ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

J.-P. BOURGUIGNON
A. DESCHAMPS
P. SENTENAC

Quelques variations particulières d'un produit de métriques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 6, nº 1 (1973), p. 1-16
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1973_4_6_1_1_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 6, 1973, p. 1 à 16.

QUELQUES VARIATIONS PARTICULIÈRES D'UN PRODUIT DE MÉTRIQUES

PAR J.-P. BOURGUIGNON, A. DESCHAMPS ET P. SENTENAC

1. Présentation

1.1. Cet article fait suite à *Conjecture de H. Hopf sur les produits de variétés* (*cf.* [1]). Nous y établissons le théorème suivant :

Soient (M_1, g_1) et (M_2, g_2) *deux variétés riemanniennes compactes. Si* (M_1, g_1) *est homogène et* $\dim M_2 \geqq 2$, *il existe une variation de la métrique* $g_1 \times g_2$ *telle qu'en tout point* (m_1, m_2) *de* $M_1 \times M_2$ *et pour tout plan mixte* π, *la courbure sectionnelle de* π *est croissante au voisinage de* $t = 0$.

Ce résultat particularisé au cas de structures riemanniennes à courbure sectionnelle non négative donne des indications relativement à plusieurs problèmes.

1.2. Cela prouve que le théorème 7.5 de [1] (les variétés étant sans isométries infinitésimales) ne s'étend pas au cas où il y a des isométries infinitésimales. Pourtant relativement à la conjecture de Hopf (« sur $S^2 \times S^2$, il n'existe pas de structure riemannienne à courbure sectionnelle positive »), nous montrons que nous sommes dans la situation du théorème 7.8 de [1], car les variations de métriques $g(t)$ que nous exhibons *n'ont pas* la propriété d'être pour $t \neq 0$ à courbure positive, ce qui infirmerait la conjecture de H. Hopf.

1.3. D'autre part alors qu'un théorème de A. Weinstein (*cf.* [4]) sur les variations d'une métrique ayant un groupe d'isométries G semblait indiquer que la taille du groupe d'isométries de la métrique initiale était une obstruction à l'existence de variations « positives » (il le prouve au premier ordre), nous exhibons d'autant plus de variations « positives » (à des ordres plus élevés) que G est gros.

1.4. Le plan est le suivant : au paragraphe 2, nous effectuons les calculs des dérivées de la courbure sectionnelle pour des variations particulières;

au paragraphe 3, nous établissons un lemme sur les variétés de dimension $\geqq 2$; au paragraphe 4, nous prouvons le théorème annoncé, dont nous étudions au paragraphe 5 les liens avec la conjecture de H. Hopf et au paragraphe 6 avec le théorème d'A. Weinstein.

2. Variations particulières

2.0. Rappels. — Soient (M_i, g_i) $(i = 1, 2)$ deux variétés riemanniennes compactes et $(M, g_0) = (M_1 \times M_2, g_1 \times g_2)$ la variété produit riemannien. Si $g(t)$ est une variation de la métrique g_0, C^r au voisinage de l'origine, les dérivées à l'origine, à l'ordre p $(p = 1, 2, \ldots, r)$ de la connexion, du tenseur de courbure ont été calculées (*cf.* [1]) et nous rappelons ici les formules. Si nous posons

$$g(t) = g_0 + \sum_{p=1}^{r} \frac{t^p}{p!} h^p, \qquad \text{avec} \quad h^p \in \underline{\bigcirc^2 T^* M},$$

$$D^t = D^0 + \sum_{p=1}^{r} \frac{t^p}{p!} C^p, \qquad \text{avec} \quad C^p \in \underline{\bigcirc^2 T^* M \otimes TM},$$

nous avons les résultats suivants :

2.1. $\forall\, m \in M$, $\forall\, X, Y, Z \in T_m M$,

$$(C^p(X, Y), Z)_0 = \frac{1}{2} \square\, h^p(X, Y, Z) - \sum_{l=1}^{p-1} \binom{p}{l} h^l (C^{p-l}(X, Y), Z).$$

Pour un plan mixte défini par une base g_0-orthonormée $\{X_1, X_2\}$ avec $X_i \in T_m(M_i)$ $(i = 1, 2)$, la dérivée d'ordre p à l'origine de l'expression $R^t_\pi = (R^t(X_1, X_2) X_1, X_2)_t$ s'écrit

$$\frac{d^p R^t_\pi}{dt^p}\bigg|_{t=0} = (\Sigma h^p)(X_1, X_2) + S^p(h^1, h^2, \ldots, h^{p-1})(X_1, X_2). \tag{2.2}$$

Σ est un opérateur différentiel d'ordre 2,

$$\Sigma : \underline{\bigcirc^2 T^* M} \to \underline{\bigcirc^2 (\Lambda^2 T^* M)}.$$

Pour $h \in \underline{O^2 T^* M}$ et pour un « bon prolongement » $\{\tilde{X}, \tilde{Y}\}$ de $X, Y \in T_m M$ ($[\tilde{X}, \tilde{Y}] = 0$ et $(D^0 \tilde{X})_m = (D^0 \tilde{Y})_m = 0$), nous avons

$$\Sigma h(X, Y) = X.(\tilde{Y}.h(\tilde{X}, \tilde{Y})) - \frac{1}{2} Y.(\tilde{Y}.h(\tilde{X}, \tilde{X})) - \frac{1}{2} X.(\tilde{X}.h(\tilde{Y}, \tilde{Y})). \tag{2.3}$$

$S^p(h^1, h^2, \ldots, h^{p-1}) \in \underline{\bigcirc^2(\wedge^2 T^* M)}$ est défini par

$$(2.4)\quad S^p(h^1, h^2, \ldots, h^{p-1})(X_1, X_2)$$
$$= \sum_{l=1}^{p-1} \binom{p}{l} [(C^l(X, Y), C^{p-l}(X, Y))_0 - (C^l(X, X), C^{p-l}(Y, Y))_0]$$
$$+ \sum_{\substack{k+l+m=p \\ k, l, m \geq 1}} \frac{p!}{k!\,l!\,m!} [h^k(C^l(X, Y), C^m(X, Y)) - h^k(C^l(X, X), C^m(Y, Y))].$$

2.5. Définition. — *Sur une variété riemannienne* (V, γ), *une* 1-*forme* ξ *est dite* de Killing *si le champ* $\xi^\# \gamma$ *est un champ d'isométries infinitésimales. La dérivée symétrique de* ξ *est alors nulle.*

On désigne par $\mathcal{K}(V)$ l'espace vectoriel des 1-formes de Killing sur V (qui est de dimension finie, *cf.* [2], II, p. 332) et on suppose dans la suite que $\mathcal{K}(M_1) \neq \{0\}$. Pour $\xi \in \mathcal{K}(M_1)$ et $\eta \in \underline{T^* M_2}$ le produit symétrique $\xi \circ \eta$ est une section du fibré $\bigcirc^2 T^* M$.

2.6. Définition. — *Une r*-variation de Killing géométrique *est une variation de métrique* $g(t)$, C^r *au voisinage de l'origine telle que pour tout entier* p $(p = 1, 2, \ldots, r)$, $h^p = \xi^p \circ \eta^p$ où $\xi^p \in \mathcal{K}(M_1)$ *et* η^p est une 1-forme cofermée sur M_2.

2.7. Le mot géométrique de la définition précédente se justifie ainsi : dans le paragraphe 6 de [1], on a montré que seules les variations transverses à l'orbite de g_0 sous les difféomorphismes ont une signification géométrique; or il est facile de voir que la décomposition de Berger-Ebin d'un tenseur du type envisagé $\xi \circ \eta\,[\xi \in \mathcal{K}(M_1),\ \eta \in \underline{T^* M_2}]$ s'écrit

$$\xi \circ \eta = \delta^*(f\xi) + \xi \circ \bar{\eta},$$

où $\eta = df + \bar{\eta}$ est la décomposition de Hodge-de Rham de la 1-forme η.

2.8. Proposition. — *Soient* $g(t)$ *une r-variation de Killing géométrique et* $\pi = \{X_1, X_2\}$ *un plan mixte de* M.

Nous avons les propriétés suivantes :

(*a*) *si pour tout entier* k $(1 \leq k < 2p < 2r)$, $\left.\dfrac{d^k R_\pi^t}{dt^k}\right|_{t=0} = 0$, *alors*

$$\left.\frac{d^{2p} R_\pi^t}{dt^{2p}}\right|_{t=0} = \frac{2p!}{(p!)^2}(C^p(X_1, X_2), C^p(X_1, X_2))_0;$$

(*b*) *si de plus* $\left.\dfrac{d^{2p} R_\pi^t}{dt^{2p}}\right|_{t=0} = 0$, *alors* $C^p(X_1, X_2) = 0$ *et*

$$\left.\frac{d^{2p+1} R_\pi^t}{dt^{2p+1}}\right|_{t=0} = 0.$$

Nous allons démontrer quelques lemmes :

2.9. Lemme. — *Soit* $h = \xi \circ \eta$ *avec* $\xi \in \underline{T^* M_1}$ et $\eta \in \underline{T^* M_2}$. *Pour tout plan mixte* $\pi = \{ X_1, X_2 \}$, *nous avons*

$$(\Sigma (\xi \circ \eta)) (X_1, X_2) = (D^0_{X_1} \xi (X_1)) (D^0_{X_2} \eta (X_2)).$$

Démonstration. — Soit $\{ \tilde{X}_1, \tilde{X}_2 \}$ « un bon prolongement » de $\{ X_1, X_2 \}$, tel que X_i soit tangent à M_i ($i = 1, 2$) et constant par rapport à l'autre variété. Nous obtenons, en appliquant la formule (2.3) :

$$(\Sigma (\xi \circ \eta)) (X_1, X_2) = X_1 . (\tilde{X}_2 . (\xi \circ \eta) (\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)) - \frac{1}{2} X_1 . (\tilde{X}_1 . (\xi \circ \eta) (\tilde{X}_2, \tilde{X}_2)) - \frac{1}{2} X_2 . (\tilde{X}_2 . (\xi \circ \eta) (\tilde{X}_1, \tilde{X}_1)).$$

Or $(\xi \circ \eta) (\tilde{X}_1, \tilde{X}_1) = 0$, $(\xi \circ \eta) (\tilde{X}_2, \tilde{X}_2) = 0$,

$$(\xi \circ \eta) (\tilde{X}_1, \tilde{X}_2) = \xi (\tilde{X}_1) \eta (\tilde{X}_2).$$

D'où

$$\tilde{X}_2 . (\xi (\tilde{X}_1) \eta (\tilde{X}_2)) = \xi (\tilde{X}_1) (\tilde{X}_2 . \eta (\tilde{X}_2)).$$

et

$$X_1 . (\tilde{X}_2 . (\xi (\tilde{X}_1) \eta (\tilde{X}_2)) = (\tilde{X}_1 . \xi (\tilde{X}_1)) (\tilde{X}_2 . \eta (\tilde{X}_2)).$$

En tenant compte du fait qu'au point m $(D^0 \tilde{X}_1)_m = (D^0 \tilde{X}_2)_m = 0$, on a la formule annoncée. ■

2.10. Corollaire :

(*a*) *Si* $\xi \in \mathcal{K} (M_1)$, *alors* $(\Sigma (\xi \circ \eta)) (X_1, X_2) = 0$.

(*b*) *Pour une r-variation de Killing,* $\Sigma h^p = 0$ $(p = 1, \ldots, r)$.

(*a*) résulte du lemme 2.9 puisque

$$(\xi \in \mathcal{K} (M_1)) \iff (\delta^* \xi = 0) \iff (\forall X_1 \in TM_1, D^0_{X_1} \xi (X_1) = 0).$$

(*b*) est vrai par définition. ■

2.11. Lemme. — *Soit* $h = \xi \circ \eta$ *avec* $\xi \in \underline{T^* M_1}$, $\eta \in \underline{T^* M_2}$,

(*a*) *Pour* $m \in M$, $X_1 \in T_m M_1$, $Z \in T_m M$,

$$(\square (\xi \circ \eta)) (X_1, X_1, Z) = 2 (D_{X_1} \xi (X_1)) \eta (Z_2);$$

(*b*) *Pour* $X_i \in T_m M_i$ $(i = 1, 2)$, $Z \in T_m M$:

$$(\square (\xi \circ \eta)) (X_1, X_2, Z) = d\xi (X_1, Z_1) \eta (X_2) + \xi (X_1) d\eta (X_2, Z_2).$$

Démonstration. — (*a*) Par définition

$$\square h (X, Y, Z) = D_X h (Y, Z) + D_Y h (X, Z) - D_Z h (X, Y),$$

d'où en tenant compte de ce que ξ et η sont des 1-formes tangentes à M_1 et M_2 respectivement

$$\square(\xi\circ\eta)(X_1, X_1, Z) = D_{X_1}(\xi\circ\eta)(X_1, Z) + D_{X_1}(\xi\circ\eta)(Z, X_1) - D_Z(\xi\circ\eta)(X_1, X_1).$$

Or

$$D_Z(\xi\circ\eta) = D_{Z_1}\xi\circ\eta + \xi\circ D_{Z_2}\eta, \qquad \text{d'où} \quad D_Z(\xi\circ\eta)(X_1, X_1) = 0,$$

(*b*) Soit

$$\begin{aligned}(\square(\xi\circ\eta))(X_1, X_2, Z) &= D_{X_1}\xi(Z_1)\,\eta(X_2) + \xi(X_1)\,D_{X_2}\eta(Z_2)\\ &\quad - D_{Z_1}\xi(X_1)\,\eta(X_2) - \xi(X_1)\,D_{Z_2}\eta(X_2),\end{aligned}$$

d'où (*b*) en faisant apparaître la différentielle extérieure de ξ et η,

$$\begin{aligned}d\xi(X_1, Z_1) &= D_{X_1}\xi(Z_1) - D_{Z_1}\xi(X_1),\\ d\eta(X_2, Z_2) &= D_{X_2}\eta(Z_2) - D_{Z_2}\eta(X_2). \quad \blacksquare\end{aligned}$$

2.12. COROLLAIRE. — *Si* $\xi\in\mathcal{K}(M_1)$, *alors* $(\square(\xi\circ\eta))(X_1, X_1, .) = 0$.

C'est évident d'après le lemme 2.11 puisque $D_{X_1}\xi(X_1) = 0$. ■

2.13. LEMME. — *Soit* $g(t)$ *une r-variation de Killing géométrique. Alors pour tout entier* p $(1\leq p\leq r)$, *pour tout* $X_1\in TM_1$,

$$C^p(X_1, X_1) = 0.$$

Démonstration. — Elle se fait par récurrence :

Pour $p = 1$, $(C^1(X_1, X_1), Z)_0 = \frac{1}{2}(\square(\xi^1\circ\eta^1))(X_1, X_1, Z)$ d'après le corollaire 2.12. Si le résultat est supposé établi à l'ordre $(p-1)$, la formule (2.1) et le corollaire 2.12 donnent le résultat à l'ordre p. ■

2.14. *Démonstration de la proposition* 2.8. — Elle se fait par récurrence, nous établissons le résultat à l'ordre $p = 1$:

$$h^1 = \xi^1\circ\eta^1, \qquad \text{avec} \quad \xi^1\in\mathcal{K}(M_1), \quad \eta^1\in \underline{T^*M_2}.$$

On a d'après la formule (2.2) :

$$\left.\frac{dR^t_\pi}{dt}\right|_{t=0} = (\Sigma\, h^1)(X_1, X_2) = 0 \quad \text{(corollaire 2.10)};$$

de même

$$\left.\frac{d^2R^t_\pi}{dt^2}\right|_{0=t} = (\Sigma\, h^2)(X_1, X_2) + S^2(h^1)(X_1, X_2).$$

Or $(\Sigma\, h^2)(X_1, X_2) = 0$ d'après le corollaire 2.10 et

$$S^2(h^1)(X_1, X_2) = 2[\,\|C^1(X_1, X_2)\|_0^2 - (C^1(X_1, X_1), C^1(X_2, X_2))_0].$$

D'après le lemme 2.13, $C^1(X_1, X_1) = 0$, d'où l'expression

$$\left.\frac{d^2 R^t_\pi}{dt^2}\right|_{t=0} = 2 \| C^1(X_1, X_2) \|_0^2.$$

Il est clair que $\left.\frac{d^2 R^t_\pi}{dt^2}\right|_{t=0} = 0$ si et seulement si $C^1(X_1, X_2) = 0$. Si $C^1(X_1, X_2) = 0$, alors d'après la formule (2.4) et le lemme 2.13 :

$$\begin{aligned} S^3(h^1, h^2)(X_1, X_2) = {} & 6\,(C^1(X_1, X_2), C^2(X_1, X_2))_0 \\ & - 3\,(C^1(X_1, X_1), C^2(X_2\, X_2))_0 - 3\,(C^2(X_1, X_1), C^1(X_2, X_2))_0 \\ & + 6\,[h^1(C^1(X_1, X_2), C^2(X_1, X_2)) - h^1(C^1(X_1, X_1), C^1(X_2, X_2))], \end{aligned}$$

soit

$$S^3(h^1, h^2)(X_1, X_2) = 0.$$

Par suite :

$$\left.\frac{d^3 R^t_\pi}{dt^3}\right|_{t=0} = (\Sigma\, h^3)(X_1, X_2) + S^3(h^1, h^2)(X_1, X_2) = 0.$$

Les propriétés étant vérifiées pour $p = 1$, il est aisé d'effectuer le raisonnement par récurrence en utilisant la formule (2.1), le corollaire 2.10 et le lemme 2.13. ■

2.15. Si nous supposons $\left.\frac{d^k R^t_\pi}{dt^k}\right|_{t=0} = 0$ pour $k < 2p$, alors d'après la proposition 2.8 :

$$\left.\frac{d^{2p} R^t_\pi}{dt^{2p}}\right|_{t=0} = \frac{2p\,!}{(p\,!)^2} \| C^p(X_1, X_2) \|_0^2.$$

Or $C^k(X_1, X_2) = 0$ $(1 \leq k \leq p-1)$; l'expression de $C^p(X_1, X_2)$ dans la formule (2.1) devient

$$C^p(X_1, X_2) = \frac{1}{2}[(\square\, h^p)(X_1, X_2, .)]^{\#_0}.$$

De plus d'après le lemme 2.11 (*b*) :

$$(C^p(X_1, X_2), Z)_0 = \frac{1}{2}(d\xi^p(X_1, Z_2)\, \eta^p(X_2) + \xi^p(X_1)\, d\eta^p(X_2, Z_2)),$$

soit

$$C^p(X_1, X_2) = \frac{1}{2}(d\xi^p(X_1, .)^{\#_0}\, \eta^p(X_2) + \xi^p(X_1)\, d\eta^p(X_2, .)^{\#_0}).$$

$C^p(X_1, X_2)$ est la somme de deux vecteurs tangents respectivement à M_1 et M_2. On a donc

$$\left.\frac{d^{2p} R^t_\pi}{dt^{2p}}\right|_{t=0} = \frac{2p\,!}{4(p\,!)^2}[\| d\xi^p(X_1, .) \|_0^2\, (\eta^p(X_2))^2 + (\xi^p(X_1))^2 \| d\eta^p(X_2, .) \|_0^2].$$

2.16. *Remarque.* — On voit apparaître dans la proposition 2.8 une dissymétrie entre les deux signes de la courbure : nos variations sont « positives » et il n'y a pas de variations naturelles qui rendent la courbure négative (comparer l'introduction de [1]).

3. Un lemme sur les variétés de dimension $\geqq 2$

3.1. On rappelle qu'une variété riemannienne (V, g) est dite *homogène* si pour tous x, y dans V, il existe une isométrie φ de (V, g) telle que $\varphi(x) = y$.

La proposition suivante est classique.

3.2. PROPOSITION. — *Pour* (V, g) *compacte, les deux propriétés suivantes sont équivalentes* :

(i) (V, g) *est homogène*;

(ii) *il existe un nombre fini de champs de Killing sur* V *qui pour tout* x *de* V *engendrent* $T_x V$.

3.3. DÉFINITION :

(i) *Soit* $x \in V$. (V, g) *vérifie la propriété* (B_x) *s'il existe un nombre fini m de germes en x de 1-formes différentielles* (α_i) *cofermées telles que*

$$\bigcap_{i=1}^{m} \operatorname{Ker}(d\alpha_i)(x) = \{0\}$$

(Ker $d\alpha_i$ *désigne le sous-espace vectoriel maximal de* $T_x V$ *sur lequel* $d\alpha_i$ *est nulle*).

(ii) (V, g) *vérifie la propriété* (B) *s'il existe un nombre fini m de 1-formes différentielles* (α_i) *cofermées sur* V *telles que*

$$\forall x \in V, \quad \bigcap_{i=1}^{m} \operatorname{Ker}(d\alpha_i)(x) = \{0\}.$$

3.4. PROPOSITION. — *Toute variété compacte* (V, g) *vérifie* (B) *dès que* $\dim V \geqq 2$.

Pour cela on remarque d'abord que (V, g) étant de dimension $\geqq 2$:

3.5. LEMME : $\forall x \in V$, (B_x) *est vraie.*

Pour prouver le lemme, on montre d'abord que la propriété

(B'_x) : « *Il existe une famille de germes en x de 1-formes différentielles* $(\alpha_i)_{i \in I}$ *telles que*

$$\bigcap_{i \in I} \operatorname{Ker}(d\alpha_i)(x) = \{0\} \text{»},$$

est équivalente à B_x.

On prouve ensuite que (B'_x) est vraie par l'absurde. ■

3.6. *Démonstration de la proposition* 3.4. — Remarquons d'abord que si pour un nombre fini m de germes en x de 1-formes (α_i) cofermées

$$\bigcap_{i=1}^{m} \operatorname{Ker} (d\alpha_i)(x) = \{ 0 \}$$

il existe un voisinage U_x où toutes les α_i sont définies et telles que

$$\forall_y \in U_x, \quad \bigcap_{i=1}^{m} \operatorname{Ker} (d\alpha_i)(y) = \{ 0 \}.$$

En utilisant alors la compacité de V et le fait que tout germe de 1-forme cofermée en x se prolonge en une 1-forme cofermée sur V, on construit la famille finie de 1-formes souhaitée. ■

3.7. La proposition 3.4 a un intérêt en elle-même, mais ne permet pas de construire des familles finies explicites de 1-formes liées à la structure riemannienne, d'où la définition suivante :

3.8. Définition. — (V, g) *est dite* D-homogène *s'il existe un nombre fini k de formes de Killing sur* V $(\xi_i)_{i \leq k}$ *telles que*

$$\forall\, x \in V, \quad \bigcap_{i=1}^{k} \operatorname{Ker} d\xi_i (x) = \{ 0 \}.$$

Cette définition correspond à une particularisation de la propriété (B) puisque toute forme de Killing est cofermée.

3.9. Proposition. — *Les espaces symétriques de type compact sont* D-*homogènes*.

Soit (V, g) un espace symétrique de type compact (*cf.* [2], p. 252), donc en particulier à courbure de Ricci définie positive.

Comme l'espace vectoriel des formes de Killing sur V est de dimension finie, la propriété

(B') « *Il existe une famille* $(\xi_i)_{i \in I}$ *de formes de Killing telle que*

$$\forall\, x \in V, \quad \bigcap_{i \in I} \operatorname{Ker} d\xi_i (x) = \{ 0 \} \text{ »}$$

est équivalente à la D-homogénéité, qui est *a priori* plus forte. Supposons alors que V ne vérifie pas (B'). Il existe donc $x \in V$ et $Y_x \in T_x V$ $(Y_x \neq 0)$ tels que pour toute forme de Killing ξ sur V,

$$d\xi (Y_x, .) = 0.$$

Soit $\xi_1 \in \mathcal{K}(V)$ telle que $\xi_1^{\#}(x) = Y_x$ et $(\xi_i)_{i=1,\ldots,d}$ une base de $\mathcal{K}(V)$ telle que $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ forment une base de $T_x V$ et $\xi_j(x) = 0$ pour $n < j \leqq d$.

Soit $\#(\mathcal{K}(V)) = \mathcal{F} \oplus \mathcal{M}$ la décomposition orthogonale de réductivité de $\mathcal{K}(V)$ associée à cette base (V est symétrique). $p_{\mathcal{M}}$ désigne le projecteur d'image $\mathcal{M}$ de noyau $\mathcal{F}$, $p_{\mathcal{F}}$ celui d'image $\mathcal{F}$ et de noyau $\mathcal{M}$.

Puisque V est symétrique,

$$[\mathcal{F}, \mathcal{F}] \subset \mathcal{F}, \quad [\mathcal{F}, \mathcal{M}] \subset \mathcal{M}, \quad [\mathcal{M}, \mathcal{M}] \subset \mathcal{F}.$$

Comme $D_{\xi_1^{\#}} \xi_i^{\#} = \frac{1}{2} p_{\mathcal{M}}\left([\xi_i^{\#}, \xi_1^{\#}]\right)$ et que pour tout i, $1 \leqq i \leqq d$,

$$d\xi_i(\xi_1^{\#}, .) = 2\, D_{\xi_1^{\#}} \xi_i, \qquad D_{\xi_1^{\#}} \xi_i^{\#}(x) = 0.$$

Par suite $[\xi_1^{\#}, .]$ applique $\#(\mathcal{K}(V))$ dans $\mathcal{F}$.

Comme $\xi_1^{\#}$ appartient à $\mathcal{M}$, nécessairement,

$$[\xi_1^{\#}, .]|_{\mathcal{F}} = 0.$$

Par suite considérons pour X_x, $Y_x \in T_x V$,

$$R(\xi_1^{\#}, X_x) Y_x = -\frac{1}{4}[[\xi_1^{\#}, \tilde{X}], \tilde{Y}],$$

où X et Y sont des champs de Killing tels que $\tilde{X}(x) = X_x$, $\tilde{Y}(x) = Y_x$ qui peuvent être pris dans $\mathcal{F}$.

Donc $R(\xi_1^{\#}, X_x) Y_x = 0$.

Par suite si ρ désigne la courbure de Ricci :

$$\rho(\xi_1^{\#}, \xi_1^{\#}) = \sum_{j=1}^{n} \left(R(\xi_1^{\#}, \xi_j^{\#}) \xi_1^{\#}, \xi_j^{\#}\right) = 0.$$

Comme V est à courbure de Ricci définie, il y a contradiction. ∎

4. Le théorème

4.1. Théorème. — *Soient* (M_1, g_1) *une variété riemannienne compacte homogène,* (M_2, g_2) *une variété riemannienne compacte de dimension supérieure ou égale à* 2, (M, g_0) *leur produit riemannien. Il existe une r-variation de Killing géométrique de* g_0, *telle que pour tout plan mixte une des dérivées à l'origine de la courbure sectionnelle est non nulle et la première dérivée non nulle est positive.*

Démonstration. 4.2. — Nous construisons une variation de la façon suivante : puisque (M_1, g_1) est homogène nous pouvons choisir une famille finie, génératrice de 1-formes de Killing $(\xi^j)_{j=1,\ldots,k}$. De même sur (M_2, g_2) (avec $\dim M_2 \geqq 2$), il existe une famille $(\eta^\alpha)_{\alpha=1,2,\ldots,l}$ de 1-formes différentielles cofermées telles que

$$\forall\, m_2 \in M_2, \quad \bigcap_{\alpha=1}^{l} \operatorname{Ker} d\eta^\alpha(m_2) = \{0\}.$$

Nous indexons de $p = 1$ à r les kl produits symétriques $\xi^j \circ \eta^\alpha$ et nous posons

$$g(t) = g_0 + \sum_{p=1}^{r} \frac{t^p}{p\,!}\, \xi^{j(p)} \circ \eta^{\alpha(p)}.$$

Par construction $g(t)$ est une r-variation de Killing géométrique.

4.3. Nous prouvons que pour tout plan mixte π, il existe un entier $k \leqq r$ tel que

$$\left.\frac{d^p \sigma^t_\pi}{dt^p}\right|_{t=0} = 0 \qquad \text{pour} \quad p = 1, 2, \ldots, 2k-1$$

et

$$\left.\frac{d^{2k} \sigma^t_\pi}{dt^{2k}}\right|_{t=0} > 0.$$

Rappelons la propriété démontrée au lemme 3.4 de [1] : si pour un plan mixte π, $\sigma^0(\pi) = 0$ et $\left.\frac{d^p \sigma^t_\pi}{dt^p}\right|_{t=0} = 0$ pour $p = 1, \ldots, 2k-1$, alors

$$\left.\frac{d^{2k} \sigma^t_\pi}{dt^{2k}}\right|_{t=0} = \left.\frac{d^{2k} R^t_\pi}{dt^{2k}}\right|_{t=0}.$$

Supposons que toutes les dérivées à l'origine, jusqu'à l'ordre $2r$ de la courbure sectionnelle de π soient nulles.

D'après la proposition 2.8,

$$C^p(X_1, X_2) = 0 \qquad (1 \leqq p \leqq r).$$

D'après 2.15,

$$\xi^{j(p)}(X_1)\, d\eta^{\alpha(p)}(X_2, .) = 0 \qquad (1 \leqq p \leqq r).$$

ce qui contredit les propriétés de $(\xi^j)_{j=1,\ldots,k}$ ou $(\eta^\alpha)_{\alpha=1,\ldots,l}$.

Il existe donc un entier k tel que $C^p(X_1, X_2) = 0$ $(p < k)$ et $C^k(X_1, X_2) \neq 0$ et pour lequel

$$\left.\frac{d^{2k} \sigma^t_\pi}{dt^{2k}}\right|_{t=0} = \| C^k(X_1, X_2) \|_0^2$$

est strictement positif. ■

4.4. Nous remarquons que pour un plan mixte, la première dérivée non nulle à l'origine est d'ordre pair et qu'elle fait intervenir la dérivée d'ordre moitié de la métrique.

4.5. PROBLÈME. — Comment caractériser toutes les variations de la métrique g_0 vérifiant les conclusions du théorème, variations que l'on peut qualifier de positives ? L'hypothèse (M_1, g_1) homogène est-elle nécessaire ?

5. Lien avec la conjecture de Hopf

5.0. On peut voir tout de suite par les remarques qui suivent que le théorème 4.1 n'infirme pas directement la conjecture de H. Hopf sur les produits de variétés.

5.1. En effet si nous prenons pour (M_1, g_1) S^1 muni d'une métrique quelconque et pour (M_2, g_2) une variété de dimension supérieure ou égale à 2 à courbure sectionnelle positive, une variation de Killing géométrique $g(t)$ ne peut être telle que $g(t)$ pour $t \neq 0$ soit à courbure sectionnelle positive, car $S^1 \times M_2$ dont le π_1 est infini n'admet aucune structure à courbure sectionnelle positive, d'après le théorème de Myers (*cf.* [2], p. 365) :

« *Toute variété compacte à courbure sectionnelle positive a un groupe fondamental fini.* »

5.2. Si nous considérons (S^n, can), qui est un espace symétrique compact, il est possible de trouver une famille finie $(\eta^i)_{i \leq d}$ de formes de Killing telle que

$$\forall\, m \in S^n, \quad \bigcap_{i=1}^{d} \operatorname{Ker}(d\eta^i)(m) = \{0\}$$

d'après la proposition 3.9 : (S^n, can) est D-homogène.

Si nous prenons sur $(S^n \times S^n, \text{can} \times \text{can})$ une variation de métrique de Killing géométrique $g(t)$ utilisant aussi des formes de Killing sur le second facteur, une telle variation définit sur $(P^n(\mathbf{R}) \times P^n(\mathbf{R}), \text{can} \times \text{can})$ une variation $\bar{g}(t)$, puisque les formes de Killing de (S^n, can) passent au quotient. Si $g(t)$ était à courbure sectionnelle positive pour $t > 0$ assez petit, comme cette propriété est locale, il en serait de même pour $\bar{g}(t)$. Or d'après le théorème de Synge (*cf.* [2], p. 365).

« *Toute variété compacte de dimension paire à courbure sectionnelle positive a pour groupe fondamental* $\mathbf{Z}_2$ *ou* 1. »

Par suite $P^n(\mathbf{R}) \times P^n(\mathbf{R})$, dont le π_1 est $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$, n'admet aucune structure riemannienne à courbure sectionnelle positive : voir aussi [3].

5.3. Examinons les choses de façon locale pour mieux comprendre ce qui se passe. Pour cela nous sommes amenés à étudier comment varie la courbure sectionnelle au voisinage d'un plan mixte en fonction de t, paramètre de la variation.

Prenons des notations : $\{X_1, X_2\}$ désigne la base orthonormée d'un plan mixte π.

Dans $G_2(M)$ un voisinage de π est paramétré par $Y_i, Z_i \in TM_i$ $(i = 1, 2)$ où Y_i, Z_i sont de norme 1 et par quatre nombres réels α, β, γ, δ assez petits : précisément pour ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 assez petits,

$$P_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4} = \{\pi' \mid \pi' \text{ engendré par } (X_1 + \alpha Y_2 + \gamma Z_1, X_2 + \beta Y_1 + \delta Z_2), \\ |\alpha| < \varepsilon_1, |\beta| < \varepsilon_2, |\gamma| < \varepsilon_3, |\delta| < \varepsilon_4\}$$

est un voisinage de π dans $G_2(M)$.

Nous considérons une r-variation de métriques

$$g(t) = g_0 + \sum_{i=1}^{r} t^i \frac{h^i}{i!}$$

telle que $\Sigma h^1 = 0$ pour tout plan mixte.

Nous nous proposons Y_1, Y_2, Z_1, Z_2 étant fixés, d'étudier la fonction de cinq variables $\sigma_t(\pi_{\alpha, \beta, \gamma, \delta})$ au voisinage de $(0, 0, 0, 0, 0)$.

Pour cela rappelons que $\sigma_t(\pi_{\alpha, \beta, \gamma, \delta}) =$

$$\frac{(R^t(X_1 + \alpha Y_2 + \gamma Z_1, X_2 + \beta Y_1 + \delta Z_2)(X_1 + \alpha Y_2 + \gamma Z_1), (X_2 + \beta Y_1 + \delta Z_2))_t}{\| X_1 + \alpha Y_2 + \gamma Z_1 \|_t^2 \, \| X_2 + \beta Y_1 + \delta Z_2 \|_t^2 - ((X_1 + \alpha Y_2 + \gamma Z_1), (X_2 + \beta Y_1 + \delta Z_2))_t^2}.$$

5.4. LEMME. — *Le développement de Taylor au deuxième ordre de* $\sigma(t, \alpha, \beta, \gamma, \delta)$ *s'écrit*

$$\begin{aligned} &\frac{t^2}{2}[(\Sigma h^2)(X_1, X_2) + (C^1(X_1, X_2), C^1(X_1, X_2))_0 - (C^1(X_1, X_1), C^1(X_2, X_2))_0] \\ &\quad - 2t\alpha(DC^1(X_2, X_1, X_2), Y_2)_0 - 2t\beta(DC^1(X_1, X_2, X_1), Y_1)_0 \\ &\quad - 2t\gamma(DC^1(X_2, X_1, X_2), Z_1)_0 - 2t\delta(DC^1(X_1, X_2, X_1), Z_2)_0 \\ &\quad + \alpha^2(R^0(X_2, Y_2)X_2, Y_2)_0 + \beta^2(R^0(X_1, Y_1)X_1, Y_1)_0. \end{aligned}$$

Le lemme résulte du calcul du développement de Taylor au deuxième ordre de $R(t, \alpha, \beta, \gamma, \delta)$, car les termes de degré 0 et 1 sont nuls dans ce développement (qui est celui du numérateur de σ^t).

Ce calcul se fait directement en utilisant la formule (2.2) et la formule (3.12) de [1].

On est amené aussi à utiliser le (b) du théorème 5.3 de [1] qui est applicable, puisque $\Sigma h^1 = 0$ pour tout plan mixte. ■

5.5. Proposition. — *Soit* $\pi = \{X_1, X_2\}$ *un plan mixte.*

Pour une variation de métrique $g(t) = g_0 + \sum_{i=1}^{r} t^i \frac{h^i}{i!}$ *telle que* $(\Sigma h^1)(X_1, X_2) = 0$, *pour que* σ^t *soit positive au voisinage de* π, *il faut que pour tout vecteur* Y_i *orthogonal à* X_i $(i = 1, 2)$,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\sigma^0(\{X_1, Y_1\})\,\sigma^0(\{X_2, Y_2\})\\ &\qquad\times((\Sigma h^2)(X_1, X_2) + (C^1(X_1, X_2), C^1(X_1, X_2))_0 - (C^1(X_1, X_1), C^1(X_2, X_2))_0)\\ &\qquad - \sigma^0(\{X_1, Y_1\})(DC^1(X_2, X_1, X_2), Y_2)_0^2 - \sigma^0(\{X_2, Y_2\})(DC^1(X_1, X_2, Y_1), Y_1)_0^2\end{aligned}$$

soit positif ou nul.

Nous avons établi dans le lemme 5.4 le développement de Taylor de $\sigma(t, \alpha, \beta, \gamma, \delta)$. Dans l'espace des $(t, \alpha, \beta, \gamma, \delta)$ le plan tangent à la surface $\sigma(t, \alpha, \beta, \gamma, \delta)$ en $(0, 0, 0, 0, 0)$ est le plan $\sigma = 0$.

La condition énoncée dans la proposition 5.5 est la positivité d'un des mineurs symétriques en position autour de la diagonale du hessien de σ; elle est évidemment nécessaire, puisque le hessien de σ détermine la position de la surface σ par rapport à son plan tangent en 0, i. e. la positivité de σ au voisinage de $t = 0$ pour des plans voisins d'un plan mixte. ■

5.6. Nous allons prouver que les variations exhibées dans le théorème 4.1 dans le cas où l'on prend $(M_1, g_1) = (S^2, \text{can})$ ne vérifient pas la condition de la proposition 5.5 pour beaucoup de plans mixtes.

Remarquons tout de suite que puisque nous allons mettre en évidence dès le second ordre des plans qui deviennent à courbure négative, on peut limiter la variation à son jet d'ordre 2, la dérivée seconde n'intervenant que par Σh^2 (terme qui est nul pour les r-variations de Killing géométriques).

5.7. Proposition. — *Sur* $(M, g_0) = (S^2, \text{can}) \times (M_2, g_2)$ *avec* $\dim M_2 \geqq 2$ *et* M_2 *à courbure sectionnelle positive, les variations de métriques dont le 2-jet en 0 est* $g_0 + th^1 + \frac{t^2}{2}h^2$ *avec* $\Sigma h^i = 0$ $(i = 1, 2)$ *sur les plans mixtes et* $h^1 = \xi \circ \eta$ *où* $\xi \in \mathcal{K}(S^2)$, $\eta \in \underline{T^* M}_2$, *ne sont pas à courbure sectionnelle positive au voisinage de* $t = 0$.

On montre que la condition nécessaire énoncée dans la proposition 5.5 n'est pas satisfaite.

Pour cela on utilise la forme particulière des champs de Killing sur (S^2, can).

On trouve une zone de points de S^2, où il existe une famille de plans mixtes paramétrée par $T_{m_2} M_2$ au voisinage desquels la courbure sectionnelle ne reste pas positive pour $t \neq 0$. ∎

5.8. Parmi les variations de la métrique g_0 dont la première dérivée h^1 vérifie $(\Sigma h^1)(X_1, X_2) = 0$ pour tout plan mixte $\{X_1, X_2\}$, il y en a d'autres que celles utilisées dans le théorème 4.1 : par exemple celles qui appartiennent à

$$\mathcal{K}(M_1) \circ \mathcal{C}^\infty(M_1, \mathcal{K}(M_2)) \oplus \mathcal{C}^\infty(M_2, \mathcal{K}(M_1)) \circ \mathcal{K}(M_2).$$

Cela se vérifie directement sur la formule (2.3).

Pour elles nous avons la proposition.

5.9. Proposition. — *Sur* $(M, g_0) = (M_1, g_1) \times (M_2, g_2)$ *où* (M_1, g_1) *et* (M_2, g_2) *sont à courbure sectionnelle positive de dimension paire, les variations de la métrique* g_0 *dont le 2-jet en 0 est* $g_0 + th^1 + \frac{t^2}{2} h^2$ *avec* $\Sigma h^i = 0$ $(i = 1, 2)$ *sur les plans mixtes et* $h^1 = \xi \circ \eta$ *où* $\xi \in \mathcal{K}(M_1)$ *et* $\eta \in C^\infty(M_1, \mathcal{K}(M_2))$, *ne sont pas à courbure sectionnelle positive au voisinage de* $t = 0$.

On montre que la condition nécessaire 5.5 n'est pas vérifiée.

Pour cela on utilise la forme particulière de h^1 : en particulier à partir de l'identité de Ricci, on obtient

$$-(DC_2(X_1, X_1, X_2), Y_2)_0 = \xi(X_1)\, \eta(R^0(X_2, Y_2), X_2).$$

On se place alors en un maximum m_1 de $\| \xi \|^2$: $d\xi$ est alors une 2-forme extérieure dégénérée. On raisonne alors sur $\{m_1\} \times M_2$ avec η comme on l'a fait pour ξ : on trouve un maximum m_2 de $\| \eta \|^2$. L'endomorphisme $d\xi$ (resp. $d\eta$) laisse invariant l'orthogonal de $\xi^\#$ (resp. $\eta^\#$) qui est de dimension impaire, sa restriction y a un noyau non nul. On trouve alors en (m_1, m_2) des vecteurs X_1, X_2, Y_1, Y_2 tels que la quantité considérée dans la proposition 5.5 soit négative. ∎

5.10. Parmi les variations considérées dans la proposition 5.9 se trouvent des variations de Killing particulières : si (M_2, g_2) est symétrique et de dimension paire supérieure à un, (M_2, g_2) est D-homogène d'après 3; on peut alors prendre sur M_2 des formes de Killing.

Les propositions 5.7 et 5.9 soulignent la plausibilité de la conjecture suivante :

« *Il n'existe aucune déformation analytique d'une structure riemannienne produit qui soit à courbure sectionnelle positive dans un voisinage pointé de* $t = 0$. »

qui est une version « locale » au voisinage des structures produits de la conjecture de H. Hopf généralisée sur les produits de variétés.

Dans [1], nous avons établi la conjecture dans le cas où la métrique initiale était sans isométrie infinitésimale.

La méthode que nous utilisons fondée sur des calculs locaux suppose pour que nous puissions résoudre la conjecture, la solution du problème 4.5. Mais il existe peut-être une obstruction globale qui permet de résoudre d'un coup la conjecture de Hopf généralisée sur les produits de variétés.

6. A propos d'un résultat de Weinstein

6.0. Dans [4], A. Weinstein énonce le théorème suivant :

Théorème. — *Si une variété compacte* M *n'admet aucune métrique riemannienne à courbure sectionnelle positive ayant un groupe d'isométries* G, *alors il n'existe pas de variation positive* $g(t)$ *d'une métrique* g_0 *telle que* g_0 *ait* G *comme groupe d'isométries.*

Pour Weinstein, une variation $g(t)$ de la métrique est *positive* si pour tout 2-plan π, $\sigma^0(\pi) \geqq 0$, et dans le cas où $\sigma^0(\pi) = 0$, alors

$$\left.\frac{d\sigma^t(\pi)}{dt}\right|_{t=0} > 0.$$

6.1. Nous considérons le cas où (M, g) est un produit riemannien de variétés : $(M, g_0) = (M_1, g_1) \times (M_2, g_2)$ et où de plus les (M_i, g_i) sont à courbure sectionnelle positive.

Le lemme de Berger (*cf.* [1], 5.2) indique que sur de telles variétés il n'existe pas de variation positive (au sens de Weinstein). On peut donc penser à généraliser la notion de variation positive.

6.2. Définition. — *Une variation de* g_0 *est* positive *si pour tout* 2-*plan* π *à courbure sectionnelle initiale nulle, il y a une dérivée en* $t = 0$ *de sa courbure sectionnelle qui est non nulle et la première non nulle est positive.*

6.3. On remarque que le théorème 4.1 nous fournit d'autant plus de variations positives (au sens de la définition 6.2) que le groupe d'isométries de (M, g_0) est gros, ce qui semble contradictoire avec une généralisation du théorème 6.0.

En fait nous prouvons en 6.5 que le théorème 6.0 ne se généralise pas, au moyen de la proposition suivante :

6.4. Proposition. — *Soient* (M_1, g_1), (M_2, g_2) *deux variétés homogènes à courbure sectionnelle positive. Il n'existe pas de structure riemannienne* *sur* $M_1 \times M_2$ *à courbure sectionnelle positive ayant même groupe d'isométries* $G_1 \times G_2$ *que* $g_1 \times g_2$.

Soit g une structure riemannienne admettant $G_1 \times G_2$ comme groupe d'isométries. $(M_1 \times M_2, g)$ est homogène.

La courbure sectionnelle d'un plan mixte se calcule par crochet dans des algèbres de Lie en somme directe : elle est donc nulle; g n'est pas à courbure sectionnelle positive. ■

6.5. Si (M_2, g_2) est de dimension au moins 2, par le théorème 4.1 nous savons qu'il existe des variations de $g_1 \times g_2$ positives (au sens de la définition 6.2) et géométriques, ce qui avec la proposition 6.4 contredit la généralisation du théorème 6.0.

Il n'y a rien d'étonnant à cela puisque même sur des variétés où il n'existe aucune métrique à courbure sectionnelle positive [par exemple $P^n(\mathbf{R}) \times P^n(\mathbf{R})$], il peut exister des variations d'un produit de métriques positives et géométriques (*cf.* remarque 5.2).

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.-P. Bourguignon, A. Deschamps et P. Sentenac, *Sur la conjecture de H. Hopf sur les produits de variétés* (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, t. 5, 1972, p. 277-302).

[2] S. Kobayashi et N. Nomizu, *Foundations of differential geometry*, vol. I et II, Interscience, 1963-1969.

[3] J. W. Milnor, *Morse theory* (*Ann. of Math. Studies*, n° 54, Princeton, 1963).

[4] A. Weinstein, *Positively curved deformations of invariant riemannian metrics* (*Proc. Amer. Math. Soc.*, 1970, p. 151-152).

(Manuscrit reçu le 10 juillet 1972.)

J.-P. Bourguignon,
Centre de Mathématiques
de l'École Polytechnique,
17, rue Descartes,
75005 Paris.

Mme A. Deschamps,
Faculté des Sciences,
U. E. R. de Mathématiques,
45100 Orléans-La-Source.

Mme P. Sentenac,
Université de Paris XI,
91405 Orsay.