Annales scientifiques de l'É.N.S.

J.-P. Bourguignon
A. Deschamps
P. Sentenac

Conjecture de H. Hopf sur les produits de variétés

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 5, nº 2 (1972), p. 277-302
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1972_4_5_2_277_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 5, 1972, p. 277 à 302.

CONJECTURE DE H. HOPF SUR LES PRODUITS DE VARIÉTÉS

PAR J.-P. BOURGUIGNON,
A. DESCHAMPS ET P. SENTENAC

1. Résumé et motivation

1.0. On ne sait pas si sur le produit de deux variétés riemanniennes compactes à courbure sectionnelle positive, il existe une structure riemannienne à courbure positive. H. Hopf a conjecturé que sur $S^2 \times S^2$ cette propriété est fausse (*cf.* [3]).

Pour les variétés compactes à courbure négative, la propriété analogue est fausse (*cf.* [6]).

1.1. Le seul résultat connu dans cette direction est celui de Berger ([1]) :

« Soient (M_1, g_1), (M_2, g_2) deux variétés riemanniennes compactes, $(M_1 \times M_2, g_1 \times g_2)$ leur produit riemannien. Soit $g(t)$ une famille à un paramètre de métriques riemanniennes sur $M_1 \times M_2$ telle que $g(0) = g_1 \times g_2$ et que

$$\forall\, m \in M_1 \times M_2, \quad \forall\, X_1 \in T_m M_1, \quad \forall\, X_2 \in T_m M_2, \quad \sigma(X_1, X_2)'(0) \geq 0$$

(σ' désigne la dérivée par rapport au paramètre de la courbure sectionnelle); alors $\sigma(X_1, X_2)'(0) = 0$. »

1.2. Nous nous proposons d'étendre ce résultat aux dérivées ultérieures pour les variétés riemanniennes produits n'ayant pas d'isométries infinitésimales.

1.3. Dans le paragraphe 2, nous fixons les notations et nous donnons quelques préliminaires sur les structures riemanniennes. Dans le paragraphe 3, nous donnons des formules pour le calcul des dérivées en $t = 0$ des connexions de Levi-Civita associées à une variation de métrique, puis pour les dérivées de la courbure sectionnelle. Nous y définissons en particulier un opérateur différentiel noté Σ lié à ces dérivées. Dans le paragraphe 4, nous faisons l'inventaire d'opérateurs différentiels sur les fibrés tensoriels adaptés à la structure produit de la variété. Nous prouvons quelques décompositions d'espaces de sections de certains fibrés. Dans le paragraphe 5, nous étudions en détail l'opérateur Σ défini en 3. Le paragraphe 6 est consacré à un lemme sur l'action de $\mathfrak{D}$ (M) sur les métriques riemanniennes. Au paragraphe 7, nous démontrons le théorème annoncé :

« Soit (M, g_0) une variété produit riemannien sans isométries infinitésimales. Il n'existe aucune variation analytique de métrique issue de g_0 telle que pour $\varepsilon > 0$ et pour tout $t \in]0, \varepsilon]$, $g(t)$ soit à courbure sectionnelle positive ».

1.4. Nous remercions M. Berger de nous avoir proposé ce problème et E. Mazet pour de multiples suggestions et encouragements au cours de ce travail.

2. Notations. Préliminaires sur les structures riemanniennes

2.0. Soient (M_1, g_1), (M_2, g_2), deux variétés riemanniennes compactes $\mathcal{C}^\infty$. Nous noterons $(M, g_0) = (M_1 \times M_2, g_1 \times g_2)$. Un certain nombre de résultats obtenus par des calculs locaux sont vrais dans le cas non compact. Ce qui se rapporte à M est désigné par un indice 0 ou n'a pas d'indice; ce qui est relatif à M_i $(i = 1, 2)$ est indexé par i; $p_i : M \to M_i$ est la projection naturelle.

2.1. $\tau_M : TM \to M$ désigne le fibré tangent à M, $\tau_M^* : T^* M \to M$ le fibré cotangent, $\tau_M^2 : \bigcirc^2 T^* M \to M$ le fibré des formes bilinéaires symétriques sur M. Soit $\pi : E \to M$ un fibré vectoriel sur M, $\underline{E}$ désigne l'espace vectoriel des sections $\mathcal{C}^\infty$ de ce fibré. Soit N une variété; si f est une application $\mathcal{C}^\infty$ de N dans M, alors $f^* E$ désigne le fibré image réciproque de E par f.

2.2. Nous noterons $\mathfrak{M}$ le cône convexe des *métriques riemanniennes* $\mathcal{C}^\infty$ de M qui est un ouvert de $\underline{\bigcirc^2 T^* M}$ muni de sa structure différentiable induite par la structure d'espace de Fréchet de $\underline{\bigcirc^2 T^* M}$. Le groupe $\mathfrak{D}$ (M) des difféomorphismes $\mathcal{C}^\infty$ de M (muni de la topologie $\mathcal{C}^\infty$) agit sur $\mathfrak{M}$ par image réciproque. Ebin dans [4] a analysé cette action. $\mathfrak{M}/\mathfrak{D}$ (M) a une structure d'espace topologique rendant la projection $\pi : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}/\mathfrak{D}$ (M) continue. Les points de $\mathfrak{M}/\mathfrak{D}$ (M) sont appelés les *structures riemanniennes*. Ebin met en évidence un « slice » de cette action. Infinitésimalement ce slice donne lieu à une décomposition en somme directe topologique de $\underline{\bigcirc^2 T^* M}$.

Prenons quelques notations : δ^* désigne l'opérateur différentiel de $\underline{\mathrm{T}^* \mathrm{M}}$ dans $\underline{\bigcirc^2 \mathrm{T}^* \mathrm{M}}$, $\xi \mapsto \delta^* \xi = \frac{1}{2} \mathfrak{L}_{\xi^{\#_g}} g$ (où $\mathfrak{L}$ désigne la dérivée de Lie et $\#_g$ l'isomorphisme de $\mathrm{T}^* \mathrm{M}$ sur TM déduit de g); δ' désigne l'adjoint de δ^* pour le produit scalaire : h, $h' \in \underline{\bigcirc^2 \mathrm{T}^* \mathrm{M}}$, $\langle h, h' \rangle_g = \int_{\mathrm{M}} (h, h')_g \, v_g$ $((\ ,\ )_g$ désigne le produit scalaire local et v_g l'élément de volume associés à g). Dans [2], est prouvée la décomposition

$$\underline{\bigcirc^2 \mathrm{T}^* \mathrm{M}} = \delta^* (\underline{\mathrm{T}^* \mathrm{M}}) \oplus \delta'^{-1} (\{ 0 \}).$$

2.3. Géométriquement ce qui est intéressant, ce sont les propriétés de métriques appartenant à la même orbite sous $\mathfrak{D}$ (M). Lorsqu'on étudie une seule métrique, le problème de rendre $\mathfrak{D}$ (M)-équivariantes les propriétés considérées ne se pose pas. Mais dès qu'on envisage des variations de métriques la formulation géométrique des propriétés variationnelles trouvées doit être $\mathfrak{D}$ (M)-équivariante : autrement dit elle doit s'énoncer dans $\mathfrak{M}/\mathfrak{D}$ (M), espace des structures riemanniennes. Il y a là une difficulté car l'action de $\mathfrak{D}$ (M) sur $\mathfrak{M}$ (qui est linéaire) n'est pas libre : $\mathfrak{M}/\mathfrak{D}$ (M) n'est pas une variété différentiable. Il est donc difficile de parler de jet de chemins dans $\mathfrak{M}/\mathfrak{D}$ (M). Tout chemin dans $\mathfrak{M}/\mathfrak{D}$ (M) est appelé une *déformation de structure riemannienne*. Nous parlons pourtant de déformation de structure riemannienne vérifiant une propriété à l'ordre r : cela signifie qu'il existe un relèvement C^r au voisinage de l'origine et dont le jet d'ordre r vérifie la propriété, sauf mention contraire.

2.4. A toute métrique riemannienne g est associée sur la grassmannienne des deux-plans de M, G_2 (M) une fonction : la *courbure sectionnelle* que nous notons σ. Cette fonction est $\mathfrak{D}$ (M)-équivariante pour les actions de $\mathfrak{D}$ (M) sur $\mathfrak{M}$ et sur G_2 (M). Par suite la propriété « être à courbure sectionnelle positive » est une propriété des structures riemanniennes.

3. Calcul de dérivées

3.1. Soit (M, g_0) une variété riemannienne compacte et $g(t)$ une variation de la métrique g_0, C^r au voisinage de 0. Les parties principales du développement de Taylor à l'ordre r de $g(t)$ et de la connexion de Lévi-Civita D^t associée à $g(t)$ s'écrivent de la façon suivante :

$$g(t) = g_0 + t h^1 + \ldots + \frac{t^k}{k!} h^k + \ldots + \frac{t^r}{r!} h^r,$$

$$\mathrm{D}^t = \mathrm{D}^0 + t \, \mathrm{C}^1 + \ldots + \frac{t^k}{k!} \mathrm{C}^k + \ldots + \frac{t^r}{r!} \mathrm{C}^r,$$

où

$$h^k \in \underline{\bigcirc^2 T^* M}, \quad C^k \in \underline{\bigcirc^2 T^*(M) \hat{\otimes} T(M)} \qquad (k = 1, 2, \ldots, r).$$

Nous notons :

$(\, , \,)_0$ [resp. $(\, , \,)_t$] le produit scalaire associé à g_0 [resp. $g(t)$],

D^0 [resp. D^t] la connexion de Levi-Civita associée à g_0 [resp. $g(t)$],

R^0 [resp. R^t] le tenseur de courbure de (M, g_0) [resp. $(M, g(t))$],

σ^0 [resp. σ^t] la courbure sectionnelle sur (M, g_0) [resp. $(M, g(t))$].

3.2. Lemme : Calcul de la dérivée de la connexion. — *Si* $g(t)$ *est une variation de* g_0, *pour tous vecteurs tangents* $X, Y, Z \in T_m(M)$, *nous avons pour* $k = 1, 2, \ldots, r$,

$$2\,(C^k(X, Y), Z)_0 = \Box\, h^k(X, Y, Z) - 2\sum_{l=1}^{k-1} \binom{k}{l} h^l(C^{k-l}(X, Y), Z).$$

[On rappelle la définition de l'opérateur $\Box$ (*cf.* [2], p. 387),

$$\Box\, h(X, Y, Z) = D^0_X h(Y, Z) + D^0_Y h(X, Z) - D^0_Z h(X, Y).]$$

Démonstration. — Soient $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}$ des prolongements de X, Y, Z au voisinage de m. $D^t_X Y$ est défini par la relation

$$(D^t_X Y, Z)_t = \frac{1}{2}[X.(\tilde{Y}, \tilde{Z})_t + Y.(\tilde{Z}, \tilde{X})_t - Z.(\tilde{X}, \tilde{Y})_t + (Z, [\tilde{X}, \tilde{Y}])_t + (Y, [\tilde{Z}, \tilde{X}])_t - (X, [\tilde{Y}, \tilde{Z}])_t].$$

Pour $k = 1, 2, \ldots, r$ nous identifions les coefficients de t^k dans les deux membres en tenant compte de la relation

$$D^t_{\tilde{X}} \tilde{Y} - D^t_{\tilde{Y}} \tilde{X} = [\tilde{X}, \tilde{Y}],$$

$$\frac{1}{k!}(C^k(X, Y), Z)_0 + \sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{l!\,(k-l)!} h^l(C^{k-l}(X, Y), Z) + \frac{1}{k!} h^k(D^0_X \tilde{Y}, Z)$$
$$= \frac{1}{2\,k!}[X.h^k(\tilde{Y}, \tilde{Z}) + Y.h^k(\tilde{Z}, \tilde{X}) - Z.h^k(\tilde{X}, \tilde{Y}) + h^k(Z, [\tilde{X}, \tilde{Y}]) + h^k(Y, [\tilde{Z}, \tilde{X}]) - h^k(X, [\tilde{Y}, \tilde{Z}])]$$
$$= \frac{1}{2\,k!}[D^0_X h^k(Y, Z) + D^0_Y h^k(Z, X) - D^0_Z h^k(X, Y) + 2\,h^k(D^0_X \tilde{Y}, Z)],$$

soit

$$(C^k(X, Y), Z)_0 = \frac{1}{2}\Box\, h^k(X, Y, Z) - \sum_{l=1}^{k-1} \binom{k}{l} h^l(C^{k-l}(X, Y), Z).$$

En particulier pour $k = 1$:

$$(C^1(X, Y), Z)_0 = \frac{1}{2} \square h^1(X, Y, Z). \quad \blacksquare$$

3.3. Soit π un élément de la grassmannienne $G_2(M)$; $\sigma^t(\pi)$ la courbure sectionnelle de π pour la métrique $g(t)$ a pour expression

$$\sigma^t(\pi) = \frac{(R^t(X, Y) X, Y)_t}{(X, X)_t.(Y, Y)_t - (X, Y)_t^2},$$

où X et Y forment une base du plan π. Dans la suite, π est représenté par un couple de vecteurs $\{X, Y\}$ formant une base orthonormée pour (M, g_0) [i. e. $(X, X)_0 = (Y, Y)_0 = 1$, $(X, Y)_0 = 0$].

Les dérivées successives par rapport au paramètre t de $\sigma^t(\pi)$ s'expriment en fonction des dérivées successives de $(R^t(X, Y) X, Y)_t$ et nous avons :

3.4. Lemme. — *Si pour un plan* π

$$\sigma^0(\pi) = 0 \quad \textit{et} \quad \left.\frac{d^p \sigma^t(\pi)}{dt^p}\right|_{t=0} = 0 \quad \textit{pour} \quad p = 1, 2, \ldots, (k-1),$$

alors

$$\left.\frac{d^k \sigma^t(\pi)}{dt^k}\right|_{t=0} = \left.\frac{d^k (R^t(X, Y) X, Y)_t}{dt^k}\right|_{t=0}.$$

La démonstration résulte de la formule de Leibnitz de dérivation d'un produit et de l'égalité $(X, X)_0 (Y, Y)_0 - (X, Y)_0^2 = 1$. $\blacksquare$

3.5. *Définition* d'un « *bon prolongement* » pour un couple de vecteurs tangents. Soit $\{X, Y\}$ un couple de vecteurs tangents en m, on dit que $\{\tilde{X}, \tilde{Y}\}$ est un bon prolongement de $\{X, Y\}$ sur un voisinage $\mathfrak{U}$ de m si on a

$$\forall\, n \in \mathfrak{U}, \quad [\tilde{X}, \tilde{Y}]_n = 0 \quad \text{et} \quad (D^0 \tilde{X})_m = (D^0 \tilde{Y})_m = 0.$$

De tels prolongements existent : considérons par exemple la carte $(\mathfrak{U}, \exp_m^{0\,1})$ définissant un difféomorphisme d'un voisinage $\mathfrak{U}$ de m sur un ouvert $\mathcal{U}$ de 0 dans $T_m M$; alors $\tilde{X} = (\exp_m^0)_x^* \overline{X}$ et $\tilde{Y} = (\exp_m^0)_x^* \overline{Y}$ répondent à la question : $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ sont les champs constants dans $T_m(M)$ définis par X, Y.

3.6. Lemme : Calcul de la dérivée d'ordre p à l'origine du tenseur de courbure. — *Soit* $\pi = \{X, Y\}$ *un élément de* $G_2(M)$ *et* $g(t)$ *une variation* *de* $g_0\,C^t$ *au voisinage de* 0. *Pour un bon prolongement* $\{\tilde{X}, \tilde{Y}\}$ *de* $\{X, Y\}$ *nous avons pour* $p = 1, 2, \ldots, r$,

$$\left.\frac{d^p\,(R^t(X, Y)\,X, Y)_t}{dt^p}\right|_{t=0} = X.\{\tilde{Y}.h^p(\tilde{X}, \tilde{Y})\} - \frac{1}{2}X.\{\tilde{X}.h^p(\tilde{Y}, \tilde{Y})\}$$
$$- \frac{1}{2}Y.\{\tilde{Y}.h^p(\tilde{X}, \tilde{X})\} + S^p(h^1, h^2, \ldots, h^{p-1})(X, Y),$$

avec $S^p(h^1, h^2, \ldots, h^{p-1}) \in \underline{\bigcirc^2(\wedge^2 T^*M)}$,

$$S^p(h^1, \ldots, h^{p-1})(X, Y) = \sum_{l=1}^{p-1}\binom{p}{l}\{(C^l(X, Y), C^{p-l}(X, Y))_0 - (C^l(X, X), C^{p-l}(Y, Y))_0\}$$
$$+ \sum_{\substack{m+n+l=p \\ m\geq 1,\, n\geq 1,\, l\geq 1}} \frac{p\,!}{m\,!\,n\,!\,l\,!}\{h^l(C^m(X, Y), C^n(X, Y))$$
$$- h^l(C^m(X, X), C^n(Y, Y))\}.$$

Nous utilisons le sous-lemme suivant :

3.7. Sous-lemme. — *Pour tout bon prolongement* $\{\tilde{X}, \tilde{Y}\}$ *de* $\{X, Y\}$, *nous avons la formule*

$$(3.8)\quad (R^t(X, Y)\,X, Y)_t = X.\{\tilde{Y}.(\tilde{Y}, \tilde{X})_t\} - \frac{1}{2}X.\{\tilde{X}.(\tilde{Y}, \tilde{Y})_t\}$$
$$- \frac{1}{2}Y.\{\tilde{Y}.(\tilde{X}, \tilde{X})_t\} + (D^t_X\tilde{Y}, D^t_X\tilde{Y})_t - (D^t_X\tilde{X}, D^t_X\tilde{Y})_t.$$

Démonstration. — Par définition on a

$$(R^t(X, Y)\,X, Y)_t = -\left(D^t_X D^t_{\tilde{Y}}\tilde{X}, Y\right)_t + \left(D^t_Y D^t_{\tilde{X}}\tilde{X}, Y\right)_t + \left(D^t_{[\tilde{X},\tilde{Y}]}\tilde{X}, Y\right)_t$$

soit en tenant compte des égalités $[\tilde{X}, \tilde{Y}] = 0$, $D^t_{\tilde{X}}\tilde{Y} = D^t_{\tilde{Y}}\tilde{X}$:

$$(R^t(X, Y)\,X, Y)_t = -X.\left(D^t_{\tilde{Y}}\tilde{X}, \tilde{Y}\right)_t + \left(D^t_Y\tilde{X}, D^t_X\tilde{Y}\right)_t + Y.\left(D^t_{\tilde{X}}\tilde{X}, \tilde{Y}\right)_t$$
$$- (D^t_X\tilde{X}, D^t_Y\tilde{Y})_t = -\frac{1}{2}X.\{\tilde{X}.(\tilde{Y}, \tilde{Y})_t\} + (D^t_Y\tilde{X}, D^t_X\tilde{Y})_t$$
$$+ Y.\{\tilde{X}.(\tilde{X}, \tilde{Y})_t\} - \frac{1}{2}\tilde{Y}.\{\tilde{Y}.(\tilde{X}, \tilde{X})_t\} - (D^t_X\tilde{X}, D^t_Y\tilde{Y})_t,$$

d'où la formule (3.8). ■

3.9. *Démonstration du lemme* 3.6. — Pour chaque entier $1 \leq p \leq r$, $\left.\dfrac{1}{p\,!}\dfrac{d^p\,(R^t(X, Y)\,X, Y)_t}{dt^p}\right|_{t=0}$ est égal au coefficient de t^p dans le développement du second membre de (3.8) :

$$\begin{aligned}\left.\frac{d^p\,(\mathrm{R}^t\,(\mathrm{X},\mathrm{Y})\,\mathrm{X},\mathrm{Y})_t}{dt^p}\right|_{t=0} &= \mathrm{X}.\{\tilde{\mathrm{Y}}.h^p\,(\tilde{\mathrm{X}},\tilde{\mathrm{Y}})\} - \frac{1}{2}\mathrm{X}.\{\tilde{\mathrm{X}}.h^p\,(\tilde{\mathrm{Y}},\tilde{\mathrm{Y}})\} \\ &\quad - \frac{1}{2}\mathrm{Y}.\{\tilde{\mathrm{Y}}.h^p\,(\tilde{\mathrm{X}},\tilde{\mathrm{X}})\} + h^p\,(\mathrm{D}^0_{\tilde{\mathrm{X}}}\tilde{\mathrm{Y}},\mathrm{D}^0_{\tilde{\mathrm{X}}}\tilde{\mathrm{Y}}) - h^p\,(\mathrm{D}^0_{\tilde{\mathrm{X}}}\tilde{\mathrm{X}},\mathrm{D}^0_{\tilde{\mathrm{Y}}}\tilde{\mathrm{Y}}) \\ &\quad + \sum_{l=1}^{p-1}\frac{p\,!}{l\,!\,(p-l)\,!}\{(\mathrm{C}^l\,(\mathrm{X},\mathrm{Y}),\mathrm{C}^{p-l}\,(\mathrm{X},\mathrm{Y}))_0 \\ &\qquad\qquad - (\mathrm{C}^l\,(\mathrm{X},\mathrm{X}),\mathrm{C}^{p-l}\,(\mathrm{Y},\mathrm{Y}))_0\} \\ &\quad + \sum_{\substack{m+n+l=p\\ m\geq 1,\,n\geq 1,\,p\geq 1}}\frac{p\,!}{m\,!\,n\,!\,l\,!}\{h^l\,(\mathrm{C}^m\,(\mathrm{X},\mathrm{Y}),\mathrm{C}^n\,(\mathrm{X},\mathrm{Y})) \\ &\qquad\qquad - h^l\,(\mathrm{C}^m\,(\mathrm{X},\mathrm{X}),\mathrm{C}^n\,(\mathrm{Y},\mathrm{Y}))\}.\end{aligned}$$

Nous retrouvons la formule énoncée en tenant compte des égalités $(\mathrm{D}^0\,\tilde{\mathrm{Y}})_m = (\mathrm{D}^0\,\tilde{\mathrm{X}})_m = 0$. ■

Remarque. — Pour $p = 1$:

$$\left.\frac{d\,(\mathrm{R}^t\,(\mathrm{X},\mathrm{Y})\,\mathrm{X},\mathrm{Y})_t}{dt}\right|_{t=0} = \mathrm{X}.\{\tilde{\mathrm{Y}}.h^1\,(\tilde{\mathrm{X}},\tilde{\mathrm{Y}})\} - \frac{1}{2}\mathrm{X}.\{\tilde{\mathrm{X}}.h^1\,(\tilde{\mathrm{Y}},\tilde{\mathrm{Y}})\} - \frac{1}{2}\mathrm{Y}.\{\tilde{\mathrm{Y}}.h^1\,(\tilde{\mathrm{X}},\tilde{\mathrm{X}})\}.$$

3.10. Définition de l'opérateur Σ sur (M, g_0). — Nous définissons l'application Σ de $\underline{\bigcirc^2\,\mathrm{T}^*\,\mathrm{M}}$ dans $\underline{\bigcirc^2\,(\wedge^2\,\mathrm{T}^*\,\mathrm{M})}$ de la façon suivante :

A tout champ h de tenseurs symétriques, deux fois covariants sur (M, g_0), on associe la variation $g\,(t)$ de la métrique g_0, $g\,(t) = g_0 + th$. Si R^t est le tenseur de courbure de la variété $(\mathrm{M}, g\,(t))$, nous posons

$$\forall\, m\in\mathrm{M},\quad \forall\,\mathrm{X},\quad \forall\,\mathrm{Y}\in\mathrm{T}_m\,(\mathrm{M}) : \quad (\Sigma\,h)_m\,(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = \left.\frac{d}{dt}(\mathrm{R}^t\,(\mathrm{X},\mathrm{Y})\,\mathrm{X},\mathrm{Y})_t\right|_{t=0}.$$

Par sa définition $\Sigma\,h$ est un champ de tenseurs. La forme 4-linéaire associée est symétrique en X et en Y.

3.11. Proposition. — *Σ est un opérateur différentiel du deuxième ordre :*

$$\Sigma : \underline{\bigcirc^2\,\mathrm{T}^*\,\mathrm{M}} \to \underline{\bigcirc^2\,(\wedge^2\,\mathrm{T}^*\,\mathrm{M})}.$$

Démonstration. — D'après la remarque dans (3.9) nous avons une expression simple de $\Sigma\,h$. Pour un bon prolongement $\{\tilde{\mathrm{X}}, \tilde{\mathrm{Y}}\}$ de $\{\mathrm{X}, \mathrm{Y}\}$:

$$(\Sigma\,h)\,(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = \mathrm{X}.\{\tilde{\mathrm{Y}}.h\,(\tilde{\mathrm{X}},\tilde{\mathrm{Y}})\} - \frac{1}{2}\mathrm{X}.\{\tilde{\mathrm{X}}.h\,(\tilde{\mathrm{Y}},\tilde{\mathrm{Y}})\} - \frac{1}{2}\mathrm{Y}.\{\tilde{\mathrm{Y}}.h\,(\tilde{\mathrm{X}},\tilde{\mathrm{X}})\}.$$

De plus, nous allons vérifier l'identité

$$(3.12)\quad X.\{\tilde{Y}.h(\tilde{X},\tilde{Y})\} - \frac{1}{2}X.\{\tilde{X}.h(\tilde{Y},\tilde{Y})\} - \frac{1}{2}Y.\{\tilde{Y}.h(\tilde{X},\tilde{X})\}$$
$$= D^0 D^0 h(X, Y, Y, X) - \frac{1}{2}D^0 D^0 h(X, X, Y, Y,)$$
$$- \frac{1}{2}D^0 D^0 h(Y, Y, X, X) + h(X, R^0(X, Y)Y).$$

En effet, avec un bon prolongement de $\{X, Y\}$, nous pouvons écrire, en tenant compte des égalités $(D^0\tilde{X})_m = (D^0\tilde{Y})_m = 0$,

$$D^0 D^0 h(X, Y, Y, X) = D^0_X\big(D^0_{\tilde{Y}} h(\tilde{Y},\tilde{X})\big)$$
$$= X.\{\tilde{Y}.h(\tilde{Y},\tilde{X}) - h(D^0_{\tilde{Y}}\tilde{Y},\tilde{X}) - h(\tilde{Y}, D^0_{\tilde{Y}}\tilde{X})\}$$
$$= X.\{\tilde{Y}.h(\tilde{Y},\tilde{X})\} - h(D^0_X D^0_{\tilde{Y}}\tilde{Y}, X) - h(Y, D^0_X D^0_{\tilde{Y}}\tilde{X}),$$

$$\frac{1}{2}D^0 D^0 h(X, X, Y, Y) = \frac{1}{2}D^0_X\big(D^0_{\tilde{X}} h(\tilde{Y},\tilde{Y})\big)$$
$$= \frac{1}{2}X.\{\tilde{X}.h(\tilde{Y},\tilde{Y})\} - h(D^0_X D^0_{\tilde{X}}\tilde{Y}, Y),$$

$$\frac{1}{2}D^0 D^0 h(Y, Y, X, X) = \frac{1}{2}Y.\{\tilde{Y}.h(\tilde{X},\tilde{X})\} - h(D^0_Y D^0_{\tilde{Y}}\tilde{X}, X).$$

Nous obtenons (3.12) en tenant compte des identités.

$$D^0_{\tilde{X}}\tilde{Y} = D^0_{\tilde{Y}}\tilde{X} \qquad \text{et} \qquad R^0(X, Y)Y = -D^0_X D^0_{\tilde{Y}}\tilde{Y} + D^0_Y D^0_{\tilde{X}}\tilde{Y}.$$

Soit Th l'élément de $\underline{\bigcirc^2(\wedge^2 T^*M)_m}$ défini par le second membre de (3.12). L'égalité (3.12) est indépendante des prolongements de X et Y, elle traduit l'égalité en m des tenseurs Σh et Th. Il est bien clair que l'opérateur T est un opérateur différentiel du deuxième ordre, il en est donc de même de Σ. ■

Remarque. — La formule du lemme (3.6) peut s'écrire :

$$(3.13)\quad \left.\frac{d^p(R^t(X, Y)X, Y)_t}{dt^p}\right|_{t=0} = \Sigma h^p(X, Y) + S^p(h^1, \ldots, h^{p-1})(X, Y).$$

4. Opérateurs différentiels adaptés à la structure produit de M

4.0. Nous nous plaçons ici dans un cas particulier. Nous sommes sur une variété produit $M = M_1 \times M_2$.

Une structure riemannienne $\tilde{g}_0$ telle que dans $\pi^{-1}(\tilde{g}_0)$ il y a une métrique g_0 qui est un produit de deux métriques g_1 et g_2 est dite une *structure riemannienne produit.*

Toute métrique riemannienne $g \in \pi^{-1}(\tilde{g}_0)$ est une métrique produit (par opposition à produit de métriques).

Les cartes locales que nous utilisons sur M sont des produits des cartes de chaque variété. Les composantes relatives à M_1 sont notées en lettres romaines $k, l, m, \ldots$, celles relatives à M_2 en lettres grecques, $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$.

4.1. Le but de ce paragraphe est la définition d'opérateurs δ^*_p et δ'_p et la démonstration d'un théorème de décomposition de $\underline{\bigcirc^2 T^* M}$. Il s'agit de séparer dans $(M, \tilde{g}_0)$ et dans les opérateurs δ^* et δ' qui lui sont attachés ce qui vient de M_1, ce qui vient de M_2 et ce qui vient à la fois de M_1 et M_2.

La longueur, l'apparence quelquefois compliquée de l'écriture ne doivent pas faire perdre de vue la simplicité des objets étudiés : nous décomposons en « blocs » les opérateurs différentiels.

4.2. Nous avons déjà défini [en (2.2)] les opérateurs

$$\delta^* : \quad \underline{T^* M} \to \underline{\bigcirc^2 T^* M},$$
$$\delta' : \quad \underline{\bigcirc^2 T^* M} \to \underline{T^* M}.$$

ils sont adjoints et tels que

$$\underline{\bigcirc^2 T^* M} = \delta^*(\underline{T^* M}) \oplus \delta'^{-1}(\{0\}).$$

Nous notons

$$\delta^*_i : \quad \underline{T^* M_i} \to \underline{\bigcirc^2 T^* M_i},$$
$$\delta'_i : \quad \underline{\bigcirc^2 T^* M_i} \to \underline{T^* M_i},$$

avec les décompositions de Berger-Ebin :

$$\underline{\bigcirc^2 T^* M_i} = \delta^*_i(\underline{T^* M_i}) \oplus \delta'^{-1}_i(\{0\}).$$

En coordonnées, nous avons des formules du type

$$(\delta^*_1 \xi)_{kl} = \frac{1}{2}((\nabla_1)_k \xi_l + (\nabla_1)_l \xi_k),$$
$$(\delta'_1 h)_k = -(\nabla_1)^l h_{lk}.$$

4.3. Décomposition d'espaces de sections. — On rappelle la décomposition de fibrés :

$$T^* M = i_1(p_1^* T^* M_1) \oplus i_2(p_2^* T^* M_2),$$

où i_i est l'injection évidente; nous notons π_i la projection évidente

$$T^* M \underset{i_i}{\overset{\pi_i}{\rightleftarrows}} p_i^* T^* M_i.$$

Pour les espaces de sections :

$$\underline{T^* M} = \underline{i}_1 (\underline{p_1^* T^* M_1}) \oplus \underline{i}_2 (\underline{p_2^* T^* M_2}),$$

où nous notons $\underline{i}_i$ et $\underline{\pi}_i$ les injections et projections évidentes. Nous avons encore les isomorphismes naturels de fibrés et d'espaces de sections :

$$\bigcirc^2 p_i^* T^* M_i \simeq p_i^* (\bigcirc^2 T^* M_i),$$
$$\underline{\bigcirc^2 p_i^* T^* M_i} \simeq \underline{p_i^* (\bigcirc^2 T^* M_i)}.$$

4.4. Remarques. — *a.* $\hat{\otimes}$ désigne l'image inverse par l'application diagonale $\Delta : M \to M \times M$ du produit tensoriel de deux fibrés de même base M (*cf.* [7], p. 52). De façon générale, tous les résultats de cet article sont utilisés sans qu'il y soit fait explicitement référence. De même pour [5].

b. Par la suite, lorsque cela ne nuira pas à la clarté du texte, nous omettrons les injections de fibrés i_i, et d'espaces de sections $\underline{i}_i$.

4.5. Lemme. — *Nous avons la décomposition d'espaces de sections :*

$$\underline{\bigcirc^2 T^* M} = \underline{p_1^* (\bigcirc^2 T^* M)} \oplus \left(\underline{p_1^* T^* M_1 \hat{\bigcirc} p_2^* T^* M_2}\right) \oplus \underline{p_2^* (\bigcirc^2 T^* M_2)}.$$

Démonstration. — $\underline{\bigcirc^2 T^* M}$ est C^∞ (M)-isomorphe au module des fonctions sur $TM \oplus TM$ $\left(\text{ou } TM \underset{M}{\times} TM\right)$ dont la restriction à chaque fibre est une forme bilinéaire symétrique.

$$h : \quad TM \oplus TM \to \mathbf{R},$$
$$h : \quad (p_1^* T^* M_1 \oplus p_2^* T^* M_2) \oplus (p_1^* T^* M_1 \oplus p_2^* T^* M_2) \to \mathbf{R},$$
$$\begin{aligned} h(m, X, Y) &= h(m, X_1 + X_2, Y_1 + Y_2) \\ &= h(m, X_1, Y_1) + h(m, X_1, Y_2) + h(m, Y_1, X_2) + h(m, X_2, Y_2). \end{aligned}$$

Définissant h_i et h_μ par

$$h_i (m, X, Y) = h(m, X_i, Y_i),$$
$$h_\mu (m, X, Y) = h(m, X_1, Y_2) + h(m, Y_1, X_2),$$

et en vertu des propriétés de h, nous avons, si les fibrés TM_1 et TM_2 sont triviaux :

$$h_i \in \underline{\bigcirc^2 p_i^* T^* M_i}, \qquad h_\mu \in \underline{p_1^* T^* M_1 \hat{\bigcirc} p_2^* T^* M_2},$$
$$h_1 + h_\mu + h_2 = h.$$

Soient U_n, V_ν des recouvrements trivialisants localement finis de TM_1 et TM_2, θ_n et φ_ν des partitions de l'unité associées.

Nous avons la décomposition

$$\theta_n \varphi_\nu h = (\theta_n \varphi_\nu h)_1 + (\theta_n \varphi_\nu h)_\mu + (\theta_n \varphi_\nu h)_2.$$

Elle se conserve par somme finie, et donc si

$$h_i = \sum_{n,\nu} (\theta_n \varphi_\nu h)_i,$$

$$h_\mu = \sum_{n,\nu} (\theta_n \varphi_\nu h)_\mu$$

puisque

$$h = \sum_{n,\nu} \theta_n \varphi_\nu h,$$

nous avons

$$h = h_1 + h_\mu + h_2,$$

$$h_i \in \underline{\bigcirc^2 p_i^* \mathrm{T}^* \mathrm{M}_i}, \qquad h_\mu \in \underline{p_1^* \mathrm{T}^* \mathrm{M}_1 \hat{\bigcirc} p_2^* \mathrm{T}^* \mathrm{M}_2}. \quad \blacksquare$$

Écriture en coordonnées :

$$h_{kl} = h\left(\frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_l}\right) = (h_1)_{kl},$$

$$h_{k\alpha} = h_{\alpha k} = h\left(\frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right) = (h_\mu)_{k\alpha},$$

$$h_{\alpha\beta} = h\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}, \frac{\partial}{\partial x_\beta}\right) = (h_2)_{\alpha\beta},$$

$$\begin{array}{lll} (h_1)_{kl} = h_{kl}, & (h_1)_{k\alpha} = 0, & (h_1)_{\alpha\beta} = 0, \\ (h_\mu)_{kl} = 0, & (h_\mu)_{k\alpha} = h_{k\alpha}, & (h_\mu)_{\alpha\beta} = 0, \\ (h_2)_{kl} = 0, & (h_2)_{k\alpha} = 0, & (h_2)_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta}. \end{array}$$

4.6. REMARQUE ET NOTATIONS. — M_i et M étant paracompactes, la décomposition des espaces de sections — qui nous intéresse ici — équivaut à la décomposition des fibrés

$$\bigcirc^2 \mathrm{T}^* \mathrm{M} = p_1^* (\bigcirc^2 \mathrm{T}^* \mathrm{M}_1) \oplus (p_1^* \mathrm{T}^* \mathrm{M}_1 \hat{\otimes} p_2^* \mathrm{T}^* \mathrm{M}_2) \oplus p_2^* (\bigcirc^2 \mathrm{T}^* \mathrm{M}_2).$$

Nous notons ainsi (et omettons lorsqu'elles ne sont pas indispensables) les injections et projections :

$$\begin{tikzcd} & \bigcirc^2 p_i^* \mathrm{T}^* \mathrm{M}_i \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl, shift left, "i_{ii}"] & \bigcirc^2 \mathrm{T}^* \mathrm{M}_i \\ \bigcirc^2 \mathrm{T}^* \mathrm{M} \arrow[ur, shift left, "\pi_{ii}"] \arrow[dr, shift left, "\pi_{12}"] & \mathrm{M} \arrow[r, "p_i"'] & \mathrm{M}_i \\ & p_1^* \mathrm{T}^* \mathrm{M}_1 \hat{\bigcirc} p_2^* \mathrm{T}^* \mathrm{M}_2 \arrow[u] \arrow[ul, shift left, "i_{12}"] & \end{tikzcd}$$

Nous les soulignons lorsqu'il s'agit des applications induites dans les espaces de sections.

Ainsi :

$$\underline{\pi_{ii}} : \quad \underline{\bigcirc^2 \mathrm{T}^* \mathrm{M}} \to \underline{\bigcirc^2 p_i^* \mathrm{T}^* \mathrm{M}_i},$$
$$h \mapsto \underline{\pi_{ii}}\, h = \pi_{ii} \circ h = h_i,$$
$$\underline{\pi_{12}}\,(h) = h_\mu, \qquad \ldots .$$

4.7. Lemme. — *Nous définissons les opérateurs* $p_i^*\,\delta_i^*$ *et* $p_i^*\,\delta_i'$:

$$\underline{p_i^*\,\mathrm{T}^*\,\mathrm{M}_i} \underset{p_i^*\,\delta_i'}{\overset{p_i^*\,\delta_i^*}{\rightleftarrows}} \underline{\bigcirc^2 p_i^*\,\mathrm{T}^*\,\mathrm{M}_i}$$
$$p_i^*\,\delta_i^* = \underline{\pi_{ii}} \circ \delta^* \circ \underline{i_i},$$
$$p_i^*\,\delta_i' = \underline{\pi_i} \circ \delta' \circ \underline{i_{ii}}$$

pour lesquels nous avons

$$\underline{p_i^*\,(\bigcirc^2\,\mathrm{T}^*\,\mathrm{M}_i)} = (p_i^*\,\delta_i^*)\,(\,\underline{p_i^*\,\mathrm{T}^*\,\mathrm{M}_i}\,) \oplus (p_i^*\,\delta_i')^{-1}\,(\{\,0\,\}).$$

Remarque. — a. Tout cela est très naturel, et $p_i^*\,\delta_i^*$, $p_i^*\,\delta_i'$ se construisent à partir de δ_i^* et δ_i', si l'on se souvient que, par exemple,

$$p_i^*\,(\,\underline{\bigcirc^2\,\mathrm{T}^*\,\mathrm{M}_i}\,) \cong \mathrm{C}^\infty\,(\mathrm{M}_j,\, \underline{\bigcirc^2\,\mathrm{T}^*\,\mathrm{M}_i}) \qquad (i \neq j).$$

b. Nous avons bien sûr l'injection $\underline{\bigcirc^2\,\mathrm{T}^*\,\mathrm{M}_i} \hookrightarrow \underline{p_i^*\,\bigcirc^2\,\mathrm{T}^*\,\mathrm{M}_i}$, les formes h_i correspondantes étant constantes sur M_j.

Écriture. — Si $\xi_1 \in \underline{p_1^*\mathrm{T}^*\mathrm{M}_1}$ soit $\xi = \underline{i_1}\,(\xi_1)$, $\xi_k = (\xi_1)_k$, $\xi_\alpha = 0$,

$$[(p_1^*\,\delta_1^*)\,\xi_1]_{kl} = \frac{1}{2}[\nabla_k\,(\xi_1)_l + \nabla_l\,(\xi_1)_k] = (\delta^*\,\xi)_{kl} = (\delta_1^*\,\xi_1)_{kl}.$$

Remarquons que

$$(\delta^*\,\xi)_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\nabla_\alpha\,\xi_\beta + \nabla_\beta\,\xi_\alpha) = 0,$$
$$(\delta^*\,\xi)_{k\alpha} = \frac{1}{2}(\nabla_k\,\xi_\alpha + \nabla_\alpha\,\xi_k) = \frac{1}{2}\,\nabla_\alpha\,\xi_k = \frac{1}{2}\,\nabla_\alpha\,(\xi_1)_k.$$

— Si $h_1 \in \underline{\bigcirc^2\,p_1^*\mathrm{T}^*\,\mathrm{M}_1}$, soit $h = \underline{i_{11}}\,(h_1)$,

$$[(p_1^*\,\delta_1')\,h_1]_k = -\,\nabla^1\,(h_1)_{lk}, \qquad [(p_1^*\,\delta_1')\,h_1]_\alpha = 0.$$

Remarquons que

$$(\delta'\,h)_k = -\,\nabla^l\,h_{kl} - \nabla^\alpha\,h_{\alpha k}.$$

Démonstration du lemme 4.7. — Soit $\xi_i \in \underline{p_i^*\,\mathrm{T}^*\,\mathrm{M}_i}$.

$\xi_i\,(m_1,\ m_2)$ est une forme linéaire sur $(p_i^*\,\mathrm{T}^*\,\mathrm{M}_i)_{(m_1,\,m_2)}\,[\simeq \mathrm{T}_m\,\mathrm{M}_i]$.

Nous notons $\xi_i(m_j)$ la section de $T^* M_i$ définie par

$$\xi_i(m_j)(m_i) = \xi_i(m_1, m_2).$$

Par définition de δ_i^*, $\delta_i^*[\xi_i(m_j)] \in \underline{\bigcirc^2 T^* M_i}$,

$$m_j \mapsto \delta_i^*[\xi_i(m_j)] \in C^\infty(M_j, \underline{\bigcirc^2 T^* M_i}) \simeq \underline{p_i^* \bigcirc^2 T^* M_i}$$

et cet élément est précisément $(p_i^* \delta_i^*)\,\xi_i$.

Le diagramme suivant est commutatif pour tout ξ_i :

$$\begin{tikzcd}
M_j \arrow[rr, "\xi_i"] & & \underline{T^* M_i} \\
m_j \arrow[dr, "(p_i^* \delta_i^*)\,\xi_i"'] & & \xi_i(m_j) \arrow[dl, "\delta_i^*"] \\
& \underline{\bigcirc^2 T^* M_i} &
\end{tikzcd}$$

$$[(p_i^* \delta_i^*)\,\xi_i](m_j) = \delta_i^*[\xi_i(m_j)].$$

De la même manière,

$$[(p_i^* \delta_i')\,h_i](m_j) = \delta_i'[h_i(m_j)].$$

Des décompositions (4.2) :

$$\underline{\bigcirc^2 T^* M_i} = \delta_i^*(\underline{T^* M_i}) \oplus \delta_i'^{-1}(\{ 0_{\underline{T^* M_i}} \}),$$

nous tirons :

$$C^\infty(M_j, \underline{\bigcirc^2 T^* M_j}) = C^\infty(M_j, \delta_i^*(\underline{T^* M_i})) \oplus C^\infty(M_j, \delta_i'^{-1}(\{ 0 \})).$$

Il nous reste à montrer que

$$C^\infty(M_j, \delta_i^*(\underline{T^* M_i})) \simeq (p_i^* \delta_i^*)(\underline{p_i^* T^* M_i}),$$

$$C^\infty(M_j, \delta_i'^{-1}(\{ 0_{\underline{T^* M_i}} \})) \simeq (p_i^* \delta_i')^{-1}(\{ 0_{\underline{p_i^* T^* M_i}} \}).$$

Ceci résulte des affirmations précédentes.

En effet dire que $h_i \in C^\infty(M_j, \delta_i^*(\underline{T^* M_i}))$, c'est dire que

$$h_i(m_j) \in \delta_i^*(\underline{T^* M_i})$$

avec une dépendance C^∞ en m_j, soit qu'il existe $s_{ij} \in \underline{T^* M_i}$ avec

$$h_i(m_j) = \delta_i^* s_{ij},$$

soit qu'il existe $s_i \in \underline{p_i^* M_i}$ avec

$$h_i(m_j) = [(p_i^* \delta_i^*)\,s_i](m_j),$$

c'est donc dire que

$$h_i \in (p_i^* \delta_i^*) \left(\underline{p_i^* \mathrm{T}^* \mathrm{M}_i}\right).$$

Et pour l'autre cas, les affirmations suivantes sont équivalentes :

$$k_i \in \mathrm{C}^\infty \left(\mathrm{M}_j,\ \delta_i'^{-1} \left(\{ 0_{\underline{\mathrm{T}^* \mathrm{M}_i}} \}\right)\right),$$
$$\delta_i' [k_i (m_j)] = 0_{\underline{\mathrm{T}^* \mathrm{M}_i}},$$
$$[(p_i^* \delta_i') k_i] (m_j) = 0_{\underline{\mathrm{T}^* \mathrm{M}_i}} = 0_{\underline{p_i^* \mathrm{T}^* \mathrm{M}_i}} (m_j),$$
$$k_i \in (p_i^* \delta_i')^{-1} \left(\{ 0_{\underline{p_i^* \mathrm{T}^* \mathrm{M}_i}} \}\right). \quad \blacksquare$$

4.8. Définition. — Nous définissons d_i^j et $d_i'^j$ $(i \neq j)$:

$$d_1^2 = \underline{\pi_{12}} \circ \delta^* \circ \underline{i_1}, \qquad d_2^1 = \underline{\pi_{12}} \circ \delta^* \circ \underline{i_2},$$
$$d_1'^2 = \underline{\pi_1} \circ \delta' \circ \underline{i_{12}}, \qquad d_2'^1 = \underline{\pi_2} \circ \delta' \circ \underline{i_{12}}.$$

$$\underline{p_i^* \mathrm{T}^* \mathrm{M}_i} \underset{d_i'^j}{\overset{d_i^j}{\rightleftarrows}} \underline{p_1^* \mathrm{T}^* \mathrm{M}_1 \,\hat{\bigcirc}\, p_2^* \mathrm{T}^* \mathrm{M}_2}.$$

Écriture :

$$\xi_1 \in \underline{p_1^* \mathrm{T}^* \mathrm{M}_1}, \qquad \text{soit} \qquad \xi = \underline{i_1} (\xi_1), \qquad \xi \in \underline{\mathrm{T}^* \mathrm{M}},$$
$$\xi_k = (\xi_1)_k, \qquad \xi_\alpha = 0,$$
$$(d_1^2 \xi_1)_{k\alpha} = (\delta^* \xi)_{k\alpha} = \frac{1}{2} (\nabla_k \xi_\alpha + \nabla_\alpha \xi_k) = \frac{1}{2} \nabla_\alpha (\xi_1)_k,$$
$$(d_1^2 \xi_1)_{kl} = 0, \qquad (d_1^2 \xi_1)_{\alpha\beta} = 0,$$
$$(d_1^2 h_\mu)_k = - \nabla^\alpha h_{\alpha k}, \qquad (d_1'^2 h)_\alpha = 0.$$

Interprétation de d_i^j $(i \neq j)$. — Par exemple d_1^2 :

$$\text{avec } \xi_1 \in p_1^* \mathrm{T}^* \mathrm{M}_1, \quad \text{i. e.} \quad \xi_1 \in \mathrm{C}^\infty \left(\mathrm{M}_2, \underline{\mathrm{T}^* \mathrm{M}_1}\right),$$

nous définissons $\xi_1 (m_1) : \mathrm{M}_2 \to \mathrm{T}_{m_1}^* \mathrm{M}_1$ qui est C^∞.

Alors

$$d [\xi_1 (m_1)] (m_2) \in \mathfrak{L} (\mathrm{T}_{m_2} \mathrm{M}_2, \mathrm{T}_{m_1}^* \mathrm{M}_1) \simeq \mathrm{T}_{m_2}^* \mathrm{M}_2 \otimes \mathrm{T}_{m_1}^* \mathrm{M}_1.$$

Définissons $f_1^2 \xi_1$ par

$$(f_1^2 \xi_1) (m_1, m_2) = d [\xi_1 (m_1)] (m_2);$$
$$f_1^2 \xi_1 \in \mathrm{C}^\infty (\mathrm{M}_1 \times \mathrm{M}_2, \mathrm{T}^* \mathrm{M}_2 \otimes \mathrm{T}^* \mathrm{M}_1),$$
$$f_1^2 \xi_1 \in \underline{p_2^* \mathrm{T}^* \mathrm{M}_2} \bigcirc \underline{p_1^* \mathrm{T}^* \mathrm{M}_1} \simeq \underline{p_2^* \mathrm{T}^* \mathrm{M}_2 \,\hat{\bigcirc}\, p_1^* \mathrm{T}^* \mathrm{M}_1},$$
$$(f_1^2 \xi_1)_{kl} = 0, \qquad (f_1^2 \xi_1)_{\alpha\beta} = 0,$$
$$(f_1^2 \xi_1)_{k\alpha} = \nabla_\alpha (\xi_1)_k = 2 (d_1^2 \xi_1)_{k\alpha}.$$

D'où l'interprétation de d_1^2,

$$(d_1^2 \xi_1) (m_1) = \frac{1}{2} d [\xi_1 (m_1)] \qquad \text{ou} \qquad d_1^2 \xi_1 = \frac{1}{2} \partial_2 \xi_1.$$

De même :

$$d_1^2 \xi_2 = \frac{1}{2} \partial_1 \xi_2.$$

4.9. *Écriture de ∂^* et ∂' à l'aide des opérateurs précédents :*

$$\partial^* = \underline{i_{11}} \circ p_1^* \partial_1^* \circ \underline{\pi_1} \oplus \underline{i_{22}} \circ p_2^* \partial_2^* \circ \underline{\pi_2} \oplus (\underline{i_{12}} \circ d_1^2 \circ \underline{\pi_1} + \underline{i_{12}} \circ d_2^1 \circ \underline{\pi_2}),$$

$$\partial' = \underline{i_1} \circ p_1^* \partial'_1 \circ \underline{\pi_{11}} \oplus \underline{i_2} \circ p_2^* \partial'_2 \circ \underline{\pi_{22}} \oplus (\underline{i_1} \circ d_1'^2 \circ \underline{\pi_{12}} + \underline{i_2} \circ d_2'^1 \circ \underline{\pi_{12}}).$$

Soit en écriture matricielle par « blocs » :

$$\partial^* = (\underline{i_{11}} \quad \underline{i_{12}} \quad \underline{i_{22}}) \begin{pmatrix} p_1^* \partial_1^* & 0 \\ d_1^2 & d_2^1 \\ 0 & p_2^* \partial_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\pi_1} \\ \underline{\pi_2} \end{pmatrix},$$

$$\partial' = (\underline{i_1} \quad \underline{i_2}) \begin{pmatrix} p_1^* \partial'_1 & d_1'^2 & 0 \\ 0 & d_2'^1 & p_2^* \partial'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\pi_{11}} \\ \underline{\pi_{12}} \\ \underline{\pi_{22}} \end{pmatrix}.$$

4.10. Lemme. — *Nous définissons les opérateurs*

$$\partial_p^* = \underline{i_{11}} \circ p_1^* \partial_1^* \circ \underline{\pi_1} \oplus \underline{i_{22}} \circ p_2^* \partial_2^* \circ \underline{\pi_2},$$

$$\partial'_p = \underline{i_1} \circ p_1^* \partial'_1 \circ \underline{\pi_{11}} \oplus \underline{i_2} \circ p_2^* \partial'_2 \circ \underline{\pi_{22}}.$$

Ces deux opérateurs sont adjoints l'un de l'autre.

Le symbole de ∂_p^* n'est pas injectif. Nous avons cependant la décomposition en somme directe

$$\underline{\bigcirc^2 \mathrm{T}^* \mathrm{M}} = \partial_p^* (\underline{\mathrm{T}^* \mathrm{M}}) \oplus \partial_p'^{-1} (\{0\}).$$

Écriture de ∂_p^* et ∂'_p :

$$\partial_p^* = (\underline{i_{11}} \quad \underline{i_{12}} \quad \underline{i_{22}}) \begin{pmatrix} p_1^* \partial_1^* & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & p_2^* \partial_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\pi_1} \\ \underline{\pi_2} \end{pmatrix},$$

$$\partial'_p = (\underline{i_1} \quad \underline{i_2}) \begin{pmatrix} p_1^* \partial'_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_2^* \partial'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\pi_{11}} \\ \underline{\pi_{12}} \\ \underline{\pi_{22}} \end{pmatrix},$$

$$(\partial_p^* \xi)_{kl} = (\partial^* \xi)_{kl}, \qquad (\partial_p^* \xi)_{\alpha\beta} = (\partial^* \xi)_{\alpha\beta}, \qquad (\partial_p^* \xi)_{k\alpha} = 0,$$

$$(\partial'_p h)_k = -\nabla^l h_{lk}, \qquad (\partial'_p h)_\alpha = -\nabla^\beta h_{\beta\alpha}.$$

Démonstration du lemme 4.10. — Nous savons (lemme 4.5) que

$$\underline{\bigcirc^2 \mathrm{T}^* \mathrm{M}} = \underline{i_{11}} (\underline{p_1^* \bigcirc^2 \mathrm{T}^* \mathrm{M}_1}) \oplus \underline{i_{12}} (\underline{p_1^* \mathrm{T}^* \mathrm{M}_1 \hat{\bigcirc} p_2^* \mathrm{T}^* \mathrm{M}_2}) \oplus \underline{i_{22}} (\underline{p_2^* \bigcirc^2 \mathrm{T}^* \mathrm{M}_2})$$

et d'autre part (lemme 4.7) :

$$\underline{p_i^* \bigcirc^2 \mathrm{T}^* \mathrm{M}_i} = (p_i^* \partial_i) (\underline{p_i^* \mathrm{T}^* \mathrm{M}_i}) \oplus (p_i^* \partial'_i)^{-1} (\{0_{\underline{p_i^* \mathrm{T}^* \mathrm{M}_i}}\}).$$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned} \underline{\bigcirc^2 \mathrm{T}^* \mathrm{M}} = {} & (\underline{i_{11}} \circ p_1^* \partial_1^* \circ \underline{\pi_1} + \underline{i_{22}} \circ p_2^* \partial_2^* \circ \underline{\pi_2}) (\underline{\mathrm{T}^* \mathrm{M}}) \\ & \oplus \underline{i_{11}} (p_1^* \partial'_1)^{-1} (\{0_{\underline{p_1^* \mathrm{T}^* \mathrm{M}_1}}\}) \\ & \oplus \underline{i_{22}} (p_2^* \partial'_2)^{-1} (\{0_{\underline{p_2^* \mathrm{T}^* \mathrm{M}_2}}\}) \oplus \underline{i_{12}} (\underline{p_1^* \mathrm{T}^* \mathrm{M}_1 \hat{\bigcirc} p_2^* \mathrm{T}^* \mathrm{M}_2}). \end{aligned}$$

Les trois derniers termes sont annulés par δ'_p.

En effet :

$$\delta'_p \circ \underline{i_{12}} = 0,$$

$$\delta'_p \circ \underline{i_{ii}} = \underline{i_i} = p_i^* \delta'_i,$$

$$\delta'_p \left(\underline{i_{ii}} (p_i^* \delta'_i)^{-1} \left(\{ 0_{\underline{p_i^* T^* M_i}} \}\right)\right) = \underline{i_i} \circ p_i^* \delta'_i (p_i^* \delta'_i)^{-1} \left(\{ 0_{\underline{p_i^* T^* M_i}} \}\right) = 0_{\underline{p_i^* T^* M_i}}.$$

Nous avons ainsi prouvé que

$$\underline{\bigcirc^2 T^* M} = \delta_p^* (\underline{T^* M}) + \delta_p'^{-1} (\{ 0 \}).$$

Montrons que, M ayant pour métrique le produit de métriques $g_1 \times g_2$, δ_p^* et δ'_p sont adjoints l'un de l'autre.

En effet, soient $\xi \in \underline{T^* M}$ et $h \in \underline{\bigcirc^2 T^* M}$,

$$\begin{aligned}
\langle \delta_p^* \xi, h \rangle &= \int_M (\delta_p^* \xi, h)_{\bigcirc^2 T_m^* M}\, v_{g_1 \times g_2} \\
&= \int_{M_1 \times M_2} \Big[(p_1^* \delta_1^* \xi_1, h_1)_{\bigcirc^2 (T_{m_1}^* M_1 \times T_{m_2}^* M_2)} \\
&\qquad + (p_2^* \delta_2^* \xi_2, h_2)_{\bigcirc^2 (T_{m_1}^* M_1 \times T_{m_2}^* M_2)} \Big] v_{g_1 \times g_2} \\
&= \int_{M_1 \times M_2} \Big[(p_1^* \delta_1^* \xi_1 (m_2), h_1 (m_2))_{\bigcirc^2 T_{m_1}^* M_1} \\
&\qquad + (p_2^* \delta_2^* \xi_2 (m_1), h_2 (m_1))_{\bigcirc^2 T_{m_2}^* M_2} \Big] v_{g_1 \times g_2} \\
&= \int_{M_2} \left(\int_{M_1} (p_1^* \delta_1^* \xi_1 (m_2), h_1 (m_2))_{\bigcirc^2 T_{m_1}^* M_1} v_{g_1} \right) v_{g_2} \\
&\quad + \int_{M_1} \left(\int_{M_2} (p_2^* \delta_2^* \xi_2 (m_1), h_2 (m_1))_{\bigcirc^2 T_{m_2}^* M_1} v_{g_2} \right) v_{g_1} \\
&= \int_{M_2} \langle \delta_1^* [\xi_1 (m_2)], h_1 (m_2) \rangle_{M_1} v_{g_2} + \int_{M_1} \langle \delta_2^* [\xi_2 (m_1)], h_2 (m_1) \rangle_{M_2} v_{g_1} \\
&= \int_{M_2} \langle \xi_1 (m_2), \delta'_1 [h_1 (m_2)] \rangle_{M_1} v_{g_2} + \int_{M_1} \langle \xi_2 (m_1), \delta'_2 [h_2 (m_1)] \rangle_{M_2} v_{g_1} \\
&= \int_{M_2} \left(\int_{M_1} (\xi_1 (m_2), p_1^* \delta'_1 h_1 (m_2))_{T_{m_1}^* M_1} v_{g_1} \right) v_{g_2} \\
&\quad + \int_{M_1} \left(\int_{M_2} (\xi_2 (m_1), p_2^* \delta'_2 h_2 (m_1))_{T_{m_2}^* M_2} v_{g_2} \right) v_{g_1} \\
&= \int_M \Big[(\xi_1, p_1^* \delta'_1 h_1)_{(T_{m_1}^* M_1 \times T_{m_2}^* M_2)} \\
&\qquad + (\xi_2, p_2^* \delta'_2 h_2)_{(T_{m_1}^* M_1 \times T_{m_2}^* M_2)} \Big] v_{g_1 \times g_2} \\
&= \int_M (\xi, \delta'_p h)_{T_m^* M}\, v_{g_1 \times g_2} = \langle \xi, \delta'_p h \rangle_M .
\end{aligned}$$

δ_p^* et δ'_p sont donc adjoints l'un de l'autre.

En particulier, la somme $\delta_p^* (\mathrm{T}^* \mathrm{M}) + \delta_p'^{-1} (\{0\})$ est directe :

$$\delta'_p \delta_p^* = \underline{i_1} (p_1^* \delta'_1) (p_1^* \delta_1^*) \underline{\pi_1} \oplus \underline{i_2} (p_2^* \delta'_2) (p_2^* \delta_2^*) \underline{\pi_2},$$
$$(\delta'_p \delta_p^* \xi = 0) \iff (p_i^* \delta'_i) (p_i^* \delta_i^*) \xi_i = 0) \Rightarrow (\delta_p^* \xi = 0). \quad \blacksquare$$

4.11. Théorème. — $\underline{\bigcirc^2 \mathrm{T}^* \mathrm{M}}$ *se décompose de la façon suivante :*

$$\underline{\bigcirc^2 \mathrm{T}^* \mathrm{M}} = \delta^* (\underline{\mathrm{T}^* \mathrm{M}}) + \delta_p'^{-1} (\{0\}).$$

La somme n'est pas directe, et

$$\delta^* (\underline{\mathrm{T}^* \mathrm{M}}) \cap \delta_p'^{-1} (\{0\}) = \delta^* (p_1^* \mathfrak{K} (\mathrm{M}_1) \oplus p_2^* \mathfrak{K} (\mathrm{M}_2)).$$

Notations. — $\xi_i \in \mathfrak{K} (\mathrm{M}_i)$ est une isométrie infinitésimale sur M_i ($\delta_i^* \xi_i = 0$).
$p_i^* \mathfrak{K} (\mathrm{M}_i) \subset \underline{p_i^* \mathrm{T}^* \mathrm{M}_i}$ est l'ensemble des sections de $p_i^* \mathrm{T}^* \mathrm{M}_i$ qui sont sur M_i des isométries infinitésimales (et peuvent dépendre de M_j) :

$$p_i^* \mathfrak{K} (\mathrm{M}_i) = \{ \xi \in \underline{p_i^* \mathrm{T}^* \mathrm{M}_i} \mid (p_i^* \delta_i^*) \xi = 0 \}.$$

Démonstration. — Les lemmes 4.7 et 4.2 nous permettent de dire que

$$\delta^* (\underline{\mathrm{T}^* \mathrm{M}}) + \delta_p'^{-1} (0) \subset \underline{\bigcirc^2 \mathrm{T}^* \mathrm{M}}.$$

Soit maintenant $h \in \underline{\bigcirc^2 \mathrm{T}^* \mathrm{M}}$.

Alors, grâce au lemme 4.7, nous pouvons l'écrire

$$h = \delta_p^* \xi + k, \qquad \text{avec} \quad \delta'_p k = 0$$

(et ceci de manière unique).

Alors

$$h = \delta^* \xi + k - (\delta^* - \delta_p^*) \xi.$$

Prouvons que

$$\delta'_p [k - (\delta^* - \delta_p^*) \xi] = 0.$$

Or

$$\delta'_p k = 0.$$

Par ailleurs, $\delta'_p (\delta^* - \delta_p^*)$ s'écrit en écriture matricielle :

$$(\underline{i_1} \quad \underline{i_2}) \begin{pmatrix} p_1^* \delta'_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_2^* \delta'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ d_1^2 & d_2^1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\pi_1} \\ \underline{\pi_2} \end{pmatrix},$$

d'où

$$(\underline{i_1}\, p_1^* \delta'_1\, \underline{\pi_{11}} \oplus \underline{i_2}\, p_2^* \delta'_2\, \underline{\pi_{22}}) (\underline{i_{12}}\, d_1^2\, \underline{\pi_1} + \underline{i_{12}}\, d_2^1\, \underline{\pi_2}) = 0.$$

Donc

$$\underline{\bigcirc^2 \mathrm{T}^* \mathrm{M}} = \delta^* (\underline{\mathrm{T}^* \mathrm{M}}) + \delta_p'^{-1} (0);$$

d'autre part

$$\delta'_p\,\delta^* = \underline{i_1}\,(p_1^*\,\delta'_1)\,(p_1^*\,\delta_1^*)\,\underline{\pi_1} \oplus \underline{i_2}\,(p_2^*\,\delta'_2)\,(p_2^*\,\delta_2^*)\,\underline{\pi_2},$$

$$\delta^*\,(\underline{\mathrm{T}^*\,\mathrm{M}}) \cap \delta_p'^{-1}\,(0) = \{\,\delta^*\,\xi \mid \delta'_p\,\delta^*\,\xi = 0\,\},$$

$$\begin{aligned} \delta'_p\,\delta^*\,\xi = 0 \;&\Rightarrow\; (p_i^*\,\delta_i^*)\,\xi_i = 0 \qquad (i = 1, 2)\\ &\Rightarrow \begin{cases} \xi_i \in p_i^*\,(\mathfrak{K}\,(\mathrm{M}_i)) \\ \delta^*\,\xi = (\underline{i_{12}}\,d_1^2\,\underline{\pi_1} + \underline{i_{12}}\,d_2^1\,\underline{\pi_2})\,\xi = d_1^2\,\xi_1 + d_2^1\,\xi_2, \end{cases}\\ &\Rightarrow\; \delta^*\,\xi \in \delta^*\,[p_1^*\,\mathfrak{K}\,(\mathrm{M}_1) \oplus p_2^*\,\mathfrak{K}\,(\mathrm{M}_2)]. \end{aligned}$$

Réciproquement,

$$\xi \in p_1^*\,\mathfrak{K}\,(\mathrm{M}_1) \oplus p_2^*\,\mathfrak{K}\,(\mathrm{M}_2) \;\Rightarrow\; \delta'_p\,\delta^*\,\xi = 0. \quad \blacksquare$$

4.12. Corollaire. — *Soient* M_1 *et* M_2 *deux variétés riemanniennes compactes sans isométries infinitésimales,* M *leur produit riemannien.*

Nous avons la décomposition en somme directe :

$$\underline{\bigcirc^2\,\mathrm{T}^*\,\mathrm{M}} = \delta^*\,(\underline{\mathrm{T}^*\,\mathrm{M}}) \oplus \delta_p'^{-1}\,\{\,0\,\}.$$

Démonstration. — C'est une simple conséquence du théorème 4.11 dans le cas où $\mathfrak{K}\,(\mathrm{M}_i) = \{\,0\,\}$. ■

5. Étude de l'opérateur Σ sur une variété produit riemannien

5.1. Soit $h \in \underline{\bigcirc^2\,\mathrm{T}^*\,(\mathrm{M})}$, on a vu (4.5) que h se décompose de la façon suivante :

$$h = h_1 + h_\mu + h_2 \qquad \text{où} \begin{cases} h_i \in \bigcirc^2\,p_i^*\,(\underline{\mathrm{T}^*\,\mathrm{M}_i}) \qquad (i = 1, 2), \\ h_\mu \in \underline{p_1^*\,(\mathrm{T}^*\,\mathrm{M}_1)\,\hat{\bigcirc}\,p_2^*\,(\mathrm{T}^*\,\mathrm{M}_2)}. \end{cases}$$

Soit π un plan mixte de M : $\pi = \{\,m_1, m_2, \mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2\,\}$ où $\mathrm{X}_i \in \mathrm{T}_m\,(\mathrm{M}_i)$ ($i = 1, 2$). Pour un bon prolongement de $\{\,\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2\,\}$, on a

$$\begin{aligned} (\Sigma\,h)\,(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2) &= \mathrm{X}_1.\{\tilde{\mathrm{X}}_2.h_\mu\,(\tilde{\mathrm{X}}_1, \tilde{\mathrm{X}}_2)\,\} \\ &\quad - \frac{1}{2}\mathrm{X}_1.\{\,\tilde{\mathrm{X}}_1\,h_2\,(\tilde{\mathrm{X}}_2, \tilde{\mathrm{X}}_2)\,\} - \frac{1}{2}\mathrm{X}_2.\{\,\tilde{\mathrm{X}}_2.h_1\,(\tilde{\mathrm{X}}_1, \tilde{\mathrm{X}}_1)\,\} \\ &= (\Sigma\,h_\mu)\,(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2) + (\Sigma\,h_2)\,(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2) + (\Sigma\,h_1)\,(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2). \end{aligned}$$

On se propose d'étudier : $\{\,h \in \underline{\bigcirc^2\,\mathrm{T}^*\,\mathrm{M}} \mid \forall\,\pi = \{\,\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2\,\},\ \pi$ mixte, $\Sigma\,h\,(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2) = 0\,\}$.

5.2. Le lemme de Berger [1] permet d'affirmer que si $\Sigma\,h\,(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2) \geqq 0$ pour tout plan mixte π de M, alors $\Sigma\,h\,(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2) = 0$.

En effet pour un plan mixte π, $\sigma^0(\pi) = 0$ donc

$$\Sigma\, h(X_1, X_2) = \left.\frac{d\sigma^t(\pi)}{dt}\right|_{t=0}$$

d'après (3.4).

(En fait on peut affirmer que si $\Sigma\, h$ a un *signe constant* sur les plans mixtes, il s'annule sur les plans mixtes.)

Pour $\underline{h \in \bigcirc^2 T^* M}$ nous n'avons pas de résultats. Nous allons nous limiter au cas où $\underline{h \in \delta'^{-1}_p(\{0\})}$. Nous verrons en fait au paragraphe 6 que pour le problème géométrique qui nous intéresse, cette hypothèse n'est pas restrictive.

5.3. Théorème. — *Pour* $h \in \delta'^{-1}_p(\{0\})$, *la condition* $\Sigma\, h(X_1, X_2) = 0$ *pour tout plan mixte* $\pi = \{X_1, X_2\}$ *implique :*

(*a*) $$\begin{cases} \Sigma\, h_i\,(X_1, X_2) = 0 & (i = 1, 2), \\ \Sigma\, h_\mu\,(X_1, X_2) = 0, \end{cases}$$

(*b*) $$\underline{h_i \in \bigcirc^2 T^* M_i} \qquad (i = 1, 2).$$

La démonstration utilise deux lemmes :

Soit (m_1, X_1) un élément fixe de TM_1, $\Sigma\, h$ définit une section $(s_2)_{(m_1, X_1)}$ du fibré $\bigcirc^2 T^* M_2$. [La forme quadratique q_2 associée à $(s_2)_{(m_1, X_1)}$ est $(q_2)_{m_2}(X_2) = (\Sigma\, h)_{(m_1, m_2)}(X_1, X_2)$.]

5.4. Lemme. — $(s_2)_{(m_1, X_1)}$ *s'écrit de la manière suivante :*

$$(s_2)_{(m_1, X_1)} = \delta_2^*\left(\xi_2 - \frac{1}{2} df_2\right) - \frac{1}{2}\omega_2;$$

où

$$\xi_2 \in \underline{T^* M_2}, \quad f_2 \in C^\infty(M_2), \quad \omega_2 \in \underline{\bigcirc^2 T^* M_2}$$

avec $\forall\, (m_2, X_2) \in TM_2$,

$$(\xi_2)_{m_2}(X_2) = X_1 . h_\mu(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2),$$
$$f_2(m_2) = h_1(X_1, X_1),$$
$$(\omega_2)_{m_2}(X_2, X_2) = X_1 . \{\tilde{X}_1 . h_2(\tilde{X}_2, \tilde{X}_2)\}.$$

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate de la définition de s_2. Il suffit de le vérifier dans une carte adaptée à la structure-produit.

On a

$$\left.\begin{aligned} \xi_2 &= (\xi_2)_\alpha\, dx^\alpha, \qquad \text{avec}\quad (\xi_2)_\alpha = \nabla_l\,(h_\mu)_{k\alpha}\, a^k\, a^l \\ f_2(m_2) &= h_{kl}\, a^k\, a^l \quad\Rightarrow\quad df_2 = (\nabla_\alpha\, h_{kl})\, a^k\, a^l\, dx^\alpha \\ (\omega_2)_{\alpha\beta} &= a^l\, a^k\, \nabla_l\, \nabla_k\, h_{\alpha\beta} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\left(X_1 = a^l \frac{\partial}{\partial x^l}\right), \\ &\left(X_2 = b^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right), \end{aligned}$$

$$(\delta_2^*\, \xi_2)_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\nabla_\alpha\, \xi_\beta + \nabla_\beta\, \xi_\alpha) = \frac{1}{2} a^k\, a^l\, (\nabla_\alpha\, \nabla_l\, (h_\mu)_{k\beta} + \nabla_\beta\, \nabla_l\, (h_\mu)_{k\alpha}),$$

$$(\delta^*\, df_2)_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} a^k\, a^l\, (\nabla_\beta\, \nabla_\alpha\, h_{kl} + \nabla_\alpha\, \nabla_\beta\, h_{kl});$$

de plus, d'après (3, 12) :

$$(\Sigma\, h)\ (X_1, X_2) = \left(\nabla_k \nabla_\alpha (h_\mu)_{l\beta} - \frac{1}{2}\nabla_k \nabla_l h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\nabla_\alpha \nabla_\beta h_{kl}\right) a^k a^l b^\alpha b^\beta,$$

d'où

$$((s_2)_{(m_1, X_1)})_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} a^k a^l (\nabla_k \nabla_\alpha (h_\mu)_{l\beta} + \nabla_k \nabla_\beta (h_\mu)_{l\alpha} - \nabla_k \nabla_l h_{\alpha\beta}$$
$$- \frac{1}{2}(\nabla_\alpha \nabla_\beta + \nabla_\beta \nabla_\alpha) h_{kl}). \quad \blacksquare$$

5.5. Lemme. — *Si* $h \in \delta_p'^{-1}(\{0\})$ *alors* $h_2 \in p_2^* \delta_2'^{-1}(\{0\})$ *et* $\omega_2 \in \delta_2'^{-1}(\{0\})$.

Démonstration. — D'après le lemme 4.10 on sait qu'alors $h_2 \in p_2^* \delta_2'^{-1}(\{0\})$; choisissons une carte adaptée à la structure produit, alors la condition $h \in \delta_p'^{-1}(\{0\})$ se traduit en coordonnées par les égalités

$$\nabla^k h_{kl} = 0 \quad (l = 1, 2, \ldots, \dim M_1) \qquad \text{et} \qquad \nabla^\alpha h_{\alpha\beta} = 0 \quad (\beta = 1, 2, \ldots, \dim M_2),$$

or $(h_2)_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta}$ et la relation $\nabla^\alpha (h_2)_{\alpha\beta} = 0$ impliquent [pour (m_1, X_1) fixe] :

$$(\delta_2' \omega_2)_\beta = \nabla^\alpha (\omega_2)_{\alpha\beta} = a^k a^l \nabla_k \nabla_l \nabla^\alpha h_{\alpha\beta} = 0,$$

c'est-à-dire $\omega_2 \in \delta_2'^{-1}(\{0\})$. $\blacksquare$

Démonstration du théorème 5.3. — Soit $h \in \delta_p'^{-1}(\{0\})$, tel que $\Sigma\, h\,(X_1, X_2) = 0$ pour tout plan mixte $\pi = \{X_1, X_2\}$.

La forme bilinéaire $(s_2)_{(m_1, X_1)}$ est identiquement nulle :

$$0 = \delta_2^* \left(\xi_2 - \frac{1}{2} df_2\right) - \frac{1}{2}\omega_2,$$

or $\omega_2 \in \delta_2'^{-1}(\{0\})$ d'après (5.5). Le théorème de décomposition des tenseurs symétriques de Berger-Ebin [2] implique

$$\omega_2 = 0 \qquad \text{et} \qquad \delta_2^*\left(\xi_2 - \frac{1}{2} df_2\right) = 0,$$

on a

$$\forall\, (m_1, X_1) \in TM_1, \quad \forall\, (m_2, X_2) \in TM_2, \quad X_1 . \{\tilde{X}_1 . h_2 (\tilde{X}_2, \tilde{X}_2)\} = 0.$$

En particulier pour (m_2, X_2) fixé, $\Delta^{M_1} h_2 (X_2, X_2) = 0$. La fonction $h_2 (X_2, X_2)$ est constante sur M_1 [M_1 est compacte et le laplacien de $h_2 (X_2, X_2)$ est nul]. h_2 est donc une forme bilinéaire sur M_2. Par le même raisonnement, nous obtenons le résultat analogue avec h_1. Les h_i étant des formes bilinéaires sur M_i, nous avons $\Sigma\, h_i (X_1, X_2) = 0$ pour tout plan mixte, donc $\Sigma\, h_\mu (X_1, X_2) = 0$ pour tout plan mixte $\{X_1, X_2\}$. $\blacksquare$

5.6. THÉORÈME. — *Si* M *n'a pas d'isométries infinitésimales, alors la condition* $\Sigma\, h_\mu (X_1, X_2) = 0$ *pour tout plan mixte* π *de* M *implique* $h_\mu = 0$.

Démonstration. — D'après (5.1) :

$$\Sigma\, h_\mu (X_1, X_2) = X_1 . \{\tilde{X}_2 . h_\mu (\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)\}.$$

D'après (5.4), pour (m_1, X_1) fixé, ξ_2 vérifie $\delta_2^* \xi_2 = 0$, c'est-à-dire $\xi_2 \in \mathfrak{K}(M_2)$ et l'hypothèse $\mathfrak{K}(M_i) = 0$ $(i = 1, 2)$ implique $\xi_2 = 0$.

Dans une carte adaptée, la condition $\xi_2 = 0$ se traduit par les égalités

$$\forall\, \alpha = 1, 2, \ldots, \dim M_2, \quad \forall\, X_1 = a^k \frac{\partial}{\partial x^k}, \qquad \nabla_k (h_\mu)_{l\alpha}\, a^k a^l = 0.$$

Fixons α : alors $\nabla_k (h_\mu)_{l\alpha} + \nabla_l (h_\mu)_{k\alpha} = 0$, ce qui traduit le fait que la 1-forme définie sur M_1 par le vecteur $\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ est une isométrie infinitésimale sur M_1 $\left[\text{la 1-forme est } (m_1, X_1) \to h_\mu \left(X_1, \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)\right]$; or $\mathfrak{K}(M_1) = 0$, donc $(h_\mu)_{l\alpha} = 0$, soit $h_\mu = 0$.

5.7. Si $\mathfrak{K}(M_i) \neq 0$ on a peu de renseignements sur l'ensemble des h_μ vérifiant $\Sigma\, h_\mu (X_1, X_2) = 0$. Un calcul simple montre que cet ensemble contient l'espace vectoriel

$$(\mathfrak{K}(M_1) \otimes \underline{T^* M_2}) \oplus (\underline{T^* M_1} \otimes \mathfrak{K}(M_2)). \quad \blacksquare$$

5.8. COROLLAIRE. — *Si* (M, g_0) *n'a pas d'isométrie infinitésimale, alors la condition* $\Sigma\, h (X_1, X_2) = 0$ *pour tout plan mixte* π, *implique que* $h = h_1 + h_2$ *avec* $h_i \in \underline{\bigcirc^2 T^* M_i}$ $(i = 1, 2)$.

6. Un lemme sur l'action de $\mathfrak{D}$(M) sur $\underline{\bigcirc^2 T^* M}$

6.0. Dans ce paragraphe, nous nous proposons de montrer que parmi les relèvements d'une déformation de structures riemanniennes $\tilde{g}(t)$, nous pouvons en choisir de « privilégiés ».

6.1. PROPOSITION. — *Soit* $\tilde{g}(t)$ *une déformation de structure riemannienne* C^r *au voisinage de* 0. *Supposons donnée une décomposition algébrique*

(6.2) $$\underline{\bigcirc^2 T^* M} = \delta^* (\underline{T^* M}) + F.$$

Il existe un relèvement $g(t)$ *de* $\tilde{g}(t)$, C^r *au voisinage de* 0 *dont le jet d'ordre* r *appartient à* $\bigoplus_{i=1}^{r} F$.

Nous allons démontrer quelques lemmes.

Fixons les notations : soit X un champ de vecteurs $\mathcal{C}^\infty$ sur M engendrant le groupe de difféomorphismes φ_t de M. Soit $h \in \underline{\bigcirc^2 \mathrm{T}^* \mathrm{M}}$.

6.3. Lemme. — *La variation $t \to \varphi_t^* (h)$ a pour jet d'ordre r à l'origine :*

$$\left(\frac{d^i (\varphi_t^* h)}{dt^i} \bigg|_{t=0} = \underbrace{\mathfrak{L}_\mathrm{X} \mathfrak{L}_\mathrm{X} \dots h}_{i \text{ fois}} \right) \qquad (i = 1, 2, \dots, r).$$

Démonstration. — Par définition de la dérivée de Lie, nous avons

$$\frac{d}{dt} \varphi_t^* (h) \bigg|_{t=0} = \mathfrak{L}_\mathrm{X} h.$$

De plus :

$$\frac{d}{dt} \varphi_t^* (h) \bigg|_{t=\tau} = \varphi_\tau^* (\mathfrak{L}_\mathrm{X} h).$$

En raisonnant par récurrence, nous obtenons le résultat. ∎

6.4. Lemme. — *Soit un entier $k > 0$, alors la variation $t \mapsto \varphi_{t^k}^* (h)$ a pour jet d'ordre k à l'origine :*

$$\frac{d^i \varphi_{t^k}^* (h)}{dt^i} \bigg|_{t=0} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k-1), \qquad \frac{d^k \varphi_{t^k} (h)}{dt^k} \bigg|_{t=0} = k!\, \mathfrak{L}_\mathrm{X} h,$$

autrement dit la partie principale du développement de Taylor de $\varphi_{t^k}^* (h)$ s'écrit $\varphi_{t^k}^* (h) = h + t^k \mathfrak{L}_\mathrm{X} h$.

Il suffit d'appliquer le théorème de dérivation des fonctions composées et le lemme 6.3. ∎

6.5 Lemme. — *Soit $h(t)$ une variation de h_0 $\left(h_0 \in \underline{\bigcirc^2 \mathrm{T}^* \mathrm{M}}\right)$ alors*

(i) *$\varphi_{t^k}^* (h(t))$ et $h(t)$ ont même jet d'ordre $(k-1)$,*

(ii) $\displaystyle \frac{d^k}{dt^k} (\varphi_{t^k}^* (h(t)) - h(t)) \bigg|_{t=0} = k!\, \mathfrak{L}_\mathrm{X} (h_0).$

Démonstration. — Elle est immédiate. Il suffit d'écrire la partie principale à l'ordre r du développement de Taylor de $h(t)$ et d'utiliser la linéarité de l'action de $\mathfrak{D}(\mathrm{M})$:

$$h(t) = h_0 + \sum_{i=1}^{r} \frac{t^i}{i!} h^i,$$

$$\varphi_{t^k}^* (h(t)) = \varphi_{t^k}^* (h_0) + \sum_{i=1}^{r} \frac{t^i}{i!} \varphi_{t^k}^* (h^i).$$

Avec le lemme 6.4 la partie principale du développement de Taylor à l'ordre r s'écrit :

$$\varphi_{t^k}^{*}(h(t)) = h_0 + \sum_{i=1}^{r-1} \frac{t^i}{i!} h^i + \frac{t^r}{r!}(h^r + r!\, \mathfrak{L}_X h_0). \quad \blacksquare$$

6.6. *Démonstration de la proposition* 6.1. — Soit $\bar{g}(t)$ un relèvement C^r au voisinage de l'origine de $\tilde{g}(t)$ dont la partie principale à l'ordre r s'écrit :

$$\bar{g}(t) = g_0 + \sum_{i=1}^{r} \frac{t^i}{i!} h^i, \qquad \text{avec} \quad h^i \in \underline{\bigcirc^2 T^* M}.$$

Nous allons construire une variation $g(t)$ de g_0, C^r au voisinage de 0 dont le jet d'ordre r est $(h'^1, h'^2, \ldots, h'^r)$ avec $h'^i \in F$ et qui définit la même *structure riemannienne* que $\bar{g}(t)$ [i. e. il existe une famille de difféomorphismes ψ_t de M tels que $\psi_t^*(\tilde{g}(t)) = g(t)$]. Pour cela nous construisons par récurrence une suite de variations de métriques $\mathfrak{D}$ (M)-équivalentes $g^k(t)$ avec

$$g^0(t) = \bar{g}(t)$$

telles que :

(i) $g^k(t)$ et $g^{k-1}(t)$ ont même jet d'ordre $(k-1)$;

(ii) le jet d'ordre k de $g^k(t)$ est dans $\bigoplus_{i=1}^{k} F$.

Il est bien clair qu'alors $g^r(t)$ répond à la question.

Supposons $g^{k-1}(t)$ construite : selon (6.2) sa dérivée $k^{\text{ième}}$ à l'origine s'écrit $h^k = \delta^* \xi_k + h'^k$ avec $h'^k \in F$.

Notons $X_k = -\dfrac{1}{2\,k!}\xi_k^{\#}$ et $\varphi_t^{(k)}$ le groupe à un paramètre de difféomorphismes engendré par X_k.

Nous posons

$$g^k(t) = \varphi_{t^k}^{(k)*}(g^{k-1}(t)).$$

D'après le lemme 6.5, $g^k(t)$ a même jet d'ordre $k-1$ en 0 que $g^{k-1}(t)$ et la dérivée d'ordre k en 0 de $g^k(t)$ est $-\delta^* \xi_k + h^k$, soit h'^k. La proposition est donc prouvée. ■

7. Le théorème

7.1. Nous appliquons le lemme du paragraphe 6 à la décomposition (4.11) :

$$\underline{\bigcirc^2 T^* M} = \delta^*(\underline{T^* M}) + \delta_{\mu}'^{-1}(\{0\})$$

en supposant $M = M_1 \times M_2$ munie d'un produit de métriques $g_0 = g_1 \times g_2$. Une variation de métriques C^r au voisinage de 0 dont le r-jet en 0 est dans $\bigoplus_{i=1}^{k} \delta_p^{\prime -1}(\{0\})$ est dite *r-réduite.*

La proposition 6.1 nous permet d'affirmer que toute déformation de structure riemannienne $\tilde{g}(t)$, C^r au voisinage de l'origine admet un représentant qui est une variation r-réduite.

7.2. Nous voulons montrer qu'il est impossible que $\tilde{g}_0$ appartienne à l'adhérence de l'ensemble $\widetilde{\mathrm{Pos}}$ (M) des structures riemanniennes à courbure strictement positive. Nous notons Pos (M) l'ensemble des métriques riemanniennes à courbure strictement positive, qui est un ouvert de $\mathfrak{M}$.

Soit $g(t)$ une variation de métrique riemannienne C^r au voisinage de 0 dans Pos (M) (sauf g_0 bien sûr). Pour une telle variation il est clair que :

« Pour tout $m \in M$, pour tout X_1 de $T_m M_1$, pour tout X_2 de $T_m M_2$ la première dérivée non nulle de $\sigma^t(X_1, X_2)$ en $t = 0$ est positive, puisque pour $t > 0$, $\sigma^t(X_1, X_2) > 0$ et pour tout $t = 0$, $\sigma^0(X_1, X_2) = 0$. »

Une variation vérifiant cette propriété est dite *r-positive.*

7.3. Une variation de métriques C^r au voisinage de 0 est dite *r-produit* si son r-jet appartient à $\bigoplus_{i=1}^{r} (\underline{i_{11}}(\underline{\bigcirc^2 T^* M_1}) \oplus \underline{i_{22}}(\underline{\bigcirc^2 T^* M_2}))$.

7.4. La propriété pour une variation d'être positive n'a pas de signification géométrique, si on n'impose pas à la variation d'être réduite. Considérons en effet pour une famille à un paramètre de difféomorphismes φ_t telle que $\varphi_0 = \mathrm{Id}$ la variation $\varphi_t^*(g_0)$. Si M_1 et M_2 sont à courbure sectionnelle positive, une telle variation est r-positive puisque les plans mixtes sont à courbure nulle pour g_0 et à courbure non négative pour $\varphi_t^*(g_0)$ $(t \neq 0)$. Le théorème qui suit ne s'applique pas : cette variation ne sera pas r-produit.

7.5. Théorème. — *Soit* (M, g_0) *une variété produit riemannien sans isométrie infinitésimale. Toute déformation r-positive est r-produit.*

Le théorème se démontre par récurrence.

Prenons pour hypothèse de récurrence : à l'ordre j $(1 \leq j < r)$, $g(t)$ est une variation r-réduite r-positive dont le j-jet à l'origine appartient à $\bigoplus_{l=1}^{j} (\underline{i_{11}}(\underline{\bigcirc^2 T^* M_1}) \oplus \underline{i_{22}}(\underline{\bigcirc^2 T^* M_2}))$.

7.6. A l'ordre 1, l'hypothèse de récurrence est vérifiée : c'est le lemme de Berger (5.2).

Montrons maintenant que si l'hypothèse de récurrence est vérifiée à l'ordre j $(1 \leqq j < r)$, elle l'est à l'ordre $j+1$.

Soient $m \in \mathrm{M}$, $\mathrm{X}_1 \in \mathrm{T}_m \mathrm{M}_1$, $\mathrm{X}_2 \in \mathrm{T}_m \mathrm{M}_2$.

D'après le lemme 3.6 :

$$\begin{aligned} \mathrm{S}^p (h^1, \ldots, h^{p-1}) (\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2) = & \sum_{l=1}^{p-1} \binom{p}{l} [(\mathrm{C}^l (\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2), \mathrm{C}^{p-l} (\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2))_0 \\ & \qquad - (\mathrm{C}^l (\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_1), \mathrm{C}^{p-l} (\mathrm{X}_2, \mathrm{X}_2))_0] \\ & + \sum_{\substack{m+n+l=p \\ m \geqq 1,\, n \geqq 1,\, l \geqq 1}} \frac{p!}{m!\,n!\,l!} [h^l (\mathrm{C}^m (\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2), \mathrm{C}^n (\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2)) \\ & \qquad - h^l (\mathrm{C}^m (\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_1), \mathrm{C}^n (\mathrm{X}_2, \mathrm{X}_2))]. \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse de récurrence, le j-jet de la variation est j-produit, donc

$$\mathrm{S}^{j+1} (h^1, \ldots, h^j) (\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2) = 0.$$

D'après (3.6) encore,

$$\frac{d^{j+1} \sigma}{dt^{j+1}} (\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2) \Big|_{t=0} = \Sigma\, h^{j+1} (\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2).$$

Comme la variation est r-positive et que les dérivées précédentes de la courbure sont nulles,

$$\Sigma\, h^{j+1} (\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2) \geqq 0.$$

D'après le lemme 5.2,

$$\Sigma\, h^{j+1} (\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2) = 0.$$

Par suite, la variation étant r-réduite [en particulier $h^{j+1} \in \delta_p'^{-1} (0)$] nous avons d'après le théorème 5.3 :

$$h_i^{j+1} \in \underline{i_{ii}} \left(\underline{\bigcirc^2 \mathrm{T}^* \mathrm{M}_i} \right) \qquad (i = 1, 2).$$

De plus, comme $\mathfrak{K}(\mathrm{M}) = 0$, $h_\mu^{j+1} = 0$.

L'hypothèse de récurrence est donc vérifiée à l'ordre $j+1$. Le théorème est prouvé. ■

7.7. Nous prouverons ultérieurement que la condition $\mathfrak{K}(\mathrm{M}) = 0$ est essentielle pour que le théorème 7.4 soit vrai.

7.8. Théorème. — *Soit* (M, g_0) *une variété produit riemannien sans isométries infinitésimales. Il n'existe aucune variation analytique de métrique* *issue de* g_0 *telle que pour* $\varepsilon > 0$ *et pour tout* $t \in]0, \varepsilon]$, $g(t)$ *soit à courbure sectionnelle positive.*

Par analytique nous entendons que $g(t)$ est somme de la série de ses dérivées en 0.

C'est un corollaire trivial de 7.5 en prenant un représentant r-réduit de la variation $g(t)$, dont on suppose qu'elle existe. Ce représentant est évidemment r-positif, donc r-produit d'après 7.5, d'où une contradiction. ■

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Berger, *Trois remarques sur les variétés riemanniennes à courbure sectionnelle positive* (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 263, série A, 1966, p. 76-78).

[2] M. Berger et D. G. Ebin, *Some decompositions of the space of symmetric tensors* (*J. Diff. Geom.*, vol. 3, n° 3, septembre 1969, p. 379-392).

[3] S. S. Chern, *Geometry of* G-*structures* (*Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 72, n° 2, 1966, p. 171).

[4] D. G. Ebin, « *The space of riemannian metrics* ». *Global analysis* (*Proc. Sympos. Pure Math.*, vol. XV, A. M. S., 1968).

[5] C. Godbillon, *Géométrie différentielle et mécanique analytique*, Hermann, 1969.

[6] D. Gromoll, W. Klingenberg et W. Meyer, *Riemannsches Geometrie im Grossen* (*Lectures Notes in Math.*, n° 55, Springer, 1968).

[7] R. S. Palais, *Seminar on the Atiyah-Singer index theorem*, Princeton Study, n° 57, 1965.

(Manuscrit reçu le 8 décembre 1971.)

J.-P. Bourguignon,
Centre de Mathématiques
de l'École Polytechnique,
17, rue Descartes,
75-Paris, 5e.

Mme A. Deschamps,
Faculté des Sciences,
45-Orléans-La Source.

Mme P. Sentenac,
Université de Paris XI,
91-Orsay.