ pour tout $x \in \mathrm{M}$ et $t \in \mathrm{G}$. L'unicité dans 1.5.2 montre que $v_{t_1} \mathrm{U}_{t_1}(v_{t_2}) = v_{t_1+t_2}$ pour t_1 et t_2 dans G. La remarque 1.5.3 (*c*) montre que $t \to v_t$ est fortement continue. On a donc $\mathrm{V} \sim \mathrm{U}$.

3° *Cas où l'algèbre de von Neumann* M^{U} *a un projecteur minimal.*

Lemme 2.3.19. — *Soit* U *une représentation de* G *dans* M *telle que l'algèbre de von Neumann* M^{U} *contienne un projecteur minimal. Il existe alors une représentation* $\mathrm{V} \sim \mathrm{U}$ *telle que* $\mathrm{Sp}\,\mathrm{V} = \Gamma(\mathrm{U})$.

Démonstration. — Soit e un projecteur minimal de M^{U}. On a $\Gamma(\mathrm{U}^e) = \bigcap \mathrm{Sp}\,\mathrm{U}^f$ pour f projecteur non nul de $\mathrm{M}^{\mathrm{U}} \cap \mathrm{M}_e$ donc $\mathrm{Sp}\,\mathrm{U}^e = \Gamma(\mathrm{U}^e) = \Gamma(\mathrm{U})$ (lemme 2.3.3). Donc pour tout s dans l'orthogonal $\mathrm{T}(\mathrm{U})$ de $\Gamma(\mathrm{U})$ on a $\mathrm{U}_s^e = 1$ (2.3.14).

Le lemme 1.5.2 montre donc que pour $s \in \mathrm{T}(\mathrm{U})$ il existe un unique unitaire u_s de M tel que $eu_s = e$ et $\mathrm{U}_s(x) = u_s x u_s^*$ pour tout $x \in \mathrm{M}$. On a $u_s \in \mathrm{M}^{\mathrm{U}}$ car, pour $t \in \mathrm{G}$, $\mathrm{U}_t(u_s)$ vérifie les mêmes conditions que u_s. On vérifie que l'application $s \to u_s$ est multiplicative et fortement continue (1.5.3), donc (lemme 2.3.12), il existe un homomorphisme $t \to v_t$ de G dans le groupe unitaire de M^{U} tel que $v_t = u_t$ pour $t \in \mathrm{T}(\mathrm{U})$.

Pour $t \in \mathrm{G}$ soit $\mathrm{V}_t(x) = v_t^* \mathrm{U}_t(x) v_t$ pour tout $x \in \mathrm{M}$. Alors V est une représentation de G, on a $\mathrm{V} \sim \mathrm{U}$, et $\mathrm{V}_t = 1$ pour t dans l'orthogonal de $\Gamma(\mathrm{U})$ donc (lemme 2.3.14) on a $\mathrm{Sp}\,\mathrm{V} = \Gamma(\mathrm{U})$.

Démonstration de (*b*) *de* 2.3.17. — Pour $\mathrm{V} \sim \mathrm{U}$ on a $\Gamma(\mathrm{U}) = \Gamma(\mathrm{V}) \subset \mathrm{Sp}\,\mathrm{V}$; on a donc $\Gamma(\mathrm{U}) \subset \bigcap \mathrm{Sp}\,\mathrm{V}$ pour $\mathrm{V} \sim \mathrm{U}$. L'inclusion inverse résulte du (*a*) de la proposition 2.3.17.

2.4. Discussion de l'égalité $\mathrm{Sp}\,\mathrm{U} = \Gamma(\mathrm{U})$ quand $\Gamma(\mathrm{U})$ est discret.

Théorème 2.4.1. — *Soient* M *un facteur,* U *une représentation de* G *dans* M *telle que* $\Gamma(\mathrm{U})$ *soit discret. On a* $\mathrm{Sp}\,\mathrm{U} = \Gamma(\mathrm{U})$ *si et seulement si l'algèbre de von Neumann* M^{U} *est un facteur.*

Lemme 2.4.2. — *Soit* U *une représentation de* G *dans l'algèbre de von Neumann* M *telle que* Sp U *soit discret.*

(*a*) *Soit* $x \in \mathrm{M}$, $x \neq 0$. *Il existe* $f \in \mathrm{L}^1(\mathrm{G})$ *telle que* $\mathrm{Sp}_{\mathrm{U}}(\mathrm{U}(f)\,x)$ *soit réduit à un point de* Sp U.

(*b*) *Soit* $y \in \mathrm{M}$ *tel que* $\mathrm{Sp}_{\mathrm{U}}(y)$ *soit réduit à un point. Le support de* y *dans* M *est un élément de* M^{U}.

Démonstration :

(*a*) Soit γ_0 un point de $\mathrm{Sp}_{\mathrm{U}}\, x$ et $f \in \mathrm{L}^1(\mathrm{G})$ telle que $\hat{f}(\gamma_0) \neq 0$ et $\hat{f}(\gamma) = 0$ pour tout $\gamma \in \mathrm{Sp}\, \mathrm{U}$, $\gamma \neq \gamma_0$. On a $\mathrm{U}(f)\, x \neq 0$ par définition de $\mathrm{Sp}_{\mathrm{U}}(x)$, donc $\mathrm{Sp}_{\mathrm{U}}(\mathrm{U}(f)\, x) \neq \emptyset$ et le lemme 2.1.3 (*g*) montre que $\mathrm{Sp}_{\mathrm{U}}(\mathrm{U}(f)\, x) \subset \{\gamma_0\}$

(*b*) Soit $y \in \mathrm{M}(\mathrm{U}, \{\gamma_0\})$. Le lemme 2.1.3 (*c*) et le lemme 2.1.5 montrent que $y^* y \in \mathrm{M}(\mathrm{U}, \{0\}) = \mathrm{M}^{\mathrm{U}}$ d'où 2.4.2 (*b*).

Démonstration de 2.4.1. — Si M^{U} est un facteur, on a $\mathrm{Sp}\, \mathrm{U} = \Gamma(\mathrm{U})$ (2.2.2). Supposons que $\mathrm{Sp}\, \mathrm{U} = \Gamma(\mathrm{U})$. Soient e_1 et e_2 des projecteurs non nuls de M^{U}. Comme M est un facteur, il existe un $x \in \mathrm{M}$ tel que $e_1 x e_2 \neq 0$, donc un $f \in \mathrm{L}^1(\mathrm{G})$ tel que $y = \mathrm{U}(f)(e_1 x e_2)$ vérifie $y \neq 0$, $\mathrm{Sp}_{\mathrm{U}}(y) = \{\gamma_0\}$ pour un $\gamma_0 \in \Gamma$ (2.4.2). On a Support $y \in \mathrm{M}^{\mathrm{U}}$ [2.4.2 (*b*)]. D'autre part $e_1 y = y$, $y e_2 = y$ donc Support $y \leqq e_2$, Support $y^* \leqq e_1$. Soit $e_3 =$ Support y. On a $e_3 \in \mathrm{M}^{\mathrm{U}}$, $e_3 \neq 0$; comme $\gamma_0 \in \Gamma(\mathrm{U})$, il existe

$$x_1 \neq 0, \qquad x_1 \in \mathrm{M}(\mathrm{U}, \{-\gamma_0\}) \cap \mathrm{M}_{e_3}.$$

On a $y x_1 \neq 0$, $y x_1 \in \mathrm{M}^{\mathrm{U}}$ (2.1.5), et $e_1 y x_1 e_2 = y x_1 \neq 0$. Ainsi, pour tout couple (e_1, e_2) de projecteurs non nuls de M^{U} il existe un $x_2 \neq 0$, $x_2 \in \mathrm{M}^{\mathrm{U}}$ tel que $e_1 x_2 e_2 \neq 0$. Donc M^{U} est un facteur.

Proposition 2.4.3. — *Soient* M *un facteur*, U *une représentation de* G *dans* M. *S'il existe un projecteur minimal dans le centre de* M^{U}, *il existe* $\mathrm{V} \sim \mathrm{U}$ *telle que* $\mathrm{Sp}\, \mathrm{V} = \Gamma(\mathrm{U}) = \Gamma(\mathrm{V})$.

Soit f un projecteur minimal du centre de M^{U}. On a (2.2.2), $\Gamma(\mathrm{U}^f) = \mathrm{Sp}\, \mathrm{U}^f$ donc $\mathrm{Sp}\, \mathrm{U}^f = \Gamma(\mathrm{U})$. On applique alors 2.3.17 (*a*).

III. — **Invariant** S

Nous appliquons les résultats de la 2e partie au cas $\mathrm{G} = \mathbf{R}$ et $\mathrm{U}_t = \sigma_t^{\varphi}$ où σ^{φ} est la représentation modulaire associée au poids normal fidèle φ sur le facteur M. Il est commode, ici, d'identifier le groupe dual de $\mathbf{R}$ au groupe multiplicatif $\mathbf{R}_+^*$. Le théorème 1.2.1 montre que la classe d'équivalence extérieure de σ^{φ} est indépendante du choix de φ, donc que $\Gamma(\sigma^{\varphi})$, qui est un sous-groupe *fermé* de $\mathbf{R}_+^*$, est un invariant algébrique de M.

Dans 3.1 nous définissons l'invariant S (M), intersection des spectres des opérateurs modulaires associés aux poids normaux fidèles semi-finis sur M. Puis nous montrons que $0 \notin \mathrm{S}(\mathrm{M})$ est équivalent à « M semi-fini » et que dans ce cas $\mathrm{S}(\mathrm{M}) = \{1\}$.

Dans 3.2 nous montrons, avec les notations ci-dessus, que

$$\mathrm{S}(\mathrm{M}) \cap \mathbf{R}_+^* = \Gamma(\sigma^{\varphi}).$$

Dans 3.3 nous calculons S (M) pour les facteurs construits à partir de groupes ergodiques de transformations bimesurables, le reliant ainsi au « ratio set » de Krieger et montrant que pour tout sous-groupe fermé G de $\mathbf{R}_+^*$ il existe un M tel que $S(M) = G \cup \{0\}$.

Dans 3.4 nous montrons que si $S(M) \neq \{0, 1\}$, T (M) et l'orthogonal de S (M).

Dans 3.5 nous relions l'invariant S à la propriété L_λ de Powers.

Dans 3.6 nous relions les invariants S et T aux invariants r_∞ et ρ d'Araki et Woods dans le cas des produits tensoriels infinis de facteurs de type I. En corollaire nous redémontrons les principaux résultats de la classification d'Araki et Woods [2]. Nous prouvons ensuite que les égalités démontrées dans le cas des facteurs d'Araki-Woods ne sont pas vraies en général. Utilisant l'invariant T nous montrons que la classification des facteurs de type III non hyperfinis n'est pas standard (*voir* 3.6.4).

Dans 3.7 nous montrons, grâce à l'introduction de la notion d'état presque périodique sur une algèbre de von Neumann, l'équivalence pour tout facteur M tel que $S(M) \neq [0, \infty[$ et tout $\lambda \in]0, 1/2[$ entre la propriété L_λ de Powers et la propriété $\lambda/1 - \lambda \in S(M)$. Il en résulte que pour tout $\lambda \in]0, 1/2[$ les propriétés L_λ de Powers et L'_λ d'Araki sont non équivalentes.

3.1. Préliminaires.

Définition 3.1.1. — *Soit* M *un* facteur. *On pose* $S(M) = \cap \operatorname{Sp} \Delta_\varphi$ *quand* φ *décrit l'ensemble des poids normaux fidèles semi-finis sur* M (Δ_φ *désigne l'opérateur modulaire de* φ).

Par construction, S (M) est un sous-ensemble fermé de $\mathbf{R}_+$, et définit un invariant algébrique de M.

Lemme 3.1.2. — *Soit* M *un facteur; les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

(*a*) $0 \notin S(M)$.

(*b*) $S(M) = \{1\}$.

(*c*) M *est semi-fini.*

Les implications $(c) \Rightarrow (b) \Rightarrow (a)$ sont immédiates. Montrons que $(a) \Rightarrow (c)$. Soit φ un poids normal fidèle semi-fini sur M tel que $0 \notin \operatorname{Sp} \Delta_\varphi$.

L'égalité $J_\varphi \Delta_\varphi J_\varphi = \Delta_\varphi^{-1}$ montre qu'il existe $\lambda \geq 1$ tel que $\operatorname{Sp} \Delta_\varphi \subset [\lambda^{-1}, \lambda]$. Pour $t \in \mathbf{R}$ et $x \in M$ on a

$$\pi_\varphi(\sigma_t^\varphi(x)) = e^{it H_\varphi} \pi_\varphi(x) e^{-it H_\varphi}.$$

où $H_\varphi = \operatorname{Log} \Delta_\varphi$ est borné. Le théorème 4.1.15 de [33] et le théorème 7.4 de [30] montrent donc que M est semi-fini.

LEMME 3.1.3. — *Pour que* M *soit fini il faut et il suffit qu'il existe une forme linéaire normale positive fidèle* φ *sur* M *telle que* $0 \notin \mathrm{Sp}\, \Delta_\varphi$.

Si M est un facteur fini il existe une forme linéaire normale positive et fidèle τ sur M telle que $0 \notin \mathrm{Sp}\, \Delta_\tau$. Inversement soit φ une forme linéaire positive normale fidèle sur M telle que $0 \notin \mathrm{Sp}\, \Delta_\varphi$, i. e. telle que Δ_φ soit un opérateur borné.

Soit (x_α) une famille d'éléments de M indexée par un ensemble filtrant A telle que $\| x_\alpha \| \leqq 1$ pour tout $\alpha \in A$ et que $x_\alpha \rightarrow x$ fortement quand $\alpha \rightarrow \infty$. On a $\eta_\varphi(x_\alpha) \rightarrow \eta_\varphi(x)$ dans $\mathcal{H}_\varphi$ quand $\alpha \rightarrow \infty$, donc comme $\Delta_\varphi^{1/2}$ est borné on a

$$\eta_\varphi(x_\alpha^*) = J_\varphi \Delta_\varphi^{1/2} \eta_\varphi(x_\alpha) \rightarrow J_\varphi \Delta_\varphi^{1/2} \eta_\varphi(x) = \eta_\varphi(x^*) \quad \text{quand} \quad \alpha \rightarrow \infty.$$

Le vecteur $\eta_\varphi(1) = \xi$ de $\mathcal{H}_\varphi$ est totalisateur et séparateur pour $\pi_\varphi(M)$ et on a

$$\| \pi_\varphi(x_\alpha^*) \| \leqq 1 \quad \text{et} \quad \pi_\varphi(x_\alpha^*)\, \xi \rightarrow \pi_\varphi(x^*)\, \xi \quad \text{quand} \quad \alpha \rightarrow \infty.$$

On a donc montré que x_α^* tend fortement vers x^* quand $\alpha \rightarrow \infty$. Le lemme 14 (p. 303 de [13]) montre que M est fini.

Pour terminer ces préliminaires rappelons que, d'après [5] (th. 3.4), les propriétés suivantes sont équivalentes pour un poids normal fidèle semi-fini φ sur une algèbre de von Neumann M :

3.1.4 (*a*) : Pour tout $x > 0$, $x \in M$, il existe une forme linéaire ψ positive normale et σ_t^φ-invariante pour tout $t \in \mathbf{R}$, telle que $\psi(x) > 0$.

3.1.4 (*b*) : La restriction de φ à M_φ est une trace normale fidèle semi-finie sur M_φ.

3.1.4 (*c*) : Il existe une espérance conditionnelle normale fidèle E_φ de M sur M_φ telle que $\varphi \circ E_\varphi = \varphi$.

3.1.4 (*d*) : Il existe une famille $(\psi_i)_{i \in I}$ de formes linéaires positives normales dont les supports sont deux à deux orthogonaux telle que $\varphi(x) = \sum \psi_i(x)$ pour tout $x \in M_+$.

3.1.4 (*e*) : Il existe une espérance conditionnelle normale fidèle et σ_t^φ-invariante pour tout $t \in R$ de M sur M_φ.

DÉFINITION 3.1.5. — *Soit* M *une algèbre de von Neumann. On appelle poids normal fidèle strictement semi-fini sur* M *tout poids normal fidèle semi-fini* φ *vérifiant les conditions équivalentes* 3.1.4.

3.2. ÉGALITÉ $S(M) \cap R_+^* = \Gamma(\sigma_\varphi)$.

THÉORÈME 3.2.1. — *Soit* M *un facteur et pour tout poids normal fidèle semi-fini* φ *sur* M *soit* σ^φ *la représentation* $t \to \sigma_t^\varphi$ *de* $\mathbf{R}$ *dans* M. *Si on identifie le groupe* $\mathbf{R}_+^*$ *au dual de* $\mathbf{R}$, *en posant* $(t, \lambda) = \lambda^{it}$ *pour tout* $t \in \mathbf{R}$ *et* $\lambda \in \mathbf{R}_+^*$, *on a*

$$S(M) \cap \mathbf{R}_+^* = \Gamma(\sigma^\varphi).$$

Démonstration. — Le théorème 1.2.1 montre que pour tout couple de poids normaux fidèles semi-finis φ_1 et φ_2 on a $\sigma^{\varphi_1} \sim \sigma^{\varphi_2}$ au sens de la définition 2.2.3. Le théorème 1.2.4 montre que pour toute représentation U de $\mathbf{R}$ dans M, appartenant à la classe d'équivalence ci-dessus, il existe un poids normal fidèle semi-fini φ sur M tel que $U = \sigma^\varphi$. Le théorème 3.2.1 résulte donc de la proposition 2.3.17 et du lemme suivant :

LEMME 3.2.2. — *Soit* φ *un poids normal fidèle semi-fini sur* M. *Avec l'identification ci-dessus de* $\mathbf{R}_*^+$ *au dual de* $\mathbf{R}$ *on a*

$$\operatorname{Sp} \sigma^\varphi = \operatorname{Sp} \Delta_\varphi \cap \mathbf{R}_+^*.$$

Soit $x \in \mathfrak{N}_\varphi$ et soit μ une mesure finie sur $\mathbf{R}$. Pour $\lambda \in \mathbf{R}_*^+$ on a

$$\hat{\mu}(\lambda^{-1}) = \int_{\mathbf{R}} \lambda^{it} \, d\mu(t).$$

La fonction $\hat{\mu}$ est continue bornée définie sur $]0, \infty[$. Comme Δ_φ est positif autoadjoint non singulier, l'expression $\hat{\mu}(\Delta_\varphi^{-1})$ a un sens et définit un opérateur borné dans $\mathcal{H}_\varphi$. Soit $x \in \mathfrak{N}_\varphi$. Montrons que $y = \int_{\mathbf{R}} \sigma_t^\varphi(x) \, d\mu(t) \in \mathfrak{N}_\varphi$ et que

$$\hat{\mu}(\Delta_\varphi^{-1}) \eta(x) = \eta\left(\int_{\mathbf{R}} \sigma_t^\varphi(x) \, d\mu(t)\right). \tag{1}$$

On peut supposer que μ est positive de masse 1. La semi-continuité inférieure faible du poids φ montre que l'ensemble

$$\{ y \in M, \| y \| \leq \| x \|, \varphi(y^* y) \leq \varphi(x^* x) \}$$

est fermé pour la topologie $\star$-forte. Comme cet ensemble est convexe, il est faiblement fermé et comme $y = \int \sigma_t^\varphi(x) \, d\mu(t)$ lui est faiblement adhérent, on a montré que $\varphi(y^* y) < \infty$, donc $y \in \mathfrak{N}_\varphi$. Donc $\eta(y)$ a un sens.

De plus pour tout $z \in \mathfrak{N}_\varphi$ on a

$$\langle \eta(y), \eta(z) \rangle = \varphi(z^* y) = \int_{\mathbf{R}} \varphi(z^* \sigma_t^\varphi(x))\, d\mu(t)$$
$$= \int_{\mathbf{R}} \langle \Delta_\varphi^{it} \eta(x), \eta(z) \rangle\, d\mu(t) = \langle \hat{\mu}(\Delta_\varphi^{-1}) \eta(x), \eta(z) \rangle.$$

D'où (1).

Notons σ la représentation de $L^1(R)$ associée à σ^φ. Soit $f \in L^1(R)$. On a $\sigma(f) = 0 \Leftrightarrow \sigma(f)x = 0$ pour tout $x \in \mathfrak{N}_\varphi \Leftrightarrow \hat{f}(\Delta_\varphi^{-1}) \eta_\varphi(x)$ pour tout $x \in \mathfrak{N}_\varphi \Leftrightarrow \hat{f}$ nulle sur $\operatorname{Sp} \Delta_\varphi^{-1} \cap \mathbf{R}_+^* = \operatorname{Sp} \Delta_\varphi \cap R_+^*$.

Corollaire 3.2.3. — *Soient* M *un facteur,* φ *un poids normal fidèle semi-fini sur* M.

(*a*) $S(M) \cap \mathbf{R}_+^*$ *est un sous-groupe multiplicatif fermé de* $\mathbf{R}_+^*$.

(*b*) $\operatorname{Sp} \Delta_\varphi$ *est invariant par multiplication par tout élément non nul de* $S(M)$.

Résulte facilement de 2.2.4, 3.2.1 et 3.2.2.

Soient M un facteur, φ un poids normal fidèle semi-fini sur M, e un projecteur non nul de $M_\varphi = \{ x \in M, \sigma_t^\varphi(x) = x \text{ pour tout } t \in \mathbf{R} \}$. La proposition 3.3 (2°) de [30] montre que pour $x \in M^+$ et $\varphi(x) < \infty$, on a $exe \in M_e^+$, $\varphi(exe) < \infty$.

L'application ψ de M_e^+, dans $[0, \infty]$ définie par l'égalité $\psi(x) = \varphi(x)$ pour $x \in M_e^+$ est donc un poids semi-fini normal fidèle sur M_e.

Définition 3.2.4. — *Le poids* ψ *est appelé poids réduit de* φ *par* e *et noté* φ_e.

Corollaire 3.2.5. — *Soit* M *un facteur.*

(*a*) *Pour tout poids normal fidèle semi-fini* φ *sur* M *on a*

$$S(M) \cap R_+^* = \cap \operatorname{Sp}(\Delta_{\varphi_e}) \cap \mathbf{R}_+^*,$$

où e *décrit l'ensemble des projecteurs non nuls de* M_φ.

(*b*) *Même conclusion que dans* (*a*) *quand* e *décrit l'ensemble des projecteurs non nuls du centre de* M_φ.

(*c*) *On a* $S(M) = \cap \operatorname{Sp} \Delta_\varphi$ *quand* φ *décrit l'ensemble des poids normaux fidèles strictement semi-finis sur* M.

(*d*) *Si* M *est de genre dénombrable, on a* $S(M) = \cap \operatorname{Sp} \Delta_\varphi$ *quand* φ *décrit l'ensemble des états normaux fidèles sur* M, *à moins que* M *ne soit un facteur proprement infini semi-fini; dans ce dernier cas, le premier membre vaut* $\{1\}$ *et le second* $\{0, 1\}$.

Démonstration. — (*a*) et (*b*) résultent de (3.2.1), (3.2.2), (2.2.2), et du lemme suivant :

Lemme 3.2.6. — *Soient* φ *un poids normal fidèle semi-fini sur* M, *e un projecteur non nul de* M_φ, ψ *le poids réduit de* φ *par e. La représentation* σ^ψ *de* **R** *dans* M_e *est la représentation réduite de* σ^φ *par e.*

Comme tout élément de $\mathfrak{N}_\psi$ est dans $\mathfrak{N}_\varphi$, il est immédiat que les conditions K. M. S. (*cf.* [5], déf. 4.1) sont remplies par la représentation réduite de σ^φ par *e* relativement au poids ψ sur M_e.

(*c*) Le cas M semi-fini est immédiat. Soient M un facteur purement infini, φ un poids normal fidèle strictement semi-fini sur M ([5], cor. 3.5). Pour montrer que M vérifie (*c*) il suffit de montrer que pour tout projecteur non nul *e* de M_φ il existe un poids normal fidèle ψ strictement semi-fini sur M tel que $\mathrm{Sp}\,\Delta_\psi = \mathrm{Sp}\,\Delta_{\varphi_e}$ et d'appliquer (*a*).

Il existe un facteur F de type I et un isomorphisme de M sur $M_e \otimes F$. Sur $M_e \otimes F$ le poids $\varphi_e \otimes$ (Trace) est strictement semi-fini normal fidèle car φ_e est un poids strictement semi-fini normal fidèle sur M_e (*voir* [6], prop. 6.2). Soit ψ le poids correspondant sur M; on a

$$\mathrm{Sp}\,\Delta_\psi = \mathrm{Sp}\,(\Delta_{\varphi_e} \otimes 1) = \mathrm{Sp}\,\Delta_{\varphi_e}.$$

(*d*) Si M est de genre dénombrable et purement infini, soit φ une forme linéaire positive normale fidèle sur M et soit *e* un projecteur non nul de M_φ. Il existe un isomorphisme I de M sur M_e. Comme φ_e est une forme linéaire positive normale fidèle sur M_e, il existe sur M une forme linéaire positive normale fidèle $\psi = (\varphi_e) \circ \mathrm{I}$ telle que $\mathrm{Sp}\,\Delta_\psi = \mathrm{Sp}\,\Delta_{\varphi_e}$. Il suffit alors d'appliquer (*a*).

Si M est fini, l'égalité cherchée est immédiate et les deux membres sont égaux à $\{1\}$.

Si M est semi-fini proprement infini de genre dénombrable, on a $S(M) = \{1\}$ (3.1.2). Montrons que pour tout $\lambda > 0$, $\lambda \neq 1$ il existe une forme linéaire positive normale φ sur M telle que $\lambda \notin \mathrm{Sp}\,\Delta_\varphi$; le lemme 3.1.3 montrera alors la dernière conclusion de 3.2.5.

La remarque 1.3.3 et le théorème 1.3.4 montrent que pour tout T_0 il existe une forme linéaire positive normale fidèle φ sur M telle que $\sigma^\varphi_{T_0} = 1$, i. e. que $\Delta_\varphi^{iT_0} = 1$. Si $\lambda^{iT_0} \neq 1$ on a $\lambda \notin \mathrm{Sp}\,\Delta_\varphi$, d'où la conclusion.

Corollaire 3.2.7. — *Soient* M *un facteur et* φ *un poids normal fidèle semi-fini sur* M.

(*a*) *Si* M_φ *est un facteur on a* $S(M) = \mathrm{Sp}\,\Delta_\varphi$.

(*b*) *Si* $S(M) = \{0, 1\}$ *le centre de* M_φ *ne contient aucun projecteur minimal.*

(*a*) résulte de 3.2.5 (*b*).

(*b*) résulte de 2.4.3.

COROLLAIRE 3.2.8 :

(*a*) *Soient* M *un facteur*, N *un facteur semi-fini. On a* $S(M \otimes N) = S(M)$.

(*b*) *Soient* M *un facteur*, *e un projecteur non nul de* M. *On a* $S(M) = S(M_e)$.

(*c*) *Soient* $\mathcal{H}$ *un espace de Hilbert*, M *un facteur dans* $\mathcal{H}$. *On a* $S(M) = S(M')$.

(*a*) Soient φ un poids normal fidèle semi-fini sur M, τ une trace normale fidèle semi-finie sur N, $\psi = \varphi \otimes \tau$. On a $\sigma_t^\psi = \sigma_t^\varphi \otimes 1$ pour tout $t \in \mathbf{R}$. On a $M_\psi = M_\varphi \otimes N$ (*cf.* [39], p. 14, exemple 2), donc

$$\text{Centre } M_\psi = \text{Centre } M_\varphi \otimes 1.$$

On applique alors 3.2.5 (*b*) et le théorème 2.6.6 de [33].

(*b*) résulte de 3.2.1, 3.2.6 et 2.3.3 et du fait que M est semi-fini si et seulement si M_e est semi-fini.

(*c*) Soient M_1 et M_2 des facteurs, j un antiisomorphisme de M_1 sur M_2, φ_2 un poids normal fidèle semi-fini sur M_2, $\varphi_1 = \varphi_2 \circ j$ le poids normal fidèle semi-fini correspondant sur M_1. Pour tout $t \in \mathbf{R}$ on a

$$\sigma_t^{\varphi_1} = j^{-1} \circ \sigma_{-t}^{\varphi_2} \circ j \quad (1.2.10).$$

On a donc $\Gamma(\sigma^{\varphi_1}) = \Gamma(\sigma^{\varphi_2})$ et $S(M_1) = S(M_2)$ (3.1.2 et 3.2.1). L'assertion (*c*) résulte alors de (*a*), (*b*).

3.3. CALCUL DE L'INVARIANT S POUR LE PRODUIT CROISÉ D'UNE ALGÈBRE DE VON NEUMANN SEMI-FINIE PAR UN GROUPE D'AUTOMORPHISMES.

THÉORÈME 3.3.1. — *Soient* $\lambda > 0$, E *une espérance conditionnelle normale fidèle du facteur* M *sur une sous-algèbre de von Neumann semi-finie* $N \subset M$ *telle que* $N' \cap M \subset N$, $\mathcal{G}$ *un sous-groupe de* $\mathfrak{N}(E)$ *tel que* M *soit l'algèbre de von Neumann engendrée par* N *et* $\mathcal{G}$. *Soient* τ *une trace normale fidèle semi-finie sur* N *et pour* $u \in \mathcal{G}$, ρ_u *l'opérateur positif affilié au centre de* N *tel que* $\tau(uxu^*) = \tau(\rho_u x)$ *pour tout* $x \in N_+$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(*a*) $\lambda \in S(M)$.

(*b*) *Pour tout* $\varepsilon > 0$, *et tout projecteur non nul e du centre de* N, *il existe un projecteur non nul* $d \leq e$ *du centre de* N, *et un* $u \in \mathcal{G}$ *tels que* $u d u^* \leq e$ *et que le spectre de* $\rho_u^{-1} d$ *dans* N_d *soit contenu dans l'intervalle* $]\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon[$.

LEMME 3.3.2. — *Soient* F *un fermé de* $\mathbf{R}_+^*$, χ_F *sa fonction caractéristique,* M, N, E, $\mathcal{G}$, τ, ρ_u *comme dans* 3.3.1, $\varphi = \tau \circ E$, $\sigma = \sigma^\varphi$ *comme ci-dessus, et e un projecteur non nul du centre de* N. *On a alors*

$$\bigvee_{x \in M(\sigma, F) \cap M_e} \text{Support } x = \bigvee_{u \in \mathcal{G}} e(u^* eu) \chi_F(\rho_u^{-1}).$$

Démonstration. — Soit $d = \mathrm{V}_{u \in \mathcal{G}}\, e(u^* eu) \chi_F(\rho_u^{-1})$. On a $d \in$ Centre N. Pour $u \in \mathcal{G}$ et $f \in L^1(\mathbf{R})$ on a

$$\sigma(f)(eu\chi_F(\rho_u^{-1})e) = e[\sigma(f)(u)]\chi_F(\rho_u^{-1})e$$

car e et $\chi_F(\rho_u^{-1})$ sont des éléments de M^σ. D'après (1.4.5),

$$\sigma(f)u = \int f(t)\sigma_t^\varphi(u)\,dt = \int f(t)\,u\,\rho_u^{it}\,dt = u\hat{f}(\rho_u^{-1}).$$

Cela montre que $\sigma(f)(eu\chi_F(\rho_u^{-1})e) = 0$ pour tout $f \in L^1(\mathbf{R})$ tel que $\hat{f}$ s'annule sur un voisinage de F, car alors $\hat{f}(\rho_u^{-1})\chi_F(\rho_u^{-1}) = 0$. On a donc $eu\chi_F(\rho_u^{-1})e \in M(\sigma, F) \cap M_e$, et on a montré que d est inférieur à $\bigvee_{x \in M(\sigma, F) \cap M_e}$ Support x, car support $eu\chi_F(\rho_u^{-1})e = e(u^* eu)\chi_F(\rho_u^{-1})$. Soit $x \in M(\sigma, F) \cap M_e$ et montrons que $xd = x$; on aura alors prouvé 3.3.2.

Soit $f \in L^1(\mathbf{R})$ telle que $\hat{f}$ s'annule sur un voisinage de F. On a pour $t \in R$ et $y \in M$:

$$E(\sigma_t^\varphi(y)) = \sigma_t^\varphi(E(y)) = E(y) \quad (1.4.3)$$

donc pour $u \in \mathcal{G}$:

$$E(u^* \sigma(f)x) = \int f(t)\,E(u^* \sigma_t^\varphi(x))\,dt = \int f(t)\,E(\sigma_{-t}^\varphi(u^*)x)\,dt.$$

On a

$$\sigma_{-t}^\varphi(u^*) = (\sigma_{-t}^\varphi(u))^* = (u\rho_u^{-it})^* = \rho_u^{it}u^*,$$

donc comme $\sigma(f)x = 0$ par hypothèse, il vient

$$\int f(t)\rho_u^{it}E(u^* x)\,dt = 0 \qquad \text{et} \qquad \hat{f}(\rho_u^{-1})E(u^* x) = 0.$$

Pour tout $\gamma \notin F$ il existe $f \in L^1(\mathbf{R})$ telle que $\hat{f}(\gamma) \neq 0$ et que $\hat{f}$ s'annule sur un voisinage de F. Comme $E(u^* x) \in N$ et $\rho_u \in$ Centre N on a donc montré que le support de $E(u^* x)$ est inférieur à $\chi_F(\rho_u^{-1})$.

On a $ex = xe = x$, donc

$$E(u^* x)e = E(u^* xe) = E(u^* x)$$

et

$$E(u^* x)(u^* eu) = (u^* eu)E(u^* x) = E(u^* ex) = E(u^* x).$$

On a donc montré que $E(u^* x)d = E(u^* x)$.

Alors $E(u^*(xd - x)) = 0$ pour tout $u \in \mathcal{G}$, et comme $(\mathcal{G} \cup N)'' = M$ on a $xd - x = 0$.

Démonstration de 3.3.1. — Soient $\varphi = \tau \circ E$, σ la représentation $t \to \sigma_t^\varphi$ de $\mathbf{R}$ dans M. On a $\lambda \in S(M)$ si et seulement si $\lambda \in \Gamma(\sigma)$. Or $N \subset M^\sigma$ (1.4.3), donc Centre $M^\sigma \subset N' \cap M \subset N$ et Centre $M^\sigma \subset$ Centre N, donc (2.2.2), on a $\Gamma(\sigma) = \cap \operatorname{Sp} \sigma^e$ pour e projecteur non nul du centre de N.

$(a) \Rightarrow (b)$: Soit $F = [\lambda - \varepsilon/2, \lambda + \varepsilon/2]$. Par hypothèse

$$\bigvee_{x \in M(\sigma, F) \cap M_e} \text{Support } x \neq 0$$

donc (3.3.2), il existe $u \in \mathcal{G}$ tel que $d = eu^* eu \chi_F(\rho_u^{-1}) \neq 0$. Par construction d est un projecteur non nul du centre de N, et $d \leqq e$, $u\, du^* \leqq e$ et le spectre de $\rho_u^{-1} d$ dans N_d est contenu dans F donc dans $]\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon[$.

$(b) \Rightarrow (a)$: Soient $\varepsilon > 0$, e un projecteur non nul du centre de N et $F = [\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon]$. Par hypothèse

$$\bigvee_{u \in \mathcal{G}} e(u^* eu) \chi_F(\rho_u^{-1}) \neq 0$$

donc

$$M(\sigma, F) \cap M_e \neq \{0\}.$$

Donc $\lambda \in \operatorname{Sp} \sigma^e$ pour tout projecteur non nul du centre de N.

Définition 3.3.3. — *Soit $\mathcal{G}$ un groupe agissant presque librement* (1.4.7) *sur un espace mesurable Ω muni d'une mesure positive σ-finie μ, quasi-invariante par $\mathcal{G}$. On appelle « ratio set » de $\mathcal{G}$, l'ensemble $r(\mathcal{G})$ des $\lambda \geqq 0$ possédant la propriété suivante :*

Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout sous-ensemble mesurable non négligeable $A \subset \Omega$, il existe un ensemble mesurable non négligeable $B \subset A$ et un $s \in \mathcal{G}$ tel que $s(B) \subset A$ et que $|(ds^{-1}\mu/d\mu)(\omega) - \lambda| < \varepsilon$ pour tout $\omega \in B$.

Cette définition est celle de Krieger [23]. Le théorème qui suit montre que $r(\mathcal{G})$ est un invariant algébrique de $W^*(\mathcal{G}, \Omega)$.

Corollaire 3.3.4. — *Soit $\mathcal{G}$ un groupe agissant ergodiquement et presque librement sur un espace mesurable Ω muni d'une mesure positive σ-finie μ, quasi-invariante par $\mathcal{G}$. On a $S(W^*(\mathcal{G}, \Omega)) = r(\mathcal{G})$.*

On a $0 \notin r(\mathcal{G})$ si et seulement si il existe une mesure $\nu \sim \mu$, σ-finie et invariante par $\mathcal{G}$ donc par un résultat classique si et seulement si $W^*(\mathcal{G}, \Omega)$ est un facteur semi-fini, i. e. $0 \notin S(W^*(\mathcal{G}, \Omega))$.

Soient $\mathfrak{A}$ l'algèbre de von Neumann $L^\infty(\Omega, \mu)$, $I(\mathfrak{A})$ son image dans $W^*(\mathcal{G}, \Omega)$ comme dans la proposition 1.4.6. Alors $I(\mathfrak{A})$ est abélienne maximale dans $W^*(\mathcal{G}, \Omega)$ donc les hypothèses de 3.3.1 sont remplies. Pour toute mesure positive σ-finie $\nu \sim \mu$ sur Ω, l'égalité $\tau_\nu(\mathrm{I}(x)) = \int_\Omega x(\omega)\, d\nu(\omega)$ pour tout $x \in \mathrm{L}^\infty(\Omega, \mu)^+$, définit une trace normale fidèle semi-finie sur $\mathrm{I}(\mathfrak{A})$. Pour $s \in \mathcal{G}$ on a, avec les notations de 1.4.8 :

$$\tau_\nu(\mathrm{U}_s . \mathrm{U}_s^{-1}) = \tau_{s^{-1}\nu} \quad \text{et} \quad \rho_s^{it} = \mathrm{I}((ds^{-1}\nu/d\nu)^{it}) \quad \text{pour} \quad t \in \mathbf{R}.$$

L'énoncé du théorème 3.3.1 reste valable si on effectue sur $\mathbf{R}_+^*$ la symétrie $\lambda \to \lambda^{-1}$, c'est-à-dire si l'on remplace ρ_u par ρ_u^{-1}. On obtient alors immédiatement la conclusion 3.3.4.

COROLLAIRE 3.3.5. — *Pour tout sous-groupe* fermé $\mathrm{G} \neq \{1\}$ *de* $\mathbf{R}_+^*$ *il existe un facteur* M *opérant dans un espace de Hilbert séparable, tel que* $\mathrm{S}(\mathrm{M}) = \{0, 1\}$ *et que* $\mathrm{S}(\mathrm{M} \otimes \mathrm{M}) = \{0\} \cup \mathrm{G}$.

En effet d'après ([25], § 4 et [27], § 4) il existe pour tout sous-groupe fermé $\mathrm{G} \neq \{1\}$ de $\mathbf{R}_+^*$ un groupe ergodique presque libre $\mathcal{G}$ tel que $r(\mathcal{G}) = \{0, 1\}$ et $r(\mathcal{G} \times \mathcal{G}) = \{0\} \cup \mathrm{G}$. Le corollaire 3.3.5 se déduit de ([34], (4), p. 41).

3.4. COMPARAISON DES INVARIANTS S ET T. — Aucun des deux invariants S et T ne détermine complètement l'autre, mais :

THÉORÈME 3.4.1. — *Soit* M *un facteur. Si* $\mathrm{S}(\mathrm{M}) \neq \{0, 1\}$, $\mathrm{T}(\mathrm{M})$ *est l'orthogonal de* $\mathrm{S}(\mathrm{M}) \cap \mathbf{R}_+^*$ [*pour la dualité* $(t, \lambda) \to \lambda^{it}$].

Démonstration. — Si $\mathrm{S}(\mathrm{M}) = \{1\}$, M est semi-fini donc $\mathrm{T}(\mathrm{M}) = \mathbf{R}$.

Si $\mathrm{S}(\mathrm{M}) \neq \{1\}$ et $\mathrm{S}(\mathrm{M}) \neq \{0, 1\}$ le groupe quotient de $\mathbf{R}_+^*$ par $\mathrm{S}(\mathrm{M}) \cap \mathbf{R}_+^*$ est compact. Soit φ un poids semi-fini normal fidèle sur M. Alors $\mathbf{R}_+^*/\Gamma(\sigma^\varphi)$ est compact, donc (th. 2.3.1) l'orthogonal de $\Gamma(\sigma^\varphi)$ est l'ensemble $\mathrm{T}(\mathrm{M})$ des $\mathrm{T}_0 \in \mathbf{R}$ tels qu'il existe un unitaire u du centre de M_φ avec $\sigma_{\mathrm{T}_0}^\varphi(x) = uxu^*$ pour tout $x \in \mathrm{M}$.

THÉORÈME 3.4.2. — *Soient* M *un facteur et* α *l'injection canonique de* $\mathbf{R}_+^*$ *dans son compactifié presque-périodique. Alors* $\mathrm{T}(\mathrm{M})$ *est l'orthogonal* [*pour la dualité de* $\mathbf{R}$ *avec* $\overline{\alpha(\mathbf{R}_+^*)}$] *de l'intersection des* $\alpha\,\overline{(\mathrm{Sp}\,\Delta_\varphi \cap \mathrm{R}_+^*)}$ *quand* φ *décrit l'ensemble des poids normaux fidèles semi-finis sur* M.

LEMME 3.4.3. — *Soient* G_1 *et* G_2 *des groupes abéliens localement compacts,* h *un homomorphisme continu de* G_1 *dans* G_2, $\tilde{h}$ *l'homomorphisme transposé du dual de* G_2 *dans le dual de* G_1, U *et* V *des représentations de* G_2 *dans le facteur* M.

(*a*) *Si* $\mathrm{U} \sim \mathrm{V}$ *on a* $\mathrm{U} \circ h \sim \mathrm{V} \circ h$.

(*b*) $\mathrm{Sp}\,\mathrm{U} \circ h$ *est la fermeture de* $\tilde{h}(\mathrm{Sp}\,\mathrm{U})$.

L'assertion (a) est immédiate. Montrons (b). Soit μ une mesure finie sur G_1 et $h\,\mu$ son image sur G_2; on a

$$\int_{G_1} f(h(t))\,d\mu(t) = \int_{G_2} f(s)\,dh\,\mu(s)$$

pour toute fonction continue bornée f sur G_2. On a donc $(U \circ h)(\mu) = U(h\,\mu)$ car pour tout $x \in M$ et tout $\varphi \in M_*$:

$$\varphi((U \circ h)(\mu)\,x) = \int_{G_1} \varphi(U_{h(t)}(x))\,d\mu(t), \qquad \varphi(U(h\,\mu)\,x) = \int_{G_2} \varphi(U_s(x))\,dh\,\mu(s).$$

Supposons $U \circ h(\mu) = 0$. On a $U(h\,\mu) = 0$. Par suite $(h\,\mu)^\wedge(\gamma) = 0$ pour tout $\gamma \in \mathrm{Sp}\,U$, car pour $f \in L^1(G_2)$ on a $U((h\,\mu) \star f) = 0$, donc

$$(h\,\mu)^\wedge(\gamma)\,\hat{f}(\gamma) = 0.$$

Comme $(\tilde{h}\,\mu)^\wedge(\gamma) = \hat{\mu}(\tilde{h}(\gamma))$ on a ainsi montré que $\tilde{h}(\mathrm{Sp}\,U) \subset \mathrm{Sp}(U \circ h)$. Soit $\gamma \notin (\tilde{h}(\mathrm{Sp}\,U))^-$. Il existe un voisinage $\mathcal{V}_1$ de γ et un voisinage $\mathcal{V}_2$ de $\mathrm{Sp}\,U$ tels que $\tilde{h}(\mathcal{V}_2) \cap \mathcal{V}_1 = \emptyset$. Pour toute mesure finie μ sur G_1 telle que Support $\hat{\mu} \subset \mathcal{V}_1$ on a $(h\,\mu)^\wedge(\gamma) = 0$ pour tout $\gamma \in \mathcal{V}_2$ donc $U(h\,\mu) = 0$ et donc $U \circ h(\mu) = 0$. On a ainsi montré que $\gamma \notin \mathrm{Sp}\,U \circ h$.

Démonstration de 3.4.2. — Soit φ un poids normal fidèle semi-fini sur M et soit $\sigma^\varphi \circ i$ la représentation du groupe additif $\mathbf{R}$, muni de la topologie discrète, dans M, obtenue en composant σ^φ avec l'injection canonique i de $\mathbf{R}$ discret dans $\mathbf{R}$.

Les théorèmes 1.3.2 et 2.3.1 montrent que T (M) est l'orthogonal de $\Gamma(\sigma^\varphi \circ i)$ et en utilisant le lemme 3.2.6 on a $\Gamma(\sigma^\varphi \circ i) = \bigcap \mathrm{Sp}(\sigma^{\varphi_e} \circ i)$ quand e décrit l'ensemble des projecteurs non nuls de M_φ.

On a $\Gamma(\sigma^\varphi \circ i) = \Gamma(\sigma^\psi \circ i)$ pour tout poids ψ normal fidèle semi-fini sur M [3.4.3 (a)], d'où $\Gamma(\sigma^\varphi \circ i) \subset \bigcap \mathrm{Sp}(\sigma^\psi \circ i)$ quand ψ décrit l'ensemble des poids normaux fidèles semi-finis sur M.

Pour tout projecteur non nul e de M_φ il existe un poids ψ normal fidèle semi-fini sur M tel que $\mathrm{Sp}\,\sigma^\psi \subset \mathrm{Sp}\,\sigma^{\varphi_e}$ (2.3.17 et 1.2.4). On a alors $\mathrm{Sp}(\sigma^\psi \circ i) \subset \mathrm{Sp}(\sigma^{\varphi_e} \circ i)$ [3.4.3 (b)]. Il en résulte que $\Gamma(\sigma^\varphi \circ i) = \bigcap \mathrm{Sp}(\sigma^\psi \circ i)$ pour ψ poids normal fidèle semi-fini sur M.

Le théorème 3.4.2 résulte alors de 3.4.3 (b) et 3.2.2.

THÉORÈME 3.4.4. — *Pour tout* $T_0 \in \mathbf{R}$, *il existe un facteur* M *opérant dans un espace de Hilbert séparable, tel que* $T(M) = \{ n\,T_0,\ n \in \mathbf{Z} \}$ *mais* $S(M) = \{ 0, 1 \}$.

Ce théorème montre que l'invariant T ne détermine pas l'invariant S.

Démonstration. — Soit G l'orthogonal de $\{ n\,T_0, n \in \mathbf{Z} \}$ dans $\mathbf{R}_+^*$, et (corollaire 3.3.5) M tel que $S(M) = \{0, 1\}$, $S(M \otimes M) = \{0\} \cup G$. Le théorème 3.4.1 montre que $T(M \otimes M) = \{ n\,T_0, n \in Z \}$. On a

$$T(M) = T(M \otimes M) = \{ n\,T_0, n \in \mathbf{Z} \} \quad [1.3.4\,(c)].$$

3.5. Interprétation spatiale de S (M) et relation avec la propriété L_λ de Powers.

Théorème 3.5.1. — *Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert,* M *un facteur opérant dans $\mathcal{H}$, $\lambda \geqq 0$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(*a*) $\lambda \in S(M)$.

(*b*) *Pour tout $\xi \neq 0$, $\xi \in \mathcal{H}$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in M$ et $y \in M'$ tels que $\| x\xi \| > 1$, $\| x\xi - y\xi \| < \varepsilon$ et $\| x^*\xi - \lambda\, y^*\xi \| < \varepsilon$.*

Lemme 3.5.2. — *Soient ξ un vecteur totalisateur et séparateur pour l'algèbre de von Neumann* P *opérant dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$, φ la forme linéaire positive normale fidèle sur* P *telle que $\varphi(x) = \langle x\xi, \xi \rangle$ pour $x \in P$, et $\lambda \geqq 0$, $\varepsilon > 0$.*

(*a*) *Soient $x \in P$ $y \in P'$ tels que*

$$\| \lambda^{1/2} x\xi - y\xi \| < \varepsilon, \qquad \| x^*\xi - \lambda^{1/2} y^*\xi \| < \varepsilon \qquad \textit{et} \qquad \| x\xi \| > 1;$$

alors distance $(\lambda^{1/2}, \operatorname{Sp} \Delta_\varphi^{1/2}) < 2\,\varepsilon$.

(*b*) *Si distance $(\lambda^{1/2}, \operatorname{Sp} \Delta_\varphi^{1/2}) < \varepsilon$, il existe $x \in P$ et $y \in P'$ vérifiant les conditions* (*a*).

Démonstration. — Soit U l'isométrie de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{H}_\varphi$ telle que $U\,x\,\xi = \eta_\varphi(x)$. L'opérateur $S = U^{-1} S_\varphi U$ est la fermeture de l'opérateur de domaine $P\,\xi$ qui à $x\,\xi\,(x \in P)$, associe $x^*\,\xi$; son adjoint F est la fermeture de l'opérateur de domaine $P'\,\xi$, qui à $y\,\xi\,(y \in P')$ associe $y^*\,\xi$. On a $U^{-1} \Delta_\varphi U = FS$; on pose $\Delta = FS$ et $J = U^{-1} J_\varphi U$; on a $S = J\,\Delta^{1/2}$, $F = J\,\Delta^{-1/2}$, $J\,\Delta J = \Delta^{-1}$ et $JPJ = P'$.

Supposons vérifiées les hypothèses (*a*). Soient

$$\alpha = x\,\xi \qquad \text{et} \qquad \beta = J\,y^*\,\xi = \Delta^{-1/2}\,y\,\xi;$$

ce sont deux éléments du domaine de $\Delta^{1/2}$ et

$$\| \lambda^{1/2}\alpha - \Delta^{1/2}\beta \| = \| \lambda^{1/2} x\xi - y\xi \| < \varepsilon,$$
$$\| \Delta^{1/2}\alpha - \lambda^{1/2}\beta \| = \| J\,\Delta^{1/2}\alpha - \lambda^{1/2} J\beta \| = \| x^*\xi - \lambda^{1/2} y^*\xi \| < \varepsilon.$$

Donc, comme $\Delta^{1/2}(\lambda^{1/2} + \Delta^{1/2})^{-1}$ et $\lambda^{1/2}(\lambda^{1/2} + \Delta^{1/2})^{-1}$ sont des contractions, on a

$$\| \lambda(\lambda^{1/2} + \Delta^{1/2})^{-1}\alpha - \lambda^{1/2}\Delta^{1/2}(\lambda^{1/2} + \Delta^{1/2})^{-1}\beta \| < \varepsilon$$

et

$$\| \Delta (\lambda^{1/2} + \Delta^{1/2})^{-1} \alpha - \lambda^{1/2} \Delta^{1/2} (\lambda^{1/2} + \Delta^{1/2})^{-1} \beta \| < \varepsilon.$$

Donc

$$\| (\lambda - \Delta) (\lambda^{1/2} + \Delta^{1/2})^{-1} \alpha \| < 2 \varepsilon.$$

Comme par hypothèse $\| \alpha \| > 1$, on a montré que la distance de $\lambda^{1/2}$ au spectre de $\Delta^{1/2}$ est inférieure à 2ε; la conclusion résulte de l'égalité $\mathrm{Sp}\, \Delta_\varphi = \mathrm{Sp}\, \Delta$.

(*b*) Si distance $(\lambda^{1/2}, \mathrm{Sp}\, \Delta^{1/2}) < \varepsilon$, il existe un élément α de $\mathrm{P}\,\xi$, sous-espace dense pour la norme du graphe, dans le domaine de $\Delta^{1/2}$, tel que $\| \alpha \| > 1$ et $\| (\Delta^{1/2} - \lambda^{1/2}) \alpha \| < \varepsilon$. Soient $x \in \mathrm{P}$ tel que $\alpha = x\xi$ et $y = \mathrm{J}\, x^* \mathrm{J}$. On a $y \in \mathrm{P}'$,

$$\| x^* \xi - \lambda^{1/2} y^* \xi \| = \| \mathrm{J} (x^* \xi - \lambda^{1/2} y^* \xi) \| = \| \Delta^{1/2} x \xi - \lambda^{1/2} x \xi \| < \varepsilon$$

et

$$\| \lambda^{1/2} x \xi - y \xi \| = \| \lambda^{1/2} x \xi - \mathrm{J}\, x^* \xi \| = \| \lambda^{1/2} x \xi - \Delta^{1/2} x \xi \| < \varepsilon.$$

Enfin

$$\| x \xi \| = \| \alpha \| > 1.$$

Démonstration de 3.5.1. — Montrons que (*a*) entraîne (*b*). Soient $\lambda \in \mathrm{S}(\mathrm{M})$, $\xi \neq 0$, $\xi \in \mathcal{H}$, $\varepsilon > 0$, e le projecteur orthogonal sur $\overline{\mathrm{M}' \xi}$, $\mathcal{K} = \overline{\mathrm{M}\, \xi} \cap \overline{\mathrm{M}' \xi}$, I l'induction de M_e dans $\mathcal{K}$. Alors I est un isomorphisme de l'algèbre réduite M_e sur un facteur P admettant ξ comme vecteur séparateur et totalisateur dans $\mathcal{K}$, et on a $\lambda \in \mathrm{S}(\mathrm{M}_e) = \mathrm{S}(\mathrm{P})$ [corollaire 3.2.8 (*b*)]; donc $\lambda \in \mathrm{Sp}\, \Delta_\varphi$ où $\varphi(x) = \langle x\xi, \xi \rangle$ pour tout $x \in \mathrm{P}$. Si $\lambda = 0$, le lemme 3.5.2 montre qu'il existe $x \in \mathrm{P}$ tel que $\| x \xi \| > 1$, $\| x^* \xi \| < \varepsilon$.

Comme $x \xi \in \overline{\mathrm{M}\, \xi} \cap \overline{\mathrm{M}' \xi}$ il existe $y \in \mathrm{M}'$ tel que $\| x\xi - y \xi \| < \varepsilon$. Soit $\mathrm{X} = \mathrm{I}^{-1}(x)$. On a $\mathrm{X} \xi = x \xi$, $\mathrm{X}^* \xi = x^* \xi$ et le couple (X, y) vérifie (*b*). Si $\lambda \neq 0$ il existe $x \in \mathrm{P}$ et $y \in \mathrm{P}'$ tels que

$$\| x \xi \| > 1, \qquad \| x \xi - \lambda^{-1/2} y \xi \| < \varepsilon, \qquad \| x^* \xi - \lambda^{1/2} y^* \xi \| < \varepsilon.$$

Il existe $\mathrm{X} \in \mathrm{M}$ et $\mathrm{Y} \in \mathrm{M}'$ tels que

$$\mathrm{X} \xi = x \xi, \qquad \mathrm{X}^* \xi = x^* \xi, \qquad \lambda^{1/2}\, \mathrm{Y} \xi = y \xi, \qquad \lambda^{1/2}\, \mathrm{Y}^* \xi = y^* \xi.$$

On a

$$\| \mathrm{X} \xi \| > 1, \qquad \| \mathrm{X} \xi - \mathrm{Y} \xi \| < \varepsilon \quad \text{et} \quad \| \mathrm{X}^* \xi - \lambda\, \mathrm{Y}^* \xi \| < \varepsilon.$$

Montrons que (*b*) entraîne (*a*). Il existe un projecteur cyclique e de M qui est ou bien fini ou bien purement infini. Il suffit donc de montrer que pour tout état φ normal fidèle sur M_e on a $\lambda \in \mathrm{Sp}\, \Delta_\varphi$ et d'appliquer 3.2.5 (*d*) et 3.2.8 (*b*). Soient φ un état normal fidèle sur M_e, $\xi \in e\, \mathcal{H}$ tel que $\varphi(x) = \langle x \xi, \xi \rangle$ pour tout $x \in \mathrm{M}_e$, e' le projecteur orthogonal sur $M\xi$, I l'induction de M_e dans $\mathcal{K} = ee'(\mathcal{H})$, I' l'induction de M'_e dans $\mathcal{K}$.

I est un isomorphisme de M_e sur un facteur P admettant ξ comme vecteur totalisateur et séparateur dans $\mathcal{K}$, I' est un isomorphisme de $M'_{e'}$, sur P'. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe par hypothèse $x \in M$ et $y \in M'$ tels que

$$\| x\xi \| > 1, \qquad \| x\xi - y\xi \| < \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \| x^*\xi - \lambda y^*\xi \| < \varepsilon.$$

Soient $x_1 = exe$, $y_1 = e'ye'$. On a

$$e\xi = e'\xi = \xi \qquad \text{et} \qquad x_1\xi = ex\xi - ey\xi + ey\xi$$

donc

$$\| x_1\xi \| > \| y\xi \| - \varepsilon > 1 - 2\varepsilon.$$

On a

$$\| x_1\xi - y_1\xi \| = \| ee'x\xi - ee'y\xi \| < \varepsilon$$

et de même

$$\| x_1^*\xi - \lambda y_1^*\xi \| < \varepsilon.$$

Soient $X = (1/1 - 2\varepsilon)\, I(x_1)$, $Y = (\lambda^{1/2}/1 - 2\varepsilon)\, I'(y_1)$. On a

$$\| X\xi \| > 1, \qquad \| \lambda^{1/2} X\xi - Y\xi \| < (\lambda^{1/2}/1 - 2\varepsilon)\,\varepsilon$$

et

$$\| X^*\xi - \lambda^{1/2} Y^*\xi \| < (1/1 - 2\varepsilon)\,\varepsilon.$$

Comme ε est arbitraire, le lemme 3.5.2 montre que $\lambda \in \mathrm{Sp}\,\Delta_\varphi$.

DÉFINITION 3.5.3 (*cf.* [31]). — *Soient* λ, $0 \leq \lambda \leq 1/2$, *et* M *une algèbre de von Neumann. On dit que* M *a la propriété* L_λ *si et seulement si pour tout état normal* φ *sur* M *et tout* $\varepsilon > 0$, *il existe une isométrie partielle* $u \in M$ *telle que* $u^2 = 0$, $uu^* + u^*u = 1$ *et* $|\lambda\varphi(ux) - (1-\lambda)\varphi(xu)| \leq \varepsilon \|x\|$ pour tout $x \in M$.

THÉORÈME 3.5.4. — *Soient* $\lambda \in]0, 1/2[$ *et* M *un facteur ayant la propriété* L_λ. *Alors* $\lambda/(1-\lambda) \in S(M)$. (La réciproque sera étudiée en 3.7.)

LEMME 3.5.5. — *Soient* M *un facteur standard dans l'espace* $\mathcal{H}$, $\varepsilon > 0$, ξ_1 *et* ξ_2 *dans* $\mathcal{H}$ *tels que* $\| \varphi_1 - \varphi_2 \| < \varepsilon$ *où* $\varphi_j(x) = \langle x\xi_j, \xi_j \rangle$ *pour tout* $x \in M$. *Il existe un unitaire* $W \in M'$ *tel que* $\| W\xi_1 - \xi_2 \|^2 < 4\varepsilon$.

Démonstration. — Soient $\psi = \varphi_1 + (\varphi_1 - \varphi_2)^- = \varphi_2 + (\varphi_1 - \varphi_2)^+$ *et* $\eta \in \mathcal{H}$ tel que $\psi(x) = \langle x\eta, \eta \rangle$ ([5], cor. 2.16) pour tout $x \in M$. On a $\varphi_1 \leq \psi$, donc il existe ([13], p. 48) un $T' \in M'$, $0 \leq T' \leq 1$, tel que

$$\varphi_1(x) = \langle xT'\eta, T'\eta \rangle$$

pour tout $x \in M$.

Soit $\eta_1 = T'\eta$. On a

$$\| \eta_1 - \eta \|^2 = \langle (1 - T')^2 \eta, \eta \rangle$$
$$\leqq \langle (1 - T')(1 + T') \langle \eta, \eta \rangle\rangle = \langle \eta, \eta \rangle - \langle \eta_1, \eta_1 \rangle = \| \psi - \varphi_1 \|$$

donc

$$\| \eta_1 - \eta \|^2 \leqq \| \varphi_1 - \varphi_2 \| < \varepsilon.$$

De même il existe $\eta_2 \in \mathcal{H}$ tel que $\| \eta_2 - \eta \|^2 < \varepsilon$ et $\varphi_2(x) = \langle x \eta_2, \eta_2 \rangle$ pour tout $x \in M$. On a $\| \eta_1 - \eta_2 \| < 2 \varepsilon^{1/2}$.

Pour terminer la démonstration du lemme il suffit de montrer que si α_1 et α_2 sont des éléments de $\mathcal{H}$ tels que $\langle x \alpha_1, \alpha_1 \rangle = \langle x \alpha_2, \alpha_2 \rangle$ pour tout $x \in M$, il existe une suite d'unitaires U_n telle que $U_n \in M'$, et $U_n \alpha_1 \to \alpha_2$ quand $n \to \infty$. On peut supposer que le projecteur $1 - E'_1$ est de dimension relative inférieure à celle de $1 - E'_2$, où E'_j désigne le projecteur orthogonal sur $\overline{M \alpha_j}$ pour $j = 1, 2$.

Il existe alors une isométrie $v \in M'$ telle que $v \alpha_1 = \alpha_2$ et la conclusion résulte de ([14], lemme 2).

Démonstration de 3.5.4. — Nous identifions M à un facteur standard dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Soient $\mathcal{H}_1$ l'espace de Hilbert de base $(\varepsilon_{ij})_{i,j=1,2}$, F le facteur engendré par les e_{ij}, $i = 1, 2$ où $e_{ij}\, \varepsilon_{kl} = \delta_{j,k}\, \varepsilon_{il}$ pour i, j, k et l dans $\{1, 2\}$. Le commutant F' de F est engendré par les f_{ij} où, pour i, j, k, l, $f_{ij}\, \varepsilon_{kl} = \delta_{i,l}\, \varepsilon_{kj}$. Soit $\eta = \lambda^{1/2} \varepsilon_{11} + (1 - \lambda)^{1/2} \varepsilon_{22}$.

Soient $\xi \in \mathcal{H}$, $\| \xi \| = 1$, $\varphi \in M_*$ tel que $\varphi(x) = \langle x \xi, \xi \rangle$ pour tout $x \in M$ et $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < \lambda/2$. Par hypothèse il existe un $u \in M$ vérifiant les conditions 3.5.3 pour φ et ε. Soit $e = u^* u$, on a

$$(1 - e) = uu^* \qquad \text{et} \qquad | \lambda\varphi(uu^*) - (1 - \lambda)\varphi(u^* u) | < \varepsilon$$

donc $| \lambda - \varphi(e) | < \varepsilon$ et $\varphi(e) > \lambda/2$ par hypothèse.

Pour tout $x \in M$ on a $|\lambda\varphi(xu^*) - (1 - \lambda)\varphi(u^* x)| < \varepsilon \| x \|$ donc en remplaçant x par $uyuu^*$, on a, vu que $u^{*2} = 0$,

$$| (1 - \lambda)\varphi(ey(1 - e)) | \leqq \varepsilon \| y \| \quad \text{pour } y \in M.$$

On a

$$| \varphi(ex(1 - e)) | \leqq 2 \varepsilon \| x \| \qquad \text{et} \qquad \varphi((1 - e) xe) \leqq 2 \varepsilon \| x \| \quad \text{pour tout } x \in M.$$

On a alors

$$| \varphi(x) - \varphi(exe) - \varphi((1 - e) x (1 - e)) | \leqq 4 \varepsilon \| x \| \quad \text{pour tout } x \in M,$$

d'où

$$| \varphi(x) - \lambda(exe) - \lambda\varphi(uxu^*) - (1 - \lambda)\varphi((1 - e) x (1 - e)) - (1 - \lambda)\varphi(u^* xu) |$$
$$\leqq 6 \varepsilon \| x \| \quad \text{pour tout } x \in M.$$

En effet par hypothèse $| \lambda\, \varphi(uxu^*) - (1 - \lambda)\, \varphi(exe) | \leqq \varepsilon \| x \|$.

Soit π_1 l'isomorphisme du facteur N_1 engendré par u et u^* dans M, sur F, obtenu en posant $\pi_1(u) = e_{12}$, $\pi_1(u^*) = e_{21}$, $\pi_1(e) = e_{11}$. Le commutant N_2 de N_1 dans M est un facteur. Soient $\mathcal{H}_2$, π_2 une représentation standard de N_2 et $\eta_2 \in \mathcal{H}_2$ tel que $\varphi(x) = \langle \pi_2(x)\eta_2, \eta_2 \rangle$ pour tout $x \in N_2$.

Tout $x \in M$ s'écrit de manière unique

$$x = ex_{11} + ux_{12} + u^* x_{21} + (1-e)x_{22} \qquad \text{où} \quad x_{ij} \in N_2 \qquad i, j = 1, 2$$

L'application π de M dans $F \otimes \pi_2(N_2)$ qui à x associe

$$\pi(x) = \sum e_{ij} \otimes \pi_2(x_{ij})$$

est une représentation standard de M sur $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Pour $x \in M$ on a

$$\langle \pi(x)(\eta_1 \otimes \eta_2), \eta_1 \otimes \eta_2 \rangle = \lambda\varphi(x_{11}) + (1-\lambda)\varphi(x_{22}).$$

Comme $x_{11} = exe + uxu^*$, $x_2 = (1-e)x(1-e) + u^* xu$, l'inégalité prouvée ci-dessus montre que pour tout $x \in M$ on a

$$|\langle \pi(x)(\eta_1 \otimes \eta_2), \eta_1 \otimes \eta_2 \rangle - \varphi(x)| \leq 6\,\varepsilon\,\|x\|.$$

Le lemme 3.5.5 montre qu'il existe une isométrie U de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ telle que $\pi(x) = \mathrm{U}\,x\,\mathrm{U}^*$ pour tout $x \in M$ et que

$$\|\mathrm{U}^*(\eta_1 \otimes \eta_2) - \xi\|^2 < 25\,\varepsilon.$$

Soient $t = \lambda^{1/2}/(1-\lambda)^{1/2}$, $v = \mathrm{U}^* t^{-1}(f_{12} \otimes 1)\,\mathrm{U}$. On a

$$e_{12}\,\eta_1 = t^{-1} f_{12}\,\eta_1, \qquad e_{12}^*\,\eta_1 = tf_{12}^*\,\eta_1$$

donc

$$\|u\xi - v\xi\| \leq \|u\,\mathrm{U}^*(\eta_1 \otimes \eta_2) - v\,\mathrm{U}^*(\eta_1 \otimes \eta_2)\| + (\|u\| + \|v\|)\,5\,\varepsilon^{1/2}.$$

On a $\mathrm{U}\,u\,\mathrm{U}^* = e_{12} \otimes 1$, $\mathrm{U}\,v\,\mathrm{U}^* = t^{-1} f_{12} \otimes 1$ donc le premier terme du membre de droite est nul et $\|u\xi - v\xi\| \leq (1 + t^{-1})\,5\,\varepsilon^{1/2}$.

On a

$$\|u^*\xi - t^2 v^*\xi\| \leq \|u^*\,\mathrm{U}^*(\eta_1 \otimes \eta_2) - t^2 v^*\,\mathrm{U}^*(\eta_1 \otimes \eta_2)\| + (\|u\| + t^2\|v\|)\,5\,\varepsilon^{1/2}$$

donc

$$\|u^*\xi - t^2 v^*\xi\| \leq (1 + t)\,5\,\varepsilon^{1/2},$$

de même que ci-dessus.

On a $\|u\xi\|^2 = \varphi(u^* u) = \varphi(e) \geq \lambda/2$ donc $\|u\xi\| \geq \lambda^{1/2}/2$.

Comme $f_{12} \otimes 1 \in (F \otimes \pi_2(N_2))'$, on a $v \in M'$. Ainsi les hypothèses 3.5.1 (*b*) sont vérifiées par M et t^2, donc $t^2 \in S(M)$, c'est-à-dire $\lambda/(1-\lambda) \in S(M)$.

3.6. Relations des invariants S et T avec les invariants r_∞ et ρ d'Araki et Woods.

Pour un facteur quelconque M, les invariants r_∞ et ρ d'Araki et Woods sont définis par les conditions :

$\lambda \geqq 0$, $\lambda \in r_\infty$ (M) si et seulement si $M \otimes R_\lambda$ est isomorphe à M. $\rho_0 \in [0, 1]$, $\rho_0 \in \rho$ (M) si et seulement si $M \otimes R_\rho$ est isomorphe à R_ρ. Nous étudions les relations entre S et r_∞, T et ρ dans l'exemple important des facteurs d'Araki-Woods. Nous n'utilisons que deux lemmes simples (5.5 et 7.5) de [2] tout en réobtenant les principaux résultats de [2].

Théorème 3.6.1. — *Soient* $\lambda \in]0, 1[$ M *un facteur. Considérons les propriétés suivantes :*

(a) $\lambda \in r_\infty$ (M).

(b) M *a la propriété* $L_{1/(1+\lambda)}$.

(c) $\lambda \in$ S (M).

Alors on a (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c).

Si M *est un facteur d'Araki-Woods, on a* (a) $\Leftrightarrow$ (b) $\Leftrightarrow$ (c) $\Leftrightarrow$ (d) *où* (d) *est la propriété* $\lambda \in r_\infty$ (M, Ω) ([2], déf. 3.2).

Démonstration. — (a) $\Rightarrow$ (b) (*voir* [1]); (b) $\Rightarrow$ (c) (3.5.4).

Soit M un facteur d'Araki-Woods. On a (d) $\Rightarrow$ (a) ([2], lemme 5.5). Montrons l'implication (c) $\Rightarrow$ (d). Posons $M = \bigotimes_{\nu \in A} (M_\nu, \Omega_\nu)$, où A est un ensemble dénombrable.

Pour $\nu \in A$, M_ν est un facteur de type I_{n_ν}. Soit τ_ν la trace usuelle sur M_ν telle que $\tau_\nu(1) = n_\nu$, h_ν l'unique élément positif de M_ν tel que

$$\tau_\nu (h_\nu x) = \langle x \Omega_\nu, \Omega_\nu \rangle$$

pour tout $x \in M_\nu$. Nous choisissons pour chaque ν une décomposition de h_ν comme combinaison linéaire de projecteurs minimaux de M_ν deux à deux orthogonaux de somme 1, et nous désignons par E_ν l'ensemble des projecteurs ainsi obtenus, par μ la fonction qui, à chacun de ces projecteurs, associe la valeur propre correspondante de h_ν.

On a $h_\nu = \sum_{e \in E_\nu} \mu(e)\, e$ et $\sum_{e \in E_\nu} \mu(e) = 1$ car par convention $\tau_\nu(e) = 1$. Comme Ω_ν est séparateur pour M_ν on a $\mu(e) > 0$ pour tout $e \in E_\nu$.

Soient $I = \{\nu_1, \ldots, \nu_k\}$ un sous-ensemble fini de A, $\mathcal{H}(I) = \bigotimes_{\nu \in I} \mathcal{H}_\nu$, $\Omega(I) = \bigotimes_{\nu \in I} \Omega_\nu$, $M(I) = \bigotimes_{\nu \in I} M_\nu$. Soit E (I) l'ensemble des projecteurs (minimaux) de $M(I)$ de la forme $e = e_1 \otimes \ldots \otimes e_k$, où $e_j \in E_{\nu_j}$ pour $j = 1, \ldots, k$. On a une bijection naturelle de $\prod_1^k E_{\nu_j}$ sur $E(I)$ et plus généralement de $E(I) \times E(J)$ sur $E(I \cup J)$ pour $I \cap J = \emptyset$. On a

$$\langle x\,\Omega(I), \Omega(I) \rangle = \text{Trace}\,(h(I)\,x) \quad \text{pour tout } x \in M(I),$$

avec $h(I) = \bigotimes_{\nu \in I} h_\nu$, donc

$$h(I) = \sum_{e \in E(I)} \mu(e)\, e \qquad \text{et} \qquad \mu(e_1 \otimes \ldots \otimes e_k) = \prod_1^k \mu(e_j).$$

Pour la démonstration nous appelons bijection partielle (I, K^1, K^2, ψ) la donnée d'une partie finie I de A, de deux parties disjointes K^1 et K^2 de $E(I)$ et d'une bijection ψ de K^1 sur K^2.

Soit $\mathcal{V}$ un compact de $]0, 1[$. Une bijection partielle (I, K^1, K^2, ψ) est dite $\mathcal{V}$-maximale si $\mu(\psi(e))/\mu(e) \in \mathcal{V}$ pour tout $e \in K^1$ et s'il n'existe aucune bijection partielle (I, K'^1, K'^2, ψ') telle que K^1 soit strictement inclus dans K'^1, que $\psi'(e) = \psi(e)$ pour $e \in K^1$ et que $\mu(\psi'(e))/\mu(e) \in \mathcal{V}$ pour tout $e \in K'^1$.

La propriété $\lambda \in r_\infty(M, \Omega)$ ([2], déf. 3.2) est entraînée par l'existence pour tout voisinage $\mathcal{V}$ de λ, toute partie finie I_0 de A et tout $\delta > 0$ d'une bijection partielle (I, K^1, K^2, ψ) telle que $I \cap I_0 = \emptyset$, que $\mu(\psi(e))/\mu(e) \in \mathcal{V}$ pour $e \in K^1$ et que $\sum_{e \in K^1 \cup K^2} \mu(e)$, soit supérieur à $1 - \delta$.

Pour toute partie finie I_0 de A on a

$$M = M(A \setminus I_0) \otimes M(I_0)$$

donc

$$\lambda \in S(M(A \setminus I_0)).$$

Il nous suffit donc de montrer ceci : soit $\lambda \in S(M)$; soit $\mathcal{V}$ un voisinage compact de λ dans $]0, 1[$; soit $(I_n, K_n^1, K_n^2, \psi_n)$ une suite de bijections partielles $\mathcal{V}$-maximales telle que : (1) $\bigcup_1^\infty I_n = A$; (2) $I_n \subset I_{n+1}$; (3) $(I_{n+1}, K_{n+1}^1, K_{n+1}^2, \psi_{n+1})$ prolonge la bijection partielle obtenue en faisant le produit de $(I_n, K_n^1, K_n^2, \psi_n)$ par la bijection identique de $E(I_{n+1}/I_n)$; alors $C_n \to 1$ quand $n \to \infty$ où $C_n = \sum \mu(e)$, $e \in K_n^1 \cup K_n^2$.

On a $K_n^1 \times E(I_{n+1} \setminus I_n) \subset K_{n+1}^1$ donc $C_n \leqq C_{n+1}$ pour tout n. Faisons l'hypothèse $C_n \leqq C < 1$ pour tout n, et montrons qu'elle conduit à une absurdité. Soient $P_n = \sum e$, $e \in K_n^1 \cup K_n^2$, $Q_n = 1 - P_n$. Ce sont des projecteurs de $M(I_n)$.

La suite $P'_n = P_n \otimes 1_{M(A \setminus I_n)}$ est une suite croissante avec

$$\langle P'_n \Omega, \Omega \rangle = \langle P_n \Omega(I_n), \Omega(I_n) \rangle = \operatorname{Trace}(h(I_n) P_n) = C_n \leq C.$$

On a donc $Q' = \bigwedge_1^\infty (1 - P'_n) \neq 0$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $]\lambda^{1/2} - 2\varepsilon, \lambda^{1/2} + 2\varepsilon[\subset \mathcal{V}^{1/2}$. Comme $\lambda \in S(M)$ il existe un $x \in M$ et un $y \in M'$ tels que $\| x Q' \Omega \| > 1$, $\| \lambda^{1/2} x Q' \Omega - y Q' \Omega \| < \varepsilon$ et $\| x^* Q' \Omega - \lambda^{1/2} y^* Q' \Omega \| < \varepsilon$ en appliquant le théorème 3.5.1.

La réunion des $M(I_n) \otimes 1_{M(A \setminus I_n)}$ [resp. $M'(I_n) \otimes 1_{M'(A \setminus I_n)}$] est fortement dense dans M. De plus $Q' \Omega$ est la limite forte des $(Q_n \Omega(I_n)) \otimes \Omega(A \setminus I_n)$. Donc il existe un n, un $X \in M(I_n)$ et un $Y \in M'(I_n)$ tels que

$$\| X Q_n \Omega(I_n) \| > 1, \qquad \| \lambda^{1/2} X Q_n \Omega(I_n) - Y Q_n \Omega(I_n) \| < \varepsilon$$

et

$$\| X^* Q_n \Omega(I_n) - \lambda^{1/2} Y^* Q_n \Omega(I_n) \| < \varepsilon.$$

Soit $\alpha_0 > 0$ tel que ces trois inégalités restent vraies quand on remplace $Q_n \Omega(I_n)$ par tout ξ de la forme $\xi = \left(Q_n + \sum \alpha(e)\, e\right) \Omega(I_n)$ où $\alpha(e) = 0$ pour $e \notin K_n^1 \cup K_n^2$ et $0 < \alpha(e) < \alpha_0$ pour tout $e \in K_n^1 \cup K_n^2$.

Le lemme 3.5.2 montre que pour un tel ξ on a distance $(\lambda^{1/2}, \operatorname{Sp} \Delta_\xi^{1/2}) < 2\varepsilon$, donc $\mathcal{V} \cap \operatorname{Sp} \Delta_\xi \neq \emptyset$. On a

$$\langle x\xi, \xi \rangle = \operatorname{Trace}(Dx)$$

où $D_1 = \sum \mu(e)\, e$ pour $e \in (K_n^1 \cup K_n^2)^c$, $D_2 = \sum \alpha(e)^2 \mu(e)\, e$ pour $e \in K_n^1 \cup K_n^2$ et $D = D_1 + D_2$. Le spectre de Δ_ξ ne contient que des rapports entre valeurs propres de D.

Ces valeurs propres sont soit $\mu(e)$ pour $e \in (K_n^1 \cup K_n^2)^c$, soit $\alpha(e)^2 \mu(e)$, $e \in K_n^1 \cup K_n^2$. Donc comme $\mathcal{V} \cap \operatorname{Sp} \Delta_\xi \neq \emptyset$ indépendamment du choix des $\alpha(e)$, $0 < \alpha(e) < \alpha_0$, il existe e_1 et e_2 dans $(K_n^1 \cup K_n^2)^c$ tels que $\mu(e_1)/\mu(e_2) \in \mathcal{V}$, donc $(I_n, K_n^1, K_n^2, \psi_n)$ n'est pas $\mathcal{V}$-maximale.

THÉORÈME 3.6.2. — *Soient* $T_0 > 0$, $\rho_0 = \exp(-2\pi/T_0)$, M *un facteur. Considérons les propriétés :*

(*a*) $\rho_0 \in \rho(M)$.

(*b*) $T_0 \in T(M)$.

On a alors $(a) \Rightarrow (b)$. *De plus si* M *est un facteur d'Araki-Woods on a* $(a) \Leftrightarrow (b)$.

Démonstration. — Si $M \otimes R_{\rho_0}$ est isomorphe à R_{ρ_0}, on a

$$T(R_{\rho_0}) \cap T(M) = T(R_{\rho_0}) \quad [1.3.4(c)]$$

donc $T_0 \in T(M)$ car $T_0 \in T(R_{\rho_0})$ (1.3.10).

Soit M un facteur d'Araki-Woods. Soient $T_0 > 0$, $T_0 \in T(M)$, et $\bigotimes_{\nu=1}^{\infty} (M_\nu, \Omega_\nu)$ une réalisation de M telle que pour tout ν, et tout λ_1, $\lambda_2 \in \mathrm{Sp}(\Omega_\nu, M_\nu)$ on ait $(\lambda_1/\lambda_2)^{iT_0} = 1$ c'est-à-dire $\lambda_1/\lambda_2 \in \{\rho_0^n, n \in \mathbf{Z}\}$ [théorème 1.3.7 (*b*)].

On a donc, avec les notations de [2], $\hat{r}(M, \Omega) \subset r_\infty(R_{\rho_0}) = \{\rho_0^n, n \in \mathbf{Z}\}^-$. Donc le lemme 7.5 de [2] montre que $M \otimes R_{\rho_0}$ est isomorphe à R_{ρ_0}.

Corollaire 3.6.3. — *Soient* $\lambda \in]0, 1[$, M *un facteur d'Araki-Woods tel que* $S(M) = \{\lambda^n, n \in \mathbf{Z}\}^-$. *Alors* M *est isomorphe à* R_λ.

Par hypothèse $S(M) \neq \{0, 1\}$. D'après 3.4.1, $T_0 \in T(M)$ où

$$T_0 = -2\pi/\log\lambda.$$

Donc (3.6.2) $M \otimes R_\lambda$ est isomorphe à R_λ. Comme $M \otimes R_\lambda$ est isomorphe à M (3.6.1), on a 3.6.3.

Corollaire 3.6.4. — *L'espace borélien des classes d'isomorphisme algébrique des facteurs de type* III *non hyperfinis dans un espace de Hilbert séparable n'est pas dénombrablement séparé.*

Soient G le compact $\{0, 1\}^N$, $\hat{G}$ le quotient de G par la relation d'équivalence $(a_k) \sim (b_k)$ si et seulement si $a_k = b_k$ pour tout k dans le complémentaire d'une partie finie de N. Il existe, d'après [40], une application borélienne $(a_k) \to M((a_k))$ de G dans l'ensemble des facteurs d'Araki-Woods de type III telle que : 1° $(a_k) \sim (b_k) \Rightarrow M((a_k))$ isomorphe à $M((b_k))$; 2° $(a_k) \not\sim (b_k) \Rightarrow \rho(M((a_k))) \neq \rho(M((b_k)))$. Soit G_2 le groupe libre à deux générateurs. L'application

$$(a_k) \to P((a_k)) = M((a_k)) \otimes U(G_2)$$

de G dans l'ensemble des facteurs non hyperfinis de type III est borélienne. De plus, elle vérifie : 1° $(a_k) \sim (b_k) \Rightarrow P(a_k))$ isomorphe à $P(b_k))$; 2° $(a_k) \not\sim (b_k) \Rightarrow T(P((a_k))) \neq T(P((b_k)))$ [3.6.2 et 1.3.4 (*b*) et (*c*)].

Le raisonnement de [40] s'applique alors sans modification.

Théorème 3.6.5 :

(*a*) *Soient* $\lambda \in]0, 1[$ *et* P_λ *le facteur de Pukanszky construit comme dans* [33] (p. 192) *avec* $p = \lambda q$. *On a* $S(P_\lambda) = \{\lambda^n, n \in \mathbf{Z}\}$ *mais* $r_\infty(P_\lambda) = \{0\}$.

(*b*) *Soit* G_2 *le groupe libre à deux générateurs. On a* $\rho(U(G_2)) = \emptyset$ *et* $T(U(G_2)) = \mathbf{R}$.

Démonstration de (*a*). — Rappelons la construction de P_λ. Soient G_2 le groupe libre à deux générateurs, Ω l'espace des applications de G_2

dans $\{0, 1\}$. On a $\Omega = \prod_{g \in G_2} \Omega_g$ avec $\Omega_g = \{0, 1\}$. Soient $p > 0$, $q > 0$, tels que $p + q = 1$ et $p = \lambda q$.

Pour $g \in G_2$ soient μ_g la mesure sur Ω_g telle que

$$\mu_g(\{0\}) = p, \qquad \mu_g(\{1\}) = q, \qquad \mu = \prod_{g \in G_2} \mu_g.$$

Pour $g \in G_2$ soit Φ_{g_1} la transformation de Ω qui, à $t = (t_g)_{g \in G_2}$, associe $t' = (t'_g)_{g \in G_2}$ avec $t'_g = t_{g_1 g}$ pour tout $g \in G_2$.

Chaque Φ_g préserve μ et le groupe $\mathcal{G}_1$ de transformations ainsi obtenu est ergodique dans (Ω, μ). Pour $g_1 \in G_2$ soit Σ_{g_1} la transformation de Ω qui à $t = (t_g)_{g \in G_2}$ associe $t' = (t'_g)_{g \in G_2}$, avec $t'_g = t_g$ pour tout $g \neq g_1$ et $t'_{g_1} = 1 - t_{g_1}$. On a $d\mu(\Sigma_{g_1}(t)) = h_{g_1}(t)\, d\mu(t)$ où h_{g_1} est la fonction sur Ω qui vaut $\lambda^{-1} = q/p$ si $t_{g_1} = 0$ et $\lambda = p/q$ si $t_{g_1} = 1$. Soit $\mathcal{G}$ le groupe de transformations de Ω engendré par $\mathcal{G}_1$ et les Σ_{g_1}, $g_1 \in G_2$. Alors $\mathcal{G}$ agit presque librement dans Ω en laissant μ quasi-invariante ([33], p. 192), et il est clair que $\mathcal{G}$ est ergodique.

Montrons que $r(\mathcal{G}) = \{\lambda^n, n \in \mathbf{Z}\}^-$. Pour tout $s \in \mathcal{G}$ et tout $t \in \Omega$ on a $(ds^{-1}\mu/d\mu)(t) \in \{\lambda^n, n \in \mathbf{Z}\}$ car cela a lieu pour tout s de la forme Σ_{g_1} $(g_1 \in G_2)$ et tout $s \in \mathcal{G}_1$. Montrons que $\lambda \in r(\mathcal{G})$. Soient A un sous-ensemble mesurable non négligeable de Ω, et $\varepsilon > 0$.

Soient $g_1 \in G_2$ et $A_1 = \{t \in \Omega, t_{g_1} = 1\}$. Comme $\mathcal{G}_1$ est ergodique il existe s_1 et s_2 dans $\mathcal{G}_1$ tels que

$$B = \{t \in A, s_1 t \in A_1 \text{ et } s_2 \Sigma_{g_1} s_1(t) \in A\}$$

soit non négligeable. Soit $s = s_2 \Sigma_{g_1} s_1$. On a $s \in \mathcal{G}$ Pour $t \in B$ on a $st \in A$ et $d\mu(st)/d\mu(t) = \lambda$ c'est-à-dire $(ds^{-1}\mu/d\mu)(t) = \lambda$.

Par construction on a $P_\lambda = W^*(\mathcal{G}, \Omega)$, donc $S(P_\lambda) = r(\mathcal{G})$ (corollaire 3.3.4). On a donc montré que $S(P_\lambda) = \{\lambda^n, n \in \mathbf{Z}\}^-$. De plus le lemme 4.3.22 de [33] montre que pour toute suite bornée (x_n) d'éléments de P_λ telle que $[x_n, x]$ tende vers zéro fortement pour tout $x \in P_\lambda$, il existe une suite $\{\lambda_n\}$ de scalaires tels que $x_n - \lambda_n$ tende vers zéro fortement. En particulier P_λ ne vérifie pas la propriété L : « Il existe une suite $\{u_n\}$ d'unitaires de l'algèbre telle que $u_n^* x u_n \to x$ fortement pour tout x dans l'algèbre, et telle que $u_n \to 0$ faiblement ». Soit $\lambda' \neq 0$. Le facteur R_1 hyperfini de type II_1 à la propriété L donc ([39], prop. 1.2) $R_{\lambda'}$ qui est isomorphe à $R_{\lambda'} \otimes R_1$ à la propriété L. De même $P_\lambda \otimes R_{\lambda'}$ à la propriété L et ne peut être isomorphe à P_λ. Donc $r_\infty(P_\lambda) = \{0\}$.

(*b*) Le produit tensoriel de $U(G_2)$ par un facteur quelconque est un facteur non hyperfini. Comme R_ρ est un facteur hyperfini pour tout ρ, on a $\rho(U(G_2)) = \emptyset$.

3.7. États presque-périodiques et propriété L_λ de Powers.

DÉFINITION 3.7.1. — *Un état normal fidèle φ sur une algèbre de von Neumann* M *est dit presque-périodique si l'opérateur modulaire Δ_φ est diagonalisable* (*i. e. si l'ensemble des vecteurs propres de Δ_φ est total*).

THÉORÈME 3.7.2. — *Soit* M *un facteur tel que tout état normal soit limite normique d'une suite d'états normaux fidèles presque-périodiques.*

Soit $\lambda \in]0, 1/2[$. *Alors* M *a la propriété* L_λ *si et seulement si* $\lambda/(1-\lambda) \in S(M)$.

La nécessité de cette condition a été démontrée en 3.5.4.

LEMME 3.7.3. — *Soit φ un état normal fidèle presque-périodique sur* M. *Il existe un groupe abélien compact* G, *un homomorphisme β du dual Γ de* G *dans $\mathbf{R}_+^*$, et une représentation* U *de* G *dans* M *tels que :*

(*a*) $\varphi(U_t(x)) = \varphi(x)$ *pour tout* $t \in G$ *et tout* $x \in M$.

(*b*) *Pour tout couple* (a, b) *d'éléments de* M, *on a* $\hat{f}_1(\gamma) = \beta(\gamma)\hat{f}_2(\gamma)$ *pour tout* $\gamma \in \Gamma$, *où* $f_1(t) = \varphi(U_t(a)b^*)$ *et* $f_2(t) = \varphi(b^* U_t(a))$ *pour tout* $t \in G$.

(*c*) *Soit $\tilde{\beta}$ l'homomorphisme transposé de β. Alors* $U \circ \tilde{\beta}(t) = \sigma_t^\varphi$ *pour tout* $t \in R$ *et* $\tilde{\beta}(R)$ *est dense dans* G.

Soient G un groupe compact, Γ le groupe dual, et β un homomorphisme de Γ dans $\mathbf{R}_+^*$ tels que $\beta(\Gamma)$ soit le sous-groupe de $\mathbf{R}_+^*$ engendré par le spectre ponctuel de Δ_φ. Il existe par hypothèse une famille $(E_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ de projecteurs deux à deux orthogonaux de somme 1 de $\mathcal{H}_\varphi$ telle que $\Delta_\varphi = \sum \beta(\gamma) E_\gamma$. Choisissons G, Γ et β tels que β soit injectif; l'image de l'homomorphisme $\tilde{\beta}$ est alors dense dans G. Pour $s \in G$ soit $V_s = \sum (s, \gamma) E_\gamma$. Pour $t \in \mathbf{R}$ on a

$$V_{\tilde{\beta}(t)} = \sum (\tilde{\beta}(t), \gamma) E_\gamma = \sum (t, \beta(\gamma)) E_\gamma = \sum \beta(\gamma)^{it} E_\gamma = \Delta_\varphi^{it}.$$

Pour $s \in G$ et $x \in M$ on a donc $V_s \pi_\varphi(x) V_s^* \in \pi_\varphi(M)$ car l'application $s \to V_s$ est fortement continue. Soit alors $U_s(x)$ l'unique élément de M tel que $\pi_\varphi(U_s(x)) = V_s \pi_\varphi(x) V_s^*$. L'application $s \to U_s$ est une représentation de G dans M qui vérifie (*c*). La densité de $\tilde{\beta}(R)$ dans G démontre (*a*).

Pour montrer (*b*), soit ξ_φ le vecteur $\eta_\varphi(1)$ de la construction de Gelfand-Segal de φ. On a

$$\varphi(U_t(a) b^*) = \langle \eta_\varphi(b^*), \eta_\varphi(U_t(a)^*) \rangle = \langle \Delta_\varphi^{1/2} \eta_\varphi(U_t(a)), \Delta_\varphi^{1/2} \eta_\varphi(b) \rangle.$$

De plus

$$\eta_\varphi(U_t(a)) = V_t\,\pi_\varphi(a)\,V_t^*\,\xi_\varphi = V_t\,\pi_\varphi(a)\,\xi_\varphi = \sum (t, \gamma)\,E_\gamma\,\eta_\varphi(a).$$

On a donc, pour $\gamma \in \Gamma$,

$$\hat{f}_1(\gamma) = \langle \Delta_\varphi^{1/2}\,E_\gamma\,\eta_\varphi(a), \Delta_\varphi^{1/2}\,\eta_\varphi(b)\rangle = \beta(\gamma)\langle E_\gamma\,\eta_\varphi(a), \eta_\varphi(b)\rangle.$$

Or

$$\varphi(b^*\,U_t(a)) = \langle \eta_\varphi(U_t(a)), \eta_\varphi(b)\rangle = \sum (t, \gamma)\langle E_\gamma\,\eta_\varphi(a), \eta_\varphi(b)\rangle,$$

donc

$$\hat{f}_2(\gamma) = \langle E_\gamma\,\eta_\varphi(a), \eta_\varphi(b)\rangle \quad \text{pour tout } \gamma \in \Gamma.$$

On a donc

$$\hat{f}_1(\gamma) = \beta(\gamma)\,\hat{f}_2(\gamma) \quad \text{pour tout } \gamma \in \Gamma.$$

LEMME 3.7.4. — *Pour qu'un état normal fidèle φ sur une algèbre de von Neumann M soit presque-périodique il faut et il suffit que pour tout couple (a, b) d'éléments de M la fonction $f : t \to \varphi(\sigma_t^\varphi(a^*)\,b)$ soit presque-périodique.*

Cette condition est nécessaire car avec les notations de 3.7.3, il existe une fonction continue g sur le groupe compact G telle que $f = g \circ \tilde{\beta}$.

Elle est suffisante. En effet, $\varphi(\sigma_t^\varphi(a^*)\,b) = \langle \eta_\varphi(b), \Delta_\varphi^{it}\,\eta_\varphi(a)\rangle$, donc pour tout couple (ξ_1, ξ_2) d'éléments de $\mathcal{H}_\varphi$ la fonction $\langle \xi_1, \Delta_\varphi^{it}\,\xi_2\rangle$ est presque-périodique. Par construction cette fonction est la transformée de Fourier de la mesure spectrale de Δ_φ associée à (ξ_1, ξ_2); cette mesure spectrale est donc atomique. L'opérateur autoadjoint Δ_φ à toutes ses mesures spectrales atomiques, il est donc diagonalisable.

LEMME 3.7.5. — *Soient* M, φ, G, Γ, β *et* U *comme dans* 3.7.3 *et* $\gamma_0 \in \Gamma$.

(*a*) *Pour tout* $a \in M(U, \{\gamma_0\})$ *et tout* $b \in M$ *on a* $\varphi(b^*\,a) = \beta(\gamma_0)\,\varphi(ab^*)$.

(*b*) *On a* $M^U = M_\varphi$ *et la restriction de* φ *à* M_φ *est une trace normale fidèle (finie).*

(*c*) *Soient* e *un projecteur non nul de* M_φ, ψ *l'état* $(1/\varphi(e))\,\varphi_e$ *sur* M_e. *Alors* ψ *est normal fidèle presque-périodique et* M_e, ψ, G, Γ, β *et* U_e *vérifient* 3.7.3 (*a*), *b*) *et* (*c*).

(*a*) Soient f_1 et f_2 comme dans 3.7.3 (*b*). On a $U_t(a) = \overline{(t, \gamma_0)}\,a$ pour tout $t \in G$ donc $f_1(t) = \overline{(t, \gamma_0)}\,\varphi(ab^*)$, $f_2(t) = \overline{(t, \gamma_0)}\,\varphi(b^*\,a)$ pour tout $t \in G$. On a

$$\hat{f}_1(-\gamma_0) = \varphi(ab^*) \qquad \text{et} \qquad \hat{f}_2(-\gamma_0) = \varphi(b^*\,a)$$

donc [3.7.3 (*b*)],

$$\varphi(ab^*) = \beta(-\gamma_0)\,\varphi(b^*\,a).$$

(*b*) L'égalité $M^U = M_\varphi$ résulte de 3.7.3 (*c*). L'égalité $\varphi(ab) = \varphi(ba)$ pour a et b dans M^U résulte de 3.7.5 (*a*).

(*c*) ψ est presque-périodique (3.7.4); la vérification de 3.7.3 (*a*), (*b*) et (*c*) est immédiate.

LEMME 3.7.6. — *Soient* M, φ, G, Γ, β *et* U *comme dans* 3.7.3, $\gamma_0 \in \Gamma$ *et* e *un projecteur non nul de* M^U. *On suppose que* $\beta(\gamma_0) \neq 1$ *et que* $\gamma_0 \in \mathrm{Sp}\, U^e$. *Il existe une isométrie partielle* $u \in M(U, \{\gamma_0\}) \cap M_e$ *telle que* $u^* u \in M^U$, $uu^* \in M^U$, $u^2 = 0$, $u \neq 0$.

Les lemmes 3.7.5 (*c*) et 2.1.3 (*e*) montrent que l'on peut supposer $e = 1$.

Soit $y \in M(U, \{\gamma_0\})$, $y \neq 0$. [On a $M(U, \{\gamma_0\}) \neq \{0\}$ car $\{\gamma_0\}$ est un ouvert et $\gamma_0 \in \mathrm{Sp}\, U$]. Soit v l'isométrie partielle de la décomposition polaire de y. On a $U_t(v) = \overline{(t, \gamma_0)}\, v$ pour tout $t \in G$ car $U_t(y) = \overline{(t, \gamma_0)}\, y$ pour tout $t \in G$. Il en résulte que $v \in M(U, \{\gamma_0\})$ et $d = v^* v \in M^U$, $d' = vv^* \in M^U$. Soit $x \in M_d^U$; on a

$$vxv^* \in M_{d'} \quad \text{et} \quad vxv^* \in M(U, \{\gamma_0\} + \{0\} + \{-\gamma_0\}) \quad [2.1.3\ (c)\ \text{et}\ 2.1.5].$$

L'application I qui à $x \in M_d^U$ associe $vxv^* \in M_{d'}^U$ est donc un isomorphisme de M_d^U sur $M_{d'}^U$. Soient C le centre de M^U, f le support central de d dans M^U, f' celui de d', j l'isomorphisme de C_f sur $C_{f'}$ tel que pour tout $c \in C_f$ on ait $j(c)\, d' = I(cd)$.

Premier cas : On a $j(c) = c$ *pour tout* $c \in C_f$ (en particulier $f = f'$).

Soit $c \in C_f$. On a $\varphi(cd) = \beta(\gamma_0)\, \varphi(vcdv^*)$ en utilisant 3.7.5 (*a*), car $v \in M(U, \{\gamma_0\})$ et $v^* v = d$ donc

$$\beta(\gamma_0)\, \varphi(v\,(cdv^*)) = \varphi(cdv^*\, v) = \varphi(cd).$$

Par suite

$$\varphi(cd) = \beta(\gamma_0)\, \varphi(I(cd)) = \beta(\gamma_0)\, \varphi(j(c)\, d') = \beta(\gamma_0)\, \varphi(cd') \quad \text{pour tout } c \in C_f.$$

On a $\tau(d) = \beta(\gamma_0)\, \tau(d')$ pour toute trace normale de M^U [3.7.5 (*b*)], donc $d^\natural = \beta(\gamma_0)\, d'^\natural$. Comme les algèbres M_d^U et $M_{d'}^U$ sont isomorphes, on a montré que M_f^U est une algèbre de von Neumann finie continue car $\beta(\gamma_0) \neq 1$. Soient e_1 un projecteur ($e_1 \neq 0$, $e_1 \leqq d$, $e_1 \in M^U$), e_2 un projecteur ($e_2 \neq 0$, $e_2 \leqq I(e_1)$, $e_2 \in M^U$) avec $e_1^\natural + e_2^\natural \leqq 1$, w un unitaire de M^U tel que e_1 et $w\, e_2\, w^*$ soient orthogonaux. Soit $u = w\, e_2\, ve_1$. Comme $e_1 \leqq d$, ve_1 est une isométrie partielle de support final $I(e_1)$. Comme $e_2 \leqq I(e_1)$, $e_2\, ve_1$ est une isométrie partielle de support final e_2. Comme e_1 et $w\, e_2\, w^*$ sont orthogonaux, u est une isométrie partielle de carré nul.

On a $u \in M(U, \{\gamma_0\})$ car $v \in M(U, \{\gamma_0\})$, $e_1, e_2, w \in M^U$. Donc $u^* u$ et uu^* sont dans M^U.

Deuxième cas : Il existe un projecteur non nul c de C_f tel que $j(c)$ soit orthogonal à c. (Cela se produira nécessairement si on n'est pas dans le premier cas.)

Soit $u = vc$. Comme c commute avec $d = v^* v$, u est une isométrie partielle de support final $uu^* = \mathrm{I}(cd) = j(c)\, d'$. Comme $j(c)$ est orthogonal à c on a donc $u^2 = 0$. On a $u \in \mathrm{M}(\mathrm{U}, \{\gamma_0\})$ car $v \in \mathrm{M}(\mathrm{U}, \{\gamma_0\})$ et $c \in \mathrm{M}^{\mathrm{U}}$. On a $u \neq 0$ car $c \neq 0$ donc $cd \neq 0$.

Démonstration de 3.7.2. — Soient $\lambda' = \lambda/(1-\lambda)$, $\varepsilon > 0$ tel que $|\lambda' - 1| > \varepsilon$, φ un état normal fidèle presque-périodique sur M; G, Γ, β et U comme dans 3.7.3. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble, ordonné par inclusion, des familles $(u_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ d'isométries partielles de M telles que :

1° Pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$, on a $u_\alpha \neq 0$, $u_\alpha^2 = 0$ et il existe $\gamma_\alpha \in \Gamma$ tel que $\mathrm{Sp}_{\mathrm{U}}(u_\alpha) = \{\gamma_\alpha\}$ avec $\beta(\gamma_\alpha) \in [\lambda' - \varepsilon, \lambda' + \varepsilon]$;

2° Les projecteurs $e_\alpha = u_\alpha u_\alpha^* + u_\alpha^* u_\alpha$ sont deux à deux orthogonaux et appartiennent à M^{U}.

Soit $(u_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ un élément maximal de $\mathcal{E}$.

Soit $e = 1 - \sum_{\alpha \in \mathrm{A}} e_\alpha$, et supposons $e \neq 0$. On a $e \in \mathrm{M}^{\mathrm{U}}$. De plus, la représentation V réduite de la représentation $t \to \sigma_t^\varphi$ de $\mathbf{R}$ sur M par $e \in \mathrm{M}_\varphi$ [3.7.5 (*b*)] est égale à $\mathrm{U}^e \circ \tilde{\beta}$ [3.7.5 (*c*)]. On a $\lambda' \in \mathrm{Sp}\, \mathrm{V}$ car $\Gamma(\sigma^\varphi) = \mathrm{S}(\mathrm{M}) \cap \mathbf{R}_+^*$, donc (3.4.3), λ' appartient à la fermeture de $\beta(\mathrm{Sp}\, \mathrm{U}^e)$. Il existe donc un $\gamma_0 \in \mathrm{Sp}\, \mathrm{U}^e$ tel que $\beta(\gamma_0) \in [\lambda' - \varepsilon, \lambda' + \varepsilon]$, et (3.7.6) il existe une isométrie partielle $u \neq 0$, $u^2 = 0$, $u \in \mathrm{M}(\mathrm{U}, \{\gamma_0\}) \cap \mathrm{M}_e$ telle que $u^* u + uu^*$ appartienne à M^{U}. Cela contredit la maximalité de la famille $(u_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$. Par suite on a $\sum e_\alpha = 1$.

Soit $v = \sum u_\alpha$. Comme les $u_\alpha^* u_\alpha$ sont deux à deux orthogonaux, ainsi que les $u_\alpha u_\alpha^*$, v est une isométrie partielle de support initial $\sum u_\alpha^* u_\alpha = v^* v$ et de support final $\sum u_\alpha u_\alpha^* = vv^*$. On a $v^2 = 0$ car les e_α sont deux à deux orthogonaux et on a $v^* v + vv^* = \sum e_\alpha = 1$. Pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$ et tout $x \in \mathrm{M}$ on a [3.7.5 (*a*)]

$$\beta(\gamma_\alpha)\, \varphi(u_\alpha x) = \varphi(x u_\alpha)$$

donc

$$|\lambda' \varphi(u_\alpha x) - \varphi(x u_\alpha)| \leq \varepsilon\, |\varphi(u_\alpha x)| = \varepsilon\, |\varphi(u_\alpha x e_\alpha)|$$

car $e_\alpha \in \mathrm{M}^{\mathrm{U}}$ et $e_\alpha u_\alpha = u_\alpha$. Or

$$|\varphi(u_\alpha x e_\alpha)| = |\varphi(e_\alpha (u_\alpha x) e_\alpha)| \leq \|x\|\, \varphi(e_\alpha).$$

On a donc

$$|\lambda' \varphi(vx) - \varphi(xv)| \leq \sum |\lambda' \varphi(u_\alpha x) - \varphi(xu_\alpha)| \leq \varepsilon \|x\| \sum \varphi(e_\alpha)$$

et $|\lambda' \varphi(vx) - \varphi(xv)| \leq \varepsilon \|x\|$ pour tout $x \in M$.

Comme ε est arbitraire on a montré que pour tout état normal fidèle presque-périodique φ sur M et tout $\varepsilon' > 0$ il existe un $v \in M$ tel que $v^2 = 0$, $vv^* + v^* v = 1$ et que $|\lambda\varphi(vx) - (1-\lambda)\varphi(xv)| \leq \varepsilon' \|x\|$ pour tout $x \in M$.

Par hypothèse l'ensemble des états presque-périodiques est dense dans l'ensemble des états normaux sur M, donc M a la propriété L_λ de Powers.

Corollaire 3.7.7. — *Soit* M *un facteur tel que* $S(M) = \{\lambda^n, n \in \mathbf{Z}\}^-$. *Soit* $\mu \in]0, 1/2[$. *Pour que* M *vérifie la propriété* L_μ *de Powers il faut et il suffit que* $\mu/(1-\mu)$ *soit une puissance entière de* λ.

Pour démontrer ce corollaire on peut supposer $\lambda \neq 0$, car si $\lambda = 0$, 3.5.4 montre que M n'a la propriété L_μ pour aucun $\mu \in]0, 1/2[$. Le corollaire 3.7.7 résulte donc du théorème 3.7.2 et du lemme suivant :

Lemme 3.7.8. — *Soient* M *une algèbre de von Neumann*, $T_0 > 0$, $T_0 \in T(M)$, φ *un état normal fidèle sur* M. *Il existe une suite* (φ_k), k *entier, d'états normaux fidèles sur* M *tels que pour tout* k *on ait*

$$\|\varphi_k - \varphi\| \leq 2\left(1 - e^{-\frac{2\pi}{k T_0}}\right), \qquad \text{et} \qquad \sigma^{\varphi_k}_{k T_0} = 1.$$

Par hypothèse $T_0 \in T(M)$, donc (1.3.3), il existe un état normal fidèle ψ sur M, un opérateur borné inversible $h \in M_\varphi \cap M_\psi$ tel que $\psi(h.) = \varphi$, que $\sigma^\psi_{T_0} = 1$, et $\sigma^\varphi_t(x) = h^{it} \sigma^\psi_t(x) h^{-it}$ pour tout $t \in R$, et $x \in M$.

Soit $\varepsilon \in]0, 1[$. Soient $\lambda_n = (1-\varepsilon)^{-n}$ pour $n \in \mathbf{Z}$ et e_n le projecteur spectral de h correspondant à l'intervalle $]\lambda_n, \lambda_{n+1}]$. On a $e_n \in M_\psi$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$,

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} e_n = 1,\ he_n \geq \lambda_n e_n,\ he_n - \lambda_n e_n \leq \varepsilon\, he_n$$

donc

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \lambda_n e_n \leq h \qquad \text{et} \qquad \psi\left(h - \sum_{-\infty}^{+\infty} \lambda_n e_n\right) \leq \varepsilon\psi(h) = \varepsilon.$$

Soient $\psi_1 = \psi\left(\left(\sum_{-\infty}^{+\infty} \lambda_n e_n\right).\right)$. Alors ψ_1 a un sens car $\sum_{-\infty}^{+\infty} \lambda_n e_n$ est un opérateur positif borné inversible appartenant à M_ψ, et ψ_1 est une forme linéaire positive normale fidèle sur M. Soit φ_ε l'unique état normal fidèle sur M proportionnel à ψ_1. On a

$$\| \varphi_\varepsilon - \varphi \| \leqq \| \varphi_\varepsilon - \psi_1 \| + \| \psi_1 - \varphi \| = (\varphi_\varepsilon(1) - \psi_1(1)) + (\varphi(1) - \psi_1(1)),$$

car $\psi_1 \leqq \varphi$ et $\psi_1 \leqq \varphi_\varepsilon$. On a donc

$$\| \varphi_\varepsilon - \varphi \| \leqq 2(1 - \psi_1(1)) = 2\psi\left(h - \sum \lambda_n e_n\right) \leqq 2\varepsilon.$$

Soient $k \in \mathbf{N}$, $\varepsilon_k = 1 - e^{-2\pi/k T_0}$, $\varphi_k = \varphi_{\varepsilon_k}$. On a $\lambda_n = (1 - \varepsilon_k)^{-n}$ donc $\lambda_n^{ik T_0} = 1$ par construction. Comme $\sigma_{kT_0}^{\psi} = 1$ on a donc $\sigma_{kT_0}^{\psi_1} = 1$ et $\sigma_{kT_0}^{\varphi_k} = 1$.

Corollaire 3.7.9. — *Pour tout $\lambda \in]0, 1/2[$ il existe un facteur opérant dans un espace de Hilbert séparable, ayant la propriété L_λ de Powers sans avoir la propriété L'_λ d'Araki.*

Soient $\lambda_0 = \lambda/(1 - \lambda)$, P_{λ_0} le facteur de Pukanszky (3.6.5). On a

$$S(M) = \{ \lambda_0^n, n \in \mathbf{Z} \}^-$$

donc P_{λ_0} a la propriété L_λ de Powers (3.7.7). D'autre part,

$$r_\infty(P_{\lambda_0}) = \{ 0 \} \quad (3.6.5),$$

donc [1] P_{λ_0} ne vérifie pas la propriété L'_λ.

IV. — Facteurs de type III_λ avec $0 < \lambda < 1$

Soient $\lambda \in [0, 1]$ et M un facteur. On dit que M est de type III_λ si $S(M) = \{ \lambda^n, n \in \mathbf{Z} \}^-$ (pour $\lambda \neq 1$) ou $S(M) = [0, \infty[$ (pour $\lambda = 1$). Tout facteur de type III_λ ($\lambda \in [0, 1]$) est de type III car $0 \in S(M)$. Pour tout facteur de type III il existe [3.2.3 (*a*)] un unique $\lambda \in [0, 1]$ tel que M soit de type III_λ. Le résultat principal de la 4^e partie est la description 4.4.1 de tout facteur de type III_λ pour $\lambda \in]0, 1[$ comme produit croisé d'un facteur de type II_∞ par un automorphisme θ transformant la trace τ en $\lambda\tau$.

Dans 4.1 nous caractérisons l'injection canonique d'une algèbre de von Neumann dans son produit croisé par un automorphisme.

Dans 4.2 nous montrons que dans un facteur de type III_λ ($\lambda \in]0, 1[$), le centralisateur M_φ de tout poids normal fidèle strictement semi-fini φ sur M contient une sous-algèbre de von Neumann abélienne maximale dans M. De plus nous montrons que l'égalité $\operatorname{Sp} \Delta_\varphi = S(M)$ est équivalente à la maximalité de M_φ dans l'ensemble des sous-algèbres de von Neumann semi-finies de M qui sont images d'espérances conditionnelles normales fidèles.

Dans 4.3 nous montrons l'unicité et l'existence des « traces généralisées » ayant la propriété de maximalité ci-dessus. Dans 4.4 nous obtenons le résultat annoncé plus haut.

Dans 4.5 nous montrons l'existence d'une suite exacte (4.5.1) permettant de calculer Out M en fonction du couple (N, θ) canoniquement associé à M par 4.4.1.

Dans 4.6 nous montrons que tout état normal fidèle sur $M = W^* (\theta, N)$ est transformé par un automorphisme intérieur d'un état normal fidèle de la forme $\varphi \circ E$ où E est l'espérance conditionnelle canonique de M sur N.

4.1. PRÉLIMINAIRES. — Toutes les algèbres de von Neumann intervenant dans les 4[e] et 5[e] parties seront de genre dénombrable par hypothèse ou par construction. Dorénavant nous écrirons « algèbre de von Neumann » pour « algèbre de von Neumann de genre dénombrable ».

PROPOSITION 4.1.1. — *Soient* N *une algèbre de von Neumann,* θ *un automorphisme de* N *tel que* $p(\theta^n) = 0$ *pour tout* $n \neq 0$ (*cf.* 1.5), *et agissant ergodiquement sur le centre de* N. *Soient* $M = W^* (\theta, N)$, *et* I *comme dans* 1.4.6 (*a*). *On a* $I(N)' \cap M \subset I(N)$ *et* M *est un facteur.*

Démonstration. — Pour $x \in I(N)' \cap M$, $s \in Z$ et $y \in I(N)$, on a, avec les notations de 1.4.6, les égalités

$$y\, E(x U_s^*) U_s = E(xy U_s^*) U_s = E(x U_s^*) U_s\, y\, U_s^* U_s = E(x U_s^*) U_s\, y.$$

Donc

$$y\, E(x U_s^*) = E(x U_s^*) U_s\, y\, U_s^*$$

pour tout $y \in I(N)$ et la remarque 1.5.3 (*a*) montre que $E(x U_s^*) = 0$ pour tous $s \neq 0$. Il en résulte que $I(N)' \cap M \subset I(N)$ et que M est un facteur.

PROPOSITION 4.1.2. — *Soient* N *une algèbre de von Neumann,* $\theta \in \mathrm{Aut}\, N$ *tel que* $p(\theta^n) = 0$ *pour tout* $n \neq 0$ *et que* θ *agisse ergodiquement sur le centre de* N. *Soit* I *un isomorphisme de* N *sur une sous-algèbre de von Neumann* I (N) *d'un facteur* M, *tel que :*

(*a*) $I(N)' \cap M \subset I(N)$.

(*b*) *Il existe une espérance conditionnelle normale fidèle* E *de* M *sur* I (N).

(*c*) *Il existe un unitaire* $X \in M$ *tel que* $X I(x) X^* = I(\theta(x))$ *pour tout* $x \in N$ *et que* M *soit l'algèbre de von Neumann engendrée par* I (N) *et* X.

Il existe alors un isomorphisme unique J *de* M *sur* $W^*(\theta, N)$ *tel que :*

1° $J \circ I$ *soit l'injection canonique de* N *dans* $W^*(\theta, N)$ *de* 1.4.6 (*a*).

2° J (X) *soit l'unitaire de* $W^*(\theta, N)$ *associé à* $1 \in Z$, *par l'application* U *de* Z *dans* $W^*(\theta, N)$ *de* 1.4.6 (*c*).

Démonstration. — Le théorème 1.5.5 (*a*), (*b*) montre que l'espérance conditionnelle E est unique et que $X \in \mathfrak{N}(E)$. Comme M est de genre dénombrable, il existe un état normal fidèle φ sur I (N). Soient $\psi = \varphi \circ E$, $(\mathcal{H}_\psi, \pi_\psi, \xi_\psi)$ la construction de Gelfand-Ségal déduite de ψ. Soient n un entier > 0, $x_{-n}, \ldots, x_0, x_1, \ldots, x_n$ des éléments de N. Soient j_1 et $j_2 \in \{-n, \ldots, n\}$. On a

$$\langle \pi_\psi (I(x_{j_1}) X^{j_1}) \xi_\psi, \pi_\psi (I(x_{j_2}) X^{j_2}) \xi_\psi \rangle = \psi (X^{-j_2} I(x_{j_2}^* x_{j_1}) X^{j_1})$$
$$= \varphi [E(X^{j_1 - j_2}) I(\theta^{-j_1}(x_{j_2}^* x_{j_1}))].$$

Pour $j_1 \neq j_2$, on a $E(X^{j_2 - j_1}) = 0$ (1.5.6), donc les $\pi_\psi (I(x_j) X^j) \xi_\psi$ sont deux à deux orthogonaux. On a alors

$$\left\| \pi_\psi \left(\sum I(x_j) X^j \right) \xi_\psi \right\|^2 = \sum \varphi [I(\theta^{-j}(x_j^* x_j))].$$

Soient φ_0 un état normal fidèle sur N et $(M_1, I_1 X_1)$, (M_2, I_2, X_2) deux triplets vérifiant les conditions (*a*), (*b*), (*c*). Soit

$$\psi_1, \psi_1(x) = \varphi_0 (I_1^{-1}(E_1(x)))$$

[resp. $\psi_2(x) = \varphi_0 (I_2^{-1}(E_2(x)))$]. Le calcul ci-dessus montre que l'application qui à $\pi_{\psi_1}\left(\sum I_1(x_j) X_1^j\right) \xi_{\psi_1}$ associe $\pi_{\psi_2}\left(\sum I_2(x_j) X_2^j\right) \xi_{\psi_2}$ se prolonge en une isométrie Y de l'adhérence dans $\mathcal{H}_{\psi_1}$ de l'ensemble des $\pi_{\psi_1}\left(\sum I_1(x_j) X_1^j\right) \xi_{\psi_1}$ sur l'adhérence dans $\mathcal{H}_{\psi_2}$ de l'ensemble des $\pi_{\psi_2}\left(\sum I_2(x_j) X_2^j\right) \xi_{\psi_2}$. Par hypothèse la sous-algèbre involutive $\mathcal{A}_j$ de M_j formée de $\sum I_j(x_k) X_j^k$ est fortement dense dans M_j. De plus $\pi_{\psi_j}(M_j) \xi_{\psi_j}$ est dense dans $\mathcal{H}_{\psi_j}$. Il en résulte que Y est une isométrie de $\mathcal{H}_{\psi_1}$ sur $\mathcal{H}_{\psi_2}$. Soient n un entier > 0, $x_{-n}, \ldots, x_0, x_1 \ldots x_n \in N$ et $y_{-n} \ldots y_0, y_1 \ldots y_n \in N$,

$$a_1 = \sum I_1(x_j) X_1^j, \qquad a_2 = \sum I_2(x_j) X_2^j,$$
$$b_1 = \sum I_1(y_j) X_1^j, \qquad b_2 = \sum I_2(y_j) X_2^j.$$

On a

$$a_1 b_1 = \sum_{j,k} I_1(x_j \theta^j(y_k)) X_1^{j+k}, \qquad a_2 b_2 = \sum_{j,k} I_2(x_j \theta^j(y_k)) X_2^{j+k}.$$

Ainsi

$$Y \pi_{\psi_1}(a_1 b_1) \xi_{\psi_1} = \pi_{\psi_2}(a_2 b_2) \xi_{\psi_2} \qquad \text{et} \qquad Y \pi_{\psi_1}(a_1) \pi_{\psi_1}(b_1) \xi_{\psi_1} = \pi_{\psi_2}(a_2) Y \pi_{\psi_1}(b_1) \xi_{\psi_1}.$$

Cela prouve que pour tout $a_1 \in \mathfrak{A}_1$ il existe un $a_2 \in \mathfrak{A}_2$ tel que $Y \pi_{\psi_1}(a_1) = \pi_{\psi_2}(a_2) Y$. On a montré que $Y \pi_{\psi_1}(\mathfrak{A}_1) Y^* \subset \pi_{\psi_2}(M_2)$; on a donc $Y \pi_{\psi_1}(M_1) Y^* \subset \pi_{\psi_2}(M_2)$ et on a l'égalité en inversant les rôles de M_1 et M_2.

Il existe donc un isomorphisme J_{12} de M_1 sur M_2 tel que pour tout $x \in M_1$, $\pi_{\psi_2}(J_{12}(x)) = Y \pi_{\psi_1}(x) Y^*$. Pour tout $x \in N$ on a

$$Y \pi_{\psi_1}(I_1(x)) Y^* = \pi_{\psi_2}(I_2(x))$$

donc $J_{12} I_1(x) = I_2(x)$. On a $Y \pi_{\psi_1}(X_1) Y^* = \pi_{\psi_2}(X_2)$ donc $J_{12}(X_1) = X_2$.

La conclusion de 4.1.2 résulte donc de 4.1.1.

Remarque 4.1.3. — *Soit* N *une algèbre de von Neumann,* $\mathcal{G}$ *un sous-groupe de* Aut N, *agissant ergodiquement sur le centre de* N *et tel que* $p(g) = 0$ *pour tout* $g \in \mathcal{G}$, $g \neq 1$. *Alors* $W^*(\mathcal{G}, N)$ *est un facteur et l'injection canonique* I *de* N *dans* $W^*(\mathcal{G}, N)$ *vérifie* $I(N)' \cap W^*(\mathcal{G}, N) \subset I(N)$. *De plus la conclusion de* 4.1.2 *reste vraie en remplaçant* (c) *par* (d) *et* 2° *par* 3° *où :*

(*d*) *Il existe un homomorphisme* $g \to X_g$ *de* $\mathcal{G}$ *dans le groupe unitaire de* M *tel que* $X_g I(x) X_g^* = I(g.x)$ *pour* $g \in \mathcal{G}$, $x \in N$ *et que* M *soit l'algèbre de von Neumann engendrée par* I (N) *et les* X_g, $g \in \mathcal{G}$.

3° *Pour tout* $g \in \mathcal{G}$, *on a* $J(X_g) = U_g$ *pour* U *comme dans* 1.4.6 (*c*).

Corollaire 4.1.4. — *Soient* N *une algèbre de von Neumann,* $\theta_1 \in \mathrm{Aut}\, N$ (*resp.* $\theta_2 \in \mathrm{Aut}\, N$), *vérifiant les conditions de* 4.1.1. *Supposons que* $\theta_2^{-1}\theta_1$ *soit un automorphisme intérieur de* N. *Alors les facteurs* $W^*(\theta_1, N)$ *et* $W^*(\theta_2, N)$ *sont isomorphes.*

Démonstration. — Soient I_1 (resp. I_2) l'injection canonique de N dans $W^*(\theta_1, N)$ [resp. dans $W^*(\theta_2, N)$], X_1 (resp. X_2) un unitaire de $W^*(\theta_1, N)$ [resp. de $W^*(\theta_2, N)$] comme dans 4.1.2 (*c*). Soit u un unitaire de N tel que $\theta_2(x) = u\, \theta_1(x)\, u^*$ pour tout $x \in N$. Soit $X_2' = I_1(u) X_1$. Alors $W^*(\theta_1, N)$ est l'algèbre de von Neumann engendrée par $I_1(N)$ et X_2' et on a, pour tout $x \in N$, $I_1(\theta_2(x)) = X_2' I_1(x) X_2'^*$. La conclusion résulte donc de 4.1.2.

4.2. Comparaison des algèbres M_φ pour les poids normaux fidèles strictement semi-finis sur un facteur M de type III_λ ($\lambda \in]0, 1[$).

Théorème 4.2.1. — *Soient* $\lambda \in]0, 1[$, M *un facteur de type* III_λ, φ, φ_1 *et* φ_2 *des poids normaux fidèles strictement semi-finis sur* M.

(*a*) *Il existe une sous-algèbre de von Neumann abélienne maximale* $\mathfrak{A}$ *de* M *telle que* $\mathfrak{A} \subset M_\varphi$.

(*b*) *On a* $M_{\varphi_1} \subset M_{\varphi_2}$ *si et seulement si il existe un opérateur positif non singulier h affilié au centre de* M_{φ_1} *et tel que* $\varphi_2 = \varphi_1(h.)$.

La démonstration utilise des lemmes qui nous reserviront.

LEMME 4.2.2. — *Soient* G *un groupe abélien localement compact,* M *un facteur,* U *une représentation de* G *dans* M. *Soient* $x \in M$, *e le support de x, e' le support de* x^*, *u l'isométrie partielle de la décomposition polaire de x. On suppose qu'il existe des projecteurs* $f, f' \in M^U$, $f \geqq e$, $f' \geqq e'$ *avec*

$$(\mathrm{Sp}_U(x) - \mathrm{Sp}_U(x)) \bigcap [(\mathrm{Sp}\, U^f) \bigcup (\mathrm{Sp}\, U^{f'})] = \{0\}.$$

Alors $\mathrm{Sp}_U(u) = \mathrm{Sp}_U(x)$, $x^* x \in M^U$ *et* $e \in M^U$, $e' \in M^U$.

Démonstration. — Soit $E = \mathrm{Sp}_U(x)$. On a

$$x^* x \in M(U, E - E) \cap M_f \quad (2.1.5),$$
$$\mathrm{Sp}_U(x^* x) \subset \mathrm{Sp}\, U^f \cap (E - E) = \{0\} \qquad \text{et} \qquad x^* x \in M^U.$$

On a alors $\mathrm{Sp}_U(x) \subset \mathrm{Sp}_U(u)$. Soit $(k_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de M^U telle que $(x^* x)^{1/2} k_n$ tende vers e faiblement. Comme $u = \lim_{n \to \infty} x k_n$, on a $u \in M(U, E)$ [2.1.5 et 2.1.3 (*b*)] et $\mathrm{Sp}_U(u) = \mathrm{Sp}_U(x)$. On a

$$u^* u \in M(U, (E - E)) \cap M_f, \qquad uu^* \in M(U, (E - E)) \cap M_{f'}$$

donc $e \in M^U$ et $e' \in M^U$.

LEMME 4.2.3. — *Soient* φ *un état normal fidèle sur un facteur* M, *tel que* 1 *soit isolé dans* $\mathrm{Sp}\, \Delta_\varphi$ *et* $\mathfrak{A}$ *une sous-algèbre de von Neumann abélienne maximale de* M_φ. *Alors* $\mathfrak{A}$ *est abélienne maximale dans* M.

Soient σ la représentation $t \to \sigma_t^\varphi$ de $\mathbf{R}$ dans M. On a $\mathrm{Sp}\, \sigma = \mathrm{Sp}\, \Delta_\varphi \cap R_+^*$ avec les notations de 3.2.2. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\mathrm{Sp}\sigma \cap [e^{-\varepsilon}, e^{\varepsilon}] = \{1\}$.

Pour tout $a \in \mathfrak{A}$ on a $\sigma_t(a) = a$ pour $t \in \mathbf{R}$, donc le commutant relatif $\mathfrak{A}' \cap M = \mathfrak{A}'_M$ de $\mathfrak{A}$ dans M est globalement invariant par les σ_t, $t \in \mathbf{R}$. S'il existe un $x \in \mathfrak{A}'_M$ tel que $x \notin M_\varphi$ montrons qu'on aboutit à une contradiction.

D'après 2.1.6 soit $g \in L^1(R)$ tel que $\sigma(g) x \notin M_\varphi$ et $\mathrm{Log}\,(\mathrm{Support}\, \hat{g})$-$\mathrm{Log}\,(\mathrm{Support}\, \hat{g}) \subset [-\varepsilon, \varepsilon]$. Soit $y = \sigma(g)\, x$. On a $y \in \mathfrak{A}'_M$, $y \notin M_\varphi$ et

$$\mathrm{Log}\,(\mathrm{Sp}_\sigma(y)) - \mathrm{Log}\,(\mathrm{Sp}_\sigma(y)) \subset [-\varepsilon, \varepsilon].$$

On ne peut avoir $1 \in \mathrm{Sp}_\sigma(y)$ sans avoir $\mathrm{Sp}_\sigma(y) \subset [e^{-\varepsilon}, e^{\varepsilon}]$ donc $y \in M_\varphi$. On a donc $\mathrm{Sp}_\sigma(y) \subset]e^{\varepsilon}, \infty[$ ou $\mathrm{Sp}_\sigma(y) \subset]0, e^{-\varepsilon}[$, et comme y^* joue le même rôle que y on peut supposer que $\mathrm{Sp}_\sigma(y) \subset]e^{\varepsilon}, \infty[$. Soit u l'isométrie partielle de la décomposition polaire de y. On a $u \in \mathfrak{A}'_M$, $u \notin M_\varphi$, $\mathrm{Sp}_\sigma(u) \subset]e^{\varepsilon}, \infty[$, $uu^* \in M_\varphi$, $u^* u \in M_\varphi$ en appliquant 4.2.2. Soient $e = u^* u$, $e' = uu^*$.

On a $e \in M_\varphi \cap \mathfrak{A}'_M \subset \mathfrak{A}$, donc $eu = ue = u$ et $ue' = e'u = u$. On a alors $e = e'$ nécessairement.

Par construction $\mathrm{Sp}_\sigma(u)$ est un compact de $]e^\varepsilon, \infty[$. Il existe donc un $f \in L^1(\mathbf{R})$ tel que $\hat{f}(\gamma^{-1}) = 0$ pour tout $\gamma \geqq e^{-\varepsilon/2}$, que $u = \sigma(f)u$, et que $0 \leqq \hat{f}(\gamma) \leqq 1$ pour tout $\gamma \in \mathbf{R}_+^*$. On a

$$\sup_{\gamma \in \mathbf{R}_+^*} \gamma^{1/2} \hat{f}(\gamma^{-1}) \leqq e^{-\varepsilon/4},$$

$$\Delta_\varphi^{1/2} \hat{f}(\Delta_\varphi^{-1}) \eta_\varphi(u) = \Delta_\varphi^{1/2} \eta_\varphi\left(\int_{\mathbf{R}} \sigma_t^\varphi(u) f(t)\, dt\right) = \Delta_\varphi^{1/2} \eta_\varphi(u) \quad [cf.\ 3.2.2, \text{ formule } (1)].$$

D'où

$$\| \eta_\varphi(u^*) \| = \| \Delta_\varphi^{1/2} \eta_\varphi(u) \| \leqq e^{-\varepsilon/4} \| \eta_\varphi(u) \|,$$

ce qui contredit l'égalité $\varphi(uu^*) = \varphi(e) = \varphi(u^* u)$ car u est non nul.

LEMME 4.2.4. — *Soit* (e_α) *une partition de l'unité dans l'algèbre de von Neumann* M. *Pour tout* α *soit* $\mathfrak{A}_\alpha$ *une sous-algèbre de von Neumann abélienne maximale de* M_{e_α}. *Soit* $\mathfrak{A}$ *la sous-algèbre de* M *adhérence faible de l'ensemble des sommes finies* $\sum a_{\alpha_j}$, *où* $a_{\alpha_j} \in \mathfrak{A}_{\alpha_j}$. *Alors* $\mathfrak{A}$ *est une sous-algèbre de von Neumann abélienne maximale de* M.

Soit $x \in M \cap \mathfrak{A}'$. On a $e_\alpha x = x e_\alpha$ pour tout α car $e_\alpha \in \mathfrak{A}$. On a donc $x =$ limite faible $\sum_{\alpha \in F} e_\alpha x e_\alpha$ quand F décrit l'ensemble des parties finies de l'ensemble des α. Pour tout α, $e_\alpha x e_\alpha$ commute avec tout $a \in \mathfrak{A}_\alpha$ donc $e_\alpha x e_\alpha \in \mathfrak{A}_\alpha$ et $x \in \mathfrak{A}$.

Démonstration de 4.2.1 :

(*a*) Comme φ est strictement semi-fini, il existe [3.1.4 (*b*)] une partition de l'unité (e_α) dans M_φ telle que $\varphi(e_\alpha) < \infty$ pour tout α. Pour tout α, $\varphi_\alpha = \varphi_{e_\alpha}$ est une forme linéaire positive normale fidèle sur $M_\alpha = M_{e_\alpha}$. On a $T_0 \in T(M_{e_\alpha})$ pour $T_0 = 2\pi/\mathrm{Log}\,\lambda$ car $T_0 \in T(M)$ (3.4.1) et M est isomorphe à M_α car e_α est équivalent à 1 dans M. La remarque 1.3.3 montre que pour tout α il existe un $h_\alpha \in M_\alpha$, positif et inversible dans M_α, appartenant à $M_{\alpha, \varphi_\alpha} = M_\varphi \cap M_\alpha$ et tel que $\psi_\alpha = \varphi_\alpha(h_\alpha \cdot)$ vérifie $\sigma_{T_0}^{\psi_\alpha} = 1$.

Le lemme 4.2.3 montre que toute sous-algèbre de von Neumann abélienne maximale de M_{α, ψ_α} est abélienne maximale dans M_α. Soit $\mathfrak{A}_\alpha$ une sous-algèbre de von Neumann abélienne maximale de M_{α, ψ_α} contenant h_α. Pour $x \in \mathfrak{A}_\alpha$ on a $x h_\alpha^{it} = h_\alpha^{it} x$ pour tout $t \in \mathbf{R}$ et $\sigma_t^{\psi_\alpha}(x) = x$ pour tout $t \in \mathbf{R}$; on a donc $x \in M_{\alpha, \varphi_\alpha} = M_\varphi \cap M_\alpha$.

Le lemme 4.2.4 montre donc qu'il existe une sous-algèbre de von Neumann abélienne maximale $\mathfrak{A}$ de M contenue dans M_φ.

(*b*) Supposons $M_{\varphi_1} \subset M_{\varphi_2}$. D'après (*a*) le commutant relatif $M'_{\varphi_1} \cap M$ de M_{φ_1} dans M est contenu dans M_{φ_1}. Soit $u_t = (D\varphi_2 : D\varphi_1)_t$ pour $t \in \mathbf{R}$. On a pour tout $x \in M_{\varphi_1}$ l'égalité

$$x = \sigma_t^{\varphi_2}(x) = u_t\, \sigma_t^{\varphi_1}(x)\, u_t^* = u_t\, x u_t^*.$$

Donc $u_t \in M_{\varphi_1} \subset M_{\varphi_2}$ pour tout $t \in \mathbf{R}$. Pour $x \in M_+$ on a

$$\varphi_2(x) = \varphi_2(\sigma_t^{\varphi_2}(x)) = \varphi_2(u_t\, \sigma_t^{\varphi_1}(x)\, u_t^*) = \varphi_2(\sigma_t^{\varphi_1}(x)),$$

ce qui montre que φ_2 est $\sigma_t^{\varphi_1}$-invariant pour tout $t \in \mathbf{R}$. Il existe donc ([30], th. 5.12) un opérateur positif non singulier affilié à M_{φ_1} tel que $\varphi_2 = \varphi_1(h.)$. Pour tout $x \in M_{\varphi_1}$ et tout $t \in \mathbf{R}$ on a

$$x = \sigma_t^{\varphi_2}(x) = h^{it}\, \sigma_t^{\varphi_1}(x)\, h^{it} = h^{it}\, x h^{-it}$$

ce qui montre que h est affilié au centre de M_{φ_1}.

Inversement si $\varphi_2 = \varphi_1(h.)$ où h est affilié au centre de M_{φ_1}, on a pour tout $x \in M_{\varphi_1}$ et tout $t \in \mathbf{R}$ l'égalité $\sigma_t^{\varphi_2}(x) = h^{it}\, x h^{-it} = x$, donc $M_{\varphi_1} \subset M_{\varphi_2}$.

REMARQUE 4.2.5. — *Soient* $\lambda \in]0, 1[$, M *un facteur de type* III_λ, φ *un poids normal fidèle strictement semi-fini sur* M. *Les théorèmes* 4.2.1 *et* 1.5.5 *montrent que l'espérance conditionnelle* E_φ *de* 3.1.4 (*c*) *est la seule espérance conditionnelle normale fidèle de* M *sur* M_φ.

THÉORÈME 4.2.6. — *Soient* $\lambda \in]0, 1[$, $T_0 = 2\pi/\mathrm{Log}\,\lambda$, M *un facteur de type* III_λ, *et* φ *un poids normal fidèle strictement semi-fini sur* M. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(*a*) $\sigma_{T_0}^{\varphi} = 1$.

(*b*) $\mathrm{Sp}\,\Delta_\varphi = S(M)$.

(*c*) $M'_\varphi \cap M = \mathbf{C}$.

(*d*) M_φ *est un facteur.*

(*e*) *Pour tout poids* ψ *normal fidèle semi-fini sur* M *tel que* $M_\varphi \subset M_\psi$, ψ *est proportionnel à* φ.

(*f*) M_φ *est maximale pour l'inclusion parmi les sous-algèbres de von Neumann semi-finies de* M *qui sont images de* M *par une espérance conditionnelle normale fidèle.*

Démonstration :

(*a*) implique (*b*). Par hypothèse $\mathrm{Sp}\,\Delta_\varphi^{iT_0} = \{1\}$ donc $\mathrm{Sp}\,\Delta_\varphi \subset \{\lambda^n, n \in \mathbf{Z}\}^-$.

(*b*) implique (*d*). Soit σ^φ la représentation $t \to \sigma_t^\varphi$ de $\mathbf{R}$ dans M. On a $\mathrm{Sp}\,\sigma^\varphi = \Gamma(\sigma^\varphi)$ (3.2.1 et 3.2.2). De plus, $\Gamma(\sigma^\varphi)$ est un sous-groupe discret de $\mathbf{R}_+^*$ donc $M_\varphi = M^\sigma$ est un facteur (2.4.1).

(*d*) implique (*c*). On a $M'_\varphi \cap M \subset M_\varphi$ [4.2.1 (*a*)] donc $M'_\varphi \cap M = \mathbf{C}$.

(*c*) implique (*e*). La démonstration de 4.2.1 (*b*) n'utilise pas l'hypothèse φ_2 strictement semi-fini et s'applique sans modification au cas où φ_2 est un poids normal fidèle semi-fini. Appliquant 4.2.1 (*b*) avec $\varphi_1 = \varphi$ et $\varphi_2 = \psi$ on voit que ψ proportionnel à φ car le centre de M_φ est réduit aux scalaires.

(*e*) implique (*f*). Soit N une sous-algèbre de von Neumann semi-finie de M telle que $M_\varphi \subset N$. Soient E une espérance conditionnelle normale fidèle de M sur N, τ une trace normale fidèle semi-finie sur N, $\psi = \tau \circ E$ le poids normal fidèle semi-fini correspondant sur M. On a $N \subset M_\psi$ d'après 1.4.3, donc ψ est proportionnel à φ et $M_\psi = M_\varphi$ donc $N = M_\varphi$.

(*f*) implique (*a*). On a $T_0 \in T(M)$ donc [1.3.2 (*d*)] il existe un opérateur positif autoadjoint non singulier affilié au centre de M_φ tel que pour $\psi = \varphi(h.)$ on ait $\sigma^\psi_{T_0} = 1$. Comme l'application $x \to 1/T_0 \int_0^{T_0} \sigma^\psi_t(x)\, dt$ est une espérance conditionnelle normale fidèle σ^ψ_t-invariante de M sur M_ψ, le poids ψ est normal fidèle strictement semi-fini [3.1.4 (*e*)].

On a $M_\varphi \subset M_\psi$ et M_ψ est semi-finie, image d'une espérance conditionnelle normale fidèle. On a donc $M_\varphi = M_\psi$. Comme ψ vérifie (*a*) il vérifie également (*e*). Comme $M_\psi \subset M_\varphi$, φ est proportionnel à ψ et φ vérifie (*a*).

4.3. Traces généralisées sur les facteurs de type III_λ ($\lambda \in]0, 1[$).

Définition 4.3.1. — *Soient* $\lambda \in]0, 1[$, M *un facteur de type* III_λ, φ *un poids normal fidèle strictement semi-fini tel que* $\varphi(1) = +\infty$. *On dit que* φ *est une trace généralisée sur* M *s'il vérifie les conditions équivalentes de* 4.2.6.

Théorème 4.3.2. — *Soient* $\lambda \in]0, 1[$, M *un facteur de type* III_λ, $T_0 = 2\pi/\mathrm{Log}\,\lambda$.

(*a*) *Il existe sur* M *une trace généralisée.*

(*b*) *Si* φ_1 *et* φ_2 *sont deux traces généralisées sur* M *il existe* $\alpha > 0$ *et* u *unitaire de* M *tels que* $\varphi_2(x) = \alpha\varphi_1(uxu^*)$ *pour tout* $x \in M_+$.

(*c*) *Dans* (*b*) *le nombre* $\alpha^{iT_0} = \alpha_0$ *est indépendant du choix de* u *tel que* φ_2 *et* $\varphi_{1,u}$ *soient proportionnelles, et pour tout* α *tel que* $\alpha^{iT_0} = \alpha_0$ *il existe un unitaire* u *de* M *tel que* $\varphi_2(x) = \alpha\varphi_1(uxu^*)$ *pour tout* $x \in M_+$.

Démonstration :

(*a*) On a $T_0 \in T(M)$. Il existe donc un état normal fidèle φ sur M tel que $\sigma^\varphi_{T_0} = 1$. Soient τ une trace normale fidèle semi-finie sur le facteur F_∞, $\psi = \varphi \otimes \tau$ le poids normal fidèle strictement semi-fini correspondant sur $M \otimes F_\infty$.

Alors ψ est une trace généralisée sur $M \otimes F_\infty$ et $M \otimes F_\infty$ est isomorphe à M qui est un facteur de type III_λ.

(*b*), (*c*) On a $\sigma^{\varphi_2}_{T_0} = \sigma^{\varphi_1}_{T_0} = 1$ donc $(D\varphi_2 : D\varphi_1)_{T_0} = \alpha_0 1_M$, où α_0 désigne un nombre complexe de module 1. Soit $\alpha > 0$ tel que $\alpha^{iT_0} = \alpha_0$. Montrons qu'il existe un unitaire $u \in M$ tel que $\varphi_2(x) = \alpha\varphi_1(uxu^*)$ pour tout $x \in M_+$. On aura alors montré (*b*) et (*c*) car si $\varphi_2(x) = \beta\varphi_1(uxu^*)$ pour tout $x \in M_+$ on a

$$\alpha_0 = (D\varphi_2 : D\varphi_1)_{T_0} = (D\varphi_2 : D\varphi_{1,u})_{T_0} (D\varphi_{1,u} : D\varphi_1)_{T_0} = \beta^{iT_0}(u^* \sigma^{\varphi_1}_{T_0}(u)) = \beta^{iT_0}.$$

Soient $P = M \otimes F_2$ (1.2.2), ψ le poids normal fidèle semi-fini sur P, avec

$$\psi\left(\sum x_{ij} \otimes e_{ij}\right) = \alpha\varphi_1(x_{11}) + \varphi_2(x_{22}) \qquad \text{pour} \quad x = \sum x_{ij} \otimes e_{ij} \geq 0.$$

On a

$$\sigma^{\psi}_{T_0}(1 \otimes e_{21}) = (D\varphi_2 : D\alpha\varphi_1)_{T_0} = (D\varphi_2 : D\varphi_1)_{T_0} (D\varphi_1 : D\alpha\varphi_1)_{T_0} = \alpha_0 \alpha^{-iT_0} = 1.$$

Les hypothèses $\sigma^{\varphi_1}_{T_0} = \sigma^{\varphi_2}_{T_0} = 1$ et le lemme 1.2.2 montrent que $\sigma^{\psi}_{T_0} = 1$, donc que ψ est un poids normal fidèle strictement semi-fini sur $M \otimes F_2$, vérifiant la condition (*a*) de 4.2.6. Comme $M \otimes F_2$ est un facteur de type III_λ (il est isomorphe à M) on a la condition (*d*) pour ψ sur P. Les projecteurs $1 \otimes e_{11} = e_1$ et $1 \otimes e_{22} = e_2$ de P sont tels que $\psi(e_i) = \infty$ par hypothèse sur les φ_i. Comme la restriction de ψ à P_ψ est une trace normale fidèle semi-finie [3.1.4 (*b*)], les projecteurs e_i de P_ψ sont donc de dimension relative $+\infty$ dans P_ψ. Comme P_ψ est un facteur de genre dénombrable, il existe une isométrie partielle $v \in P_\psi$ telle que $v^*v = e_1$, $vv^* = e_2$. On a $(1 \otimes e_{11}) v = 0$ et $v(1 \otimes e_{22}) = 0$. Il existe donc un $u \in M$ tel que $v = u^* \otimes e_{21}$, $uu^* = u^* u = 1$.

Soit $x \in M_+$. On a $x \otimes e_{22} \in P_+$,

$$\varphi_2(x) = \psi(x \otimes e_{22}) = \psi(1 \otimes e_{21})(x \otimes e_{11})(1 \otimes e_{12}) = \psi(v[(uxu^*) \otimes e_{11}]v^*).$$

Comme $v \in P_\psi$, le théorème 3.6 de [30] montre que si $\varphi_2(x) < \infty$ on a

$$v[(uxu^*) \otimes e_{11})]v^* \in \mathfrak{M}_\psi, \qquad (uxu^* \otimes e_{11}) v^* v = (uxu^*) \otimes e_{11} \in \mathfrak{M}_\psi$$

et

$$\psi(v[(uxu^*) \otimes e_{11}]v^*) = \psi[(uxu^*) \otimes e_{11}]$$

donc $\varphi_2(x) = \alpha\varphi_1(uxu^*)$ pour tout $x \in M_+$ tel que $\varphi_2(x) < \infty$.

Inversement, pour $x \in M_+$ tel que $\varphi_1(uxu^*) < \infty$ on a $(uxu^*) \otimes e_{11} \in \mathfrak{M}_\psi$ donc

$$v[(uxu^*) \otimes e_{11}]v^* \in \mathfrak{M}_\psi \qquad \text{et} \qquad \psi(v[(uxu^*) \otimes e_{11}]v^*) = \alpha\varphi_1(uxu^*).$$

COROLLAIRE 4.3.3. — *Soient* $\lambda \in]0, 1[$, M *un facteur de type* III_λ, φ *une trace généralisée sur* M, σ *la représentation* $t \to \sigma_t^\varphi$ *de* $\mathbf{R}$ *dans* M, E_φ *l'espérance conditionnelle normale fidèle de* M *sur* M_φ.

1° *Il existe un unitaire* $X \in M$ *tel que* $\varphi_X = \lambda\varphi$. *On a alors :*

(*a*) $E_\varphi(X^n) = 0$, *pour* $n \neq 0$;

(*b*) $X \in M(\sigma, \{\lambda^{-1}\})$;

(*c*) $X \in \mathfrak{N}(E_\varphi)$;

(*d*) M *est l'algèbre de von Neumann engendrée par* M_φ *et* X.

2° *Le facteur* M_φ *est de type* II_∞, *la restriction* τ *de* φ *à* M_φ *est une trace normale fidèle semi-finie et pour* X *comme dans* (*a*) *et tout* $x \in M_\varphi^+$ *on a*

$$\tau(i_X(x)) = \lambda\tau(x).$$

1° Comme $\lambda^{iT_0} = 1$ pour $T_0 = 2\pi/\mathrm{Log}\,\lambda$, d'après 4.3.2 (*c*) il existe un unitaire X de M vérifiant $\varphi_X = \lambda\varphi$. On a $(D\varphi_X : D\varphi)_t = \lambda^{it}$ pour tout $t \in \mathbf{R}$ donc [1.2.3 (*c*)] on obtient $X \in M(\sigma, \{\lambda^{-1}\})$. Les poids φ et $\lambda\varphi$ sont normaux fidèles strictement semi-finis sur M et $E_\varphi = E_{\lambda\varphi}$ donc $X \in \mathfrak{N}(E_\varphi)$, car $\varphi_X = \lambda\varphi$. Montrons que M est l'algèbre de von Neumann engendrée par M_φ et X. Soit $(\mathcal{V}_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ un recouvrement ouvert de $\mathbf{R}_+^*$ tel que

$$\mathcal{V}_n \cap \{\lambda^k, k \in \mathbf{Z}\} = \{\lambda^n\}$$

pour tout $n \in \mathbf{Z}$.

On a $\sigma_{T_0} = 1$ donc $\mathrm{Sp}\,\sigma \subset \{\lambda^k, k \in \mathbf{Z}\}$ (2.3.8). Le lemme 2.1.6 montre que la réunion des $M(\sigma, \{\lambda^n\})$ pour $n \in \mathbf{Z}$, est faiblement totale dans M.

Soient $n \in \mathbf{Z}$, $x \in M(\sigma, \{\lambda^n\})$, alors $X^n x \in M^\sigma$ (2.1.5) et $x = X^{*n}(X^n x)$ appartient à l'algèbre de von Neumann engendrée par M_φ et X.

Enfin, pour $n \neq 0$, on a $X^n \in M(\sigma, \{\lambda^n\})$, et

$$E_\varphi(X^n) = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \sigma_t^\varphi(X^n)\,dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} (\lambda^{-n})^{it} X^n\,dt = 0.$$

2° D'après 3.1.4 (*b*), τ est une trace normale fidèle semi-finie sur M_φ. D'après 1° (*a*) on a $\tau(i_X x) = \lambda\tau(x)$ pour tout $x \in M_\varphi^+$. Il en résulte que M_φ qui est un facteur proprement infini car $\varphi(1) = \infty$ est de type II_∞.

4.4. CLASSIFICATION DES FACTEURS DE TYPE III_λ ($\lambda \in]0, 1[$).

THÉORÈME 4.4.1 :

(*a*) *Soient* $\lambda \in]0, 1[$, N *un facteur de type* II_∞, τ *une trace normale fidèle semi-finie sur* N, θ *un automorphisme de* N *tel que* $\tau(\theta(x)) = \lambda\tau(x)$ *pour tout* $x \in N_+$. *Alors* $W^*(\theta, N)$ *est un facteur de type* III_λ.

(*b*) *Pour tout facteur* M *de type* III_λ, ($\lambda \in]0, 1[$), *il existe un couple* (N, θ) *vérifiant les conditions* (*a*) *et un isomorphisme de* M *sur* $W^*(\theta, N)$.

(*c*) *Soient* $\lambda \in]0, 1[$, (N_1, θ_1), (N_2, θ_2) *des couples vérifiant les conditions* (*a*). *Pour qu'il existe un isomorphisme de* $W^*(\theta_1, N_1)$ *sur* $W^*(\theta_2, N_2)$ *il faut et il suffit qu'il existe un isomorphisme* J *de* N_1 *sur* N_2 *tel que* $J\,\theta_1\,J^{-1}\,\theta_2^{-1}$ *soit un automorphisme intérieur de* N_2.

LEMME 4.4.2. — *Soient* $\lambda \in]0, 1[$, N, τ *et* θ *comme dans* 4.4.1 (*a*), I *l'injection canonique de* N *dans* $W^*(\theta, N)$, E *l'espérance conditionnelle de* 1.4.6 (*b*) *de* $W^*(\theta, N)$ *sur* I (N), $\varphi = \tau \circ I^{-1} \circ E$, X *l'image de* $1 \in Z$ *par l'application* U *de* 1.4.6 (*c*).

(*a*) *On a* $p(\theta^n) = 0$ *pour tout* $n \neq 0$.

(*b*) $W^*(\theta, N)$ *est un facteur de type* III_λ.

(*c*) φ *est une trace généralisée sur* $W^*(\theta, N)$.

(*d*) *On a* $[W^*(\theta, N)]_\varphi = I(N)$.

(*e*) *L'unitaire* X *de* $W^*(\theta, N)$ *vérifie les conditions* [4.3.3, 1° (*a*), (*b*), (*c*) *et* (*d*)] *par rapport à* φ *sur* $W^*(\theta, N)$.

Démonstration :

(*a*) Pour tout $n \neq 0$, θ^n est un automorphisme extérieur du facteur N.

(*b*) D'après (4.1.1) $W^*(\theta, N)$ est un facteur et $I(N)' \cap W^*(\theta, N) \subset I(N)$, donc (3.3.1) montre que $S(W^*(\theta, N)) = \{\lambda^n, n \in \mathbf{Z}\}^-$, d'où la conclusion.

(*c*) D'après 1.4.3 on a $I(N) \subset W^*(\theta, N)_\varphi$. Comme le commutant de I (N) dans $W^*(\theta, N)$ est réduit aux scalaires, φ vérifie 4.2.6 (*c*), d'où (*c*).

(*e*) D'après 1.4.6 (*c*), on a

$$E(X x X^*) = X E(x) X^*$$

pour tout $x \in W^*(\theta, N)$ donc $\varphi_X = \lambda\varphi$ car $\tau \circ \theta = \lambda\tau$. Il en résulte que X vérifie les conditions 4.3.3. 1° En particulier $E_\varphi(X^n) = 0$ pour tout $n \neq 0$ donc pour tout élément y de la sous-algèbre involutive de $W^*(\theta, N)$ engendrée par I (N) et X, on a $E_\varphi(y) = E(y)$. Il en résulte que

$$E_\varphi = E \qquad \text{et} \qquad [W^*(\theta, N)]_\varphi = I(N) \ \text{d'où } (d).$$

LEMME 4.4.3. — *Soient* $\lambda \in]0, 1[$, M *un facteur de type* III_λ, N_1, τ_1 *et* θ_1 (*resp.* N_2, τ_2 *et* θ_2) *comme dans* 4.4.1 (*a*), I_1, E_1, φ_1, X_1 (*resp.* I_2, E_2, φ_2, X_2) *comme dans* 4.4.2. *Supposons que* $M = W^*(\theta_1, N_1) = W^*(\theta_2, N_2)$. *Il existe alors un automorphisme intérieur* J_{12} *de* M *tel que :*

(*a*) $J_{12}(I_1(N_1)) = I_2(N_2)$;

(*b*) $J_{12} E_1 J_{12}^{-1} = E_2$;

(*c*) $J_{12}(X_1) X_2^* \in I_2(N_2)$.

Démonstration. — D'après 4.4.2 (*b*) et (*c*), φ_1 et φ_2 sont des traces généralisées sur le facteur M. D'après 4.3.2 (*b*) on peut, en remplaçant τ_1 par $\alpha\tau_1$ pour un α convenable, trouver un automorphisme intérieur J_{12} de M tel que $\varphi_1 = \varphi_2 \circ J_{12}$. D'après 4.4.2 (*d*) on a $M_{\varphi_1} = I_1(N_1)$, $M_{\varphi_2} = I_2(N_2)$ donc $J_{12}(I_1(N_1)) = I_2(N_2)$. De plus $E_1 = E_{\varphi_1}$ (resp. E_{φ_2}) est l'unique espérance conditionnelle normale fidèle de M sur M_{φ_1} (resp. M_{φ_2}) et on a (*b*). D'après 4.4.2 (*e*) on a $\varphi_{1,X_1} = \lambda\varphi_1$ et $\varphi_{2,X_2} = \lambda\varphi_2$, donc $J_{12}(X_1)$ et X_2 vérifient la condition 4.3.3 [1° (*b*)] par rapport à φ_2. On a donc

$$J_{12}(X_1) X_2^* \in M(\sigma^{\varphi_2}; \{1\}) = M_{\varphi_2} = I_2(N_2).$$

Démonstration de 4.4.1. — L'assertion (*a*) résulte de 4.4.2 (*b*). Démontrons l'assertion (*b*). Soit φ une trace généralisée sur M [4.3.2 (*a*)]. Soient σ et E_φ comme dans 4.3.3 et X un unitaire de M vérifiant 4.3.3 [1° (*a*), (*b*), (*c*), (*d*)]. Soit θ l'automorphisme i_X de M_φ [4.3.3 (2°)], I l'injection $x \to x$ de M_φ dans M, τ la restriction de φ à M_φ. D'après 4.3.3 (2°), M_φ est un facteur de type II_∞ et M_φ, τ et θ vérifient les conditions de 4.4.1 (*a*). Le couple (M_φ, θ) vérifie les conditions de 4.1.1. L'injection I vérifie les conditions (*a*), (*b*) et (*c*) de 4.1.2 d'où il résulte que M est isomorphe au produit croisé de M_φ par θ.

La suffisance de la condition (*c*) de 4.4.1 résulte du corollaire 4.1.4. Montrons la nécessité de la condition 4.4.1 (*c*). Par hypothèse on peut identifier $W^*(\theta_1, N_1)$ et $W^*(\theta_2, N_2)$ à un même facteur M de type III_λ. Avec les notations de 4.4.3, soit J l'isomorphisme de N_1 sur N_2 tel que pour $x \in N_1$ on ait $J_{12}(I_1(x)) = I_2(J(x))$. Il existe un unitaire $u \in N_2$ tel que $J_{12}(X_1) = I_2(u) X_2$. Pour $x \in N_1$, il vient

$$\begin{aligned} I_2(J \circ \theta_1(x)) &= J_{12}(I_1(\theta_1(x))) \\ &= J_{12}(X_1 I_1(x) X_1^*) = J_{12}(X_1) J_{12} \circ I_1(x) J_{12}(X_1)^* \\ &= I_2(u) X_2 I_2(J(x)) X_2^* I_2(u^*) = I_2[u(\theta_2 \circ J(x)) u^*]. \end{aligned}$$

On a donc prouvé que $J \circ \theta_1 \circ J^{-1} \circ \theta_2^{-1}$ est un automorphisme intérieur de N_2.

DÉFINITION 4.4.4. — *Soit* N *un facteur de type* II_∞, γ_N *l'homomorphisme de* Out N *dans* $\mathbf{R}_+^*$ *qui, à* $j \in$ Out N, *associe* $\gamma_N(j) \in \mathbf{R}_+^*$ *tel que pour toute trace normale fidèle semi-finie* τ *sur* N *et tout* $\theta \in$ Aut N *tel que* $\varepsilon_N(\theta) = j$ *on ait* $\tau \circ \theta = \gamma_N(j)\tau$. *L'image* G (N) *de l'homomorphisme* γ_N *sera appelée groupe fondamental de* N.

Soit P un facteur de type II_1, alors le groupe fondamental de P au sens de [29] (th. VIII, chap. II) est identique au groupe fondamental de $P \otimes F_\infty$ au sens de 4.4.4. Pour toute algèbre de von Neumann M, nous notons $\overline{M}$ sa classe d'isomorphisme algébrique.

COROLLAIRE 4.4.5. — *Soit* $\lambda \in]0, 1[$.

(*a*) *Soit* M *un facteur de type* III_λ *et soit* (N, θ) *un couple comme dans* 4.4.1 (*b*) *tel que* $M = W^*(\theta, N)$. *Alors* $\overline{N}$ *est indépendant du choix de* θ *et ne dépend que de* $\overline{M}$. *On note alors* $\overline{N} = \overline{M}^\sim$.

(*b*) *Pour qu'une classe* $\overline{N}$ *d'isomorphisme algébrique de facteurs de type* II_∞ *appartienne à l'image de l'application* $\overline{M} \to \overline{M}^\sim$ *de* (*a*) *il faut et il suffit que* $\lambda \in G(\overline{N})$.

(*c*) *Il existe une infinité continue de facteurs de type* III_λ *deux à deux non isomorphes opérant dans un espace de Hilbert séparable.*

(*d*) *Soient* N *un facteur de type* II_∞, *et* C_λ *l'ensemble des classes de conjugaison dans* Out N *d'éléments* j *tels que* $\gamma_N(j) = \lambda$. *Soit* $\overline{W^*}$ *l'application qui à* $c \in C_\lambda$ *associe* $\overline{W^*(\theta, N)}$, *indépendamment du choix de* $\theta \in \mathrm{Aut}\, N$ *tel que* c *soit la classe de conjugaison de* $\varepsilon(\theta)$. *Alors* $\overline{W^*}$ *est une bijection de* C_λ *sur l'ensemble des classes* $\overline{M}$ *d'isomorphisme algébrique de facteurs de type* III_λ *telles que* $\overline{M}^\sim = \overline{N}$.

Démonstration. — L'assertion (*a*) résulte facilement de 4.4.1 (*c*) et l'assertion (*b*) de 4.4.1 (*a*). Il existe d'après [33] (corollaire 4.3.29 et remarque 2, p. 214) une infinité continue de facteurs N de type II_∞ deux à deux non isomorphes opérant dans un espace de Hilbert séparable, et tels que $N \otimes R_1$ soit isomorphe à N donc que $\lambda \in G(N)$. On en déduit (*c*) en utilisant (*b*).

Le théorème 4.4.1 (*c*) montre que, avec les notations de 4.4.5 (*d*), la classe d'isomorphisme algébrique de $\overline{W^*}(\theta, N)$ est indépendante du choix de θ tel que la classe de conjugaison de $\varepsilon(\theta)$ soit c. De plus, 4.4.1 (*c*) montre que si $c_1 \neq c_2$ on a $\overline{W^*}(c_1) \neq \overline{W^*}(c_2)$. Le théorème 4.4.1 (*b*) montre que l'application $\overline{W^*}$ est surjective, d'où (*d*).

4.5. CALCUL DE Out M POUR UN FACTEUR DE TYPE III_λ ($\lambda \in]0, 1[$).

THÉORÈME 4.5.1. — *Soient* N *un facteur de type* II_∞, $\lambda \in]0, 1[$, $T_0 = 2\pi/\mathrm{Log}\,\lambda$, τ *une trace normale fidèle semi-finie sur* N, θ *un automorphisme de* N *transformant* τ *en* $\lambda\tau$, *et* $M = W^*(\theta, N)$. *Soient* G *le quotient du commutant de* $\varepsilon_N(\theta)$ *dans* Out N *par le groupe des puissances entières de* $\varepsilon_N(\theta)$, δ *l'homomorphisme modulaire de* $\mathbf{R}$ *dans* Out M. *Il existe un* *homomorphisme* δ' *de* Out M *sur* G *tel que la suite*

$$0 \to \mathbf{Z} \xrightarrow{n \to n\mathrm{T}_0} \mathbf{R} \xrightarrow{\delta} \mathrm{M} \xrightarrow{\delta'} \mathrm{G} \to 1 \quad \textit{soit exacte}$$

Démonstration. — Construisons δ'. Soient τ une trace normale fidèle semi-finie sur N, I l'isomorphisme de 1.4.6 (a) de N sur I (N) $\subset$ M, E l'espérance conditionnelle de 1.4.6 (b), $\varphi = \tau \circ \mathrm{I}^{-1} \circ \mathrm{E}$ la trace généralisée sur le facteur M décrite en 4.4.2, X un unitaire de M tel que

$$\mathrm{I}(\theta(x)) = \mathrm{XI}(x)\,\mathrm{X}^*$$

pour tout $x \in \mathrm{N}$. Soit $j \in \mathrm{Out}\,\mathrm{M}$, et J_1 avec $\varepsilon_{\mathrm{M}}(\mathrm{J}_1) = j$. Comme $\varphi \circ \mathrm{J}_1$ est une trace généralisée sur M, le théorème 4.3.2 (b) montre qu'il existe $\mathrm{J}_2 \in \mathrm{Aut}\,\mathrm{M}$ tel que $\varepsilon_{\mathrm{M}}(\mathrm{J}_2) = j$ et que $\varphi \circ \mathrm{J}_2$ soit proportionnelle à φ. On a alors $\mathrm{J}_2(\mathrm{I}(\mathrm{N})) = \mathrm{I}(\mathrm{N})$ donc il existe un automorphisme π_2 de N tel que $\mathrm{J}_2\,\mathrm{I}(x) = \mathrm{I}(\pi_2(x))$ pour tout $x \in \mathrm{N}$. La démonstration de la nécessité de la condition 4.4.1 (c) montre alors que l'automorphisme $\pi_2\,\theta\pi_2^{-1}\,\theta^{-1}$ de N est intérieur. Ainsi $\varepsilon_{\mathrm{N}}(\pi_2)$ appartient au commutant de $\varepsilon_{\mathrm{N}}(\theta)$ dans Out N. Soit J_3 dans Aut M avec $\varphi \circ \mathrm{J}_3$ proportionnelle à φ et $\varepsilon_{\mathrm{M}}(\mathrm{J}_3) = j$. Comme $\mathrm{J}_3^{-1}\,\mathrm{J}_2$ est un automorphisme intérieur de M qui laisse I (N) globalement invariante, et comme le groupe $\mathcal{G}$ des X^n, $n \in \mathbf{Z}$, vérifie les conditions de 1.5.5 (c), on voit que $\pi_3^{-1}\,\pi_2$ appartient au groupe complet associé aux θ^n, $n \in \mathbf{Z}$. Comme N est un facteur il existe $n \in \mathbf{Z}$ tel que

$$\varepsilon_{\mathrm{N}}(\pi_3^{-1})\,\varepsilon_{\mathrm{N}}(\pi_2) = \varepsilon_{\mathrm{N}}(\theta)^n.$$

On a montré que la classe dans G de $\varepsilon_{\mathrm{N}}(\pi_2)$ est indépendante du choix du représentant $\mathrm{J}_2 \in \mathrm{Aut}\,\mathrm{M}$ de $j \in \mathrm{Out}\,\mathrm{M}$, tel que $\varphi \circ \mathrm{J}_2$ et φ soient proportionnelles. L'élément de G ainsi associé à j est noté $\delta'(j)$.

Il est clair que δ' est un homomorphisme de Out M dans G; il nous reste à calculer le noyau et l'image de δ'.

On a $\delta' \circ \delta(t) = 1$ car $\sigma_t^\varphi(\mathrm{I}(x)) = \mathrm{I}(x)$ pour tout $x \in \mathrm{N}$.

Soit $j \in \mathrm{Out}\,\mathrm{M}$ tel que $\delta'(j) = 1$. Il existe un représentant J_1 de j tel que $\varphi \circ \mathrm{J}_1$ et φ soient proportionnelles et que l'automorphisme π_1 correspondant de N vérifie $\varepsilon(\pi_1) \in \{\varepsilon(\theta)^n, n \in \mathbf{Z}\}$. Il existe donc un représentant J_2 de j tel que $\varphi \circ \mathrm{J}_2$ et φ soient proportionnelles et que l'automorphisme π_2 correspondant de N soit l'identité. On a $\mathrm{J}_2(\mathrm{I}(x)) = \mathrm{I}(x)$ pour tout $x \in \mathrm{N}$ donc $\mathrm{J}_2(\mathrm{X})\,\mathrm{I}(x)\,\mathrm{J}_2(\mathrm{X})^* = \mathrm{XI}(x)\,\mathrm{X}^*$ pour tout $x \in \mathrm{N}$. Ainsi $\mathrm{X}^*\,\mathrm{J}_2(\mathrm{X})$ est dans le commutant de I (N), donc est un unitaire de la forme $\lambda^{it_0}\,1_{\mathrm{M}}$ pour un certain $t_0 \in \mathbf{R}$. Les égalités $\mathrm{J}_2(\mathrm{I}(x)) = \mathrm{I}(x)$ pour tout $x \in \mathrm{N}$ et $\mathrm{J}_2(\mathrm{X}) = \lambda^{it_0}\,\mathrm{X}$ montrent que J_2 est égal à $\sigma_{t_0}^\varphi$, donc que j est l'image $\delta(t_0)$.

Montrons que pour tout automorphisme π de N tel que $\varepsilon(\pi)$ commute avec $\varepsilon(\theta)$ il existe un automorphisme J de M tel que $\mathrm{JI}(x) = \mathrm{I}(\pi(x))$ pour tout $x \in \mathrm{N}$. On aura alors montré la surjectivité de δ'.

Par hypothèse on a $\varepsilon(\theta \circ \pi) = \varepsilon(\pi \circ \theta)$. Soit u un unitaire de N tel que $\pi \circ \theta(x) = u(\theta \circ \pi)(x) u^*$ pour tout $x \in \mathrm{N}$. On a en posant $\mathrm{I}_1(x) = \mathrm{I}\pi(x)$ pour tout $x \in \mathrm{N}$, l'égalité

$$\mathrm{I}(u)\,\mathrm{XI}_1(x)\,\mathrm{X}^*\,\mathrm{I}(u^*) = \mathrm{I}(u)\,\mathrm{I}[(\theta \circ \pi)(x)]\,\mathrm{I}(u^*) = \mathrm{I}(\pi \circ \theta(x)) = \mathrm{I}_1(\theta(x)).$$

Le couple $(\mathrm{I}_1, \mathrm{M})$ vérifie donc les hypothèses de 4.1.2 pour N et θ, de même que le couple (I, M). La proposition 4.1.2 montre qu'il existe un isomorphisme J de M sur M tel que

$$\mathrm{J}(\mathrm{I}(x)) = \mathrm{I}_1(x) = \mathrm{I}(\pi(x)) \quad \text{pour tout } x \in \mathrm{N}.$$

4.6. États normaux fidèles sur un facteur M de type III_λ, ($\lambda \in]0, 1[$).

Théorème 4.6.1. — *Soient* N *un facteur de type* II_∞, θ *un automorphisme de* N *ne préservant pas de trace normale fidèle semi-finie sur* N, $\mathrm{M} = \mathrm{W}^*(\theta, \mathrm{N})$ *le produit croisé de* N *par* θ, E *l'espérance conditionnelle normale fidèle de* M *sur* N. *Tout état normal fidèle* ψ *sur* M *est unitairement équivalent dans* M *à un état de la forme* $\varphi \circ \mathrm{E}$ *où* φ *est un état normal fidèle sur* N.

Démonstration. — Soient τ une trace normale fidèle semi-finie sur N, $\lambda > 0$, $\lambda \neq 1$ tel que $\tau(\theta(x)) = \lambda\tau(x)$ pour tout $x \in \mathrm{N}_+$, et $\mathrm{T}_0 = 2\pi/\mathrm{Log}\,\lambda$. Alors M est un facteur de type III_λ ou $\mathrm{III}_{\lambda^{-1}}$, et on a $\mathrm{T}_0 \in \mathrm{T}(\mathrm{M})$. Donc il existe un opérateur h positif inversible du centre de M_ψ tel que

$$\sigma^\psi_{\mathrm{T}_0}(x) = h^{-i\mathrm{T}_0}\, x h^{i\mathrm{T}_0} \quad \text{pour tout } x \in \mathrm{M}.$$

Soient $(e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots)$ une partition de l'unité dans M_ψ, avec $e_n \neq 0$ pour tout n; son existence résulte de 4.2.1 (*a*). La forme linéaire $\psi_1 = \psi(h.)$ est positive normale fidèle sur M et sur M_ψ. Il existe donc un opérateur positif autoadjoint non singulier affilié à M_ψ, de la forme $k = \sum \lambda^{p(n)} e_n$ où les $p(n)$ sont des entiers rationnels, et tel que

$$\psi(hk) = \sum \lambda^{p(n)} \psi_1(e_n) = +\infty.$$

Soit ψ_2 le poids normal fidèle semi-fini $\psi_2 = \psi(hk.)$ sur M. Il a un sens car hk est un opérateur positif autoadjoint non singulier affilié à M_ψ. De plus on a

$$(hk)^{i\mathrm{T}_0} = h^{i\mathrm{T}_0} k^{i\mathrm{T}_0} = h^{i\mathrm{T}_0}$$

car $h \in$ Centre M_ψ et donc :

$$\sigma_{T_0}^{\psi_2}(x) = h^{iT_0} h^{-iT_0} x h^{iT_0} h^{-iT_0} = x \quad \text{pour tout } x \in M.$$

Comme $\psi_2(1) = \infty$, ψ_2, qui est strictement semi-fini car $\sigma_{T_0}^{\psi_2} = 1$, est une trace généralisée.

Pour tout $t \in \mathbf{R}$ on a $\sigma_t^{\psi_2}(.) = (hk)^{it} \sigma_t^{\psi}(.) (hk)^{-it}$ avec $(hk)^{it} \in M_\psi$, donc ψ est $\sigma_t^{\psi_2}$-invariant pour tout $t \in \mathbf{R}$.

On a montré l'existence d'une trace généralisée ψ_2 sur M et d'un opérateur positif autoadjoint non singulier h_2 affilié à M_{ψ_2} tel que $\psi = \psi_2(h_2 .)$. Le théorème 4.3.2 (b) et le lemme 4.4.2 (c) montrent qu'il existe un unitaire $u \in M$ tel que $\psi_{2,u}$ et $\tau \circ E$ soient proportionnels.

On a $\psi = \psi_2(h_2 .)$, donc $\psi_u = \psi_{2,u}[(u^* h_2 u) .]$. Il suffit donc de montrer que tout état normal fidèle φ_3 sur M de la forme $(\tau \circ E)(h_3 .)$ où h_3 est un opérateur positif affilié à $M_{\tau \circ E} = N$ vérifie $\varphi_3(E(x)) = \varphi_3(x)$ pour tout $x \in M$ ce qui est immédiat.

V. — Facteurs de type III_0

Le principal résultat est 5.3.1 : tout facteur de type III_0 est de la forme $W^*(\theta, N)$ où N est une algèbre de von Neumann de type II_∞ à centre sans atome, et θ un automorphisme de N ergodique sur le centre et diminuant strictement une trace normale fidèle semi-finie sur N.

Nous montrons d'abord (dans 5.1) la réciproque du fait ci-dessus : pour N et θ comme ci-dessus, $W^*(\theta, N)$ est un facteur de type III_0.

Dans 5.2 nous montrons l'analogue de 4.2.1 pour les facteurs de type III_0.

Dans 5.3 nous montrons, pour M donné, l'existence de N et θ tels que $M = W^*(\theta, N)$. Ce résultat permet de décrire l'ensemble des facteurs de type III_λ ($\lambda \neq 1$) comme l'ensemble des produits croisés d'algèbres de von Neumann de type II_∞ par des automorphismes diminuant strictement une trace normale fidèle semi-finie.

Dans 5.3.6 nous montrons que tout facteur M de type III_0 est en un sens très strict la limite inductive d'une suite d'algèbres de von Neumann semi-finies.

Dans 5.4 nous donnons un critère d'isomorphisme des facteurs $W^*(\theta, N)$ obtenus comme produits croisés à partir d'un couple (N, θ) comme ci-dessus, généralisant ainsi 4.4.1 (c).

Enfin, dans 5.5 nous montrons l'existence d'un facteur hyperfini ([33], déf. 4.4.5) agissant dans un espace séparable et qui n'est pas un facteur d'Araki-Woods (i. e. il n'est isomorphe à aucun produit tensoriel infini de facteurs de type I).

5.1. Préliminaires. — Nous dirons qu'une algèbre de von Neumann abélienne est diffuse si elle ne contient pas de projecteur minimal.

Proposition 5.1.1. — *Soit* N *une algèbre de von Neumann de type* II_∞ *à centre diffus. Soit* θ *un automorphisme de* N *ergodique sur le centre de* N. *Soient* τ *une trace normale fidèle semi-finie sur* N *et* $\lambda_0 < 1$ *tels que* $\tau(\theta(x)) \leq \lambda_0 \tau(x)$ *pour tout* $x \in \mathrm{N}_+$. *Alors* $\mathrm{W}^*(\theta, \mathrm{N})$ *est un facteur de type* III_0 *et* $p(\theta^n) = 0$ *pour tout* $n \neq 0$.

Démonstration. — Montrons d'abord que $p(\theta^n) = 0$ pour tout $n \neq 0$. Soient $n \neq 0$ et e un projecteur non nul du centre de N tel que $\theta^n(e) = e$ et que θ^n/N_e soit un automorphisme intérieur de N_e. On peut supposer $n > 0$. On a $\tau(\theta^n(x)) \leq \lambda_0^n \tau(x)$ pour tout $x \in \mathrm{N}_+$ et $\tau(x) = \tau(\theta^n(x))$ pour tout $x \in \mathrm{N}_e^+$. Comme la restriction de τ à N_e est une trace normale fidèle semi-finie, on aboutit à une contradiction.

Soient I l'homomorphisme canonique de N dans $\mathrm{W}^*(\theta, \mathrm{N}) = \mathrm{M}$. On a $\mathrm{I}(\mathrm{N})' \cap \mathrm{M} \subset \mathrm{I}(\mathrm{N})$ et M est un facteur d'après (4.1.1).

On peut donc appliquer le théorème 3.3.1 pour calculer S (M).

Soit ρ_1 l'unique opérateur positif affilié au centre C de N tel que $\tau \circ \theta = \tau(\rho_1 .)$. Par hypothèse on a $0 < \rho_1 \leq \lambda_0 < 1$. De même, pour $n > 0$ on a $\tau(\theta^n(x)) = \tau(\rho_n x)$, avec $0 < \rho_n \leq \lambda_0^n$; et pour $n < 0$ on a $\tau(\theta^n(x)) = \tau(\rho_n x)$ et $\rho_n \geq \lambda_0^n > 1$. Soit $\lambda \in]0, 1[$. Montrons que $\lambda \notin \mathrm{S}(\mathrm{M})$. Soient n_0 tel que $\lambda_0^{n_0} < \lambda < 1$ et $\varepsilon > 0$ tel que $]\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon[$ ne contienne ni $\lambda_0^{n_0}$ ni 1. Comme le centre C de N est diffus et θ^{-1} ergodique sur C on peut trouver un projecteur non nul e de C tel que $\theta^{-1}(e), \theta^{-2}(e), \ldots, \theta^{-n_0}(e)$ soient tous orthogonaux à e.

Supposons qu'il existe alors un projecteur non nul d du centre de N, $d \leq e$ et un $n \in \mathbf{Z}$ tels que $\theta^n(d) \leq e$ et que le spectre de ρ_n^{-1} sur N_d soit contenu dans $]\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon[$. Comme $]\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon[\subset]\lambda_0^{n_0}, 1[$ on a nécessairement $n < 0$. Comme $\rho_n^{-1} \leq \lambda_0^{-n}$ si $n < 0$ on a $\lambda_0^{n_0} < \lambda_0^{-n}$, et $-n \in [1, n_0]$ ce qui contredit l'hypothèse $\theta^{-k}(e)\, e = 0$ pour tout $k \in [1, n_0]$.

Il reste à montrer que M n'est pas semi-fini c'est-à-dire ([41], prop. 8.16, 3°)] qu'il n'existe sur N aucune trace normale fidèle τ_1 semi-finie et θ invariante. Supposons l'existence de τ_1 et soit h positif non singulier affilié au centre de N tel que $\tau = \tau_1(h.)$. On a alors $\theta^{-1}(h) \leq \lambda_0 h$ avec $\lambda_0 < 1$. Soit n un entier tel que le projecteur spectral de h associé à l'intervalle $[\lambda_0^{n+1}, \lambda_0^n]$ soit non nul. Il existe deux projecteurs e_1 et e_2 non nuls du centre de N majorés par ce projecteur spectral, et de produit nul (car C est diffus). Pour $k > 0$, $\theta^k(e_j)$ est contenu dans le projecteur spectral relatif à h et $]0, \lambda_0^{n+1}]$. Donc $\bigvee_{p \in \mathbf{Z}} \theta^p(e_j)$ est θ-invariant non trivial contredisant ainsi l'ergodicité de θ sur C.

5.2. CENTRALISATEURS DES POIDS NORMAUX FIDÈLES STRICTEMENT SEMI-FINIS, ET SOUS-ALGÈBRES ABÉLIENNES MAXIMALES.

THÉORÈME 5.2.1. — *Soit* M *un facteur de type* III_0.

(*a*) *Pour tout poids normal fidèle strictement semi-fini* φ *sur* M, *il existe une sous-algèbre de von Neumann abélienne maximale* $\mathfrak{A}$ *de* M *telle que* $\mathfrak{A} \subset M_\varphi$.

(*b*) *Soient* φ_1 *et* φ_2 *deux poids normaux fidèles strictement semi-finis sur* M. *On a* $M_{\varphi_1} \subset M_{\varphi_2}$ *si et seulement si il existe h positif non singulier, affilié à centre* M_{φ_1}, *tel que* $\varphi_2 = \varphi_1 (h.)$.

LEMME 5.2.2. — *Identifions le dual de* **R** *à* **R** [*avec* $(t, \gamma) = e^{it\gamma}$, $\gamma \in \mathbf{R}$, $t \in \mathbf{R}$]. *Soient* $\varepsilon_0 > 0$, N *une algèbre de von Neumann,* α *une représentation de* **R** *dans* N *telle que* $\mathrm{Sp}\, \alpha \subset [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$. *Il existe alors* $H \in N^\alpha$, $-\varepsilon_0/2 \leqq H \leqq \varepsilon_0/2$, *tel que* $\alpha_t (x) = e^{itH} x e^{-itH}$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.

Démonstration. — Pour tout fermé E de **R** posons $k(E) = \bigvee_{x \in N(\alpha, E)}$ Support x^*. Selon [3] (th. 3.1) il existe $B \in N$ $\left[B = \int_{-\infty}^{+\infty} t\, dP(t) \text{ avec les notations de [3] (th. 3.1)} \right]$ tel que :

(1) $\alpha_t (x) = e^{itB} x e^{-itB}$ pour tout $t \in \mathbf{R}$ et tout $x \in N$;

(2) Pour $t \in \mathbf{R}$ le projecteur spectral de B correspondant à l'intervalle $[t, \infty[$ soit égal à $\bigwedge_{s<t} k([s, \infty[)$.

On a $k(E) = \alpha_t (k(E))$ pour tout $t \in \mathbf{R}$ [2.1.3 (*f*)], donc $\alpha_t (B) = B$ pour tout $t \in \mathbf{R}$. On a $\bigwedge_{s<0} k([s, \infty[) = 1$ car $1 \in N(\alpha, \{0\})$, donc $B \geqq 0$. Pour tout $t > \varepsilon_0$ on a $\bigwedge_{s<t} k([s, \infty[) = 0$ car $N(\alpha, [s, \infty[) = \{0\}$ pour tout $s > \varepsilon_0$, donc $B \leqq \varepsilon_0$. D'où le lemme en posant $H = B - \varepsilon_0/2$.

LEMME 5.2.3. — *Identifions* **R** *au dual de* **R** *comme en* 5.2.2. *Soient* M *un facteur,* $\varepsilon_0 > 0$, U *une représentation de* **R** *dans* M *telle que*

$$\mathrm{Sp}\, U \cap \{[-2\varepsilon_0, -\varepsilon_0] \cup [\varepsilon_0, 2\varepsilon_0]\} = \emptyset.$$

Il existe un $H \in M^U$, $-\varepsilon_0/2 \leqq H \leqq \varepsilon_0/2$ *tel que la représentation* V *de* **R** *dans* M *définie par* $V_t (x) = e^{-itH} U_t (x) e^{itH}$ *pour* $t \in \mathbf{R}$ *et* $x \in M$, *vérifie* $\mathrm{Sp}\, V \cap]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[= \{0\}$.

Démonstration. — Soit $N = M(U, ([-\varepsilon_0, \varepsilon_0]))$. Pour x et y dans N on a

$$\mathrm{Sp}_U (xy) \subset (\mathrm{Sp}\, U \cap [-2\varepsilon_0, 2\varepsilon_0])$$

(2.1.5) donc $\mathrm{Sp}_U (xy) \subset [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ et $xy \in N$. Donc N est une sous-algèbre de von Neumann de M [2.1.3 (*b*) et (*c*)].

Pour $t \in \mathbf{R}$ on a $U_t(N) = N$ [2.1.3 (f)]. Posons $\alpha_t(x) = U_t(x)$ pour $t \in \mathbf{R}$ et $x \in N$. Alors α est une représentation de $\mathbf{R}$ dans N. Pour $x \in N$ on a $\mathrm{Sp}_\alpha(x) = \mathrm{Sp}_U(x) \subset [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$, donc $\mathrm{Sp}\,\alpha \subset [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$. Soit (lemme 5.2.2) $H \in N$ tel que $-\varepsilon_0/2 \leqq H \leqq \varepsilon_0/2$, $\alpha_t(H) = H$ pour tout $t \in \mathbf{R}$ et $\alpha_t(x) = e^{itH} x e^{-itH}$ pour $t \in \mathbf{R}$ et $x \in N$. On a $U_t(H) = H$ pour tout $t \in \mathbf{R}$ donc $H \in M^U$, et V défini par, $V_t(x) = e^{-itH} U_t(x) e^{itH}$ ($t \in \mathbf{R}$, $x \in M$) est une représentation de $\mathbf{R}$ dans M. Pour $x \in N$ on a $V_t(x) = e^{-itH} \alpha_t(x) e^{itH} = x$ pour tout $t \in \mathbf{R}$, donc $\mathrm{Sp}_V(x) \subseteq \{0\}$.

Le lemme 2.1.6 et l'hypothèse $\mathrm{Sp}\,U \cap ([-2\varepsilon_0, -\varepsilon_0] \cup [\varepsilon_0, 2\varepsilon_0]) = \emptyset$ montrent que la réunion de N et de $M(U, (]-2\varepsilon_0, 2\varepsilon_0[^c))$ est faiblement totale dans M.

Pour montrer que $\mathrm{Sp}\,V \cap]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[= \{0\}$ il suffit donc de montrer que $\mathrm{Sp}_V(x) \cap]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[= \emptyset$ pour tout $x \in M(U, (]-2\varepsilon_0, 2\varepsilon_0[^c))$ [2.1.3 (d)].

Soit W la représentation de $\mathbf{R}$ dans $M \otimes F_2$ construite à partir de U et V et de $u_t = e^{-itH}$, comme dans 2.2.6. On a pour $x \in M$; les égalités

$$\mathrm{Sp}_U(x) = \mathrm{Sp}_W(x \otimes e_{11}), \qquad \mathrm{Sp}_V(x) = \mathrm{Sp}_W(x \otimes e_{22})$$

et

$$x \otimes e_{22} = (1 \otimes e_{21})(x \otimes e_{11})(1 \otimes e_{21})^*.$$

Or $W_t(1 \otimes e_{21}) = u_t \otimes e_{21} = e^{-itH} \otimes e_{21}$. Donc pour toute fonction $f \in L^1(\mathbf{R})$ on a

$$W(f)(1 \otimes e_{21}) = \left(\int_{\mathbf{R}} f(t)\, e^{-itH}\, dt\right) \otimes e_{21} = \hat{f}(H) \otimes e_{21}.$$

Par suite $\mathrm{Sp}_W(1 \otimes e_{21}) = \mathrm{Sp}\,H \subset [-\varepsilon_0/2, \varepsilon_0/2]$. Le lemme 2.1.5 montre donc que si $\mathrm{Sp}_U(x) \subset]-2\varepsilon_0, 2\varepsilon_0[^c$ on a

$$\mathrm{Sp}_V(x) \subset]-2\varepsilon_0, 2\varepsilon_0[^c + [-\varepsilon_0/2, \varepsilon_0/2] + [-\varepsilon_0/2, \varepsilon_0/2],$$

d'où

$$\mathrm{Sp}_V(x) \cap]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[= \emptyset.$$

LEMME 5.2.4. — *Soient* M *un facteur de type* III_0, φ *un poids normal fidèle strictement semi-fini sur* M, e_0 *un projecteur non nul de* M_φ. *Il existe alors un projecteur non nul* $e \leqq e_0$ *de* M_φ, *un* $h \geqq 0$, $h \in M_\varphi \cap M_e$, *h inversible dans* M_e, *et un état normal fidèle* ψ *sur* M_e *tels que*

(a) *Le point* 1 *soit isolé dans* $\mathrm{Sp}\,\Delta_\psi$.

(b) $h \in M_{e,\psi}$ *et* $\varphi_e = \psi(h.)$.

Démonstration. — Comme φ est strictement semi-fini on peut supposer que $\varphi(e_0) < \infty$. Soient σ la représentation de $\mathbf{R}$ dans M telle que $\sigma_t = \sigma_t^\varphi$, exp. l'application $\gamma \to e^\gamma$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}_+^*$. On a $\Gamma(\sigma^{e_0}) = \Gamma(\sigma) = \{1\}$ (3.2.1 et 2.3.3). D'après 2.3.4, il existe donc un projecteur $e \neq 0$, $e \in M^\sigma \cap M_{e_0}$ tel que

$$\mathrm{Sp}\,\sigma^e \bigcap \exp([-2\varepsilon_0, -\varepsilon_0] \bigcup [\varepsilon_0, 2\varepsilon_0]) = \emptyset.$$

Le lemme 5.2.3 montre qu'il existe un $H \in M^\sigma \cap M_e$, $-\varepsilon_0/2 \leqq H \leqq \varepsilon_0/2$, tel que, si l'on pose $V_t(x) = e^{-itH}\sigma_t^e(x)e^{itH}$ pour tout $t \in \mathbf{R}$ et tout $x \in M_e$, on ait $\operatorname{Sp} V \cap \exp(]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[) = \{1\}$.

Par construction φ_e est une forme linéaire positive normale fidèle sur M_e. Soit $\psi = \varphi_e(e^{-H}.)$. Alors $H \in M^\sigma \cap M_e = M_{e,\varphi_e}$ (3.2.6), et $\sigma_t^\psi = V_t$ car $\sigma_t^{\varphi_e} = \sigma_t^e$ (3.2.6), pour tout $t \in \mathbf{R}$.

On a donc $\operatorname{Sp} \Delta_\psi \cap \exp(]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[) = \{1\}$ (3.2.2). Comme H est borné, ψ est une forme linéaire positive normale fidèle sur M_e.

Soit $h = e^H$. On a $h \in M_\varphi \cap M_e$, h inversible dans M_e, $h \geqq 0$, $\sigma_t^\psi(h) = h$ (par construction de $V_t = \sigma_t^\psi$) pour tout $t \in \mathbf{R}$; enfin $\psi(h.) = \varphi_e$.

Démonstration de 5.2.1 :

(*a*) Soit φ un poids normal fidèle strictement semi-fini sur M. Les lemmes 5.2.4 et 4.2.3 montrent que pour tout projecteur $e_0 \neq 0$ de M_φ, il existe un projecteur $e \neq 0$, $e \leqq e_0$, $e \in M_\varphi$ et une sous-algèbre de von Neumann abélienne maximale $\mathfrak{A}_e$ de M_e telle que $\mathfrak{A}_e \subset M_\varphi \cap M_e = M_{e,\varphi_e}$. (Avec les notations de 5.2.4, toute sous-algèbre de von Neumann abélienne maximale de $M_{e,\psi}$ contenant h est contenue dans M_{e,φ_e} et est abélienne maximale dans M_e.) Le lemme 4.2.4 montre donc l'existence d'une sous-algèbre de von Neumann abélienne maximale $\mathfrak{A}$ de M avec $\mathfrak{A} \subset M_\varphi$.

(*b*) Se démontre exactement comme 4.2.1 (*b*).

5.3. Tout facteur de type III_0 est le produit croisé d'une algèbre de von Neumann semi-finie par un automorphisme.

Théorème 5.3.1. — *Soit* M *un facteur de type* III_0. *Il existe alors :*

(1) *Une algèbre de von Neumann* N *de type* II_∞ *et à centre diffus;*

(2) *Un automorphisme* θ *de* N, *ergodique sur le centre de* N, *et diminuant strictement l'une des traces normales fidèles semi-finies* τ *sur* N [*i. e. il existe* $\lambda_0 < 1$ *tel que* $\tau(\theta(x)) \leqq \lambda_0 \tau(x)$ *pour tout* $x \in N_+$] *de telle sorte que* $M = W^*(\theta, N)$.

Lemme 5.3.2. — *Soit* M *un facteur de type* III_0. *Il existe un poids* φ *normal fidèle strictement semi-fini sur* M *vérifiant les conditions :*

(*a*) 1 *est isolé dans* $\operatorname{Sp} \Delta_\varphi$.

(*b*) M_φ *est une algèbre de von Neumann proprement infinie.*

Démonstration. — Soit ψ un état normal fidèle sur M tel que 1 soit isolé dans $\operatorname{Sp} \Delta_\psi$. Dans un facteur de type III de genre dénombrable, tout projecteur non nul est équivalent à 1. L'existence de ψ résulte donc de 5.2.4. Soient Tr la trace usuelle sur F_∞ et $\varphi = \psi \otimes \operatorname{Tr}$ sur $M \otimes F_\infty$.

Alors φ est strictement semi-fini normal fidèle ([6], prop. 6.2). On a $\operatorname{Sp}\Delta_\varphi = \operatorname{Sp}\Delta_\psi$ et $M_\psi \otimes F_\infty = (M \otimes F_\infty)_\varphi$ en appliquant [39] (ex. 2) à $\sigma_t^\varphi = \sigma_t^\psi \otimes 1$. Comme $M \otimes F_\infty$ est isomorphe à M on a 5.3.2.

Lemme 5.3.3. — *Soient* G *un groupe abélien localement compact,* M *un facteur,* U *une représentation de* G *dans* M *telle que l'algèbre de von Neumann* M^U *soit proprement infinie. Soient* $x \in M$, *e le support de x, e′ le support de* x^*. *On suppose que x vérifie l'hypothèse du lemme 4.2.2. Il existe alors une isométrie partielle* $v \in M$ *et un k tels que :*

(1) $\operatorname{Sp}_U(v) \subset \operatorname{Sp}_U(x)$;

(2) $k \in M^U$;

(3) $x = vk$;

(4) $v^* v$ *est le plus petit projecteur du centre* C *de* M^U *majorant e*;

(5) vv^* *est le plus petit projecteur du centre* C *de* M^U *majorant e′;*

(6) $v M^U v^* \subset M^U$ et $v^* M^U v \subset M^U$.

Démonstration. — Soient $E = \operatorname{Sp}_U(x)$ et u l'isométrie partielle de la décomposition polaire de x. On a $u \in M(U, E)$, $u^* u = e \in M^U$ et $uu^* = e' \in M^U$ (4.2.2). Soient c le support central de e dans M^U, c' celui de e'. Il existe deux projecteurs e_0 et e_1 (resp. e'_0 et e'_1) du centre de M^U_e (resp. de $M^U_{e'}$) tels que $M^U_{e_0}$ soit proprement infinie, que $M^U_{e_1}$ soit finie et que $e_0 + e_1 = e$ (resp. $M^U_{e'_0}$ proprement infinie, $M^U_{e'_1}$ finie et $e'_0 + e'_1 = e'$). Il existe deux projecteurs de C, c_0 et c_1 (resp. c'_0 et c'_1) tels que $c_0 + c_1 = c$, $c_0 c_1 = 0$, $c_0 e = e_0$, $c_1 e = e_1$ *et* $c'_0 + c'_1 = c'$, $c'_0 c'_1 = 0$, $c'_0 e' = e'_0$, $c'_1 e' = e'_1$.

Pour $y \in M^U_e$ on a $uyu^* \in M_{e'}$, et $\operatorname{Sp}_U(uyu^*) \subset (E - E) \cap \operatorname{Sp} U^{e'} = \{0\}$ (2.1.5).

Donc l'application $y \to uyu^*$ est un isomorphisme de M^U_e sur $M^U_{e'}$, l'isomorphisme inverse étant l'application $y \to u^* yu$. L'unicité de la décomposition $e' = e'_0 + e'_1$ avec $M^U_{e'_0}$ proprement infinie et $M^U_{e'_1}$ finie montre que

$$ue_0 u^* = e'_0, \qquad ue_1 u^* = e'_1, \qquad u^* e'_0 u = e_0, \qquad u^* e'_1 u = e_1.$$

Par hypothèse e_1 est un projecteur fini de M^U, de support central c_1.

Comme M^U est proprement infinie de genre dénombrable il existe une suite infinie $(e_2, \ldots, e_n, \ldots)$ de projecteurs deux à deux orthogonaux de M^U, de somme $c_1 - e_1$ et équivalents à e_1 relativement à M^U. Soit donc $(w_1, w_2, \ldots, w_n, \ldots)$ une suite d'isométries partielles de M^U telle que $w_1 = e_1$, $w_j^* w_j = e_1$ pour tout j, $w_j w_j^* = e_j$ pour tout j et $\sum_1^\infty e_j = c_1$. Soit, de même, $(w'_1, \ldots)$ une suite d'isométries partielles de M^U telle que $w'_1 = e'_1$, $w'^*_j w'_j = e'_1$ pour tout j, $w'_j w'^*_j = e'_j$ pour tout j où $e'_j \, e'_k = 0$ pour $j \neq k$, et $\sum e'_j = c'_1$. On a

$$w'_j \, u \, w_j^* \, w_j \, u^* \, w_j'^* = w'_j \, u e_1 \, u^* \, w_j'^* = w'_j \, e'_1 \, w_j'^* = e'_j$$

donc pour tout j, $w'_j \, u \, w_j^*$ est une isométrie partielle, notée u_j.

On a $u_j \in \mathrm{M}(\mathrm{U}, \mathrm{E})$ (w_j et w'_j sont dans M^{U}),

$$u_j \, u_j^* = e'_j \qquad \text{et} \qquad u_j^* \, u_j = w_j \, u^* \, w_j'^* \, w'_j \, u \, w_j^* = e_j.$$

Donc la série $\sum u_j$ est faiblement sommable, sa somme v_1 est une isométrie partielle, $v_1 \in \mathrm{M}(\mathrm{U}, \mathrm{E})$, avec $v_1^* \, v_1 = \sum e_j = c_1$ et $v_1 \, v_1^* = c'_1$.

Comme e_0 est proprement infini de support central c_0, il existe une isométrie partielle $w \in \mathrm{M}^{\mathrm{U}}$ telle que $ww^* = c_0$ et $w^* w = e_0$. Soit de même $w' \in \mathrm{M}^{\mathrm{U}}$, $w' \, w'^* = c'_0$, $w'^* \, w' = e'_0$. Soit $v_0 = w' \, u \, w^*$. On a

$$v_0 \, v_0^* = w' \, e'_0 \, w'^* = c'_0, \qquad v_0^* \, v_0 = w e_0 \, w^* = c_0$$

et $v_0 \in \mathrm{M}(\mathrm{U}, \mathrm{E})$. On a

$$v_0 + v_1 \in \mathrm{M}(\mathrm{U}, \mathrm{E}), \qquad (v_0 + v_1)^* \, (v_0 + v_1) = c_0 + c_1, \qquad (v_0 + v_1) \, (v_0 + v_1)^* = c'_0 + c'_1$$

donc $v = v_0 + v_1$ est une isométrie partielle vérifiant les conditions 1°, 4° et 5° du lemme.

Soit $k = v^* \, x$. On a $k \in \mathrm{M}(\mathrm{U}, \mathrm{E} - \mathrm{E})$ et $k \in \mathrm{M}_c$ donc comme

$$\mathrm{Sp}\, \mathrm{U}^c \cap (\mathrm{E} - \mathrm{E}) = \mathrm{Sp}\, \mathrm{U}^e \cap (\mathrm{E} - \mathrm{E}) = \{ 0 \} \; [2.2.2 \, (a)]$$

il vient $k \in \mathrm{M}^{\mathrm{U}}$ d'où 2° et 3°. Soit $y \in \mathrm{M}^{\mathrm{U}}$, on a $vyv^* \in \mathrm{M}(\mathrm{U}, \mathrm{E} - \mathrm{E}) \cap \mathrm{M}_{c'}$ et comme $\mathrm{Sp}\, \mathrm{U}^{c'} \cap (\mathrm{E} - \mathrm{E}) = \{ 0 \}$ [2.2.2 (a)] il vient $vyv^* \in \mathrm{M}^{\mathrm{U}}$. De même $v^* \, \mathrm{M}^{\mathrm{U}} \, v \subset \mathrm{M}^{\mathrm{U}}$.

LEMME 5.3.4. — *Identifions le dual de* $\mathbf{R}$ *à* $\mathbf{R}$ [$(t, \gamma) = e^{it\gamma}$ *pour* $t \in \mathbf{R}, \gamma \in \mathbf{R}$]. *Soient* M *un facteur,* U *une représentation de* $\mathbf{R}$ *dans* M *non extérieurement équivalente à la représentation triviale, telle que* M^{U} *soit une algèbre de von Neumann proprement infinie et que* 0 *soit isolé dans* Sp U. *Alors il existe un unitaire* X *de* M *tel que* $\mathrm{X} \, \mathrm{M}^{\mathrm{U}} \, \mathrm{X}^* = \mathrm{M}^{\mathrm{U}}$, *que* M *soit l'algèbre de von Neumann engendrée par* M^{U} *et* X *et que* $\mathrm{Sp}_{\mathrm{U}}(\mathrm{X}) \subset]0, \infty[$.

Démonstration. — Soient $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\mathrm{Sp}\, \mathrm{U} \cap [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] = \{ 0 \}$ et $\mathrm{C} = \text{Centre } \mathrm{M}^{\mathrm{U}}$. Soit $\mathcal{J}$ l'ensemble des isométries partielles $v \in \mathrm{M}$, telles que :

(a) $v^* \, v \in \mathrm{C}$, $vv^* \in \mathrm{C}$;

(b) $v \mathrm{M}^{\mathrm{U}} \, v^* \subset \mathrm{M}^{\mathrm{U}}$, $v^* \, \mathrm{M}^{\mathrm{U}} \, v \subset \mathrm{M}^{\mathrm{U}}$.

Soient v_1 et v_2, dans $\mathcal{J}$, avec $e_1 = v_1^* v_1$, $e_2 = v_2^* v_2$, $e'_1 = v_1 v_1^*$, $e'_2 = v_2 v_2^*$. L'application $y \to v_1 y v_1^*$ est un isomorphisme de $M^U_{e_1}$ sur $M^U_{e'_1}$, donc $v_1 (e_1 e'_2) v_1^* = v_1 e'_2 v_1^*$ appartient au centre de $M^U_{e'_1}$ donc au centre C de M^U et est un projecteur .On a montré que $v = v_1 v_2$ est une isométrie partielle de support final appartenant à C. De même, son support initial, qui est le support final de $v_2^* v_1^*$, est dans C. On a donc $v_1 v_2 \in \mathcal{J}$.

Il est clair que si v_1 et v_2 sont dans $\mathcal{J}$ avec e_1 orthogonal à e_2 et e'_1 orthogonal à e'_2 on a, pour $v = v_1 + v_2$:

$$v^* v = (v_1 + v_2)^* (v_1 + v_2) = v_1^* v_1 + v_2^* v_2 = e_1 + e_2$$

qui est un projecteur de C,

$$\begin{aligned} v^* xv &= v_1^* xv_1 + v_2^* xv_2 + v_1^* e'_1 xe'_2 v_2 + v_2^* e'_2 xe'_1 v_1 \\ &= v_1^* xv_1 + v_2^* xv_2 \qquad \text{pour} \quad x \in M^U, \end{aligned}$$

donc on a $v_1 + v_2 \in \mathcal{J}$.

Pour v_1 et v_2 dans $\mathcal{J}$, on écrit $v_1 \prec v_2$ si le support initial e_1 et v_1 est contenu dans le support initial e_2 de v_2 et si $v_1 = v_2 e_1$. Si $v_1 \prec v_2$ on a $v_1^* \prec v_2^*$, et $vv_1 \prec vv_2$, $v_1 v \prec v_2 v$ pour tout $v \in \mathcal{J}$.

La construction de X s'appuie sur les propriétés (α), (β), (γ), (δ) des ensembles ci-dessous :

$\mathcal{E}_0 = \{ v \in \mathcal{J}, \mathrm{Sp_U}(v) \subset]\, \varepsilon_0, +\infty [, \mathrm{Sp_U}(v) - \mathrm{Sp_U}(v) \subset [-\varepsilon_0/2, \varepsilon_0/2] \}$,

$\mathcal{E}_1 = \{ v \in \mathcal{E}_0$ tel que pour tout couple (v_1, v_2), $v_j \in \mathcal{E}_0$, $v_1 v_2 \prec v$ entraîne $v_1 v_2 = 0 \}$.

PROPRIÉTÉ (α). — *Pour tout* $v \in \mathcal{E}_0$, $v \neq 0$ *il existe* $v_1, \ldots, v_p \in \mathcal{E}_1$ *tels que* $\prod_1^p v_j \neq 0$, $\prod_1^p v_j \prec v$.

Raisonnons par récurrence sur n tel que $\mathrm{Sp_U}(v) \subset]\, 0, n\varepsilon_0[$. Pour $n = 1$ l'ensemble obtenu est vide. Supposons avoir démontré la propriétépour tout v tel que $\mathrm{Sp_U}(v) \subset]0, n\varepsilon_0[$ et démontrons-la pour tout v tel que $\mathrm{Sp_U}(v) \subset]0, (n+1)\varepsilon_0[$. Si $v \in \mathcal{E}_1$ c'est immédiat. Sinon, soient w_1 et w_2, $w_j \in \mathcal{E}_0$, $w_1 w_2 \neq 0$ et $w_1 w_2 \prec v$. Soient $e = w_1^* w_1$ et $w_3 = ew_2$. On a $w_1 w_2 = w_1 ew_2 = w_1 w_3$, $w_3 \in \mathcal{E}_0$ (car $e \in M^U$) et Support final de $w_3 \leqq$ Support initial de w_1. On a $w_3 = w_1^* w_1 w_2 = w_1^* fv$ où f désigne le Support final de $w_1 w_2 \prec v$. Comme $f \in M^U$ on a $\mathrm{Sp_U}(w_3) \subset \mathrm{Sp_U}(v) - \mathrm{Sp_U}(w_1)$. On a $\mathrm{Sp_U}(w_1) \subset]\varepsilon_0, \infty[$ car $w_1 \in \mathcal{E}_0$ donc $\mathrm{Sp_U}(w_3) \subset]0, n\varepsilon_0[$ et l'hypothèse de récurrence montre qu'il existe $v_1, \ldots, v_p \in \mathcal{E}_1$ avec $\prod_1^p v_j \neq 0$ et $\prod_1^p v_j \prec w_3$.

Le support final f' de $\prod_1^p v_j$ est inférieur à e. On a $w_1 \prod_1^p v_j \prec w_1 w_3 \prec v$

et $w_1 \prod_1^p v_j \neq 0$. Ainsi, $w_1 f' \prod_1^p v_j$ est de la forme $f'' v$ où $f'' \in C$ donc $w_1 f' = f'' v \left(\prod_1^p v_j\right)^*$ et $\mathrm{Sp}_U (w_1 f') \subset]0, n\,\varepsilon_0[$ par le même raisonnement que ci-dessus car $p \geqq 1$ et $v_j \in \mathcal{E}_0$.

L'hypothèse de récurrence montre qu'il existe $v_{p+1}, \ldots, v_{p+p'} \in \mathcal{E}_1$ tels que

$$\prod_1^{p'} v_{p+j} \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \prod_1^{p'} v_{p+j} \prec w_1 f'.$$

Comme le support initial de $\prod_1^{p'} v_{p+j}$ est contenu dans le support final de $\prod_1^{p} v_j$ on a $\left(\prod_1^{p'} v_{p+j}\right)\left(\prod_1^{p} v_j\right) \neq 0$. D'autre part

$$\left(\prod_1^{p'} v_{p+j}\right)\left(\prod_1^{p} v_j\right) \prec W_1 \prod_1^{p} v_j \prec W_1\, W_3 \prec v.$$

Propriété (β) :

1° *Soit* $u \in \mathcal{J}$ *tel que* $\mathrm{Sp}_U (u) \subset (]\,\varepsilon_0, \infty[)$ *et* $\mathrm{Sp}_U (u) - \mathrm{Sp}_U (u) \subset [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$. *Il existe alors* $w \in \mathcal{E}_0$, $w \neq 0$, *tel que* $w \prec u$.

2° *Si* v_1 *et* $v_2 \in \mathcal{E}_1$, *alors* $v_1^* v_2 \in M^U$ *et* $v_1 v_2^* \in M^U$.

1° Soit (lemme 2.1.6), $g \in L^1 (R)$ tel que

$$\text{Support } \hat{g}\text{-Support } \hat{g} \subset [-\varepsilon_0/2, \varepsilon_0/2] \qquad \text{et} \qquad (U (g) u)^* u \neq 0.$$

Soient (lemme 5.3.3), $v \in \mathcal{J}$ et $k \in M^U$ tels que $vk = U (g) u$ et $\mathrm{Sp}_U (v) \subset \mathrm{Sp}_U (U (g) u)$. On a $v^* u \neq 0$ car $k^* v^* u = (U (g) u)^* u \neq 0$.

Comme $\mathrm{Sp}_U (v) \subset \mathrm{Sp}_U (u) \cap \text{Support } \hat{g}$ on a $v \in \mathcal{E}_0$. On a

$$\mathrm{Sp}_U (v^* u) \subset \mathrm{Sp}_U (u) - \mathrm{Sp}_U (u) \subset [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$$

donc $v^* u \in M^U$. Soit $w = vv^* u$. Alors $\mathrm{Sp}_U (w) \subset \mathrm{Sp}_U (v)$ et $w \in \mathcal{J}$ car $v \in \mathcal{J}$ et $u \in \mathcal{J}$. On a donc $w \in \mathcal{E}_0$ et $w \prec u$. En outre $w \neq 0$ car $v^* w = v^* u \neq 0$.

2° Montrons d'abord que $v_1^* v_2 \in M^U$. On a

$$\mathrm{Sp}_U (v_1^* v_2) - \mathrm{Sp}_U (v_1^* v_2) \subset \mathrm{Sp}_U (v_2) - \mathrm{Sp}_U (v_2) + \mathrm{Sp}_U (v_1) - \mathrm{Sp}_U (v_1) \subset [-\varepsilon_0, \varepsilon_0].$$

Ainsi $v_1^* v_2 \in M (U, \{0\})$ ou $v_1^* v_2 \subset M (U,]\varepsilon_0, \infty[)$ ou $v_2^* v_1 \in M (U,]\,\varepsilon_0, \infty[)$. Il suffit de montrer que si $v_1^* v_2 \neq 0$ et $v_1^* v_2 \in M (U,]\,\varepsilon_0, \infty[)$ on aboutit à une contradiction. Soit alors $u = v_1^* v_2$. On a $u \in \mathcal{J}$, $\mathrm{Sp}_U (u) \subset]\varepsilon_0, \infty[$ et $\mathrm{Sp}_U (u) - \mathrm{Sp}_U (u) \subset [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$, donc (1°), soit $w \neq 0$, $w \in \mathcal{E}_0$, tel que $w \prec u$. On a $v_1 w \prec v_1 u = v_1 v_1^* v_2 \prec v_2$ et le support final de w est majoré par le support final de u donc par le support initial de v_1, d'où $v_1 w \neq 0$. On a donc contredit l'hypothèse $v_2 \in \mathcal{E}_1$.

Montrons que $v_1 v_2^* \in M^U$. On suppose de même que $u = v_1 v_2^* \neq 0$ et que $u \in M(U,]\varepsilon_0, \infty[)$. Soit $w \neq 0$, $w \in \mathcal{E}_0$ tel que $w \prec u$. On a $wv_2 \prec uv_2 \prec v_1$ et le support final de w^* est majoré par le support initial de u donc par le support initial de v_2^*, d'où $v_2^* w^* \neq 0$ et $wv_2 \neq 0$. On a ainsi contredit l'hypothèse $v_1 \in \mathcal{E}_1$.

Propriété (γ). — *L'algèbre de von Neumann* K *engendrée par* M^U et $\mathcal{E}_1$ *est égale à* M.

Le lemme 2.1.6 montre que l'ensemble des $x \in M$ tels que

$$\mathrm{Sp}_U(x) - \mathrm{Sp}_U(x) \subset [-\varepsilon_0/2, \varepsilon_0/2]$$

est faiblement total dans M. Pour montrer qu'un tel x appatient à K on peut supposer que $\mathrm{Sp}_U \subset]\varepsilon_0, \infty[$. Le lemme 5.3.3 montre qu'il existe $v \in \mathcal{E}_0$ et $k \in M^U$ tels que $x = vk$, il suffit donc de montrer que $\mathcal{E}_0 \subset K$. Soient $v \in \mathcal{E}_0$, $e = v^* v$. L'ensemble des projecteurs $e_1 \leqq e$ de C tels que $ve_1 \in K$ est inductif car si (e_n) est une suite croissante de tels projecteurs avec $e_\infty = \bigvee e_n$, on a $ve_\infty =$ limite faible ve_n. Pour e_1 maximal montrons que $e_1 = e$. Sinon, la propriété (α) appliquée à $v(e - e_1)$ montre l'existence d'un projecteur $e_2 \neq 0$, $e_2 \in C$ tel que $e_2 \leqq e - e_1$ et que $ve_2 \in \mathcal{E}_1^p$ pour un entier p. Comme $\mathcal{E}_1 \subset K$ cela contredit la maximalité de e_1.

Propriété (δ). — *Soit* (v_j) *une famille maximale d'éléments non nuls de* $\mathcal{E}_1$ *tels que pour* $j \neq k$ *on ait* $v_j v_k^* = 0$ *et* $v_j^* v_k = 0$. *Alors* $\sum v_j$ *est un unitaire.*

Soient $e_j = v_j^* v_j$, $e'_j = v_j v_j^*$. Pour $j \neq k$ on a $e_j e_k = e'_j e'_k = 0$.

Soient $e = \sum e_j$, $e' = \sum e'_j$. Supposons $1 - e \neq 0$. Si la représentation U^{1-e} est triviale, U est extérieurement équivalente à une représentation triviale (2.3.17), ce qui est absurde. Donc U^{1-e} est non triviale, et il existe $x_1 \in M_{1-e}$ tel que $\mathrm{Sp}_U(x_1) \neq \{0\}$. Le lemme 2.1.6 montre donc qu'il existe un $x \neq 0$, $x \in M_{1-e}$, tel que

$$\mathrm{Sp}_U(x) - \mathrm{Sp}_U(x) \subset [-\varepsilon_0/2, \varepsilon_0/2] \quad \text{et} \quad \mathrm{Sp}_U(x) \subset]\varepsilon_0, \infty[.$$

Ainsi (5.3.3) il existe un $v \neq 0$, $v \in \mathcal{E}_0$ tel que $v^* v \leqq 1 - e$ et $vv^* \leqq 1 - e$. La propriété (α) montre alors qu'il existe un $w \neq 0$, $w \in \mathcal{E}_1$ tel que $w^* w \leqq 1 - e$. On a $v_j w^* = 0$ pour tout j. Comme $w^* v_j$ est un élément de M^U de support initial $\leqq e_j$ et de support final $\leqq 1 - e \leqq 1 - e_j$ on a $w^* v_j = 0$ pour tout j. On a donc contredit la maximalité de la famille, d'où $e = 1$. Supposons $1 - e' \neq 0$. Le raisonnement ci-dessus montre l'existence d'un $w \neq 0$, $w \in \mathcal{E}_1$ tel que $ww^* \leqq 1 - e'$.

On a $v_j^* w = 0$ pour tout j. Comme wv_j^* est un élément de M^U de support initial $\leqq e_j'$ et de support final $\leqq 1 - e' \leqq 1 - e_j'$ on a $wv_j^* = 0$ pour tout j ce qui contredit la maximalité de la famille. On a montré que $e = e' = 1$ donc que $\sum v_j$ est un unitaire.

Terminons la démonstration de 5.3.4. — Soit (v_j) une famille maximale comme dans (δ). Posons $X = \sum v_j$; on a $X^* X = XX^* = 1$ et $XM^U X^* = M^U$ (car $X \in \mathcal{J}$). Pour tout $v \in \mathcal{E}_1$ on a $X^* v = \sum v_j^* v \in M^U$ (β) donc $v \in XM^U$. La propriété (γ) montre donc que M est l'algèbre de von Neumann engendrée par X et M^U. Enfin on a $\mathrm{Sp}_U(v_j) \subset [\varepsilon_0, \infty[$ pour tout j, donc $\mathrm{Sp}_U(X) \subset [\varepsilon_0, \infty[$.

Démonstration de 5.3.1. — Soient φ un poids normal fidèle strictement semi-fini sur M vérifiant 5.3.2 (*a*), (*b*), σ la représentation $t \to \sigma_t^\varphi$ de $\mathbf{R}$ dans M, $N = M_\varphi = M^\sigma$ le centralisateur de φ et $E = E_\varphi$ l'espérance conditionnelle normale fidèle de M sur M_φ.

Comme M n'est pas semi-fini la représentation σ est non extérieurement équivalente à la représentation triviale. L'algèbre de von Neumann M^σ est proprement infinie et 1 est isolé dans $\mathrm{Sp}\,\sigma$ [5.3.2. (*a*), (*b*)] donc σ vérifie les conditions 5.3.4.

Soit (5.3.4) X un unitaire de M tel que $\mathrm{Sp}_\sigma(X) \subset]1, \infty[$, $XNX^* = N$ et que N et X engendrent l'algèbre de von Neumann M. Soit τ la trace normale fidèle semi-finie φ/N sur N [3.1.4 (*b*)]. On a $\varphi = \tau \circ E$ ([5], th. 3.4). Soit ρ l'unique opérateur positif affilié au centre C de N tel que $\tau(X a X^*) = \tau(\rho a)$ pour tout $a \in N_+$. On a [1.4.5 (*b*)], $\sigma_t^\varphi(X) = X \rho^{it}$, donc, pour $f \in L^1(\mathbf{R}) : \sigma(f) X = X \hat{f}(\rho^{-1})$. En conséquence $\mathrm{Sp}_\sigma(X) = \mathrm{Sp}(\rho^{-1})$, donc $\mathrm{Sp}\,\rho \subset [0, \lambda_0]$ pour un $\lambda_0 < 1$. Par suite $\tau(X a X^*) \leqq \lambda_0 \tau(a)$ pour tout $a \in N_+$. Soit $\theta \in \mathrm{Aut}\,N$ tel que $\theta(a) = X a X^*$ pour tout $a \in N$. Le centre de N est diffus (2.4.3), on a $p(\theta^n) = 0$ pour tout $n \neq 0$ (5.1.1) et θ agit ergodiquement sur C car M est un facteur engendré par N et X. On a $N' \cap M \subset N$ [5.2.1 (*a*)] donc M est isomorphe à $W^*(\theta, N)$ (4.1.2). Il reste à montrer que N est de type II_∞. Par construction N est proprement infinie. Ainsi comme θ agit ergodiquement sur C il suffit de montrer que l'hypothèse N de type I_∞ conduit à une contradiction. Soit donc e un projecteur abélien de support central 1 dans N. Soit $\theta' \in \mathrm{Aut}\,N$ tel que $\varepsilon_N(\theta') = \varepsilon_N(\theta)$ et que $\theta'(e) = e$. Comme θ' vérifie des conditions analogues à θ on peut supposer $\theta(e) = e$. La restriction de τ à N_e est une trace normale fidèle semi-finie sur cette algèbre de von Neumann abélienne, et la restriction de θ à N_e est un automorphisme ergodique. Une transformation bimesurable ergodique d'un espace mesurable Ω, μ diffus est nécessairement conservative ([24], § 4, p. 88), ce qui contredit l'inégalité $\tau(\theta(x)) \leqq \lambda_0 \tau(x)$ pour tout $x \in N_e$, $x \geqq 0$.

Remarques 5.3.5 :

(*a*) Utilisant 4.4.1, 5.1.1 et 5.3.1 on obtient ceci : pour qu'un facteur M de type III soit le produit croisé $W^*(\theta, N)$ d'une algèbre de von Neumann de type II_∞ par un automorphisme θ diminuant strictement une trace normale fidèle semi-finie, il faut et il suffit que $S(M) \neq [0, \infty[-$ (i. e. que M ne soit pas de type III_1). Si N est un facteur, $M = W^*(\theta, N)$ n'est pas de type III_0. Si le centre de N est diffus, $M = W^*(\theta, N)$ est un facteur de type III_0.

(*b*) Pour tout poids fidèle strictement semi-fini φ sur un facteur M de type III_0, vérifiant 5.3.2 (*a*), (*b*), l'algèbre de von Neumann M_φ est égale à son bicommutant relatif dans M. (Utiliser 5.3.1 et [41], cor. 8.10). [Rappelons que pour $\lambda \in]0, 1[$, tout facteur M de type III_λ, et tout trace généralisée φ sur M, φ vérifie les conditions 5.3.2 (*a*) et (*b*) mais le bicommutant relatif de M_φ dans M est égal à M.]

Corollaire 5.3.6. — *Soit* $\mathcal{G}$ *le groupe dénombrable discret somme directe d'une infinité dénombrable de groupes à deux éléments. Soit* M *un facteur de type* III_0 *dans un espace séparable. Il existe une algèbre de von Neumann* P *de type* II_∞, *une représentation* S *de* $\mathcal{G}$ *dans* P, *et une suite croissante* $\{e_k\}$ *de projecteurs non nuls du centre de* P *tels que :*

1° *Pour tout* k *les* $S_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k, 0, 0, \ldots)}(e_k)$, *pour* $\varepsilon_j = 0, 1, j = 1, 2, \ldots, k$, *forment une partition de l'unité dans le centre de* P.

2° M *est isomorphe au produit croisé* $W^*(\mathcal{G}, P)$.

Démonstration. — Soient (5.3.1), N une algèbre de von Neumann de type II_∞, θ un automorphisme de N vérifiant les conditions 5.1.1, tels que M soit isomorphe au produit croisé de N par θ. On identifie M à ce produit croisé, on note I l'injection de N dans M, E comme dans 1.4.6, X un unitaire de M tel que $X I(x) X^* = I(\theta(x))$ pour tout x dans N, h l'homorphisme du groupe $\mathfrak{U}(E)$ dans le groupe des automorphismes du centre C de N, tel que $h(u)x = I^{-1}(u I(x) u^*)$ pour $u \in \mathfrak{U}(E)$ et $x \in C$.

Lemme 5.3.7. — *Soient* N, I, M, X, h *comme ci-dessus. Alors :*

(*a*) Noyau $h = I(N)$.

(*b*) *Il existe un homomorphisme* l *du groupe complet associé à* $h(X)$ *dans* $\mathfrak{U}(E)$, *tel que* $h(l(s)) = s$ *pour tout* $s \in [h(X)]$.

(*a*) résulte de [41] (cor. 8.10).

(*b*) L'ensemble des éléments de $\mathfrak{U}$ (E) de la forme $\sum_{-\infty}^{+\infty} X^n \, I(e_n)$ [où (e_n) désigne une famille de projecteurs deux à deux orthogonaux de somme 1 du centre de N, ainsi que $(\theta^n(e_n))$] est un sous-groupe de $\mathfrak{U}$ (E). La restriction de h à ce sous-groupe est injective et son image est égale à $[h(X)]$, ce qui démontre (*b*).

Passons à la démonstration de 5.3.6. Soient ([23], dém. 3.1) $(e_k)_{k=1,2,\ldots}$, une suite décroissante de projecteurs du centre C de N, $(s_k)_{k=1,2,\ldots}$ une suite d'éléments de $[h(X)]$ tels que $s_k^2 = 1$, que $e_k = e_{k+1} + s_{k+1}(e_{k+1})$ pour tout k, que les s_k commutent deux à deux et que $h(X)$ appartienne au groupe complet associé aux s_k.

Pour $g = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k, 0, \ldots, 0, \ldots)$ dans $\mathcal{G}$, soient $s_g = \prod_1^k s_k^{\varepsilon_k}$, $Y_g = l(s_g)$ et S_g l'unique automorphisme de N tel que $I(S_g(x)) = Y_g \, I(x) \, Y_g^*$ pour tout $x \in N$. Par construction S est une représentation de $\mathcal{G}$ dans N et la remarque 4.1.3 permet de conclure.

REMARQUE 5.3.8. — *La démonstration de* ([23], lemme 3.1) *permet de montrer l'existence d'états normaux fidèles presque-périodiques sur tout facteur de type* III_0 *en utilisant* 5.3.6.

5.4. CLASSIFICATION DES FACTEURS DE TYPE III_0. — Soient N une algèbre de von Neumann de type II_∞ à centre diffus, θ un automorphisme de N, ergodique sur le centre de N, e un projecteur non nul du centre de N.

La restriction $\bar{\theta}$ de θ au centre de N est conservative (*cf.* [24], § 4, p. 88), donc il existe une suite unique $(e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots)$ de projecteurs deux à deux orthogonaux du centre de N, de somme e, tels que $e\,\bar{\theta}^j(e_n) = 0$ pour $j = 1, 2, \ldots, n-1$ et $\bar{\theta}^n(e_n) \leq e$. On a $\sum_1^\infty \theta^n(e_n) = e$.

Définition 5.4.1. — *Soient* N, θ, e *et* (e_n) *comme ci-dessus. On appelle automorphisme induit par* θ *dans* e *l'automorphisme* θ_e *de* N_e *défini par*

$$\theta_e(x) = \sum_1^\infty \theta^n(x\,e_n) \quad \textit{pour tout } x \in N_e.$$

Par construction l'automorphisme de N qui est le produit de θ_e sur N_e par l'identité sur N_{1-e} appartient au groupe complet d'automorphismes associée à θ.

THÉORÈME 5.4.2. — *Pour* $j = 1, 2$, *soient* N_j *une algèbre de von Neumann de type* II_∞ *à centre diffus,* θ_j *un automorphisme de* N_j *ergodique sur le centre et diminuant strictement une trace normale fidèle semi-finie sur* N_j, $M_j = W^* (\theta_j, N_j)$.

Pour que les facteurs M_1 *et* M_2 *soient isomorphes il faut et il suffit qu'il existe des projecteurs non nuls* e_j *du centre de* N_j *pour* $j = 1, 2$ *et un isomorphisme* J *de* N_{1, e_1} *sur* N_{2, e_2} *tels que l'automorphisme* $J\, \theta_{1, e_1}\, J^{-1}\, \theta_{2, e_2}^{-1}$ *de* N_{2, e_2} *soit un automorphisme intérieur.*

LEMME 5.4.3. — *Soient* λ_0, N, θ et τ *comme dans* 5.1.1, $M = W^* (\theta, N)$ *(c'est un facteur de type* III_0*), I l'injection canonique de* N *dans* M [1.4.6 (*a*)], E *l'espérance conditionnelle normale fidèle de* M *sur* I (N) [1.4.6 (*b*)], X *l'unitaire de* M *associé au générateur* 1 *du groupe* **Z** *par* 1.4.6 (*c*), φ *le poids normal fidèle semi-fini* $\varphi = \tau \circ I^{-1} \circ E$ *sur* M [1.4.3], σ *la représentation* $t \to \sigma_t^\varphi$ *de* **R** *sur* M, $\mathbf{R}_+^*$ *le dual de* **R** *pour* $(t, \gamma) = \gamma^{it}$ *avec* $t \in \mathbf{R}$ et $\gamma \in \mathbf{R}_+^*$.

1° φ *vérifie les conditions du lemme* 5.3.2 *sur le facteur* M.

2° *On a* $x - E(x) \in M(\sigma,]\lambda_0, \lambda_0^{-1}[^c)$ *pour tout* $x \in M$, *et* $M^\sigma = I(N)$.

3° *On a* $\mathrm{Sp}_\sigma(X) \subset]1, \infty[$.

4° *Soit* Y *un unitaire de* M *tel que* $YM^\sigma Y^* = M^\sigma$, *que* M *soit l'algèbre de von Neumann engendrée par* M^σ *et* Y *et que* $\mathrm{Sp}_\sigma(Y) \subset]1, \infty[$. *Alors* $X^* Y \in M^\sigma$.

Démonstration. — Par construction le poids φ est strictement semi-fini.

Pour $n \in \mathbf{Z}$, soit ρ_n l'unique opérateur affilié au centre de N tel que $\tau(\theta^n(x)) = \tau(\rho_n x)$ pour tout $x \in N_+$.

Pour $h \in L^1(R)$ et $n \in \mathbf{Z}$ on a [1.4.5 (*b*)], $\sigma(h) X^n = X^n \hat{h}(\rho_n^{-1})$ donc $\mathrm{Sp}_\sigma(X^n) = \mathrm{Sp}(\rho_n^{-1})$. On a donc montré 3°. On a $\mathrm{Sp}_\sigma(X^n) \subset ([\lambda_0, \lambda_0^{-1}[)^c$ pour tout $n \neq 0$ en utilisant les inégalités $0 < \rho_n \leqq \lambda_0^n$ pour $n > 0$ et $\lambda_0^n \leqq \rho_n$ pour $n < 0$ (*cf.* 5.1.1).

Pour $n \neq 0$ on a $E(X^n) = 0$ par construction de E. On a donc montré que pour tout n on a $X^n - E(X^n) \in M(\sigma,]\lambda_0, \lambda_0^{-1}[^c)$. Comme $I(N) \subset M^\sigma$ (*cf.* 1.4.3) on a $x - E(x) \in M(\sigma,]\lambda_0, \lambda_0^{-1}[^c)$ pour tout x de la forme $\sum_{-k}^{+k} a_j X^j$ avec $a_j \in I(N)$, donc pour tout $x \in M$. On a de plus $M^\sigma \subset I(N)$ comme conséquence facile de $\mathrm{Sp}_\sigma(x - E(x)) = \emptyset$ pour tout $x \in M^\sigma$ et de 2.1.2. L'assertion 1° résulte de 2° et de 2.1.3 (*d*) : on a $\mathrm{Sp}\,\sigma \cap ([\lambda_0, \lambda_0^{-1}[) = \{1\}$ donc 1 est isolé dans $\mathrm{Sp}\,\Delta_\varphi$ et de plus $M_\varphi = M^\sigma = I(N)$ est proprement infinie.

Démontrons 4°. Soit Y comme dans 4°; par hypothèse le groupe des X^n, $n \in \mathbf{Z}$ (et le groupe des Y^n, $n \in Z$) vérifie les conditions du théorème 1.5.5.

Soient [1.5.5 (*c*)] $(u_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ une suite d'isomètries partielles de I (N) ayant les propriétés suivantes : (1) $u_n u_n^* = u_n^* u_n = e_n$ est une suite de projecteurs deux à deux orthogonaux de somme 1 du centre de I (N); (2) $X = \sum_{n\in\mathbf{Z}} Y^n u_n$; (3) les $e'_n = Y^n e_n Y^{-n}$ sont deux à deux orthogonaux de somme 1. On a $X e_n = Y^n u_n$ donc pour $n \leq 0$ l'hypothèse $\mathrm{Sp}_\sigma(Y) \subset]1, \infty[$ montre que $\mathrm{Sp}_\sigma(X e_n) = \emptyset$, donc $e_n = 0$, c'est-à-dire $u_n = 0$.

On a donc $X = \sum_{n=1}^{\infty} Y^n u_n$.

De même on peut écrire $Y = \sum_{p=1}^{\infty} X^p w_p$ où $w_p w_p^* = w_p^* w_p = f_p$ et où (f_p) est une famille de projecteurs deux à deux orthogonaux du centre de I(N).

Supposons qu'il existe un $p \neq 1$ tel que $w_p \neq 0$ et montrons que l'on aboutit à une contradiction. On aura alors démontré 4°.

Soit $n \geq 1$. Montrons que $E(X^* Y^n f_p) = 0$. Si $n = 1$ cela résulte de l'égalité $Y f_p = X^p w_p$ avec $p > 1$. Si $n > 1$, Y^{n-1} est la somme d'une série fortement convergente $\sum_1^{\infty} X^k a_k$ où les $a_k \in I(N)$ sont des isométries partielles comme ci-dessus, et $X^* Y^n f_p = (X^* Y^{n-1}) Y f_p = (X^* Y^{n-1}) X^p w_p$ est somme d'une série $\sum_p^{\infty} X^j b_j$ avec $b_j \in I(N)$. On a donc $E(X^* Y^n f_p) = 0$. Pour $n > 0$ on a donc $E(X^* Y^n u_n f_p) = 0$ car $u_n \in I(N)$, d'où $E(X^* X f_p) = 0$ et $f_p = 0$ donc $w_p = 0$.

LEMME 5.4.4. — *Soient* λ_0, N, θ, τ, M, I, E, X, φ *et* σ *comme dans le lemme* 5.4.3. *e un projecteur non nul du centre de* N, θ_e *l'automorphisme induit* (5.4.1). *Alors* λ_0, N_e, θ_e *et* τ/N_e^+ *vérifient les conditions de* 5.1.1. *Soient* M_0, I_0, E_0, X_0, φ_0 *et* σ_0 *les éléments correspondants* (par 5.4.3). *Il existe un isomorphisme* J_0 *de* M_0 *sur* $M_{I(e)}$ *tel que :*

(*a*) $J_0 I_0(x) = I(x)$ *pour tout* $x \in N_e$.

(*b*) $J_0 E_0(x) = E(J_0(x))$ *pour tout* $x \in M_0$.

(*c*) $J_0(X_0) = \sum_1^{\infty} X^n I(e_n)$ *où les* e_n *sont ceux de* 5.4.1.

(*d*) $\varphi(J_0(x)) = \varphi_0(x)$ *pour tout* $x \in M_0^+$.

(*e*) $J_0(\sigma_{0,t}(x)) = \sigma_t(J_0(x))$ *pour tout* $x \in M_0$ *et tout* $t \in \mathbf{R}$.

Démonstration. — Par construction θ_e est un automorphisme de N_e et sa restriction au centre de N_e est $(\bar{\theta})_e$ donc est ergodique. De plus pour

$x \in \mathrm{N}_e^+$ on a $\theta_e(x) = \sum \theta^n(xe_n)$ donc $\tau(\theta_e(x)) = \sum_1^\infty \tau \circ \theta^n(xe_n) \leqq \lambda_0 \tau(x)$.

Soit $f = \mathrm{I}(e)$. Pour tout $x \in \mathrm{N}_e$ on a $\mathrm{I}(x) \in \mathrm{M}_f$. Soit I_1 l'application de N_e dans M_f qui à x associe $\mathrm{I}(x)$. On a $\mathrm{I}_1(\mathrm{N}_e) = \mathrm{I}(\mathrm{N}) \cap \mathrm{M}_f$ par construction. Ensuite $\mathrm{I}_1(\mathrm{N}_e)' \cap \mathrm{M}_f \subset \mathrm{I}_1(\mathrm{N}_e)$ car pour $x \in \mathrm{I}_1(\mathrm{N}_e)' \cap \mathrm{M}_f$ on a $[x, y] = 0$ pour tout $y \in \mathrm{I}(\mathrm{N})$: en effet $yf \in \mathrm{I}(\mathrm{N}) \cap \mathrm{M}_f$ et $[y(1-f), x] = 0$. La restriction E_1 de E à M_f est une espérance conditionnelle normale fidèle de M_f sur $\mathrm{I}(\mathrm{N}) \cap \mathrm{M}_f$ car $\mathrm{E}(f) = f$.

Soit $\mathrm{X}_1 = \sum_1^\infty \mathrm{X}^n \mathrm{I}(e_n)$. C'est par construction un unitaire de M_f tel que $\mathrm{X}_1 \mathrm{I}_1(x) \mathrm{X}_1^* = \mathrm{I}_1(\theta_e(x))$ pour tout $x \in \mathrm{N}_e$.

Soit M_1 l'algèbre de von Neumann engendrée par $\mathrm{I}_1(\mathrm{N}_e) = \mathrm{I}(\mathrm{N}) \cap \mathrm{M}_f$ et X_1 dans M_f. Pour montrer que $\mathrm{M}_1 = \mathrm{M}_f$ il suffit de montrer que pour tout $n > 0$ on a $f\mathrm{X}^n f \in \mathrm{M}_1$. On a $f\mathrm{X}^n f = \mathrm{X}^n \mathrm{I}(\theta^{-n}(e)e)$, dont il suffit de montrer que pour tout projecteur d du centre de N tel que $d \leqq e$, $\theta^n(d) \leqq e$ on a $\mathrm{X}^n \mathrm{I}(d) \in \mathrm{M}_1$. On peut supposer qu'il existe $k_1, \ldots, k_p$, entiers positifs tels que

$$d \leqq e_{k_1}, \qquad \theta^{k_1}(d) \leqq e_{k_2}, \qquad \theta^{k_2}\theta^{k_1}(d) \leqq e_{k_3}, \qquad \ldots, \qquad \theta^{k_1+k_2\ldots+k_{p-1}}(d) \leqq e_{k_p}$$

et

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_p = n.$$

On a

$$\mathrm{X}_1 \mathrm{I}(d) = \mathrm{X}^{k_1} \mathrm{I}(d),$$
$$\mathrm{X}_1^2 \mathrm{I}(d) = \mathrm{X}_1 \mathrm{I}(\theta^{k_1}(d)) \mathrm{X}^{k_1} = \mathrm{X}^{k_2} \mathrm{I}(\theta^{k_1}(d)) \mathrm{X}^{k_1} = \mathrm{I}(\theta^{k_1+k_2}(d)) \mathrm{X}^{k_1+k_2}, \qquad \ldots,$$
$$\mathrm{X}_1^p \mathrm{I}(d) = \mathrm{I}(\theta^n(d)) \mathrm{X}^n = \mathrm{X}^n \mathrm{I}(d).$$

D'où $\mathrm{M}_1 = \mathrm{M}_f$.

Ainsi N_e, θ_e, I_1, M_f, E_1 et X_1 vérifient les conditions de 4.1.2. Donc, il existe un isomorphisme J_0 de M_0 sur M_f vérifiant les conditions (*a*), (*b*) et (*c*) de 5.4.4.

Soient $x \in \mathrm{M}_0^+$, $y \in \mathrm{N}_e^+$, tels que $\mathrm{E}_0(x) = \mathrm{I}_0(y)$.

On a $\varphi_0(x) = \tau(y)$ par définition de φ_0, et $\varphi(\mathrm{J}_0(x)) = \tau \circ \mathrm{I}^{-1}(\mathrm{E}(\mathrm{J}_0(x))$. On a $\mathrm{E}\,\mathrm{J}_0(x) = \mathrm{J}_0(\mathrm{I}_0(y))$, $\mathrm{I}^{-1}\mathrm{J}_0(\mathrm{I}_0(y)) = y$ et donc $\varphi(\mathrm{J}_0(x)) = \tau(y)$. On a démontré (*d*). Donc le poids normal fidèle sur M_0 transformé par J_0 de φ_f est égal à φ_0; (*e*) résulte de 3.2.6.

LEMME 5.4.5. — *Identifions le dual de* $\mathbf{R}$ *à* $\mathbf{R}$ ($(t, \gamma) = e^{it\gamma}$, *t et* $\gamma \in \mathbf{R}$). *Soient* M *un facteur,* U *une représentation de* $\mathbf{R}$ *dans* M *telle que l'algèbre de von Neumann* M^{U} *soit proprement infinie,* a_1, a_2 *des projecteurs non nuls du centre de* M^{U}, *tels que* 0 *soit isolé dans* $\mathrm{Sp}\,\mathrm{U}^{a_1}$ *et* $\mathrm{Sp}\,\mathrm{U}^{a_2}$, *et* $\varepsilon > 0$. *Il existe une isométrie partielle* $v \in \mathrm{M}$ *telle que* $v^* v = b_1$ *soit un projecteur non nul* *du centre de* M^U, $b_1 \leqq a_1$, *que* $vv^* = b_2$ *soit un projecteur non nul du centre de* M^U, $b_2 \leqq a_2$, *et que* $(\mathrm{Sp}_U(v) - \mathrm{Sp}_U(v)) \subset [-\varepsilon, \varepsilon]$.

Démonstration. — On peut supposer que $\mathrm{Sp}\, U^{a_j} \cap [-\varepsilon, \varepsilon] = \{0\}$ pour $j = 1, 2$. Soient $x \in M$ tel que $a_2 x a_1 \neq 0$ (M est un facteur), $g \in L^1(\mathbf{R})$ tel que (Support $\hat{g}$-Support $\hat{g}) \subset [-\varepsilon, \varepsilon]$ et que $U(g)(a_2 x a_1) \neq 0$ (2.1.6), $y = U(g)\ (a_2 x a_1) = a_2 (U(g)(x)) a_1$ [2.1.3 (l)]. On a $a_2 y = y = y a_1$, $\mathrm{Sp}_U(y) - \mathrm{Sp}_U(y) \subset [-\varepsilon, \varepsilon]$ donc y vérifie l'hypothèse de 4.2.2. Soient e le support de y, e' celui de y^*, b_1 le support central de e dans M^U, b_2 le support central de e' dans M^U. On a $b_1 \leqq a_1$, $b_2 \leqq a_2$, $b_j \neq 0$.

D'après (5.3.3) il existe une isométrie partielle $v \in M$, de support initial b_1, de support final b_2 telle que $\mathrm{Sp}_U(v) \subset \mathrm{Sp}_U(y)$ donc $(\mathrm{Sp}_U(v) - \mathrm{Sp}_U(v)) \subset [-\varepsilon, \varepsilon]$.

LEMME 5.4.6. — *Soient* M *un facteur de type* III_0, φ_1 *et* φ_2 *deux poids normaux fidèles strictement semi-finis sur* M *vérifiant les conditions de* 5.3.2, *et* $\varepsilon > 0$. *Il existe un projecteur non nul* e_1 *du centre de* M_{φ_1}, *un projecteur non nul* e_2 *du centre de* M_{φ_2}, *une isométrie partielle* $v \in M$, *de support initial* e_1, *de support final* e_2 *telle que l'application* $x \to vxv^*$ *soit un isomorphisme* j *de* M_{e_1} *sur* M_{e_2} *transportant* $M_{\varphi_1} \cap M_{e_1}$ *en* $M_{\varphi_2} \cap M_{e_2}$ *et tel que*

$$\mathrm{Log}\,(\mathrm{Sp}_{\sigma_2}(j(x))) \subset \mathrm{Log}\,(\mathrm{Sp}_{\sigma_1}(x)) + [-\varepsilon, \varepsilon],$$
$$\mathrm{Log}\,(\mathrm{Sp}_{\sigma_1}(x)) \subset \mathrm{Log}\,(\mathrm{Sp}_{\sigma_2}(j(x)) + [-\varepsilon, \varepsilon] \quad \textit{pour tout } x \in M_{e_1},$$

où σ_j *désigne la représentation de* $\mathbf{R}$ *dans* M_{e_j} *réduite de* σ^{φ_j} *par* $e_j \in M_{\varphi_j}$.

Démonstration. — On peut supposer que $\log(\mathrm{Sp}\,\sigma_k) \cap [-\varepsilon, \varepsilon] = \{0\}$.
Soient $P = M \otimes F_2$, ψ avec $\psi(x) = \varphi_1(x_{11}) + \varphi_2(x_{22})$ pour

$$x = \sum x_{ij} \otimes e_{ij} \in P_+$$

comme dans 1.2.2 (a). Soient I_k ($k = 1, 2$) l'isomorphisme de M sur l'algèbre réduite de P par $1 \otimes e_{kk}$ tel que $I_k(x) = x \otimes e_{kk}$ pour tout $x \in M$, U la représentation $t \to \sigma_t^\psi$ de $\mathbf{R}$ dans P. On a [1.2.2. (a)], $I_k(\sigma_t^{\varphi_k}(x)) = U_t\, I_k(x)$ pour tout $x \in M$.

Par hypothèse les projecteurs $1 \otimes e_{kk}$ de P^U sont proprement infinis car I_k est un isomorphisme de M_{φ_k} sur $P^U_{1 \otimes e_{kk}}$. Donc P^U est proprement infinie. Soit a_k le support central de $1 \otimes e_{kk}$ dans P^U. On a $\mathrm{Sp}\, U^{a_k} = \mathrm{Sp}\, \sigma^{\varphi_k}$ (2.2.2), donc 0 est isolé dans $\mathrm{Log\,Sp}\, U^{a_j}$ et (5.4.5) il existe des projecteurs b_1, b_2, un $v_1 \in P$ tels que :

1° $b_k \leqq a_k$ ($k = 1, 2$);
2° $\mathrm{Log}\,(\mathrm{Sp}_U v_1) - \mathrm{Log}\,(\mathrm{Sp}_U v_1) \subset [-\varepsilon, \varepsilon]$;
3° $v_1^* v_1 = b_1 \in \text{Centre } P^U$, $v_1 v_1^* = b_2 \in \text{Centre } P^U$;

Soit $c_k = b_k (1 \otimes e_{kk})$ pour $k = 1, 2$; c'est un projecteur car b_k est dans le *centre de* P^U. Le support central de c_k dans P^U est égal à $b_k a_k = b_k$, et c_k appartient au centre de l'algèbre réduite de P^U par $1 \otimes e_{kk}$.

Soit e_k tel que $I_k (e_k) = c_k$. Alors e_k est un projecteur non nul du centre de M_{φ_k} donc c_k est proprement infini relativement à P^U et il existe une isométrie partielle $w_k \in P^U$ de support initial c_k et de support final b_k. Soit $u = w_2^* v_1 w_1$. Le support initial de u est égal à c_1, son support final est c_2. On a $(\operatorname{Log} \mathrm{Sp}_U (u) - \operatorname{Log} \mathrm{Sp}_U (u)) \subset [-\varepsilon, \varepsilon]$ car $w_j \in P^U$ pour $j = 1, 2$. On a $c_1 \leqq 1 \otimes e_{11}$ et $c_2 \leqq 1 \otimes e_{22}$ donc il existe une isométrie partielle $v \in M$ de support initial e_1, de support final e_2, telle que $u = v \otimes e_{21}$. Il suffit pour terminer la démonstration, de montrer que pour tout $x \in M_{e_1}$ on a

$$\operatorname{Log} (\mathrm{Sp}_{\sigma_2} (vxv^*)) \subset \operatorname{Log} (\mathrm{Sp}_{\sigma_1} (x)) + [-\varepsilon, \varepsilon].$$

On a

$$\mathrm{Sp}_{\sigma_1} (x) = \mathrm{Sp}_U (I_1 (x)) = \mathrm{Sp}_U (x \otimes e_{11}), \qquad \mathrm{Sp}_{\sigma_2} (vxv^*) = \mathrm{Sp}_U (vxv^* \otimes e_{22})$$

et

$$vxv^* \otimes e_{22} = u (x \otimes e_{11}) u^*,$$

donc comme $(\operatorname{Log} \mathrm{Sp}_U (u) - \operatorname{Log} \mathrm{Sp}_U (u)) \subset [-\varepsilon, \varepsilon]$, la conclusion résulte de 2.1.5.

Démonstration de 5.4.2. — Montrons la suffisance de la condition 5.4.2. Soient N_1 et θ_1 comme dans 5.4.2, e_1 un projecteur non nul du centre de N_1. Le lemme 5.4.4 montre que $W^* (\theta_{1, e_1}, N_{1, e_1})$ est isomorphe à un facteur réduit de $W^* (\theta_1, N_1)$.

Comme $W^* (\theta_1, N_1)$ est de type III, il est isomorphe à $W^* (\theta_{1, e_1}, N_{1, e_1})$. De même $W^* (\theta_2, N_2)$ est isomorphe à $W^* (\theta_{2, e_2}, N_{2, e_2})$ et la conclusion résulte de 4.1.4.

Montrons la nécessité de la condition 5.4.2. Il existe sur N_1 (resp. N_2) une trace τ_1 (resp. τ_2) et un $\lambda_1 < 1$ (resp. λ_2) tels que $(N_1, \theta_1, \tau_1, \lambda_1)$ vérifie les conditions 5.1.1.

Soient λ_1, N_1, θ_1, τ_1, M^1, I^1, E^1, X_1, φ_1 et σ_1 construits comme dans 5.4.3 à partir de $(N_1, \theta_1, \tau_1, \lambda_1)$, de même $\lambda_2, N_2, \ldots$ construits à partir de $(N_2, \theta_2, \tau_2, \lambda_2)$, $\varepsilon > 0$ tel que $|\operatorname{Log} \lambda_j| > \varepsilon$ pour $j = 1, 2$.

Soit $M = M^1 = M^2$ (on peut se permettre cette identification par hypothèse). Alors M est un facteur de type III_0, φ_1, φ_2 sont des poids normaux fidèles strictement semi-finis sur M vérifiant les conditions 5.3.2 [*cf.* 5.4.3 (1°)]. Donc, (5.4.6), il existe un projecteur f_1 non nul du centre de M_{φ_1}, un projecteur f_2 du centre de M_{φ_2}, un isomorphisme j de M_{f_1} sur M_{f_2}, tels que $j(M_{\varphi_1} \cap M_{f_1}) = M_{\varphi_2} \cap M_{f_2}$ et que pour tout $x \in M_{f_1}$ on ait

$$\operatorname{Log}(\operatorname{Sp}_{\sigma_2}(j(x))) \subset \operatorname{Log}(\operatorname{Sp}_{\sigma_1}(x)) + [-\varepsilon, \varepsilon].$$

D'après 5.4.3 (2°), on a $M_{\varphi_j} = I^j(N)$, donc il existe e_j, projecteur non nul du centre de N, tel que $I^j(e_j) = f_j$ pour $j = 1, 2$.

On a $I^1(N^1_{e_1}) = M_{\varphi_1} \cap M_{f_1}$, $I^2(N^2_{e_2}) = M_{\varphi_2} \cap M_{f_2}$, donc il existe un isomorphisme J de $N^1_{e_1}$ sur $N^2_{e_2}$ tel que $I^2(J(x)) = j(I^1(x))$ pour tout $x \in N^1_{e_1}$. Il existe (5.4.4) un unitaire Y de M_{f_1} vérifiant les conditions suivantes :

(α) $I^1(\theta_{1,e_1}(x)) = YI^1(x)\ Y^*$ pour tout $x \in N^1_{e_1}$.

(β) M_{f_1} est l'algèbre de von Neumann engendrée par $I^1(N^1_{e_1})$ et Y.

(γ) $\operatorname{Sp}_{\sigma_1}(Y) \subset]\lambda_1^{-1}, \infty[$.

Ainsi $j(Y)$ est un unitaire de M_{f_2}, tel que $\operatorname{Sp}_{\sigma_2}(j(Y)) \subset]1, \infty[$ car $\operatorname{Log}\operatorname{Sp}_{\sigma_1} Y \subset [-\operatorname{Log}\lambda_1, \infty[$ et donc $\log \operatorname{Sp}_{\sigma_2} j(Y)$ est contenu dans $]0, \infty[$ grâce au choix de ε.

De plus

$$j(Y) M_{f_2}^{\sigma_2} j(Y^*) = j(Y)(M_{f_2} \cap M_{\varphi_2}) j(Y^*) = j(Y(M_{f_1} \cap M_{\varphi_1}) Y^*) = j(M_{f_1} \cap M_{\varphi_1}) \text{ (par } \alpha) = M_{f_2}^{\sigma_2}.$$

Le lemme 5.4.3 (4°) montre qu'il existe un unitaire a de $M_{f_2}^{\sigma_2}$ tel que $X = aj(Y)$ vérifie la condition :

(α') $I^2(\theta_{2,e_2}(x)) = XI^2(x)\ X^*$ pour tout $x \in N^2_{e_2}$.

Tout x dans l'algèbre de von Neumann $N^2_{e_2}$ vérifie $I^2(x) = j(I^1(J^{-1}(x)))$, donc avec ($\alpha'$),

$$I^2(\theta_{2,e_2}(x)) = j(I^1(J^{-1}(\theta_{2,e_2}(x)))) = aj(YI^1(J^{-1}(x))\, Y^*)\, a^* = aj(I^1(\theta_{1,e_1}(J^{-1}(x))))\, a^*,$$

en utilisant (α). Cela montre que $\theta_{1,e_1} J^{-1} \theta_{2,e_2}^{-1} J$ est un automorphisme intérieur de N_{1,e_1}.

5.5. Existence de facteurs hyperfinis qui ne sont pas des facteurs d'Araki-Woods. — Rappelons qu'on dit qu'un facteur M est hyperfini quand il existe une suite croissante $(M_k)_{k \in \mathbf{N}}$ de facteurs finis de type I contenus dans M telle que $\left(\bigcup_{k \in \mathbf{N}} M_k\right)^- = M$.

Théorème 5.5.1. — *Il existe un facteur* K *de type* III_0, *opérant dans un espace de Hilbert séparable, hyperfini, et qui n'est isomorphe à aucun produit tensoriel infini de facteurs de type* I.

Définition 5.5.2. — *Soient* M *un facteur de type* III_0, φ *un poids normal fidèle strictement semi-fini sur* M *vérifiant* 5.3.2 (a) et (b), $s > 0$, $\delta > 0$,

σ *la représentation* $t \to \sigma_t^{\varphi}$ *de* $\mathbf{R}$ *dans* M. *On pose* $k_{s,\delta}(\varphi) = \bigvee$ support x, *pour* $x \in \mathrm{M}(\sigma, \mathrm{V}_{s,\delta})$, *où* $\mathrm{V}_{s,\delta}$ *est la réunion des intervalles* $[e^{-e^{s+\delta}}, e^{-e^{s-\delta}}]$ *et* $[e^{e^{s-\delta}}, e^{e^{s+\delta}}]$.

LEMME 5.5.3. — *Soient* $\lambda_0 < 1$, Ω *un espace mesurable,* μ *une mesure positive* σ*-finie diffuse sur* Ω, T *une bijection bimesurable ergodique de* Ω *sur* Ω, *laissant* μ *quasi-invariante, telle que* $(d\mathrm{T}^n \mu/d\mu)(\omega) \notin]\lambda_0, 1[$ *pour tout* $n \in \mathbf{Z}$ *et tout* $\omega \in \Omega$, *et que* $r(\{\mathrm{T}^n, n \in \mathbf{Z}\}) = \{0, 1\}$.

Soient P *le produit croisé de* $\mathrm{L}^\infty(\Omega, \mu)$ *par* $\{\mathrm{T}^n, n \in \mathbf{Z}\}$, I *l'isomorphisme canonique de* $\mathrm{L}^\infty(\Omega, \mu)$ *sur une sous-algèbre de von Neumann abélienne maximale* $\mathfrak{A}$ *de* P, τ_μ *la trace normale fidèle semi-finie associée à* μ *sur* $\mathfrak{A}$ *comme dans* (1.4.8), E_0 *l'espérance conditionnelle normale fidèle de* P *sur* $\mathfrak{A}$. *De plus soient* F_∞ *un facteur de type* I_∞, Tr *la trace usuelle sur* F_∞.

(*a*) P *est un facteur de type* III_0, *isomorphe à* $\mathrm{M} = \mathrm{P} \otimes \mathrm{F}_\infty$ *et sur* M *le poids normal fidèle strictement semi-fini* $\varphi = (\tau_\mu \circ \mathrm{E}_0) \otimes \mathrm{Tr}$ *vérifie* 5.3.2 (*a*) et (*b*).

(*b*) *Pour tout projecteur* $e \neq 0$ *du centre de* M_φ *il existe un sous-ensemble mesurable* A *de* Ω *tel que* $e = (\mathrm{I}(\chi(\mathrm{A})) \otimes 1)$ *où* $\chi(\mathrm{A})$ *est la fonction caractéristique de* A.

(*c*) *Pour* e *et* A *comme dans* (*b*) *et* $s > 0$, $\delta > 0$ *on a*

$$k_{s,\delta}(\varphi_e) = \mathrm{I}(\chi(\mathrm{K}_{\mu,\mathrm{T}}(\mathrm{A}, s, \delta))) \otimes 1,$$

où $\mathrm{K}_{\mu,\mathrm{T}}(\mathrm{A}, s, \delta)$ *est l'ensemble des* $\omega \in \mathrm{A}$ *tels qu'il existe* $n \in \mathbf{Z}$ *avec* $\mathrm{T}^n(\omega) \in \mathrm{A}$ *et* $(d\mathrm{T}^{-n}\mu/d\mu)(\omega)) \in \mathrm{V}_{s,\delta}$.

Par hypothèse T est ergodique, conservatif et aperiodique car μ est diffuse. Le groupe des T^n, $n \in \mathbf{Z}$, est presque libre, P est un facteur, $\mathrm{S}(\mathrm{P}) = r(\{\mathrm{T}^n, n \in \mathbf{Z}\}) = \{0, 1\}$, donc P est de type III_0.

Soit $\mathrm{N} = \mathfrak{A} \otimes \mathrm{F}_\infty$. Alors N est une sous-algèbre de von Neumann semi-finie de $\mathrm{P} \otimes \mathrm{F}_\infty$ et $\mathrm{N}' \cap \mathrm{M} \subset \mathrm{N}$ car $\mathfrak{A}$ est abélienne maximale dans P.

En outre $\mathrm{E} = \mathrm{E}_0 \otimes 1$ est une espérance conditionnelle normale fidèle de M sur N, et le groupe $\mathcal{G}$ des unitaires de M de la forme $u_n = \mathrm{U}_n \otimes 1$, où U_n est l'unitaire de P associé à $n \in \mathbf{Z}$ par la proposition 1.4.6 (*c*), vérifie les hypothèses 1.5.5 (*c*). La trace $\tau = \tau_\mu \otimes \mathrm{Tr}$, sur $\mathrm{N} = \mathfrak{A} \otimes \mathrm{F}_\infty$, est normale fidèle semi-finie et pour $n \in \mathbf{Z}$ on a $\tau(u_n x u_n^*) = \tau(\rho_n x)$ pour tout $x \in \mathrm{N}_+$, où ρ_n désigne l'unique opérateur positif affilié au centre de N tel que pour tout $t \in \mathbf{R}$ on ait

$$\rho_n^{it} = \mathrm{I}((d\mathrm{T}^{-n}\mu/d\mu)^{it}) \otimes 1.$$

Par hypothèse pour tout $n \in \mathbf{Z}$ et tout $\omega \in \Omega$ on a $(d\mathrm{T}^{-n}\mu/d\mu)(\omega) \notin]\lambda_0, 1[$. Comme cela est valable pour tout ω et tout n, on a $(d\mathrm{T}^{-n}\mu/d\mu)(\omega) \notin]1, \lambda_0^{-1}[$.

Le lemme 3.3.2 appliqué avec $e = 1$ montre que $\mathrm{Sp}\,\sigma \cap]\lambda_0, \lambda_0^{-1}[= \{1\}$. Comme M_φ est proprement infini par construction (*cf.* 5.3.2) on a montré que φ vérifie 5.3.2 (*a*) et (*b*).

Le centre de M_φ est contenu dans le centre de N, comme dans 3.3.1. Le centre de N est égal à $\mathfrak{A} \otimes 1$. Alors (*b*) en résulte immméditement.

Démontrons (*c*). On a $e = \mathrm{I}(\chi(\mathrm{A})) \otimes 1$. Pour tout $n \in \mathbf{Z}$ et u_n comme ci-dessus, on a $u_n (\mathrm{I}(\chi(\mathrm{A})) \otimes 1)\ u_n^* = \mathrm{I}(\chi(\mathrm{T}^n(\mathrm{A}))) \otimes 1$ donc

$$eu_n^*\, eu_n = \mathrm{I}(\chi(\mathrm{B}_n)) \otimes 1, \qquad \mathrm{B}_n = \{\omega, \omega \in \mathrm{A},\ \mathrm{T}^n(\omega) \in \mathrm{A}\}.$$

Comme le fermé $\mathrm{F} = \mathrm{V}_{s,\delta}$ de $\mathbf{R}_+^*$ est invariant par l'application $\gamma \to \gamma^{-1}$, on a

$$\chi_{\mathrm{F}}(\rho_n^{-1}) = \chi_{\mathrm{F}}(\rho_n) = \mathrm{I}(\chi(\mathrm{C}_n)) \otimes 1, \qquad \text{où} \quad \mathrm{C}_n = \{\omega \in \Omega,\ (d\mathrm{T}^{-n}\mu/d\mu)(\omega) \in \mathrm{V}_{s,\delta}\}.$$

On a $\mathrm{K}_{\mu,\mathrm{T}}(\mathrm{A}, s, \delta) = \bigcup (\mathrm{B}_n \cap \mathrm{C}_n)$ pour $n \in \mathbf{Z}$ donc le lemme 3.3.2 montre que

$$k_{s,\delta}(\varphi_e) = \mathrm{I}(\chi(\mathrm{K}_{\mu,\mathrm{T}}(\mathrm{A}, s, \delta))) \otimes 1.$$

Lemme 5.5.4. — *Soient* M *un facteur d'Araki-Woods de type* III_0, ψ *un poids normal fidèle strictement semi-fini sur* M *vérifiant* 5.3.2 (*a*) *et* (*b*). *Il existe un* $\delta > 0$ *tel que* $k_{s,\delta}(\psi)$ *ne tende pas vers zéro fortement quand* s *tend vers* $+\infty$.

Soit $(\Omega_j, \nu_j)_{j=1,2,\ldots}$ une suite infinie de couples (ensemble fini, mesure positive de masse 1), tels que la mesure $\nu = \Pi\nu_j$ sur $\Omega = \Pi\,\Omega_j$ soit diffuse; soit T une bijection bimesurable, ergodique, laissant ν quasi invariante, de Ω sur Ω telle que T soit de type « produit infini » ([26], p. 145) et que M soit isomorphe à $\mathrm{W}^*(\{\mathrm{T}^n,\ n \in \mathbf{Z}\})$ (*Cf* [34], lemme 4).

On a $\mathrm{S}(\mathrm{M}) = \{0, 1\}$ donc $r(\{\mathrm{T}^n,\ n \in \mathbf{Z}\}) = \{0, 1\}$ (3.3.4) et ([23], lemme 2.2), il existe un $\lambda_0 < 1$, une mesure finie μ équivalente à ν, tels que pour tout $n \in \mathbf{Z}$ et tout $\omega \in \Omega$ on ait $(d\mathrm{T}^n\mu/d\mu)(\omega) \notin]\lambda_0, 1[$.

Comme T est de type produit infini et comme il n'existe sur Ω aucune mesure positive σ-finie équivalente à ν et T invariante, T a la propriété A de ([26], p. 146).

Avec les notations de [26] (p. 145-146) on a pour $s > 0$, $\delta > 0$ et $\mathrm{B} \subset \Omega$, B mesurable, l'égalité

$$\Lambda_{\mu,\mathrm{B},\mathrm{T}}(\omega) = \{\mathrm{Log}\,(d\mathrm{T}^n\mu/d\mu)(\omega),\ \text{pour } n \in \mathbf{Z} \text{ tel que } \mathrm{T}^{-n}(\omega) \in \mathrm{B}\} \quad \text{pour tout } \omega \in \mathrm{B}.$$

On a donc égalité entre l'ensemble $\mathrm{K}_{\mu,\mathrm{T}}(\mathrm{B}, s, \delta)$ considéré dans ([26], p. 146) et l'ensemle $\mathrm{K}_{\mu,\mathrm{T}}(\mathrm{B}, s, \delta)$ considéré ici en 5.5.3 (*c*).

Les lemmes 2.2 puis 2.1 de [26] montrent qu'il existe un $\delta_0 > 0$ tel que pour tout sous-ensemble mesurable non négligeable A de Ω on ait $\mu(\mathrm{K}_{\mu,\mathrm{T}}(\mathrm{A}, s, \delta_0))$ ne tend pas vers zéro quand $s \to +\infty$.

Le lemme 5.5.3 montre donc qu'il existe sur M un poids normal fidèle φ strictement semi-fini vérifiant les conditions 5.3.2 (a) et (b) et tel que $k_{s,\delta_0}(\varphi_e)$ ne tende pas vers zéro fortement quand $s \to +\infty$, pour tout projecteur non nul e du centre de M_φ. Soit $\varepsilon > 0$.

Le lemme 5.4.6 montre qu'il existe un projecteur non nul e_1 du centre de M_φ, un projecteur non nul e_2 du centre de M_ψ et un isomorphisme j de M_{e_1} sur M_{e_2} tel que pour tout $x \in M_{e_1}$, on ait

$$\operatorname{Log}(\operatorname{Sp}_{\sigma_2}(j(x))) \subset \operatorname{Log}(\operatorname{Sp}_{\sigma_1}(x)) + [-\varepsilon, \varepsilon]$$

où σ_1 désigne la représentation modulaire associée à φ_{e_1} et σ_2 la représentation modulaire associée à ψ_{e_2}.

Soient $\delta_1 > \delta_0$ et $s_0 > 0$ tels que pour tout $s \geqq s_0$ on ait

$$\operatorname{Log}(V_{s,\delta_1}) \supset \operatorname{Log}(V_{s,\delta_0}) + [-\varepsilon, \varepsilon].$$

Soit $s \geqq s_0$. Pour tout $x \in M(\sigma^1, V_{s,\delta_0})$, on a $j(x) \in M(\sigma_2, V_{s,\delta_1})$ donc Support $j(x)$ pour $x \in M(\sigma_1, V_{s,\delta_0})$ est inférieur à $k_{s,\delta_1}(\psi_{e_2})$ qui par construction est inférieur à $k_{s,\delta_1}(\psi)$.

On a donc $j(k_{s,\delta_0}(\varphi_{e_1})) \leqq k_{s,\delta_1}(\psi)$ pour tout $s \geqq s_0$ et comme j est un isomorphisme on a montré que $k_{s,\delta_1}(\psi)$ ne tend pas vers zéro fortement quand $s \to +\infty$.

LEMME 5.5.5. — *Soit* $\alpha > 1$. *Il existe un espace mesurable* Ω, *une mesure positive finie* μ *sur* Ω, *et une transformation* T *bimesurable ergodique de* Ω, *laissant* μ *quasi invariante tels que :*

(a) *On ait* $r(\{T^n, n \in \mathbf{Z}\}) = \{0, 1\}$ *et* $(dT^n \mu/d\mu)(\omega) \in \{\alpha^p, p \in \mathbf{Z}\}$ *pour tout* $n \in \mathbf{Z}$ *et tout* $\omega \in \Omega$.

(b) *On ait* $\mu(K_{\mu,T}(\Omega, s, \delta)) \to 0$ *quand* $s \to +\infty$ *pour tout* $\delta > 0$.

Soit $\alpha > 1$, le théorème 3.2. de [26] montre qu'il existe une transformation U, bimesurable et ergodique d'un espace mesuré (X, ν), tels que : 1° $dU^n \nu/d\nu(\omega)$ soit une puissance entière de α pour tout $n \in \mathbf{Z}$ et tout $\omega \in X$; 2° il n'existe sur X aucune mesure σ-finie équivalente à ν et U-invariante; 3° il existe une partie mesurable $\Omega \subset X$ avec $\nu(\Omega) \neq 0$ et $\nu(\Omega) < \infty$, $\nu(K_{\nu,U}(\Omega, s, \delta)) \to 0$ quand $s \to +\infty$, pour tout $\delta > 0$. Comme U n'est pas de type produit infini on a $r(\{U^n, n \in \mathbf{Z}\}) = \{0, 1\}$, donc l'automorphisme T induit par U dans Ω vérifie (a).

Soit μ la restriction de ν à Ω. On a $K_{\mu,T}(\Omega, s, \delta) = K_{\nu,U}(\Omega, s, \delta)$ pour $s > 0$ et $\delta > 0$, donc on a (b).

Démonstration de 5.5.1. — Soient Ω, μ et T comme dans 5.5.5,

$$K = W^*(\{T^n, n \in \mathbf{Z}\}, \Omega).$$

Le facteur K de type III_0 est un facteur hyperfini (*cf.* [25], prop. 2.2). Comme $L^2(\Omega, \mu)$ est un espace de Hilbert séparable par construction, K opére dans un espace de Hilbert séparable. Le lemme 5.5.3 montre qu'il existe sur K un poids normal fidèle φ strictement semi-fini, vérifiant les conditions 5.3.2 (*a*) et (*b*) et tel que pour tout $\delta > 0$ on ait $k_{s,\delta}(\varphi) \to 0$ fortement quand $s \to +\infty$. Le lemme 5.5.4 montre donc que K n'est pas isomorphe à un produit tensoriel infini de facteur de type I.

VI. — Problèmes

1° Caractériser les sous-groupes de **R** de la forme T (M) pour M facteur à prédual séparable. [D'après 1.5 tout sous-groupe dénombrable est de cette forme.]

2° Pour une représentation U du groupe abélien localement compact G dans le facteur M, la condition $\Gamma(U) = \Gamma$ est-elle nécessaire et suffisante pour que le produit croisé de M par U soit un facteur ? [Le cas « G discret » se déduit de 2.3.1.]

3° Pour $\lambda \in]0, 1/2[$, la propriété L_λ de Powers est-elle équivalente à la condition $\lambda/(1-\lambda) \in S(M)$? [Si $S(M) \neq [0, \infty[$ cela résulte de 3.7.2.]

4° Existe-il un facteur M de genre dénombrable, ne possédant aucun état normal fidèle presque-périodique ? [M serait nécessairement de type III_1.]

5° Les facteurs de Powers R_λ sont-ils les seuls facteurs hyperfinis de type III_λ, pour $\lambda \in]0, 1[$? [Ce sont les seuls facteurs d'Araki-Woods de type III_λ d'après 3.6.3.]

6° Le facteur R_∞ d'Araki et Woods [2] est-il le seul facteur hyperfini de type III_1 ?

7° Parmi les facteurs hyperfinis qui ne sont pas d'Araki-Woods (dont nous connaissons l'existence par 5.5.1), existe-t-il un facteur de type III qui n'est isomorphe au produit tensoriel d'aucun couple de facteurs de type III ?

8° Le centre de Out N est-il trivial pour tout facteur de type II ?

VII. — Bibliographie

[1] H. Araki, *Asymptotic ratio set and property* L'_λ (*Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto*, vol. 6, 1970, p. 443-460).

[2] H. Araki et E. J. Woods, *A classification of factors* (*Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto*, vol. 4, 1968, p. 51-130).

[3] W. Arveson, *On groups of automorphisms of operator algebras* (Preprint).

[4] D. Bures, *Tensor products of* W* *algebras* (*Pac. J. Math.*, vol. 27, 1968, p. 13).

[5] F. Combes, *Poids associés à une algèbre hilbertienne à gauche* (*Comp. Math.*, vol. 23, fasc. 1, 1971, p. 4-77).

[6] F. Combes, *Poids et espérances conditionnelles dans les algèbres de von Neumann* (*Bull. Soc. math. Fr.*, t. 99, 1971, p. 73-112).

[7] A. Connes, *Un nouvel invariant pour les algèbres de von Neumann* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 273, série A, 1971, p. 900-903).

[8] A. Connes, *Calcul des deux invariants d'Araki et Woods par la théorie de Tomita et Takesaki* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 274, série A, 1972, p. 175-178).

[9] A. Connes, *États presque périodiques sur une algèbre de von Neumann* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 274, série A, 1972, p. 1402-1405).

[10] A. Connes, *Groupe modulaire d'une algèbre de von Neumann* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 274, série A, 1972, p. 1923-1926).

[11] A. Connes, *Une classification des facteurs de type* III (*C. R. Acad. Sc.*, t. 275, série A, 1972, p. 523-525).

[12] A. Connes et Van Daele, *The group property of the invariant* S (à paraître dans *Math. Scand.*).

[13] J. Dixmier, *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien*, 2e éd., Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[14] J. Dixmier et O. Maréchal, *Vecteurs totalisateurs dans les algèbres de von Neumann* (*Commun. Math. Phys.*, vol. 22, 1972).

[15] S. Eilenberg et Mac Lane, *Group extensions and Homology* (*Ann. of Math.*, vol. 43, 1942).

[16] Fuglede et Kadison, *On a conjecture of Murray and von Neumann* (*Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, t. 37, 1951, p. 420-425).

[17] В. Я. Голодец, спектральные свойства модулярных операторов (функ. анализ. и его прилож, t. 6, Вы. I, 1972, p. 70-72).

[18] R. Herman et M. Takesaki, *States and automorphism groups of Operator algebras* (*Commun. Math. Phys.*, vol. 19, 1970, p. 142-160).

[19] L. Hörmander, *Introduction to complex analysis in several variables*, Van Nostrand, 1968.

[20] R. V. Kadison, *Transformation of states in operator theory and dynamics* (*Topology*, vol. 3, Supp. 2, 1965, p. 177-198).

[21] R. Kallman, *Groups of inner automorphisms of von Neumann algebras* (*J. Funct. Anal.*, vol. 7, 1971, p. 43).

[22] R. Kallman, *A generalisation of free action* (*Duke Math. J.*, vol. 36, 1969, p. 781).

[23] W. Krieger, *On the Araki-Woods asymptotic ratio set and non singular transformations of a measure space* (*Lecture Notes in Math.*, nº 160, 1970, p. 158).

[24] W. Krieger, *On non singular transformations of a measure space* I (*Z-Wahrscheinlickeitstheorie verw- Gel.*, Bd II, 1969, p. 83).

[25] W. Krieger, *On a class of hyperfinite factors that arise from null recurrent Markov chains* (*J. Funct. Anal.*, vol. 7, 1971, p. 27-42).

[26] W. Krieger, *On the infinite product construction of non singular transformations of a measure space* (*Inventions math.*, vol. 15, 1972, p. 144-163).

[27] W. Krieger, *On hyperfinite factors and non singular transformations of a measure space* (Preprint).

[28] G. Mokobodski, *Sur des mesures qui définissent des graphes d'applications* (*Séminaire Choquet*, 6e année, 1962).

[29] V. Neumann, *On rings of operators* IV (*Ann. of Math.*, vol. 41, 1940, p. 94-161).

[30] G. Pedersen et M. Takesaki, *The Radon-Nikodym theorem for von Neumann algebras* (Preprint).

[31] R. T. Powers, *Cargese Lecture on physics*, 1969.

[32] W. Rudin, *Fourier analysis on groups* (*Interscience Tracts*, nº 12, 1960).

[33] S. Sakai, *C*-algebras and W*-algebras* (*Ergebnisse der Mathematik und iher grenzbiete*, Bd 60).
[34] J. T. Schwartz, *Recent progress in the structure theory of factors* [*Functional Analysis* (ed. C. O. Wilde), Academic Press, 1970, p. 37-53].
[35] E. Størmer, *On infinite tensor products of von Neumann algebras* (*Ann. J. of Math.*, vol. 18, n° 3, 1971).
[36] M. Takesaki, *Tomita's theory and its applications* (*Lecture Notes in Math.*, n° 128).
[37] M. Takesaki, *Conditional Expectations in von Neumann algebras* (*J. Funct. Anal.*, vol. 9, n° 3, 1973).
[38] M. Takesaki, *The standard representation of a von Neumann algebra* (*Operator algebra newsletter*, Toronto, March. 15, 1971).
[39] J. Tomiyama, *Tensor products and projections of norm one in von Neumann algebras* (Preprint).
[40] E. J. Woods, *The classification of factors is not smooth* (Preprint).
[41] G. Zeller-Meier, *Produit croisé d'une C*-algèbre par un groupe d'automorphismes* (*J. Math. pures et appl.*, t. 47, 1968, p. 102-239).

(Manuscrit reçu le 28 novembre 1972).

Alain Connes,
1, avenue Mathilde,
95210 Saint-Gratien.