ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

MARCEL BERGER

À l'ombre de Loewner

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 5, nº 2 (1972), p. 241-260

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1972_4_5_2_241_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 5, 1972, p. 241 à 260.

À L'OMBRE DE LOEWNER

PAR MARCEL BERGER

1. INTRODUCTION. — Cet article fait suite à [2]; dans [2] étaient étudiées des généralisations éventuelles du théorème de Pu et le cadre était celui des espaces projectifs (projectifs réels, complexes, quaternioniens et plan projectif des octaves de Cayley). Le présent article a le même but, mais le cadre principal est celui des tores. Le théorème de Loewner en effet (*cf.* 10.7), est au tore de dimension 2 ce que le théorème de Pu est au projectif réel de dimension 2.

Après des paragraphes de rappels sur les tores plats (i. e. munis d'une structure riemannienne localement euclidienne), l'homologie de ces tores et la réalisation dans une variété compacte de la dualité de Poincaré, soit par des formes différentielles (*cf.* 5.2), soit par des sous-variétés qui sont des noyaux de morphismes (*cf.* 5.5), on définit dans le paragraphe 6 les différents carcans et quotients d'une variété riemannienne compacte orientée et plus particulièrement pour les tores. On calcule alors un carcan des tores plats : 7.1; la méthode est la même que pour les projectifs (*cf.* [2], § 7), à savoir celle de Wirtinger : utiliser une forme différentielle fermée convenable.

Un autre résultat de cet article est la proposition 10.3, qui est la généralisation en dimension plus grande que 2 d'une formule due en dimension 2 à Accola et Blatter (*voir* références à la fin du paragraphe 8). On montre dans le paragraphe 10 comment cette formule permet de retrouver les résultats de Loewner 10.7 et de Blatter 10.8. De 10.9 à 10.15 on trouvera quelques remarques pour l'utilisation éventuelle de la proposition 10.3.

2. NOTATIONS.

2.1. Toutes les variétés considérées seront supposées *connexes*, *compactes* et *orientées*. Les *sous-variétés* d'une variété seront supposées compactes et orientées, mais non nécessairement connexes. Les difféomorphismes entre variétés devront préserver les orientations.

2.2. Une *variété riemannienne* est un couple (M, g) formé d'une variété C^∞ M et d'une structure riemannienne g sur M; deux variétés riemanniennes (M, g) et (M′, g') sont dites *isométriques* s'il existe un difféomorphisme f entre M et M′ qui transporte g' en g i. e. $f^* g' = g$. Une variété riemannienne possède une *mesure canonique, notée* v_g. Le volume de (M, g) est la masse totale de v_g, notée

$$\operatorname{vol}(M,\ g) = \int_M v_g.$$

En fait, puisque M est orientée (*cf.* 2.1), (M, g) possède donc une forme volume canonique, *notée* ω_g, et l'on a

$$\operatorname{vol}(M,\ g) = \int_M \omega_g.$$

Comme une structure riemannienne s'induit par restriction sur les sous-variétés, si N est une sous-variété de la variété riemannienne (M, g), on pourra encore définir son *volume*, à savoir $\operatorname{vol}(N,\ g \mid N)$.

2.3. Soit E un espace euclidien de dimension a et V un sous-espace vectoriel, orienté, de dimension b, de E. On appelle *forme volume canonique* de V, et *note* ω_V, l'unique élément de $\overset{b}{\wedge} E^*$, défini par la condition :

> si $\{ e_i \}_{i=1,\dots,a}$ est une base orthonormée de E telle que $\{ e_i \}_{i=1,\dots,b}$ soit une base orthonormée directe de V, alors $\omega_V = e_i^* \wedge \dots \wedge e_b^*$ (où $\{ e_i^* \}_{i=1,\dots,a}$ désigne la base de E* duale de la base $\{ e_i \}_{i=1,\dots,a}$ de E).

La forme ω_V vérifie la :

2.4. Propriété. — *Quel que soit* W, *sous-espace vectoriel orienté de dimension b de* E *et quelle que soit la base orthonormée directe* $\{ e_i \}_{i=1,\dots,b}$ *de* W, *on a* $\omega_V (e_1, \dots, e_b) \leqq 1$; *et en outre* $\omega_V (e_1, \dots, e_b) = 1$ *si et seulement si* V = W *et avec la même orientation.*

2.5. Soit E un espace euclidien; les $\overset{b}{\wedge} E$ et les $\overset{b}{\wedge} E^*$ ($b = 0, 1, \dots, a = \dim E$) possèdent des structures euclidiennes canoniquement attachées à celle de E; pour les normes et produits scalaires correspondants, nous emploierons les notations $(. \mid .)$ et $| . |$. Si E est de plus orienté, rappelons que l'opération classique $\star : \overset{b}{\wedge} E^* \to \overset{a-b}{\wedge} E^*$ possède les propriétés suivantes :

$$2.6. \quad \begin{cases} \star 1 = \omega_E, \qquad \star \circ \star = (-1)^{b(a+1)} \operatorname{id}, \qquad |\star \alpha| = |\alpha| \quad \forall \alpha, \\ \alpha \wedge \star \beta = \beta \wedge \star \alpha = (\alpha \mid \beta) . \omega_E \quad \text{si} \quad \alpha \in \overset{b}{\wedge} E^* \quad \text{et} \quad \beta \in \overset{a-b}{\wedge} E^*. \end{cases}$$

Exemple. — Soient E, F deux espaces vectoriels orientés, de dimensions respectives a, c et $f : E \to F$ une application linéaire surjective; on suppose en outre que le noyau $V = f^{-1}(0)$ est orienté par E et F en sorte que la réunion de l'image inverse par f d'une base directe de F suivie d'une base directe de V forme une base directe de E. Alors :

2.7. $$\omega_V = \frac{\star\,(f^*\alpha)}{|f^*\alpha|}, \quad \forall\, \alpha \in \bigwedge^c F^* - \{0\}.$$

3. Tores. — On note T^a le tore de dimension a, considéré d'abord seulement comme variété C^∞, c'est-à-dire le quotient $T^a = \mathbf{R}^a/\mathbf{Z}^a$ de $\mathbf{R}^a$ par le réseau $\mathbf{Z}^a$ formé par les points dont toutes les coordonnées sont entières; en outre, T^a est muni de l'orientation induite par celle de $\mathbf{R}^a$. Quand besoin est, on ne distingue pas entre T^a et une variété déduite de T^a par un difféomorphisme.

3.1. Contrairement au cas des projectifs (*cf.* [2], 3.5), les tores ne possèdent pas de structure riemannienne canonique; ils possèdent cependant des structures riemanniennes distinguées, dites *plates*, que l'on obtient ainsi : soit Λ un réseau quelconque de $\mathbf{R}^a$, c'est-à-dire un sous-groupe discret de $\mathbf{R}^a$ de rang maximum a. Alors $\mathbf{R}^a/\Lambda$ est difféomorphe à T^a et, si g_0 désigne la structure riemannienne canonique de $\mathbf{R}^a$, g_0 passe au quotient $\mathbf{R}^a/\Lambda$ parce que g_0 est invariante par toutes les translations de $\mathbf{R}^a$ en particulier par celles de Λ. D'où sur $\mathbf{R}^a/\Lambda$ une structure riemannienne g_0/Λ, soit une variété riemannienne $(\mathbf{R}^a/\Lambda,\ g_0/\Lambda)$, appelée *tore plat.* On posera alors par abus :

$$(\mathbf{R}^a/\Lambda,\ g_0/\Lambda) = (T^a,\ \Lambda).$$

Ces différents tores plats ne sont pas isométriques en général; précisément :

3.2. Propriété. — (T^a, Λ) *et* (T^a, Λ') *sont isométriques si et seulement si il existe une isométrie* σ *de l'espace euclidien* $\mathbf{R}^a$ *telle que* $\sigma(\Lambda) = \Lambda'$.

3.3. Pour calculer $\mathrm{vol}\,(T^a, \Lambda)$, rappelons que (*cf.* par exemple [4], p. 10 ou [8], p. 23) que deux bases directes $\{e_i\}_{i=1,\dots,a}$, $\{f_i\}_{i=1,\dots,a}$, de Λ se déduisent l'une de l'autre par une application linéaire de déterminant égal à 1, donc $\det(e_1, \dots, e_a)$ est indépendant de la base directe considérée. Cette valeur commune est *notée* $\det(\Lambda)$ et est appelée le *déterminant* de Λ. On a alors :

3.4. $$\mathrm{vol}\,(T^a, \Lambda) = \det(\Lambda).$$

Noter encore que, pour toute base $\{e_i\}$, on a

$$\det(\Lambda) = |e_1 \wedge \ldots \wedge e_a|$$

avec les notations 2.5.

3.5. On peut, plus généralement, introduire toutes les notions précédentes en remplaçant $\mathbf{R}^a$ par un espace euclidien orienté quelconque E.

Soit $p : \mathbf{R}^a \to \mathbf{R}^a/\mathbf{Z}^a$ la projection canonique.

3.6. DÉFINITION. — *Une sous-variété* Z *de* T^a *est dite un* sous-tore *de dimension* b *de* T^a *s'il existe un sous-réseau de rang* b, *soit* Ξ, *de* $\mathbf{Z}^a$ *tel que, si* $v(\Xi)$ *désigne le sous-espace vectoriel de dimension* b *de* $\mathbf{R}^a$ *engendré par* Ξ, *on ait*

$$\Xi = v(\Xi) \cap \mathbf{Z}^a \quad et \quad Z = p(v(\Xi)).$$

Alors Z s'identifie au quotient $v(\Xi)/\Xi$; on devra en outre (*cf.* 2.1) munir Z d'une orientation.

3.7. NOTATION. — *Pour une sous-variété* Z *de* T^a, *on notera* $Z \approx T^b$ (dans T^a) *le fait que* Z *est un sous-tore de dimension* b *de* T^a.

Le résultat ci-dessous, classique en géométrie des nombres (*cf.* par exemple [8], theorem 5, p. 21) sera utile dans la suite.

3.8. LEMME. — *Quel que soit* Ξ *comme en* 3.6, *toute base de* Ξ *peut être complétée en une base de* $\mathbf{Z}^a$.

3.9. Soit (T^a, Λ) un tore plat et $Z \approx T^b$ (dans T^a) associé, comme en 3.6, à Ξ et $v(\Xi)$. A cette situation on attache une *forme volume canonique* ω_Z, ainsi définie : ω_Z est la forme différentielle de degré b sur T^a, qui est invariante par translations et dont la valeur $\omega_Z(p(0))$ en l'origine $p(0) \in T^a$ n'est autre que

3.10. $$\omega_Z(p(0)) = \omega_{v(\Xi)},$$

où $\omega_{v(\Xi)}$ est la forme volume canonique du sous-espace vectoriel $v(\Xi)$ de $\mathbf{R}^a$, comme définie en 2.3; on a utilisé dans 3.10 de façon implicite l'isomorphisme canonique $\mathbf{R}^a$ et l'espace tangent en $p(0)$ à T^a. Noter que ω_Z est fermée : $d\omega_Z = 0$, comme plus généralement toute forme différentielle sur T^a qui est invariante par translations.

4. Homologie. — Pour une variété X, de dimension a, on notera

$$H_*(X, \mathbf{R}) = \bigoplus_{b=0}^{a} H_b(X, \mathbf{R}), \qquad H_*(X, \mathbf{Z}) = \bigoplus_{b=0}^{a} H_b(X, \mathbf{Z}),$$

$$H^*(X, \mathbf{R}) = \bigoplus_{b=0}^{a} H^b(X, \mathbf{R}), \qquad H^*(X, \mathbf{Z}) = \bigoplus_{b=0}^{a} H^b(X, \mathbf{Z})$$

les homologies et cohomologies réelles et entières de X. D'après 2.1, $H_a(X, \mathbf{Z})$ et $H^a(X, \mathbf{Z})$ sont canoniquement isomorphes à $\mathbf{Z}$; le générateur correspondant est appelé la *classe fondamentale* de X; le $b^{\text{ième}}$ nombre de Betti de X est noté $\beta_b(X) = \dim H_b(X, \mathbf{R}) = \dim H^b(X, \mathbf{R})$; il est fini d'après 2.1.

4.1. Pour $X = T^a$, on a $\beta_b(T^a) = \binom{a}{b}\cdot$ Plus précisément $H_b(T^a, \mathbf{Z})$ est canoniquement isomorphe à $\bigwedge^b(\mathbf{Z}^a)$ comme suit : soit $\{e_i\}_{i=1\ldots,a}$ la base canonique de $\mathbf{R}^a$ et $Z_{i_1,\ldots,i_b}$ le sous-tore de T^a associé au b-uple $\{e_{i_1}, \ldots, e_{i_b}\}$ $(i_1 < \ldots < i_b)$. Alors l'ensemble des classes d'homologie des sous-variétés $Z_{i_1\ldots i_b}$ fournit l'isomorphisme en question. On notera que $H_b(T^a, \mathbf{Z})$ est un réseau de $H_b(T^a, \mathbf{R})$ et aussi que tout sous-tore $Z \approx T^b$ (dans T^a) a une classe fondamentale qui, dans $H_b(T^a, \mathbf{Z}) = \bigwedge^b(\mathbf{Z}^a)$, est un b-vecteur décomposable du $\mathbf{Z}$-module $\bigwedge^b(\mathbf{Z}^a)$.

4.2. Propriété. — *Pour* $b = 1$ *ou* $b = a - 1$, *tout élément de* $\bigwedge^b(\mathbf{Z}^a)$ *est décomposable.*

Il n'y a matière à démonstration que si $b = a - 1$; dans ce cas on peut procéder comme dans les espaces vectoriels grâce au lemme 3.8.

4.3. Notations. — *Soit* Y *une sous-variété de la variété* X; *on notera* classe (Y) *sa classe d'homologie dans* $H_*(X, \mathbf{Z})$. *Si* Y, Y′ *sont deux sous-variétés, on écrira* $Y \sim Y'$ *pour* classe (Y) = classe (Y′). *On écrira* $Y \not\sim 0$ (dans X) *pour* classe (Y) $\neq 0$. *Enfin* $Y \sim T^b$ (dans T^a) *signifiera qu'il existe* $Z \approx T^b$ (dans T^a) *tel que* $Y \sim Z$.

4.4. Lemme. — Si $b = 1$ *ou* $b = a - 1$, *quelle que soit* $c \in H_b(T^a, \mathbf{Z})$ *il existe* $n \in \mathbf{N}$ *et* $Z \approx T^b$ (dans T^a) *tels que* $c = n.$classe (Z).

Avec l'isomorphisme du 4.1 et 4.2, il existe $e_1, \ldots, e_b \in \mathbf{Z}^a$ tels que $c = e_1 \wedge \ldots \wedge e_b$; soit Ξ le réseau $\mathbf{Z}^a \cap (\mathbf{R}.e_1 + \ldots + \mathbf{R}.e_b)$ et $\{f_1, \ldots, f_b\}$ une base de Ξ. Alors

$$e_1 \wedge \ldots \wedge e_b = n(f_1 \wedge \ldots \wedge f_b) \qquad \text{avec} \quad n \in \mathbf{N}$$

et donc $c = n.$classe (Z) si Z est le sous-tore associé à Ξ.

5. Dualité.

5.1. Toutes les variétés seront dorénavant *sans torsion;* en particulier on pourra identifier $H_*(X, \mathbf{Z})$ à un sous-ensemble de $H_*(X, \mathbf{R})$ et $H^*(X, \mathbf{Z})$ à un sous-ensemble de $H^*(X, \mathbf{R})$, sous-ensembles qui sont en fait des réseaux.

La dualité de Poincaré affirme que, si X est une variété de dimension a (*cf.* 2.1) alors, pour tout b, $H_b(X, \mathbf{R})$ et $H^{a-b}(X, \mathbf{R})$ sont canoniquement isomorphes, de même $H_b(X, \mathbf{Z})$ et $H^{a-b}(X, \mathbf{Z})$: *cf.* [7], 26.6; on notera $\flat : H_b(X, \mathbf{R}) \to H^{a-b}(X, \mathbf{R})$ cet isomorphisme et

$$\sharp : H^{a-b}(X, \mathbf{R}) \to H_b(X, \mathbf{R})$$

son image réciproque. On peut préciser cette dualité de deux façons.

Pour tout b le théorème de de Rham fournit un isomorphisme canonique entre $H^b(X, \mathbf{R})$ et $F^b(X, \mathbf{R})/B^b(X, \mathbf{R})$, où $F^b(X, \mathbf{R})$ est l'ensemble des formes différentielles de degré b sur X qui sont fermées et $B^b(X, \mathbf{R})$ celui de celles qui sont des différentielles extérieures de formes de degré $b-1$. Pour $\alpha \in F^b(X, \mathbf{R})$, on notera classe (α) son image dans

$$F^b(X, \mathbf{R})/B^b(X, \mathbf{R}) = H^b(X, \mathbf{R}).$$

Les éléments de $F^b(X, \mathbf{Z})$ sont par définition les *formes à périodes entières*, i. e. $\int_c \alpha \in \mathbf{Z}$ pour toute chaîne entière c de X; en particulier $\int_Y \alpha \in \mathbf{Z}$ pour toute sous-variété de dimension b de X. On a (*cf.* 5.1) :

$$H^b(X, \mathbf{Z}) = F^b(X, \mathbf{Z})/F^b(X, \mathbf{Z}) \cap B^b(X, \mathbf{R}).$$

La première façon de réaliser la dualité de Poincaré est la :

5.2. Propriété. — *Soient* $\alpha \in F^{a-b}(X, \mathbf{Z})$ *et* Y *une sous-variété de dimension* b *de* X. *Alors* (classe $(\alpha))^\sharp =$ classe (Y) *si et seulement si*

$$\forall\, \beta \in F^b(X, \mathbf{R}) : \quad \int_Y \beta = \int_X \alpha \wedge \beta.$$

Ceci résulte du théorème de de Rham et des définitions (24.19) et (26.6) de [7]. Pour la deuxième réalisation de cette dualité, donnons d'abord la :

5.3. Définition. — *Une sous-variété* Z *d'une variété* X *est dite* sous-variété noyau *s'il existe une variété* Y, *un morphisme* $f : X \to Y$ *et une valeur régulière* z *de* f *telle que* $Z = f^{-1}(z)$.

5.4. Une sous-variété est noyau si et seulement si son fibré normal est trivial; et on peut toujours prendre alors pour Y une sphère : [9], p. 19.

En particulier toute sous-variété de dimension 1 ou de codimension 1 est une sous-variété noyau, d'après 2.1. Autre exemple : tout $Z \approx T^b$ (dans T^a) est une sous-variété noyau. Ceci posé, on a la dualité ci-dessous :

5.5. Proposition ([9], § 4, p. 31). — *Soient* X, Y *deux variétés*, $f : X \to Y$ *un morphisme*, c *la classe de cohomologie fondamentale de* Y *et* z *une valeur régulière de* f *telle que* $f^{-1}(z) \neq \emptyset$. *Alors :*

$$(f^* c)^{\#} = \text{classe}\,(f^{-1}(z)).$$

Suivant encore [9], p. 31, nous emploierons la :

5.6. Définition. — *Une classe* $c \in H^b(X, \mathbf{Z})$ *est dite* sphérique *s'il existe une variété* Y *de dimension* b, *un morphisme* $f : X \to Y$ *tel que* $c = f^* d$ *où* d *est la classe de cohomologie fondamentale de* Y. *Une forme* $\alpha \in F^b(X, \mathbf{Z})$ *est dite* sphérique *s'il existe* Y, $f : X \to Y$ *comme ci-dessus et en outre* $\beta \in F^b(Y, \mathbf{Z})$ *tels que* classe $(\beta) = d$ et $f^* \beta = \alpha$.

5.7. Exemples. — Toute $\alpha \in F^1(X, \mathbf{Z})$ est sphérique; en effet on fabrique une application $f_\alpha : X \to S^1$ dans le cercle ainsi : on fixe $x_0 \in X$ et pour tout $x \in X$ on considère $\int_c \alpha$ où c est un chemin de x_0 à x. Comme $\alpha \in F^1(X, \mathbf{Z})$, ses périodes sont entières, donc, si c' est un autre chemin de x_0 à x : $\int_c \alpha - \int_{c'} \alpha \in \mathbf{Z}$, ce qui prouve que l'image $f_\alpha(x) = \int_c \alpha$ dans $\mathbf{R}/\mathbf{Z} = S^1$ ne dépend bien que de x et non de c. Toute classe $c \in H^{a-1}(T^a, \mathbf{Z})$ est sphérique; en effet, grâce à 4.2 et 4.1, on peut écrire $c = c_1 \wedge \ldots \wedge c_b$ où $c_i \in H^1(T^a, \mathbf{Z})$ pour tout $i = 1, \ldots, b$. A l'aide de formes quelconques, α_i telles que classe $(\alpha_i) = c_i$, on fabrique, suivant le premier exemple, l'application produit $f = (f_{\alpha_1}, \ldots, f_{\alpha_b})$ dans $(S^1)^b$. Bien prendre garde à ce qu'en général une forme $\alpha \in F^{a-1}(T^a, \mathbf{Z})$ n'est pas sphérique.

6. Carcans. — Suivant [2], § 5, on introduit, pour toute variété riemannienne (X, g), de dimension a et tout entier b $(0 < b < a)$, les :

6.1. *Carcans et quotients :*

$$\text{carc}_b(X, g) = \inf \{ \text{vol}(Y, g \mid Y) : Y \text{ sous-variété de dimension } b \text{ de } X \text{ et } Y \not\sim 0 \},$$

$$\text{carc}'_b(X, g) = \inf \{ \text{vol}(Y, g \mid Y) : Y \text{ sous-variété noyau de dimension } b \text{ de } X \text{ et } Y \not\sim 0 \},$$

$$\text{quot}_b(X, g) = (\text{vol}(X, g))^b / (\text{carc}_b(X, g))^a,$$

$$\text{quot}'_b(X, g) = (\text{vol}(X, g))^b / (\text{carc}'_b(X, g))^a.$$

On a

6.2.
$$\begin{cases} \text{pour tout } b: \quad \mathrm{quot}_b(X, g) \geqq \mathrm{quot}'_b(X, g), \\ \mathrm{quot}_1(X, g) = \mathrm{quot}'_1(X, g), \\ \mathrm{quot}_{a-1}(X, g) = \mathrm{quot}'_{a-1}(X, g) \qquad (a = \dim X). \end{cases}$$

La dernière résulte directement de 5.4. Pour les tores riemanniens on introduit en outre aussi :

6.3.
$$\begin{cases} \mathrm{carc}''_b(T^a, g) = \inf\{\mathrm{vol}(Y, g\,Y) : Y \sim T^b \text{ (dans } T^a)\}, \\ \mathrm{quot}''_b(T^a, g) = (\mathrm{vol}(T^a, g))^b/(\mathrm{carc}''_b(T^a, g))^a. \end{cases}$$

6.4. Même si $b = 1$ ou $a - 1$, le lemme 4.4 n'entraîne pas nécessairement $\mathrm{carc}_b(T^a, g) = \mathrm{carc}''_b(T^a, g)$; il se pourrait en effet que la borne inférieure $\mathrm{carc}_b(T^a, g)$ correspondent à des sous-variétés Y telles que classe (Y) $= n.$classe (Z), avec $Z \approx T^b$ (dans T^a) mais $n > 1$. On verra au 7.2 que ceci ne peut pas se produire par contre si (T^a, g) est un tore plat.

7. Carcans des tores plats. — On voudrait calculer les $\mathrm{carc}_b(T^a, \Lambda)$ d'un tore plat (*cf.* 3.1) (T^a, Λ). On a seulement la :

7.1. Proposition. — *Pour tous* a, b $(0 < b < a)$, Λ :

$$\mathrm{carc}''_b(T^a, \Lambda) = \inf\{\mathrm{vol}(Z, \Lambda \mid Z) : Z \approx T^b \text{ (dans } T^a)\}.$$

Soient $Y \sim T^b$ (dans T^a) et $Z \approx T^b$ (dans T^a) telles que $Y \sim Z$. Soit ω_Z la forme volume associée à Z (*cf.* 3.9); elle est fermée, donc $\int_Y \omega_Z = \int_Z \omega_Z$. Mais, d'après 3.10 et 2.4 :

$$\int_Z \omega_Z = \mathrm{vol}(Z, \Lambda \mid Z) \qquad \text{et} \qquad \int_Y \omega_Z \leqq \mathrm{vol}(Y, \Lambda \mid Y).$$

Comme, pour lui-même : $Z \approx T^b$ (dans T^a), la proposition est démontrée.

7.2. Corollaire. — *Si* $b = 1$ *ou* $a - 1$, *on a*

$$\mathrm{carc}_b(T^a, \Lambda) = \mathrm{carc}'_b(T^a, \Lambda) = \mathrm{carc}''_b(T^a, \Lambda).$$

On applique le lemme 4.4 : classe (Y) $= n.$classe (Z), $n \in \mathbf{N}^*$ et $Z \approx T^b$ (dans T^a), d'où

$$\int_Y \omega_Z = n\int_Z \omega_Z \geqq \int_Z \omega_Z.$$

7.3. Notation. — *On pose*

$$\overset{b}{\wedge}_{\mathrm{dec}} \Lambda = \{\xi \in \overset{b}{\wedge} \Lambda : \xi \text{ décomposable}\}.$$

La formule 3.4 et ce qui la suit permettent de reformuler 7.1 en :

7.4. Corollaire. — *Pour tous a, b $(0 < b < a)$, Λ :*

$$\mathrm{carc}''_b\,(T^a, \Lambda) = \inf\left\{ |\xi| : \xi \in \overset{b}{\wedge}{}_{\mathrm{dec}}\Lambda - \{0\} \right\}.$$

Pour terminer l'étude des $\mathrm{carc}''_b\,(T^a, \Lambda)$, il n'y a plus qu'à introduire les :

7.5. Notations et définition. — *Soit Λ un réseau de $\mathbf{R}^a$ ou, plus généralement, d'un espace euclidien de dimension a. On pose, pour tout entier b $(0 < b < a)$:*

$$u_b(\Lambda) = (\det(\Lambda))^b \Big/ \left(\inf\left\{ |\xi| : \xi \in \overset{b}{\wedge}{}_{\mathrm{dec}}\Lambda - \{0\}\right\}\right)^a.$$

Pour tous entiers a et b $(0 < b < a)$, on pose

$$u_{a,b} = \inf\{ u_b(\Lambda) : \Lambda \text{ réseau de } \mathbf{R}^a \}.$$

*Un réseau Λ de rang a est dit b-*critique *si $u_b(\Lambda) = u_{a,b}$.*

Les $u_1(\Lambda)$ et les $u_{a,1}$ sont bien connus en géométrie des nombres : dans [4], $u_1(\Lambda)$ est noté $\lambda_1 = F(\Lambda)$ page 202 et $u_{a,1}$ est noté $\Gamma_{a,0}$ page 332; on introduit aussi, page 332, le réel γ_a tel que $\gamma_a = (\Gamma_{a,0})^{-2/a}$, qui est appelé la constante d'Hermite. Dans [8], γ_a est noté de la même façon page 294 et $u_1(\Lambda)$ est noté $\gamma_1(\|.\|, \Lambda)$ page 290.

On sait que, quel que soit a, il existe des réseaux 1-critiques : [4], p. 142 ou [8], p. 133; en particulier $u_{a,1} > 0$ pour tout a. Mais la valeur de $u_{a,1}$ n'est connue explicitement que pour $a = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$: [4], p. 332 ou [8], p. 317-318. Pour $a = 2$, il n'y a qu'un réseau 1-critique à une similitude près, c'est le réseau de $\mathbf{R}^2$ engendré par $(1, 0)$ et $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, ce qui justifie la :

7.6. Définition. — *Un tore plat* (T^2, Λ) *est* équilatéral *si* Λ *est* 1-*critique.*

De 7.2 et 7.4 on déduit donc la :

7.7. Proposition. — *Quel que soit le réseau Λ de $\mathbf{R}^2$, on a*

$$\mathrm{quot}_1\,(T^2, \Lambda) = \mathrm{quot}'_1\,(T^2, \Lambda) = \mathrm{quot}''_1\,(T^2, \Lambda) \geqq \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \textit{et} \qquad \mathrm{quot}_1\,(T^2, \Lambda) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

si et seulement si (T^2, Λ) est un tore plat équilatéral.

Les $u_{a,1}$ $(2 \leqq b \leqq a - 1)$ ne semblent pas avoir été étudiés; on a les deux résultats élémentaires :

7.8. Proposition. — *Pour tous a et b : $u_{a,b} > 0$.*

Il suffit d'appliquer la formule $\det(\Lambda) \geqq u_{a,1} . \lambda_1(\Lambda) \ldots \lambda_a(\Lambda)$ sur les minimums successifs $\lambda_i(\Lambda)$ du réseau Λ : [4], p. 205. Par définition des $\lambda_i(\Lambda)$ (*cf.* [4], p. 201) il existe une base $\{ e_i \}_{i=1,\ldots,a}$ de Λ telle que $| e_i | = \lambda_i(\Lambda)$. Alors le sous-tore Z_b engendré par $\{ e_1, \ldots, e_b \}$ est tel que

$$\mathrm{vol}(Z_b, \Lambda \mid Z_b) \leqq | e_1 | \ldots | e_b | = \lambda_1(\Lambda) \ldots \lambda_b(\Lambda).$$

Donc

$$u_b(\Lambda) \leqq \lambda_1(\Lambda) \ldots \lambda_b(\Lambda).$$

Comme, par construction, $\lambda_1(\Lambda) \leqq \ldots \leqq \lambda_a(\Lambda)$, on a

$$(u_b(\Lambda))^a \leqq (\lambda_1(\Lambda))^a \ldots (\lambda_b(\Lambda))^a \leqq (\lambda_1(\Lambda))^b \ldots (\lambda_a(\Lambda))^b \leqq (u_{a,1})^{-b} (\det(\Lambda))^b,$$

d'où $\mathrm{quot}_b(T^a, \Lambda) \geqq u_{a,1}$. Ceci ayant lieu pour tout Λ, on a bien $u_{a,b} \geqq (u_{a,1})^b > 0$.

Je ne sais pas s'il existe toujours, pour $b > 1$, des réseaux b-critiques. Sauf pour $b = a - 1$ à cause de la dualité :

7.9. Proposition. — *Pour tout* a : $u_{a,a-1} = u_{a,1}$.

7.10. Rappelons d'abord que, pour un réseau Λ de $\mathbf{R}^a$, on appelle *réseau dual* de Λ, et *note* Λ^*, le réseau de $\mathbf{R}^a$ défini par

$$\Lambda^* = \{ x \in \mathrm{R}^a : (x \mid y) \in \mathbf{Z}, \forall\, y \in \Lambda \}.$$

Cette notion est aussi valable pour un réseau d'un espace euclidien quelconque. Alors (*cf.* [4], p. 24 où il est dit réseau polaire au lieu de dual) :

7.11. $$\det(\Lambda) . \det(\Lambda^*) = 1.$$

7.12. Lemme. — *Soient* $\{ e_i \}_{i=1,\ldots,a}$ *une base de* Λ *et* $\{ e_i^* \}_{i=1,\ldots,a}$ *la base duale de* $\mathbf{R}^a$ (*pour l'identification de* $\mathbf{R}^a$ *avec son dual par sa structure euclidienne*). *Alors, pour tout* i :

$$\det(\Lambda) = | e_1 \wedge \ldots \wedge \hat{e}_i \wedge \ldots \wedge e_a | / | e_i^* |.$$

Soit en effet e_i' le vecteur orthogonal à $e_1, \ldots, e_{i-1}, e_{i+1}, \ldots, e_a$ et tel que $(e_i' \mid e_i) = 1$; on a $| e_i' | = | e_i^* |^{-1}$ parce que $(e_i' \mid e_j) = (e_i^* \mid e_j) = 0$ pour tout $j \neq i$ donc $e_i' = \lambda\, e_i^*$, mais $(e_i^* \mid e_i) = 1$, donc $| e_i' | . | e_i^* | = 1$. Puis

$$\det(\Lambda) = | e_1 \wedge \ldots \wedge e_a | = | e_1 \wedge \ldots \wedge \hat{e}_i \wedge \ldots \wedge e_a | . | e_i' |$$

parce que e_i' est orthogonal à tous les e_j $(j \neq i)$.

Démontrons maintenant 7.9. Soit d'abord Λ un réseau tel que Λ^* soit 1-critique et soit Ξ le réseau de rang $a - 1$ tel que

$$(\det(\Lambda))^{a-1} = (\det(\Xi))^a . u_{a-1}(\Lambda).$$

Soit $\{ e_i \}_{i=1,\ldots,a}$ une base de Λ telle que $\{ e_i \}_{i=1,\ldots,a-1}$ soit une base de Ξ (*cf.* 3.8). D'après le lemme : $\det(\Lambda) = \det(\Xi)/| e_i^* |$. Comme Λ^* est critique, on a, pour tout i : $\det(\Lambda^*)/| e_i^* |^a \leqq u_1(\Lambda^*) = u_{a,1}$, en particulier $\det(\Lambda^*) \leqq | e_i^* | . u_{a,1}$. D'où (*cf.* 7.11) :

$$u_{a,a-1} \leqq \frac{(\det(\Lambda))^{a-1}}{(\det(\Xi))^a} = \frac{(\det(\Lambda))^{a-1}}{(\det(\Lambda))^a \, | e_1^* |^a} = \frac{\det(\Lambda^*)}{| e_1^* |^a} \leqq u_{a,1}.$$

Réciproquement, soit, pour tout $\varepsilon > 0$, un réseau Λ tel que $u_{a-1}(\Lambda) \leqq u_{a,a-1} + \varepsilon$; soit Λ^* le réseau dual et $\{ e_i \}_{i=1,\ldots,a}$ une base de Λ telle que $\det(\Lambda^*) = u_1(\Lambda^*) \, | e_1^* |^a$. Soit Ξ le réseau de rang $a-1$ engendré par $e_2, \ldots, e_a$. Alors

$$\frac{(\det(\Lambda))^{a-1}}{(\det(\Xi))^a} \leqq u_{a-1}(\Lambda) \leqq u_{a,a-1} + \varepsilon$$

et lemme (7.12) : $\det(\Lambda) = \det(\Xi)/| e_1^* |$. En remplaçant :

$$u_{a,a-1} + \varepsilon \geqq \frac{(\det(\Lambda))^{a-1}}{(\det(\Xi))^a \, | e_1^* |^a} = \frac{\det(\Lambda^*)}{| e_1^* |^a} = u_1(\Lambda^*) \geqq u_{a,1};$$

ceci ayant lieu quel que soit ε, on a bien $u_{a,a-1} \geqq u_{a,1}$.

Enfin reformulons la définition des $u_{a,b}$ et le corollaire 7.4 en la :

7.13. Scolie. — *Pour tous a, b, Λ :* $\mathrm{quot}''_b(\mathrm{T}^a, \Lambda) \geqq u_{a,b}$ *et l'égalité a lieu si et seulement si Λ est b-critique.*

8. Assertions. — Comme dans le paragraphe 8 de [2], nous introduisons ci-dessous des assertions, relatives d'abord à une variété quelconque X de dimension a (*cf.* 2.1), puis au cas $\mathrm{X} = \mathrm{T}^a$:

8.1. Notations :

« P (X, b) » [resp. « P′ (X, b) »] : $\exists\, k > 0$ tel que $\forall\, g$: $\mathrm{quot}_b(\mathrm{X}, g) \geqq k$ [resp. $\mathrm{quot}'_b(\mathrm{X}, g) \geqq k$],

« P (a, b) » [resp. « P′ (a, b) », « P″ (a, b) »] : $\exists\, k > 0$ tel que $\forall\, g$: $\mathrm{quot}_b(\mathrm{T}^a, g) \geqq k$ [resp. $\mathrm{quot}'_b(\mathrm{T}^a, g) \geqq k$, $\mathrm{quot}''_b(\mathrm{T}^a, g) \geqq k$],

« I (a, b) » [resp. « I′ (a, b) », « I″ (a, b) »] : $\forall\, g$: $\mathrm{quot}_b(\mathrm{T}^a, g) \geqq u_{a,b}$ [resp. $\mathrm{quot}'_b(\mathrm{T}^a, g) \geqq u_{a,b}$, $\mathrm{quot}''_b(\mathrm{T}^a, g) \geqq u_{a,b}$],

« IC (a, b) » [resp. « IC′ (a, b) », « IC″ (a, b) »] : « I (a, b) » [resp. « I′ (a, b) », « I″ (a, b) »] et $\mathrm{quot}_b(\mathrm{T}^a, g) = u_{a,b}$ [resp. $\mathrm{quot}'_b(\mathrm{T}^a, g) = u_{a,b}$, $\mathrm{quot}''_b(\mathrm{T}^a, g) = u_{a,b}$] entraîne : (T^a, g) est isométrique à un tore plat (T^a, Λ) où Λ est un réseau b-critique.

Bien sûr 6.2 et 7.2 entraînent que certaines de ces assertions sont identiques. A notre connaissance, au sujet de toutes ces assertions, les seuls résultats connus sont, outre « P (X, 1) » pour X le projectif réel de dimension 2 (*cf.* [2], 8.3, théorème de Pu) : le théorème de Loewner « IC (2, 1) » est vraie (*voir* 10.7) et le théorème de Blatter : « P (X, 1) » est vraie pour toute variété X de dimension deux (*voir* 10.8). Le seul résultat que nous ayons pu obtenir est une relation entre les quot'_b (X, g) et les normes des formes différentielles sur (X, g), relation qui n'est autre qu'une généralisation de la technique d'Accola et Blatter, *cf.* [1], lemma 3 et [3], Satz 1. Les paragraphes 9 et 10 ci-dessous sont consacrés à l'établissement de cette relation.

9. Normes des formes différentielles. — Sur la variété X de dimension a, notons $\Omega^b(X)$ l'espace vectoriel des formes différentielles de degré b. Supposons dorénavant que (X, g) soit une variété riemannienne; alors $\Omega^b(X)$ devient un préhilbert pour le produit scalaire global et la norme associée :

9.1. $$\langle \alpha, \beta \rangle_g = \int_X (\alpha \mid \beta)_g \, v_g, \qquad \| \alpha \|_g^2 = \int_X | \alpha |_g^2 \, v_g,$$

où le produit scalaire ponctuel $(\alpha \mid \beta)_g$ est celui défini en chaque point $x \in X$ comme en 2.5 à partir de la structure euclidienne que g induit sur l'espace tangent en x à X. Noter que 9.1 a un sens parce que X est compacte (*cf.* 2.1) et que v_g est la mesure introduite en 2.2. Comme X est orientée (*cf.* 2.1) on déduit des opérations $\star$ ponctuelles introduites en 2.5 les opérations

$$\star : \quad \Omega^b(X) \to \Omega^{a-b}(X).$$

De la formule 2.6 on tire alors

9.2. $$\langle \alpha, \beta \rangle = \int_X \alpha \wedge \star \beta,$$

formule où l'on a supprimé l'indice g, ce que l'on fera chaque fois qu'il n'y aura pas d'ambiguïté possible.

Sur une variété riemannienne (X, g) une forme $\Omega^b(X)$ est dite *harmonique* si α et $\star\alpha$ sont fermées : $d\alpha = 0$ et $d(\star\alpha) = 0$. Il est classique que, quel que soit b et quelle que soit la classe

$$c \in H^b(X, \mathbf{R}) = F^b(X, \mathbf{R})/B^b(X, \mathbf{R}),$$

il existe une $\omega \in c$ et une seule telle que

$$\| \omega \| = \inf \{ \| \alpha \| : \alpha \in c \},$$

et que cette forme ω est harmonique. On posera

$$\mathcal{H}^b(X, \mathbf{R}) = \{ \omega \in \Omega^b(X) : \omega \text{ harmonique} \},$$
$$\mathcal{H}^b(X, \mathbf{Z}) = \mathcal{H}^b(X, \mathbf{R}) \cap F^b(X, \mathbf{Z}).$$

Les éléments de $\mathcal{H}^b(X, \mathbf{Z})$ sont les formes harmoniques à périodes entières. Exemple : sur un tore plat, les formes harmoniques sont exactement les formes invariantes par translations. Les applications

$$F^b(X, \mathbf{R}) \supset \mathcal{H}^b(X, \mathbf{R}) \to H^b(X, \mathbf{R}), \qquad F^b(X, \mathbf{Z}) \supset \mathcal{H}^b(X, \mathbf{Z}) \to H^b(X, \mathbf{Z})$$

sont des isomorphismes; en particulier les $\mathcal{H}^b(X, \mathbf{R})$ sont des espaces vectoriels de dimension finie, euclidiens, de dimension égale à $\beta_b(X)$, le $b^{\text{ième}}$ nombre de Betti de X; noter que $\mathcal{H}^b(X, \mathbf{Z})$ est un réseau de l'espace euclidien $\mathcal{H}^b(X, \mathbf{R})$.

La structure euclidienne sur $\mathcal{H}^b(X, \mathbf{R})$ en fournit une sur $H^b(X, \mathbf{R})$ qui lui est canoniquement isomorphe, d'où maintenant un isomorphisme canonique entre $H^b(X, \mathbf{R})$ et $H_b(X, \mathbf{R})$; la dualité de Poincaré (*cf.* § 5) fournit donc un isomorphisme entre $\mathcal{H}^b(X, \mathbf{R})$ et $\mathcal{H}^{a-b}(X, \mathbf{R})$. La propriété 5.2 et la formule 9.2 montrent que cet isomorphisme n'est autre que

$$\star : \mathcal{H}^b(X, \mathbf{R}) \to \mathcal{H}^{a-b}(X, \mathbf{R}),$$

qui a bien un sens parce que ω harmonique entraîne $\star\,\omega$ harmonique. Bien prendre garde à ce que, en général : $\star(\mathcal{H}^b(X, \mathbf{Z})) \neq \mathcal{H}^{a-b}(X, \mathbf{Z})$. Par contre, on a entre $\mathcal{H}^b(X, \mathbf{Z})$ et $\mathcal{H}^{a-b}(X, \mathbf{Z})$ la relation suivante : l'accouplement $[\alpha, \beta] \to \int_X \alpha \wedge \beta$, associé au cup-produit, est tel que $\int_X \alpha \wedge \beta \in \mathbf{Z}$ dès que $\alpha \in F^b(X, \mathbf{Z})$ et $\beta \in F^{a-b}(X, \mathbf{Z})$. On en déduit donc l'inclusion :

9.3. $$\star(\mathcal{H}^b(X, \mathbf{Z})) \subset (\mathcal{H}^{a-b}(X, \mathbf{Z}))^*,$$

où l'étoile de gauche est l'opération $\star$ sur les formes différentielles et celle de gauche désigne le réseau dual du réseau $\mathcal{H}^{a-b}(X, \mathbf{R})$ de l'espace euclidien $\mathcal{H}^{a-b}(X, \mathbf{R})$: *cf.* 7.10. En général, l'inclusion 9.3 sera stricte, l'égalité étant garantie par le lemme banal :

9.4. Lemme. — $\star(\mathcal{H}^b(X, \mathbf{Z})) = (\mathcal{H}^{a-b}(X, \mathbf{Z}))^*$ *si et seulement si, pour toute forme* $\alpha \in F^b(X, \mathbf{R})$, *on a* $\alpha \in F^b(X, \mathbf{Z})$ *dès que* $\int_X \alpha \wedge \beta \in \mathbf{Z}$ *quel que soit* $\beta \in F^{a-b}(X, \mathbf{Z})$.

Cette condition est purement topologique et relative à X, elle ne fait pas intervenir la structure riemannienne g.

9.5. Lemme. — *La condition du lemme* 9.4 *est satisfaite si :* (*a*) $X = T^a$; (*b*) X *est de dimension égale à* 2; (*c*) X *est un espace projectif* P_i^a, *avec* $i = 2$ (*projectif complexe*), $i = 4$ (*projectif quaternionien*), $i = 8$ *et* $a = 2$ (*plan* *projectif des octaves de Cayley*); (*d*) $X = S^a \times S^a$, *carré de la sphère de dimension a.*

La condition du lemme 9.4, après usage du théorème de de Rham, est équivalente, pour les classes de cohomologie, à

$$\forall\, c \in H^b(X, \mathbf{R}), \quad \forall\, d \in H^{a-b}(X, \mathbf{Z}) : \quad (c \cup d)[X] \in \mathbf{Z} \quad \text{entraîne } c \in H^b(X, \mathbf{Z}),$$

où $. \cup .$ désigne le cup-produit et $\alpha[X]$ la valeur de α sur la classe fondamentale d'homologie de X. Si $X = T^a$, il résulte du 4.2 que $H^b(T^a, \mathbf{R})$ est isomorphe à $\overset{b}{\wedge}(\mathbf{R}^a)^*$ et, sous cet isomorphisme, le cup-produit devient le produit extérieur dans l'algèbre extérieure; en outre, $H^b(T^a, \mathbf{Z})$ n'est autre que $\overset{b}{\wedge}(\mathbf{Z}^a)^* \subset \overset{b}{\wedge}(\mathbf{R}^a)^*$. Si $\{e_i\}_{i=1,\dots,a}$ est la base canonique de $\mathbf{R}^a$, on a

$$(e_1^* \wedge \dots \wedge e_a^*)[T^a] = 1.$$

Soit

$$c = \sum_{i_1,\dots,i_b} c_{i_1\dots i_b}\, e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_b}^*, \qquad \text{avec} \quad c_{i_1\dots i_b} \in \mathbf{R};$$

appliquant la condition d'intégralité avec $d = e_{i_{b+1}}^* \wedge \dots \wedge e_{i_a}^*$, où $i_{b+1}, \dots, i_a$ sont tels que $\{i_1, \dots, i_a\}$ est une permutation de $\{1, \dots, a\}$ on en déduit bien

$$(c \cup d)[T^a] = \pm\, c_{i_1\dots i_b} \in \mathbf{Z}.$$

Si X est de dimension 2, c'est une surface de genre γ (*cf.* 2.1); il est classique qu'il existe alors une base de $H^1(X, \mathbf{Z})$ de la forme $\{e_i\}_{i=1,\dots,2\gamma}$ telle que tous les $(e_i \cup e_j)[X] = 0$ sauf $(e_{2i-1} \cup e_{2i})[X] = 1$. Ceci montre bien que la condition du lemme est satisfaite. Si $X = P_i^a$, il existe (*cf.* [2], § 4) $c_0 \in H^i(P_i^a, \mathbf{Z})$ telle que, quel que soit b, c_0^b soit un générateur de $H^{ib}(P_i^a, \mathbf{R})$, et en particulier $(c_0^a)[P_i^a] = 1$. Alors si $c = \lambda\, c_0^b$, $\lambda \in \mathbf{R}$, on aura bien $\lambda \in \mathbf{Z}$ parce que $((\lambda\, c_0^b) \cup c_0^{a-b})[P_i^a] = \lambda \in \mathbf{Z}$. Enfin, pour $S^a \times S^a$, la base banale de $H^a(S^a \times S^a, \mathbf{Z})$, soit $\{c, d\}$, vérifie

$$(c \cup c)[S^a \times S^a] = (d \cup d)[S^a \times S^a] = 0 \qquad \text{et} \qquad (c \cup d)[S^a \times S^a] = 1.$$

Maintenant, pour toute variété riemannienne (X, g), on peut parler de $\det(\mathcal{H}^b(X, \mathbf{Z}))$ pour tout b compris entre 0 et $a = \dim X$, au sens de 3.5 appliqué au réseau $\mathcal{H}^b(X, \mathbf{Z})$ de l'espace euclidien $\mathcal{H}^b(X, \mathbf{R})$. En ce sens on a la :

9.6. Proposition. — *Pour toute structure riemannienne g, on a :*

(*a*) *si* X *est de dimension* 2 : $\det(\mathcal{H}^1(X, \mathbf{Z})) = 1$;

(*b*) $\det(\mathcal{H}^a(S^a \times S^a, \mathbf{Z})) = 1$;

(*c*) det $(\mathcal{H}^b(P_i^a, \mathbf{Z}))$.det $(\mathcal{H}^{a-b}(P_i^a, \mathbf{Z})) = 1$ *pour tous* b $(0 < b < a)$, *en particulier, si* a *est pair :* det $(\mathcal{H}^{a/2}(P_i^a, \mathbf{Z})) = 1$;

(*d*) *pour tous* a *et* b $(0 < b < a)$: det $(\mathcal{H}^b(T^a, \mathbf{Z}))$.det $(\mathcal{H}^{a-b}(T^a, \mathbf{Z})) = 1$, *en particulier* det $(\mathcal{H}^{a/2}(T^a, \mathbf{Z})) = 1$ *si* a *est pair.*

Résulte directement des lemmes 9.4, 9.5, de la formule 7.11 et de ce que, d'après 2.6, $\star : \mathcal{H}^b(X, \mathbf{R}) \to \mathcal{H}^{a-b}(X, \mathbf{R})$ est toujours une isométrie donc conserve le déterminant des réseaux.

10. Carcans et normes des formes différentielles. — Soit $c \in H^b(X, \mathbf{Z})$ une classe de cohomologie entière et sphérique (*cf.* 5.6) de la variété riemannienne (X, g) de dimension a; posons la :

10.1. Notation :

$$\operatorname{carc}'(c, g) = \inf\{\operatorname{vol}(Y, g \mid Y) : Y \text{ sous-variété noyau de X telle que classe } (Y) = c^{\#}\}.$$

Puis la :

10.2. Notation :

$$\boxed{c}'_g = \inf\left\{\int_X |\alpha|_g v_g : \alpha \in c \text{ et } \alpha \text{ sphérique}\right\}.$$

10.3. Proposition. — *Soient* (X, g) *une variété riemannienne de dimension* a, b *tel que* $0 < b < a$ *et* $c \in H^b(X, \mathbf{Z})$ *une classe de cohomologie sphérique de* X. *Alors :*

$$\operatorname{carc}'(c, g) = \boxed{c}'_g.$$

Montrons d'abord que $\boxed{c}'_g \geq \operatorname{carc}'(c, g)$. L'idée est une intégration sur les fibres. Soit donc $f : X \to Y$ une application telle que $\alpha = f^*\beta$, où β est telle que $\int_Y \beta = 1$. En $x \in X$, on a $\alpha(x) = (f^*\beta)(x) = 0$ implique, soit que $\beta(f(x)) = 0$, soit que x est un point critique de f. C'est-à-dire, si W désigne l'ensemble des valeurs y de Y régulières pour f, que α ne s'annule jamais sur $f^{-1}\left(W \cap \widehat{\operatorname{supp}(\beta)}\right)$; et en outre f, restreinte à $\widehat{\operatorname{supp}(\alpha)}$, est une submersion. On a donc, par la formule d'intégration sur les fibres (*cf.* [5], 16.24.8) :

10.4. $$\int_{\widehat{\operatorname{supp}(\beta)}} \frac{\star\alpha}{|\alpha|} \wedge \alpha = \int_{y \in \widehat{\operatorname{supp}(\beta)}} \left(\int_{f^{-1}(y) \cap \widehat{\operatorname{supp}(\alpha)}} \frac{\star\alpha}{|\alpha|}\right) \beta.$$

Mais Y — W est de mesure nulle dans Y d'après Sard et, comme on l'a vu, α ne s'annule pas sur $f^{-1}(y)$ si $y \in \mathrm{W} \cap \widehat{\overset{\circ}{\mathrm{supp}}(\beta)}$, donc :

$$\int_{y \in \widehat{\overset{\circ}{\mathrm{supp}}(\beta)}} \left(\int_{f^{-1}(y) \cap \widehat{\overset{\circ}{\mathrm{supp}}(\alpha)}} \frac{\star\,\alpha}{|\alpha|} \right) \beta = \int_{y \in \widehat{\overset{\circ}{\mathrm{supp}}(\beta)} \cap \mathrm{W}} \left(\int_{f^{-1}(y)} \frac{\star\,\alpha}{|\alpha|} \right) \beta.$$

D'après 2.7 la forme $\frac{\star\,\alpha}{|\alpha|}$, restreinte à $f^{-1}(y)$, n'est autre que la forme volume de cet $f^{-1}(y)$, donc, d'après la définition de carc' (c, g) et vu 5.5, on a

$$\int_{f^{-1}(y)} \frac{\star\,\alpha}{|\alpha|} = \mathrm{vol}\,(f^{-1}(y), g \mid f^{-1}(y)) \geqq \mathrm{carc}'(c, g)$$

puis :

$$\int_{y \in \widehat{\overset{\circ}{\mathrm{supp}}(\beta)} \cap \mathrm{W}} \left(\int_{f^{-1}(y)} \frac{\star\,\alpha}{|\alpha|} \right) \beta \geqq \mathrm{carc}'(c, g) \int_{\widehat{\overset{\circ}{\mathrm{supp}}(\beta)}} \beta = \mathrm{carc}'(c, g) \int_{\mathrm{Y}} \beta = \mathrm{carc}'(c, g).$$

Par ailleurs, d'après 2.6 :

$$\frac{\star\,\alpha \wedge \alpha}{|\alpha|} = \frac{|\alpha|^2 v_g}{|\alpha|} = |\alpha|\, v_g,$$

d'où

$$\int_{\widehat{\overset{\circ}{\mathrm{supp}}(\alpha)}} \frac{\star\,\alpha}{|\alpha|} \wedge \alpha = \int_{\widehat{\overset{\circ}{\mathrm{supp}}(\alpha)}} |\alpha|\, v_g = \int_{\mathrm{X}} |\alpha|\, v_g.$$

En conclusion $\int_{\mathrm{X}} |\alpha|\, v_g \geqq \mathrm{carc}'(c, g)$; cette formule étant valable pour toute $\alpha \in c$ sphérique, on a bien

$$\boxed{c}'_g \geqq \mathrm{carc}'(c, g).$$

Montrons maintenant que $\boxed{c}'_g \leqq \mathrm{carc}'(c, g)$. Soit, pour tout $\varepsilon > 0$, Z une sous-variété noyau telle que

$$\mathrm{vol}\,((\mathrm{Z}, g \mid \mathrm{Z}) \leqq \mathrm{carc}'(c, g) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Considérons le voisinage tubulaire U_η riemannien de rayon η de Z dans X; comme le fibré normal de Z est trivial (*cf.* 5.4), il existe un difféomorphisme $\mathrm{F} : \mathrm{U}_\eta \to \mathrm{B}(0, \eta) \times \mathrm{Z}$, où $\mathrm{B}(0, \eta)$ est la boule de rayon η dans $\mathbf{R}^e$, $e = \dim \mathrm{X} - \dim \mathrm{Z}$. Choisissons η assez petit pour que, quel que soit $y \in \mathrm{B}(0, \eta)$, on ait

$$\mathrm{vol}\,(\mathrm{F}^{-1}(\{y\} \times \mathrm{Z}), g \mid \mathrm{F}^{-1}(\{y\} \times \mathrm{Z})) \leqq \mathrm{vol}\,(\mathrm{Z}, g \mid \mathrm{Z}) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Et prolongeons la composée avec la première projection

$$U_\eta \to B(0, \eta) \times Z \to B(0, \eta)$$

[où l'on considère $B(0, \eta)$ comme dans S^e] en une application $f : X \to S^e$. Enfin, soit β une forme de degré maximum sur S^e, telle que $\int_{S^e} \beta = 1$ et supp $(\beta) \subset B(0, \eta)$. La formule 10.4, appliquée ici à $\alpha = f^* \beta$ donne :

$$\int_X |\alpha| v_g = \int_{U_\eta} \frac{\star \alpha}{|\alpha|} \wedge \alpha = \int_{y \in B(0,\eta)} \mathrm{vol}(f^{-1}(y), g \mid f^{-1}(y))\, \beta$$

$$\leq (\mathrm{carc}'(c, g) + \varepsilon) \int_{B(0,\eta)} \beta = \mathrm{carc}'(c, g) + \varepsilon.$$

Ceci ayant lieu pour tout ε, la définition de $\boxed{c}'_g$ montre que $\boxed{c}'_g \leq \mathrm{carc}'(c, g)$.

10.5. *Remarque.* — La formule 10.4 s'apparente à la *coarea formula* de [6], theorem 3.2.11.

La proposition 10.3 nous semble un lien intéressant entre l'analyse sur X et ses carcans. Cependant, nous n'avons pas pu en déduire un résultat géométrique vraiment satisfaisant en dimension plus grande que 2, c'est-à-dire une des assertions du 8.1. Dans le cas $b = a - 1$, on déduit de 10.3 et de 5.7 la :

10.6. Proposition. — *Soit* (X, g) *une variété riemannienne de dimension* a*; alors :*

$$\mathrm{quot}_{a-1}(X, g) \geq \frac{1}{\inf\left\{ \int_X |\alpha|_g^a v_g : \alpha \in F^1(X, \mathbf{Z}) - \{0\} \right\}}.$$

En particulier « $P(X, a-1)$ » *serait une conséquence de*

$$\inf\left\{ \int_X |\alpha|_g^a v_g : g \text{ structure riemannienne sur } X, \alpha \in F^1(X, \mathbf{Z}) - \{0\} \right\} < \infty.$$

Il suffit de remarquer que, par dualité, lorsque c parcourt $F^1(X, \mathbf{Z})$, sa duale $c^\#$ parcourt $H_{a-1}(X, \mathbf{Z})$ et d'appliquer l'inégalité de Hölder :

$$\int_X |\alpha|_g v_g \leq \left(\int_X |\alpha|_g^a v_g\right)^{\frac{1}{a}} \left(\int_X v_g\right)^{\frac{a-1}{a}},$$

qui entraîne bien 10.6 :

$$\frac{(\mathrm{vol}(X, g))^{a-1}}{\left(\int_X |\alpha|_g v_g\right)^a} \geq \frac{1}{\int_X |\alpha|_g^a v_g}.$$

Montrons d'abord comment 10.6 redonne les théorèmes de Loewner et Blatter :

10.7. Théorème (Loewner, non publié). — « IC (2, 1) » *est vraie, c'est-à-dire que, quelle que soit la structure riemannienne* g *sur* T^2, *on a* $\mathrm{quot}_1(T^2, g) \geqq \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\mathrm{quot}_1(T^2, g) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ *si et seulement si* (T^2, g) *est isométrique à un tore plat équilatéral.*

D'après 9.1 et 10.6 :

$$\mathrm{quot}_1(T^2, g) \geqq \frac{1}{\inf\{|\alpha|_g^2 : \alpha \in F^1(T^2, \mathbf{Z}) - \{0\}\}}.$$

D'après le paragraphe 9 :

$$\inf\{|\alpha|_g^2 : \alpha \in F^1(T^2, \mathbf{Z}) - \{0\}\} = \inf\{|\alpha|_g^2 : \alpha \in \mathcal{H}^1(T^2, \mathbf{Z}) - \{0\}\}.$$

Comme $\mathcal{H}^1(T^2, \mathbf{Z})$ est un réseau de $\mathcal{H}^1(T^2, \mathbf{R})$, espace vectoriel euclidien de dimension 2, d'après le 7.5 et la proposition 9.6 (*d*), on a

$$\inf\{|\alpha|_g^2 : \alpha \in \mathcal{H}^1(T^2, \mathbf{Z}) - \{0\}\} \leqq \frac{1}{u_{2,1}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Si l'égalité est atteinte, c'est nécessairement d'abord dans 10.6, donc dans l'inégalité de Schwarz, ce qui implique que la fonction $|\alpha|_g : T^2 \to \mathbf{R}$ doit être constante sur T^2; soit k la valeur de cette constante. Il en est de même de $|\star\alpha|_g = k$, d'après 2.6. Comme on est en dimension 2 et orienté, l'opération $\star$ n'est autre que la rotation d'angle $\pi/2$ et on a donc $g = k(\alpha \otimes \alpha + (\star\alpha) \otimes (\star\alpha))$. C'est dire que la structure riemannienne g est plate, car α et $\star\alpha$ étant fermées sont de la forme locale $\alpha = dx$, $\star\alpha = dy$, $g = k((dx)^2 + (dy)^2)$. Le fait que cette structure est plate entraîne que (T^2, g) est isométrique au tore plat $(E/\Lambda, g_0/\Lambda)$, où (E, g_0) est l'espace euclidien $E = \mathcal{H}^1(T^2, \mathbf{R})$ et Λ le réseau $\mathcal{H}^1(T^2, \mathbf{Z})$ de $\mathcal{H}^1(T^2, \mathbf{R}) = E$. Enfin ce tore plat est équilatéral parce que Λ doit être 1-critique si l'égalité est atteinte (*cf.* 7.7).

10.8. Théorème (Blatter [3]). — « P (X, 1) » *est vraie pour toute* X *de dimension* 2, *plus précisément :*

$$\forall\, g : \quad \mathrm{quot}_1(X, g) \geqq (u_{2\gamma,1})^{\frac{1}{\gamma}},$$

si γ *désigne le genre de* X.

On procède comme pour 10.7 mais ici $\mathcal{H}^1(X, \mathbf{R})$ est un espace vectoriel de dimension égale à 2γ; le réseau $\mathcal{H}^1(X, \mathbf{R})$ vérifiera

$$(\inf\{|\alpha|_g^2 : \alpha \in \mathcal{H}^1(X, \mathbf{Z}) - \{0\}\})^\gamma \leqq \frac{1}{u_{2\gamma,1}}.$$

Quant à l'égalité, elle ne se produit jamais si $\gamma > 1$ car si, sur X, une forme harmonique était de norme constante, (X, g) serait comme on l'a vu un tore plat et donc pas de genre $\gamma > 1$. On ne sait pas, semble-t-il, si

$$\inf \{ \mathrm{quot}_1 (X, g) : g \text{ structure riemannienne sur } X \} = (u_{2\gamma,1})^{\frac{1}{\gamma}}.$$

10.9. Si l'on veut pouvoir utiliser, pour une variété X de dimension $\geqq 3$, la propriété de minimum des formes harmoniques au lieu de 10.6, on remplacera Hölder par Schwarz :

$$\left(\int_X |\alpha|_g v_g\right)^2 \leqq \int_X |\alpha|_g^2 v_g \int_X v_g = \mathrm{vol}(X, g) \, \|\alpha\|_g^2,$$

d'où

$$\frac{(\mathrm{vol}(X, g))^{a-1}}{\left(\int_X |\alpha|_g v_g\right)^a} \geqq \frac{(\mathrm{vol}(X, g))^{a-1}}{\|\alpha\|_g^a (\mathrm{vol}(X, g))^{\frac{a}{2}}},$$

puis :

$$\mathrm{quot}_{a-1}(X, g) \geqq \frac{(\mathrm{vol}(X, g))^{\frac{a-2}{2}}}{\inf \{ \|\alpha\|_g^a : \alpha \in \mathcal{H}^1 (X, \mathbf{Z}) - \{0\} \}},$$

et enfin :

10.10. $$\mathrm{quot}_{a-1}(X, g) \geqq (u_{\beta_1(X),1})^{\frac{a}{\beta_1(X)}} \frac{(\mathrm{vol}(X, g))^{\frac{a-2}{2}}}{\det(\mathcal{H}^1 (X, \mathbf{Z}))^{\frac{a}{\beta_1(X)}}}.$$

Donc « P (X, $a-1$) » découlerait de

10.11. $$\left\{ \begin{array}{l} \exists\, k > 0 \text{ tel que, quelle que soit } g \text{ structure riemannienne sur } X : \\ \qquad (\mathrm{vol}(X, g))^{\frac{a-2}{2}} \geqq k \det(\mathcal{H}^1 (X, \mathbf{Z}))^{\frac{a}{\beta_1(X)}} \ ? \end{array} \right.$$

10.12. Si, par contre, l'on veut utiliser 9.6 (b) ou (d) et la propriété de minimum des formes harmoniques pour démontrer « P$'$ (X, $a/2$) », on se heurte à la difficulté suivante : avec 10.3, Schwarz, 5.5 et pour $X = T^a$ (a pair) ou $X = S^a \times S^a$, on trouvera bien :

10.13. $$\mathrm{quot}'_{\frac{a}{2}}(X, g) \geqq \left(\frac{1}{\inf \{ \|\alpha\|_g^2 : \alpha \text{ sphérique et classe } (\alpha) \neq 0 \}}\right)^{\frac{a}{2}},$$

mais on ne saura pas si

10.14. $$\inf \{ \|\alpha\|_g^2 : \text{sphérique, classe } (\alpha) \neq 0 \} = \inf \{ \|\alpha\|_g^2 : \alpha \in \mathcal{H}^{\frac{a}{2}} (X, \mathbf{Z}) - \{0\} \} \ ?$$

parce qu'une forme harmonique ne sera pas nécessairement sphérique. Il faudrait en outre une relation telle que

$$10.15. \quad \begin{cases} \exists\, k < \infty \text{ tel que, quelle que soit } g \text{ structure riemannienne sur X :} \\ \inf \{ \| \alpha \|_g^2 : \alpha \text{ sphérique, classe } (\alpha) \neq 0 \} \\ \leq k \left(\inf \left\{ \| \alpha \|_g^2 : \alpha \in \mathcal{H}^{\frac{a}{2}} (\mathrm{X}, \mathbf{Z}) - \{ 0 \} \right\} \right). \end{cases}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. D. M. ACCOLA, *Differentials and extremal length on Riemann surfaces* (*Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, vol. 46, 1960, p. 540-543).

[2] M. BERGER, *Du côté de chez Pu* (*Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.*, 4e série, t. 5, 1972, p. 1 à 44).

[3] C. BLATTER, *Ueber Extremallängen auf geschlossenen Flächen* (*Comm. Math. Helv.*, vol. 35, 1961, p. 151-168).

[4] J. W. S. CASSELS, *An introduction to the geometry of numbers*, Springer, 1959.

[5] J. DIEUDONNÉ, *Éléments d'Analyse*, t. III, Gauthier-Villars, Paris, 1970.

[6] H. FEDERER, *Geometric measure theory*, Springer, 1969.

[7] M. GREENBERG, *Lectures on algebraic topology*, Benjamin, 1967.

[8] C. G. LEKERKERKER, *Geometry of numbers*, Wolters-Noordhoff, 1969.

[9] R. THOM, *Quelques propriétés globales des variétés différentiables* (*Comm. Math. Helv.*, vol. 28, 1954, p. 17-86).

(Manuscrit reçu le 28 octobre 1971.)

Marcel BERGER,
11 *bis*, avenue de Suffren,
75-Paris, 7e.