ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

JOHN B. WALSH
MICHEL WEIL

Représentation de temps terminaux et applications aux fonctionnelles additives et aux systèmes de Lévy

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 5, nº 1 (1972), p. 121-155
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1972_4_5_1_121_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 5, 1972, p. 121 à 155.

REPRÉSENTATION DE TEMPS TERMINAUX ET APPLICATIONS AUX FONCTIONNELLES ADDITIVES ET AUX SYSTÈMES DE LÉVY

PAR JOHN B. WALSH ET MICHEL WEIL

INTRODUCTION

Il semble actuellement que la bonne manière d'étudier la théorie générale des processus de Markov passe par les processus de Ray. Un processus de Ray est un processus fortement markovien, à valeurs dans un espace compact E, dont la résolvante applique la classe des fonctions continues dans elle-même. L'utilité de tel processus — à part bien sûr ses propres propriétés de régularité — provient surtout du fait que, étant donné un processus fortement markovien, à trajectoires continues à droite, sur un « bon » espace E, on peut plonger E dans un espace compact F de telle manière que la résolvante initiale se prolonge sur F en une résolvante de Ray. Nous renvoyons le lecteur à l'article de Meyer et Walsh [10] pour une description plus détaillée de cette compactification et ses conséquences. Nous utiliserons également des résultats de la théorie générale des processus (*cf.* P. A. Meyer [9], Dellacherie [4]).

Cet article est une étude sur les fonctionnelles additives purement discontinues d'un processus de Ray, étude qui résulte de propriétés plus fondamentales des temps terminaux. Un processus de Ray diffère principalement d'un processus de Hunt parce qu'il a des sauts à des instants prévisibles (aux points de branchement). Il a, d'autre part, la propriété, très utile, suivante : le processus rendu continu à gauche (X_{t-}) est modérément markovien (Chung-Walsh [3] ou Walsh [15]), en d'autres termes, si T est un temps d'arrêt prévisible, on a pour tout $t > 0$ et toute fonction borélienne bornée f sur E :

$$\mathbf{E}[f \circ X_{T+t-} \mid \mathcal{F}_{T-}] = \mathbf{E}[f \circ X_{T+t-} \mid X_{T-}] \quad \text{p. s.}$$

En fait, on a la même propriété lorsque T est un temps terminal totalement inaccessible, résultat démontré par M. Weil [20] pour les processus standards et avec l'aide de systèmes de Lévy; ici ce sera une conséquence du retournement du temps, dont nous nous servirons pour construire, précisément, le système de Lévy du processus de Ray. En passant, nous constatons une propriété assez étrange à première vue : si T est un temps terminal totalement inaccessible et si $\mathcal{F}_{[T-\varepsilon, T+\varepsilon]}$ désigne la tribu engendrée par les X_{T+s}, $|s| \leqq \varepsilon$, où $\varepsilon > 0$, alors on a $\bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{F}_{[T-\varepsilon, T+\varepsilon]} = \mathcal{C}(X_{T-}, X_T)$ bien que $T - \varepsilon$ ne soit pas un temps d'arrêt. A partir de cette propriété, convenablement étendue à certains temps terminaux et grâce à des hypothèses supplémentaires, nous prouvons qu'un temps d'arrêt terminal exact T est p. s. le temps de première entrée du *couple* (X_{t-}, X_t) dans un sous-ensemble K de $E \times E$. Ce résultat est d'ailleurs connu dans le cas de deux processus standards en dualité : Blumenthal-Getoor [2] l'ont fait lorsque T est sans points réguliers, et M. Sharpe [13] lorsque T est terminal exact. Le sous-ensemble K dépend de la nature du temps T: par exemple, si T est prévisible K sera de la forme $K' \times E$, $K' \subset E$, autrement dit $T = \inf(t > 0 : X_{t-} \in K')$ p. s. Une application de tout ceci montre qu'une fonctionnelle additive purement discontinue A peut s'écrire sous la forme $A_t = \sum_{s \leqq t} F(X_{s-}, X_s)$ p. s., où F est une fonction borélienne positive sur $E \times E$.

Le système de Lévy d'un processus est la donnée d'un couple (N, H) formé d'un noyau N et d'une fonctionnelle additive prévisible H, et qui a la propriété suivante : pour toute fonctionnelle additive A de la forme $A_t = \sum_{s \leqq t} F(X_{s-}, X_s)$, où F est une fonction borélienne positive sur $E \times E$ et nulle sur la diagonale, alors le processus croissant prévisible $\hat{A}$ associé à A (i. e. $A - \hat{A}$ est une martingale locale) est donné par

$$\hat{A}_t = \int_0^t NF \circ X_{s-} \, dH_s.$$

C'est une notion élégante et puissante dont l'élégance cache parfois la puissance. Initialement, c'est une idée de S. Watanabe [19], qui en a prouvé l'existence pour les processus de Hunt satisfaisant l'hypothèse (L). Pour cela, il utilise des propriétés très profondes relatives à la théorie des intégrales stochastiques. Plus récemment, M. Sharpe [12] a montré l'existence de systèmes de Lévy dans le cas de deux processus standard en dualité et sa méthode est purement potentialiste. Dans cet article nous démontrons l'existence de tel système pour les processus de Ray vérifiant l'hypothèse (L). Nous espérons avoir donné une construction qui, si elle cache un peu l'élégance, montre mieux la puissance, et dont la base se trouve dans les propriétés de Markov du processus (X_{t-}) figurant aux paragraphes 1-4 (qui sont d'ailleurs eux-mêmes des conséquences du retournement du temps). Il est intéressant de remarquer que la fonctionnelle H — continue dans le cas classique — est ici prévisible, à cause des points de branchement.

Disons encore quelques mots à propos des « hypothèses supplémentaires ». Elles sont de deux sortes : d'abord l'hypothèse (L) de Meyer qui figure très souvent et dont l'utilité n'est plus à rappeler. La deuxième hypothèse, dite (CF), affirme l'existence d'une topologie cofine, et joue un rôle essentiel lors de la représentation de temps accessibles; elle ne sert pas pour des temps totalement inaccessibles. Le rapport de cette hypothèse (CF) avec la dualité de processus n'est pas encore très étudié, mais nous conjecturons que s'il existe une mesure de référence σ-finie excessive, alors l'hypothèse (CF) est équivalente à l'existence d'un processus dual fortement markovien (non forcément standard!).

Enfin, il est peut-être intéressant de savoir que si l'on a un théorème de représentation pour les temps terminaux exacts, alors l'hypothèse (CF) est vérifiée (Walsh-Weil [18]).

1. Définitions et rappels. — Une résolvante sous-markovienne $(V_p)_{p>0}$ sur un espace compact E est une résolvante de Ray si, d'une part, pour tout $p > 0$, V_p applique $\mathcal{C}(E)$ dans $\mathcal{C}(E)$, et si d'autre part, l'ensemble des fonctions continues et 1-surmédianes est séparant.

Nous désignerons alors, d'après un théorème de Ray [11], par $(P_t)_{t\geq 0}$ l'unique semi-groupe sur E admettant $(V_p)_{p>0}$ pour résolvante et tel que pour tout $x \in E$ l'application $t \mapsto P_t(x, .)$ soit étroitement continue à droite sur $\mathbf{R}_+$.

L'ensemble des fonctions boréliennes positives et bornées sur E sera désigné par $\mathcal{E}_b^+$.

Nous noterons par Ω l'ensemble des applications continues à droite et ayant des limites à gauche de $\mathbf{R}_+$ dans E, par $(X_t)_{t\geq 0}$ les applications coordonnées, par $\mathcal{F}^0$ (resp. $\mathcal{F}_t^0$) la tribu sur Ω engendrée par les X_s (resp. les X_s, $s \leq t$), par θ l'opérateur de translation usuel et par ζ la durée de vie du processus (X_t).

Si μ est une mesure de probabilité sur E muni de sa tribu borélienne $\mathcal{E}$, nous désignerons par $\mathbf{P}^\mu$ l'unique mesure sur $(\Omega, \mathcal{F}^0)$ telle que le processus X soit markovien de fonction de transition (P_t) et de loi d'entrée $(\mu P_t)_{t\geq 0}$, par $\mathcal{F}^\mu$ la tribu complétée de $\mathcal{F}^0$ pour $\mathbf{P}^\mu$, et par $\mathcal{F}_t^\mu$ la tribu obtenue en adjoignant à $\mathcal{F}_t^0$ tous les ensembles $\mathbf{P}^\mu$-négligeable de $\mathcal{F}^\mu$. Enfin comme d'habitude nous poserons

$$\mathcal{F} = \bigcap_\mu \mathcal{F}^\mu, \qquad \mathcal{F}_t = \bigcap_\mu \mathcal{F}_t^\mu,$$

où μ parcourt l'ensemble des lois de probabilité sur Ω. Une propriété sur Ω est vraie p. s. si elle est vraie $\mathbf{P}^\mu$-p. s. pour toute loi μ.

Le processus ainsi construit est appelé processus de Ray. Il « diffère » des processus de Hunt par le fait que l'ensemble B des *points de branchement*

$$\mathrm{B} = \{ x \in \mathrm{E} : \lim_{p \to \infty} \text{étroite } p \, \mathrm{V}_p(x, \ .) \neq \varepsilon_x \} = \{ x \in \mathrm{E} : \mathrm{P}_0(x, \ .) \neq \varepsilon_x \}$$

n'est pas, en général, vide.

La plupart des propriétés des processus de Hunt se transportent sans modification aux processus de Ray et nous les utiliserons dans la suite. Cependant, la présence de points de branchement nous donne quelques petits changements, particulièrement en ce qui concerne la classification de temps d'arrêt. Voici les résultats qui nous serviront et dont la preuve se trouve dans les articles suivants : Kunita-Watanabe [6], Ray [11], Walsh [16], Meyer-Walsh [10].

Proposition 1.1. — (1) *L'ensemble des points de branchement* B *est borélien et vérifie* $\mathrm{P}_t(x, \mathrm{B}) = 0$ *pour tout* $x \in \mathrm{E}$ *et tout* $t \geq 0$. *En particulier,* $\mathrm{P}_0(x, \{x\}) = 0$ *lorsque* $x \in \mathrm{B}$.

(2) *Pour toute mesure de probabilité* μ *sur* E, *on a*

$$\mathbf{P}^\mu \{ \mathrm{X}_t \notin \mathrm{B} \ \textit{pour tout} \ t \geq 0 \} = 1.$$

Remarquons, par contre, que le processus (X_{t-}) peut très bien passer par B avec une probabilité strictement positive.

Dans les deux propositions suivantes, nous nous donnons une mesure de probabilité μ sur E, et les temps d'arrêt envisagés sont toujours pris par rapport à la famille $(\mathcal{F}_t^\mu)$. Rappelons que la tribu des événements strictement antérieurs au temps d'arrêt T est la tribu $\mathcal{F}_{\mathrm{T}-}^\mu$ engendrée par les ensembles $\mathrm{A} \cap \{ t < \mathrm{T} \}$, où $\mathrm{A} \in \mathcal{F}_t$, et dûment complétée.

Proposition 1.2. — (1) *Pour toute fonction borélienne positive f sur* E *et tout temps d'arrêt* T *prévisible, on a*

$$\mathbf{E}^\mu[f \circ \mathrm{X}_\mathrm{T} \mid \mathcal{F}_{\mathrm{T}-}^\mu] = \mathrm{P}_0 f \circ \mathrm{X}_{\mathrm{T}-} \quad \mathbf{P}^\mu\text{-p. s. sur } \{ \mathrm{T} < \infty \}.$$

(2) *Soit* $(\mathrm{T}_n, n \in \mathbf{N})$ *une suite croissante de temps d'arrêt, de limite* T. *Alors sur* $\{ \mathrm{T} < \infty \}$, *on a*

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{X}_{\mathrm{T}_n} = \mathrm{X}_\mathrm{T} \quad \mathbf{P}^\mu\text{-p. s. } \textit{si et seulement si } \lim_n \mathrm{X}_{\mathrm{T}_n} \in \mathrm{E} - \mathrm{B} \quad \mathbf{P}^\mu\text{-p. s.}$$

(3) *Soit* T *un temps d'arrêt prévisible. Alors les tribus* $\mathcal{F}^{\mu}_{T-}$ *et* $\mathcal{F}^{\mu}_{T}$ *sont égales si* $\mathbf{P}^{\mu}\{X_{T-}\in B\} = 0$.

(La deuxième propriété indique les conditions sous lesquelles la quasi-continuité à gauche du processus est vérifiée.)

Nous dirons que le temps d'arrêt T est un temps de saut du processus $(X, \mathbf{P}^{\mu})$ si $X_{T-}\neq X_T$ $\mathbf{P}^{\mu}$-p. s. sur $\{T<\infty\}$.

Proposition 1.3. — *Soit* T *un temps d'arrêt pour la famille* $(\mathcal{F}^{\mu}_t)$. *Alors :*

(1) *Si le processus* X *est* $\mathbf{P}^{\mu}$-*p. s. continu à l'instant* T *sur* $\{T<\infty\}$, T *est prévisible.*

(2) *Le temps* T *est totalement inaccessible si et seulement si c'est un temps de saut tel que* $X_{T-}\in E - B$ $\mathbf{P}^{\mu}$-*p. s.*

(3) *Si* $X_{T-}\in B$ $\mathbf{P}^{\mu}$-*p. s. sur* $\{T<\infty\}$, T *est accessible.*

La notion suivante est bien connue et sera très utile.

Soit μ une mesure de probabilité sur E. On note par $\mathcal{C}^{pr}_{\mu}$ la tribu sur $\mathbf{R}_+\times\Omega$ engendrée par les processus $(\mathcal{F}^{\mu}_t)$-adapté et continus à gauche. Un processus Y sera dit $(\mathcal{F}^{\mu}_t)$-*prévisible* s'il est mesurable lorsque $\mathbf{R}_+\times\Omega$ est muni de la tribu $\mathcal{C}^{pr}_{\mu}$. Nous dirons qu'il est *prévisible* s'il est $(\mathcal{F}^{\mu}_t)$-prévisible pour toute loi μ. (Ces notions sont étudiées en détail dans Meyer [9] ou Dellacherie [4].)

Plus tard, nous aurons besoin du lemme technique suivant, qui n'est pas particulier aux processus de Ray.

Lemme 1.1. — *Soient* μ *une loi sur* E, $(Y_s)_{s\geq 0}$ *un processus* $(\mathcal{F}^{\mu}_t)$-*prévisible*, C *un ensemble borélien de* E *et* T_C *le temps d'entrée* $T_C = \inf(t>0 : Y_t\in C)$. *Alors il existe une suite* (T_n) *de temps d'arrêt* $(\mathcal{F}^{\mu}_t)$-*prévisibles, décroissant vers* T_C *et telle que*

$$\lim_n \mathbf{P}^{\mu}\{Y_{T_n}\in C\} = \mathbf{P}^{\mu}\{T_C<\infty\}.$$

Démonstration. — Désignons par H l'ensemble $\mathcal{F}^{\mu}_t$-prévisible

$$\{(t,\omega) : Y_t(\omega)\in C\};$$

les ensembles $H_n = H\cap\left]0,\ T_C+\frac{1}{n}\right]$, $n\geq 1$, sont encore prévisibles et leur débuts D_{H_n} valent T_C.

A chaque H_n nous pouvons associer, par le théorème de section de P. A. Meyer, un temps d'arrêt prévisible S_n tel que

$$[S_n]\subset H_n\subset H,$$

$$\mathbf{P}^{\mu}\left\{S_n\leq T_C+\frac{1}{n}\right\} = \mathbf{P}^{\mu}\{S_n<\infty\} > 1-\frac{1}{2^n}.$$

La dernière relation entraîne que $\mathbf{P}^\mu\{Y_{S_n} \in C\} = \mathbf{P}^\mu\{S_n < \infty\}$ qui va tendre vers 1 lorsque $n \uparrow \infty$. Il suffit alors de poser $T_n = \bigwedge_{i=1}^{n} S_i$ et la démonstration est terminée.

Nous aurons aussi souvent besoin de l'hypothèse suivante :

HYPOTHÈSE (L). — *Il existe une mesure ξ sur* E, *dite mesure de référence, telle que pour tout $p > 0$ et tout $x \in$ E, les mesures $V_p(x, \,.)$ soient absolument continues par rapport à ξ.*

Notations. — Nous utiliserons les notations suivantes : si H (resp. K) est un sous-ensemble de $E \times E$ (resp. E), nous désignerons, *sans risque de confusion*, par T_H, T_K, S_K les temps d'entrée :

$$T_H = \inf(t > 0 : (X_{t-}, X_t) \in H),$$
$$T_K = \inf(t > 0 : X_t \in K),$$
$$S_K = \inf(t > 0 : X_{t-} \in K).$$

Enfin, si n est un entier ≥ 1, nous poserons

$$\sigma_n = \inf\left(t > 0 : d(X_{t-}, X_t) \in \left[\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}\right[\right),$$
$$\sigma_n^i = \inf\left(t > 0 : d(X_{t-}, X_t) \in \left[\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}\right[\text{ et } X_{t-} \in E - B\right),$$
$$\sigma_n^a = \inf\left(t > 0 : d(X_{t-}, X_t) \in \left[\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}\right[\text{ et } X_{t-} \in B\right),$$

où d est une distance compatible avec la topologie de E.

2. TOPOLOGIE COFINE. — Ce paragraphe est consacré à une hypothèse assez particulière : l'hypothèse de topologie cofine.

HYPOTHÈSE (CF). — *Il existe une topologie $\mathcal{S}$ sur* E, *dite topologie cofine, plus fine que la topologie initiale et vérifiant :*

CF 1. — *Soit f une fonction $\mathcal{S}$-continue et borélienne sur* E. *Alors p. s. l'application $s \mapsto f \circ X_{s-}$ est continue à gauche.*

CF 2. — *Pour tout $t > 0$ et toute fonction borélienne f, l'ensemble*

$$H = \{\omega : s \mapsto f \circ X_{s-}(\omega) \text{ a des limites à gauche sur }]0, t[\}$$

est p. s. contenu dans

$$\{\omega : s \mapsto \bar{f} \circ X_{s-}(\omega) \text{ est continue à gauche sur }]0, t[\},$$

où $\bar{f}$ désigne la fonction

$$\bar{f}(x) = \mathcal{S} - \limsup_{y \to x,\, y \neq x} f(y).$$

De plus, sur H *on a la relation suivante :*

$$\bar{f} \circ X_{s-} = \lim_{r \uparrow s} f \circ X_{r-} \quad \text{p. s.} \tag{2.1}$$

Cette dernière condition (CF 2) entraîne la suivante :

CF 2′. — *Soit f une fonction borélienne sur* E *telle que p. s. l'application $s \mapsto f \circ X_{s-}$ ait des limites à gauche. Alors la fonction*

$$\bar{f}(x) = \mathcal{S} - \limsup_{y \to x,\, y \neq x} f(y)$$

est $\mathcal{S}$-continue, sauf peut-être pour un ensemble polaire pour le processus $(X_{t-})_{t>0}$, *et on a la relation* (2.1).

Remarques. — 1. L'hypothèse (CF) est vérifiée dans le cas de deux processus en dualité (M. Weil [20], Walsh [17]).

2. Chaque fois que cette hypothèse interviendra dans un de nos théorèmes elle sera nécessaire : sans elle les théorèmes en question sont infirmés par des contre-exemples.

3. L'hypothèse (CF) ne parle pas du comportement de $\bar{f}$ lorsque $s \mapsto f \circ X_s$ (et non $s \mapsto f \circ X_{s-}$) a des limites à gauche. A cet effet, introduisons une deuxième régularisée : soit f une fonction borélienne bornée sur E; posons

$$\tilde{f} = \overline{P_0 f}. \tag{2.2}$$

La régularisée $\tilde{f}$ a les propriétés ci-dessous; rappelons que, pour tout $s \in \mathbf{R}_+$, on a $f \circ X_s = P_0 f \circ X_s$, car $P_0 f = f$ sur $E - B$.

Proposition 2.1. — Soient *f une fonction borélienne et bornée sur* E, *t un nombre strictement positif et* H_1, H_2, H_3 *les ensembles suivants :*

$$\begin{aligned} H_1 &= \{\omega : s \mapsto f \circ X_s(\omega) \text{ a des limites à gauche sur }]0, t[\,\}, \\ H_2 &= \{\omega : s \mapsto P_0 f \circ X_{s-}(\omega) \text{ a des limites à gauche sur }]0, t[\,\}, \\ H_3 &= \{\omega : s \mapsto \tilde{f} \circ X_{s-}(\omega) \text{ est continue à gauche sur }]0, t[\,\}. \end{aligned}$$

Alors lorsque l'hypothèse (CF) *est vérifiée, on a p. s. la relation*

$$H_1 \subset H_2 \subset H_3.$$

Démonstration. — Posons $f' \equiv P_0 f$ et soit $(T_n,\ n \in \mathbf{N})$ une suite croissante de temps d'arrêt prévisible et ayant T pour limite. Puisque le processus $(f' \circ X_{s-})$ est prévisible, on aura

$$f' \circ X_{T_n^-} = \mathbf{E}[f \circ X_{T_n} \mid \mathcal{F}_{T_n^-}],$$

donc

$$f' \circ X_{T_n^-} \leqq \mathbf{E}\Big[\sup_{m \geqq n} f \circ X_{T_m} \mid \mathcal{F}_{T_n^-}\Big].$$

Or $\mathcal{F}_{T_n^-} \uparrow \mathcal{F}_{T-}$ lorsque $n \uparrow \infty$, d'où

$$\limsup_{n \to \infty} f' \circ X_{T_n^-} \leqq \mathbf{E}\Big[\limsup_n f \circ X_{T_n} \mid \mathcal{F}_{T-}\Big].$$

On en déduit que

$$\limsup_n f' \circ X_{T_n^-} - \liminf_n f' \circ X_{T_n^-} \leqq \mathbf{E}\Big[\limsup_n X_{T_n} - \liminf_n f \circ X_{T_n} \mid \mathcal{F}_{T-}\Big].$$

Remarquons alors que la différence $(\limsup f \circ X_{T_n} - \liminf f \circ X_{T_n})$ est $\mathcal{F}_{T-}$-mesurable, bien que $\limsup_n f \circ X_{T_n}$ ne le soit pas. En effet, la restriction à $\{ T_n < T, \ \forall\, n \in \mathbf{N} \}$ — qui appartient à $\mathcal{F}_{T-}$ —, des fonctions $f \circ X_{T_n}$, $n \in \mathbf{N}$, donc de $\limsup_n f \circ X_{T_n}$ et $\liminf_n f \circ X_{T_n}$, est $\mathcal{F}_{T_n}$-mesurable; et d'autre part, sur $\{ \exists\, n \in \mathbf{N} : T_n = T \}$ la différence est nulle.

Par suite, on a montré que p. s.

$$\limsup_n f' \circ X_{T_n^-} - \liminf_n f' \circ X_{T_n^-} \leqq \limsup_n f \circ X_{T_n} - \liminf_n f \circ X_{T_n}.$$

Avec les notations de l'énoncé, cela entraîne que $H_1 \subset H_2$ p. s. Enfin, $H_2 \subset H_3$ p. s. d'après l'hypothèse de topologie cofine et la relation $\overline{f'} = \tilde{f}$.

Étant donné un temps d'arrêt T, l'hypothèse (CF) nous permet d'affirmer que si $s \mapsto f \circ X_{s-}$ est pourvue de limites à gauche sur $]0, T]$, alors $s \mapsto \bar{f} \circ X_{s-}$ est p. s. continue à gauche sur $]0, T[$. L'hypothèse ne précise rien sur la continuité à gauche à l'instant T. En général, elle n'a d'ailleurs pas lieu. On a cependant la proposition suivante qui nous servira par la suite :

Proposition 2.2. — *Soient* μ *une mesure de probabilité sur* E, f *une fonction borélienne sur* E, *et* T *un temps d'arrêt pour la famille* $(\mathcal{F}_t^{\mu})$. *Supposons que l'hypothèse de topologie cofine soit vérifiée et que* $X_{T-} \in B$ $\mathbf{P}^{\mu}$*-p. s., alors* $\mathbf{P}^{\mu}$*-p. s. sur* $\{ T < \infty \}$ *l'ensemble* $\{ \omega : s \mapsto f \circ X_{s-}(\omega)$ *a des limites à gauche sur* $]0, T] \}$ *est contenu dans* $\{ \omega : s \mapsto \bar{f} \circ X_{s-}(\omega)$ *est continue à gauche sur* $]0, T] \}$.

Démonstration. — Pour la preuve, nous pouvons supposer que X_{T-} prend ses valeurs dans l'ensemble

$$B_\varepsilon = B \cap \{ x : P_0(x, \{ y : d(x, y) > \varepsilon \}) > \varepsilon \}, \qquad \varepsilon > 0,$$

et plus précisément dans un compact K de B_ε dont le diamètre est inférieur à $\frac{\varepsilon}{4}\cdot$ D'autre part, puisque $X_{T-} \in B$, T est accessible et son graphe est contenu dans une réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt prévisibles. Il suffira donc de prouver la proposition lorsque T est prévisible.

Considérons l'ensemble Γ_1 des $\omega \in \Omega$ tels que l'application $s \mapsto f \circ X_{s-}(\omega)$ ait des limites à gauche sur $]0, T(\omega)]$ et supposons pour simplifier que $\mathbf{P}^\mu\{\Gamma_1\} = 1$. Alors $\mathbf{P}^\mu$-p. s. l'application $s \mapsto \bar{f} \circ X_{s-}$ est continue à gauche sur $]0, T[$. Soit g une fonction continue à support compact, valant 1 sur K et 0 hors d'un voisinage V (K) de K de diamètre inférieur à $\frac{\varepsilon}{4}\cdot$ La fonction $s \mapsto (gf) \circ X_{s-}$ aura $\mathbf{P}^\mu$-p. s. des limites à gauche sur $]0, T]$.

Posons $T' = \inf(t > T : X_t \in V(K))$. La fonction $s \mapsto (gf) \circ X_{s-}(\omega)$ est identiquement nulle entre T et T′, donc elle a $\mathbf{P}^\mu$-p. s. des limites à gauche sur $]0, T'(\omega)[$. Mais $\mathbf{P}^\mu\{T' > T\} > 0$, car $X_{T-} \in K$. Donc, selon l'hypothèse (CF), $s \mapsto \overline{(gf)} \circ X_{s-}$ est $\mathbf{P}^\mu$-p. s. continue à gauche sur $]0, T'[$. En particulier, si $T'(\omega) > T(\omega)$, l'application $s \mapsto \overline{gf} \circ X_{s-}(\omega)$ sera continue à gauche sur $]0, T(\omega)]$. Notons que $\{\omega : \overline{gf} \circ X_{s-}(\omega)$ est continue à gauche sur $]0, T(\omega)]\}$ appartient à la tribu $\mathcal{F}_{T-}$.

D'autre part, le processus (X_{T-}) est modérément markovien et T est prévisible; les événements $\{T' > T\}$ et $\Gamma \equiv \{\omega : s \mapsto \overline{gf} \circ X_{s-}(\omega)$ est continu à gauche sur $]0, T(\omega)]\}$ sont donc conditionnellement indépendants par rapport à X_{T-} :

$$\mathbf{P}^\mu\{\Gamma \cap \{T' > T\} \mid X_{T-}\} = \mathbf{P}^\mu\{\Gamma \mid X_{T-}\}\, \mathbf{P}^\mu\{T' > T \mid X_{T-} \quad \mathbf{P}^\mu\text{-p. s.}$$

Or $\Gamma \supset \{T' < T\}$, donc le premier membre ci-dessus vaut aussi $\mathbf{P}^\mu\{T' > T \mid X_{T-}\}$ qui est strictement supérieur à ε. Cela entraîne que

$$\mathbf{P}^\mu\{\Gamma \mid X_{T-}\} = 1 \quad \mathbf{P}^\mu\text{-p. s.}$$

et, en particulier, $\mathbf{P}^\mu\{\Gamma\} = 1$. Nous avons donc montré que $s \mapsto \overline{gf} \circ X_{s-}$ est $\mathbf{P}^\mu$-p. s. continue à gauche sur $]0, T]$, et comme g est continue, l'application $s \mapsto \bar{f} \circ X_{s-}$ est $\mathbf{P}^\mu$-p. s. continue à gauche sur $]0, T]$.

3. La tribu instantanée associée a un temps terminal. — Rappelons qu'une propriété sur Ω est p. s. vraie si elle a lieu $\mathbf{P}^\mu$-p. s. pour toute mesure de probabilité μ sur E. Par suite, nous dirons qu'un temps T est un *temps terminal* si c'est un temps d'arrêt pour la famille $(\mathcal{F}_t)$ tel que, pour tout $s \geq 0$, on ait

$$T = s + T \circ \theta_s \quad \text{p. s. sur } \{s < T\}. \tag{3.1}$$

Un temps terminal T est *exact* si, pour toute suite $(t_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de nombres positifs décroissants vers zéro, on a $T = \lim_n T \circ \theta_{t_n}$ p. s. Un temps terminal exact est toujours fortement markovien [i. e. l'équation (3.1) a lieu lorsque s est remplacé par un temps d'arrêt S] et complet (*voir* problème 4.36, p. 185 de Blumenthal-Getoor [1]).

Le caractère prévisible d'un temps d'arrêt dépend d'une mesure $\mathbf{P}^\mu$ sur Ω, alors que celui de terminal est lié à une famille de telles mesures. C'est la raison pour laquelle nous dirons qu'un temps terminal T est *prévisible* (resp. accessible, totalement inaccessible) s'il est prévisible (resp. accessible, totalement inaccessible) pour toute mesure $\mathbf{P}^\mu$. Nous appliquerons le même principe à la mesurabilité des processus : un processus sur $(\Omega, \mathcal{F})$ est *bien-mesurable* (resp. *prévisible*) s'il l'est pour toute mesure $\mathbf{P}^\mu$.

Un temps terminal T est *effilé* si $T > 0$ p. s. Il est clair qu'un temps terminal effilé est exact, et qu'un temps terminal totalement inaccessible est effilé.

Définissons maintenant, si S et T sont deux fonctions positives, la tribu du processus tué avant S et après T.

Définition 3.1. — *Soient* S *et* T *deux fonctions positives sur* Ω, μ *une loi de probabilité sur* E, ∂ *un point isolé ajouté à* E, *et* Y *le processus suivant :*

$$Y_t = \begin{cases} X_{S+t} & \text{si } 0 \leqq t \leqq T - S \quad \text{et} \quad S < \infty, \\ \partial & \text{sinon.} \end{cases}$$

On désigne par $\mathcal{F}^0_{[S,T]}$ *la tribu engendrée par ce processus, et par* $\mathcal{F}^\mu_{[S,T]}$ *la tribu engendrée par* $\mathcal{F}^0_{[S,T]}$ *et les ensembles* $\mathbf{P}^\mu$*-négligeables de* $\mathcal{F}^0$. *On définit de la même façon les tribus* $\mathcal{F}^0_{[S,T[}$, $\mathcal{F}^\mu_{[S,T[}$, *etc.*

Lorsque T est un temps d'arrêt pour $(\mathcal{F}^\mu_t)$, les tribus $\mathcal{F}^\mu_{[0,T[}$ et $\mathcal{F}^\mu_{[0,T[}$ sont les tribus usuelles $\mathcal{F}^\mu_{T-}$, $\mathcal{F}^\mu_T$.

Voici le théorème principal de ce paragraphe :

Théorème 3.1. — *Soit* T *un temps terminal totalement inaccessible. Alors, pour toute mesure* μ, *on a la relation*

$$\bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{F}^\mu_{[T-\varepsilon, T+\varepsilon]} = \mathcal{C}^\mu(X_{T-}, X_T) \tag{3.2}$$

(l'indice supérieur μ de $\mathcal{C}^\mu$ indique que nous complétons la tribu par les ensembles $\mathbf{P}^\mu$-négligeables de $\mathcal{F}^\mu$).

Ce théorème ne s'étend pas, en général, à des temps accessibles, même avec l'hypothèse de topologie cofine (CF). Cependant, on a le cas particulier suivant :

THÉORÈME 3.2. — *Supposons que l'hypothèse* (CF) *de topologie cofine soit vérifiée, et soit* T *un temps terminal exact. Alors on a la relation* (3.2), *restreinte à l'ensemble* $\{ X_{T-} \in B,\ T < \infty \}$.

Les démonstrations résultent des lemmes ci-après, lemmes qui nous permettent également de montrer une propriété de Markov relative au passé strict :

THÉORÈME 3.3. — *Soient* T *un temps terminal totalement inaccessible, et* μ *une mesure de probabilité sur* E. *Alors les tribus* $\mathcal{F}^{\mu}_{T-}$ *et* $\mathcal{F}^{\mu}_{]T,+\infty[}$ *sont conditionnellement indépendantes relativement à* X_{T-}.

Voici un premier lemme relatif à un retournement du temps, et qui est presque — mais malheureusement seulement presque — un cas spécial d'un théorème de Chung-Walsh [3] :

LEMME 3.1. — *Soient* T *un temps terminal,* $\tilde{\partial}$ *un point isolé ajouté à* E *et* μ *une mesure de probabilité sur* E. *Posons :*

$$\tilde{X}_t = \begin{cases} X_{T-t} & \text{si } t < T < \infty, \\ \tilde{\partial} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors le processus $(\tilde{X}_t,\ t > 0)$ *est markovien pour la mesure* $\mathbf{P}^{\mu}$ *et pour la famille de tribus* $(\mathcal{F}^{\mu}_{]T-t,+\infty[},\ t > 0)$.

Remarque. — En fait, on peut montrer que le processus $\tilde{X}$ est modérément markovien.

Démonstration. — Selon le théorème de Chung-Walsh, on sait que $\tilde{X}$ est modérément markovien pour la famille de tribus $(\mathcal{F}^{\mu}_{]T-t,T[})_{t>0}$. Nous allons nous ramener à ce théorème en modifiant le processus X. Tout d'abord, considérons le processus arrêté à l'instant T, plus exactement le processus valant X_t pour $t < T$, et $(X_T, 0)$ pour $t \geqq T$. C'est encore un processus fortement markovien que nous allons, à son tour, modifier : au lieu de rester en $(X_T, 0)$ après T, le processus évoluera suivant un mouvement de translation uniforme sur la deuxième coordonnée de $E \times \mathbf{R}_+$. En d'autres termes, on considère le processus fortement markovien $Y : Y_t = X_t$ si $0 < t < T$ et $Y_{T+t} = (X_T, t)$ (ou encore : Y est le recollement du processus X arrêté à l'instant T avec le processus sur $E \times \mathbf{R}_+$, constant en la première coordonnée et dont la deuxième coordonnée suit un mouvement de translation uniforme). Remarquons que le processus Y retourné à T est, à nouveau, égal au processus $\tilde{X}$.

Désignons alors par $(\tilde{P}_t)$ la fonction de transition du processus retourné $(\tilde{X}_t)_{t>0}$. La démonstration sera terminée, si nous prouvons que, pour toute fonction G positive bornée et $\mathcal{F}^{\mu}_{]T-s,+\infty[}$-mesurable, on a

$$\mathbf{E}^{\mu}[f \circ \tilde{X}_{s+t} . G] = \mathbf{E}^{\mu}[\tilde{P}_t f \circ \tilde{X}_s . G], \qquad f \in \mathcal{E}_b^+. \tag{3.3}$$

En fait, il suffit de le faire pour les fonctions G de la forme $G_1 . G_2$, où

$$G_1 = \prod_{i=1}^{n} g_i \circ X_{T-s_i}, \qquad s_i \geqq 0, \qquad g_i \in \mathcal{E}_b^+, \qquad 1 \leqq i \leqq n,$$

$$G_2 = \prod_{i=1}^{m} h_i \circ X_{T+u_i}, \qquad u_i \geqq 0, \qquad h_i \in \mathcal{E}_b^+, \qquad 1 \leqq i \leqq m.$$

(Nous faisons la convention $X_t \equiv X_0$ si $t \leqq 0$.) Or G_1 est $\mathcal{F}^{\mu}_T$-mesurable de sorte qu'il nous suffit de vérifier la relation (3.3) sous la forme suivante (en conditionnant par rapport à la tribu $\mathcal{F}^{\mu}_T$) :

$$\mathbf{E}^{\mu}[f \circ \tilde{X}_{s+t} . G_1 . \mathbf{E}^{X_T}[G_2]] = \mathbf{E}^{\mu}[P_t \circ \tilde{X}_s . G_1 . \mathbf{E}^{X_T}[G_2]]. \tag{3.4}$$

Remarquons alors que $T + 1$ étant le temps d'entrée dans l'ensemble $E \times \{1\}$ du processus Y, est un temps d'arrêt terminal. Si donc $\tilde{Y}$ désigne le processus Y retourné à $T + 1$, alors on a $\tilde{Y}_1 = X_T$ (c'est la raison de l'introduction du processus Y) et la formule (3.4) s'écrira

$$\mathbf{E}^{\mu}[f \circ \tilde{Y}_{s+t+1} . G_1 . \mathbf{E}^{\tilde{Y}_1}[G_2]] = \mathbf{E}^{\mu}[\tilde{P}_t f \circ \tilde{Y}_{s+1} . G_1 . \mathbf{E}^{\tilde{Y}_1}[G_2]],$$

équation qui est vérifiée puisque le processus Y est markovien pour ses tribus naturelles et que la fonction G_1 vaut $\prod_{i=1}^{n} g_i \circ \tilde{Y}_{1+s_i}$.

Le lemme suivant est fondamental dans les démonstrations des théorèmes 1, 2 et 3 :

LEMME 3.2. — *Soient* T *un temps terminal,* μ *une mesure de probabilité sur* E, f *une fonction positive* $\mathcal{F}^{\mu}_{T-}$*-mesurable et* $a \in \mathbf{R}_+$. *Supposons que, ou bien* T *est totalement inaccessible, ou bien l'hypothèse de topologie cofine est vérifiée et* $X_{T-} \in B$ *sur* $\{T < \infty\}$. *Alors il existe une fonction borélienne positive* F *sur* E *telle que*

$$\lim_n \mathbf{E}^{\mu}\left[f \,\middle|\, \mathcal{F}^{\mu}_{\left[T-\frac{1}{n},\, T+a\right[}\right] = F \circ X_{T-} \quad \mathbf{P}^{\mu}\text{-p. s.}$$

Démonstration. — Il suffit de montrer le lemme pour des fonctions G qui sont $\mathcal{F}^{\mu}_{[0, T-\frac{1}{n}]}$-mesurables, pour un $n \in \mathbf{N}$. D'où

$$\mathbf{E}^{\mu}\left[G \,\middle|\, \mathcal{F}^{\mu}_{[T-\frac{1}{n}, T+a[}\right] = \mathbf{E}^{\mu}\left[G \,\middle|\, \mathcal{F}^{\mu}_{[T-\frac{1}{n}, \infty[} \,\middle|\, \mathcal{F}^{\mu}_{[T-\frac{1}{n}, T+a[}\right]$$
$$= \mathbf{E}^{\mu}\left[\mathbf{E}^{\mu}\left[G \,\middle|\, X_{T-\frac{1}{n}}\right] \,\middle|\, \mathcal{F}^{\mu}_{[T-\frac{1}{n}, T+a[}\right] \quad \mathbf{P}^{\mu}\text{-p. s.}$$

d'après le lemme 3.1. Par conséquent,

$$\mathbf{E}^{\mu}\left[G \,\middle|\, \mathcal{F}^{\mu}_{[T-\frac{1}{n}, T+a[}\right] = \mathbf{E}^{\mu}\left[G \,\middle|\, X_{T-\frac{1}{n}}\right] = \mathbf{E}^{\mu}\left[G \,\middle|\, \tilde{X}_{\frac{1}{n}}\right] \quad \mathbf{P}_{\mu}\text{-p. s.}$$

[où $\tilde{X}$ est le processus retourné à T : $(X_{T-t})_{t>0}$].

La preuve sera alors terminée si nous montrons que $\lim_n \mathbf{E}^{\mu}\left[G \,\middle|\, \tilde{X}_{\frac{1}{n}}\right]$ est $\tilde{X}_{0_+}$-mesurable, donc X_{T-}-mesurable. On peut se restreindre à des fonctions G de la forme $\prod^{n} g_i \circ \tilde{X}_{t_i}$, où $0 < t_1 < \ldots \leq t_n$ et où les g_i appartiennent à $\mathcal{E}^{+}_{b}$. En fait, d'après la propriété de Markov de $\tilde{X}$, il suffit de considérer des fonctions $\mathbf{E}^{\mu}[G \mid \tilde{X}_{t_1}]$ qui sont de la forme : $g \circ \tilde{X}_{t_1}$. On peut donc se restreindre à des transformées de Laplace de telles fonctions :

$$G = \int_0^{\infty} e^{-pt}\, g \circ \tilde{X}_t,$$

où $g \in \mathcal{E}^{+}_{b}$. On a alors

$$\mathbf{E}^{\mu}\left[G \,\middle|\, \tilde{X}_{\frac{1}{n}}\right] = \mathrm{E}\left[\int_0^{\frac{1}{n}} e^{-pt}\, g \circ \tilde{X}_t \, dt \,\middle|\, \tilde{X}_{\frac{1}{n}}\right] + e^{-\frac{p}{n}} \tilde{V}_p\, g \circ \tilde{X}_{\frac{1}{n}}, \tag{3.5}$$

où $(\tilde{V}_p)$ est la résolvante du processus $\tilde{X}$. Le premier terme du second membre ci-dessus est borné par $\frac{\|g\|}{n}$ et tend vers zéro lorsque $n \uparrow \infty$. D'autre part, on peut supposer que l'on a choisi une « bonne » version de $(\tilde{V}_p)$ de telle sorte que l'application $s \mapsto \tilde{V}_p\, g \circ \tilde{X}_s$ est continue à gauche sur]0, T[et a des limites à droite sur [0, T[. En particulier, l'application $s \mapsto \tilde{V}_p\, g \circ X_s$ a des limites à gauche sur]0, T], et le problème est de savoir si la limite à l'instant T est X_{T-}-mesurable. Comme on va le voir c'est vrai, mais pour des raisons complètement différentes suivant que T est totalement inaccessible, ou que $X_{T-} \in B$.

Tout d'abord, supposons que T soit totalement inaccessible. Alors, puisque la limite existe et suivant un théorème de P. A. Meyer ([20] p. 79, théorème 3), on a

$$\lim_{s \uparrow T} \tilde{V}_p\, g \circ X_s = \tilde{V}_p\, g \circ X_{T-}$$

ce qui achève la démonstration dans ce cas particulier.

Supposons ensuite que $X_{T-} \in B$ p. s. sur $\{ T < \infty \}$ et que l'hypothèse de topologique cofine soit vérifiée. Comme on vient de le voir, l'application $s \mapsto \tilde{V}_p\, g \circ X_s$ a des limites à gauche sur $]0, T]$.

Posons

$$F(x) = \overline{(P_0 \tilde{V}_p\, g)}\,(x) \equiv \mathcal{T} - \lim_{y \to x,\, y \neq x} \sup\, (P_0 \tilde{V}_p\, g)\,(y).$$

Alors, d'après la proposition 2.2, on a

$$\lim_{s \uparrow T} \tilde{V}_p\, g \circ X_s = F \circ X_{T-}.$$

C. Q. F. D.

Nous sommes maintenant en mesure de prouver les théorèmes 1 à 3.

Démonstration du théorème 1. — Nous allons montrer que les tribus $\mathcal{C}(X_{T-}, X_T)$ et $\bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{F}^0_{[T-\varepsilon, T+\varepsilon]}$ ne « diffèrent » au plus que par des ensembles $\mathbf{P}^\mu$-négligeables de $\mathcal{F}^\mu$. Pour cela, il suffira de prouver que, pour toute fonction $\mathcal{F}^0$-mesurable positive G, on a

$$\lim_n \mathbf{E}^\mu \left[G \,\middle|\, \mathcal{F}^\mu_{\left[T - \frac{1}{n},\, T + \frac{1}{n}\right]} \right] = \mathbf{E}^\mu [G \mid X_{T-}, X_T] \quad \mathbf{P}^\mu\text{-p. s.}$$

En fait, comme auparavant, nous pouvons nous restreindre à des fonctions G de la forme

$$G = G_1\, G_2\, G_3,$$

$$G_1 = \prod_{i=1}^{p} f_i \circ X_{T - s_i}, \qquad G_2 = f_{p+1} \circ X_T, \qquad G_3 = \prod_{i=p+2}^{q} f_i \circ X_{T+s_i}, \qquad 0 < s_i, \qquad 1 \leqq i \leqq q,$$

où les f_i appartiennent à $\mathcal{E}_b^+$, car elles engendrent la tribu $\mathcal{F}^0$ sur $\{ T < \infty \}$.

Or la famille de tribus $\left(\mathcal{F}^\mu_{\left[T - \frac{1}{n},\, T + \frac{1}{n}\right]} \right)_{n \in \mathbf{N}}$ est décroissante, donc la limite $\lim_n \mathbf{E}^\mu \left[G \,\middle|\, \mathcal{F}^\mu_{\left[T - \frac{1}{n},\, T + \frac{1}{n}\right]} \right]$ existe et, par suite, il nous suffira de montrer qu'elle est $\mathcal{C}^\mu(X_{T-}, X_T)$-mesurable. Mais on a

$$\mathbf{E}^\mu \left[G \,\middle|\, \mathcal{F}^\mu_{\left[T - \frac{1}{n},\, T + \frac{1}{n}\right]} \right] = \mathbf{E}^\mu \left[G \,\middle|\, \mathcal{F}^\mu_{T + \frac{1}{n}} \,\middle|\, \mathcal{F}^\mu_{\left[T - \frac{1}{n},\, T + \frac{1}{n}\right]} \right]. \tag{3.6}$$

Choisissons n assez grand pour que $\frac{1}{n} < s_j$, $1 \leq j \leq q$, d'où

$$\mathbf{E}^\mu\left[G \,\middle|\, \mathscr{F}^\mu_{T+\frac{1}{n}}\right] = G_1 G_2 \mathbf{E}^\mu\left[G_3 \,\middle|\, \mathscr{F}^\mu_{T+\frac{1}{n}}\right] \quad \mathbf{P}^\mu\text{-p. s.}$$

La propriété de Markov dit que $\mathbf{E}^\mu\left[G_3 \,\middle|\, \mathscr{F}^\mu_{T+\frac{1}{n}}\right]$ vaut $\mathbf{P}^\mu$-p. s. $\mathbf{E}^\mu\left[G_3 \,\middle|\, X_{T+\frac{1}{n}}\right]$ et cette dernière « fonction » est $\mathscr{F}^\mu_{\left[T-\frac{1}{n},\, T+\frac{1}{n}\right]}$-mesurable; ce qui est aussi le cas de G_2. Nous pouvons donc écrire (3.6) sous la forme

$$\mathbf{E}^\mu\left[G \,\middle|\, \mathscr{F}^\mu_{\left[T-\frac{1}{n},\, T+\frac{1}{n}\right]}\right] = \mathbf{E}^\mu\left[G_1 \,\middle|\, \mathscr{F}^\mu_{\left[T-\frac{1}{n},\, T+\frac{1}{n}\right]}\right].G_2.\mathbf{E}^\mu\left[G_3 \,\middle|\, \mathscr{F}^\mu_{T+\frac{1}{n}}\right] \quad \mathbf{P}^\mu\text{-p. s.}$$

Remarquons alors que

$$\begin{aligned}\lim_n \mathbf{E}^\mu\left[G_3 \,\middle|\, \mathscr{F}^\mu_{T+\frac{1}{n}}\right] &= \mathbf{E}^\mu[G_3 \mid \mathscr{F}^\mu_T] \\ &= \mathbf{E}^\mu[G_3 \mid X_T] \quad \mathbf{P}^\mu\text{-p. s.,}\end{aligned}$$

où l'on a, à nouveau, utilisé la propriété de Markov. D'autre part, par le lemme 3.2, nous avons

$$\lim_n \mathbf{E}^\mu\left[G_1 \,\middle|\, \mathscr{F}^\mu_{\left[T-\frac{1}{n},\, T+\frac{1}{n}\right]}\right] = \mathbf{E}^\mu[G_1 \mid X_{T-}] \quad \mathbf{P}^\mu\text{-p. s.}$$

Par conséquent, en regroupant les relations précédentes, on aura

$$\begin{aligned}\lim_n \mathbf{E}^\mu\left[G_1 G_2 G_3 \,\middle|\, \mathscr{F}^\mu_{\left[T-\frac{1}{n},\, T+\frac{1}{n}\right]}\right] &= \mathbf{E}^\mu[G_1 \mid X_{T-}].G_2.\mathbf{E}^\mu[G_3 \mid X_T] \\ &= \mathbf{E}^\mu[G_1 G_2 G_3 \mid X_{T-}, X_T] \quad \mathbf{P}^\mu\text{-p. s.}\end{aligned}$$

Ceci termine la démonstration.

La preuve du théorème 2 est exactement la même à un point près : on utilise, cette fois-ci, la deuxième partie du lemme 3.2.

Démonstration du théorème 3. — Nous allons montrer, plus généralement, que les tribus $\mathscr{F}^\mu_{]0,T[}$ et $\mathscr{F}^\mu_{[T,T+a[}$ sont conditionnellement indépendantes relativement à la tribu $\mathscr{C}^\mu(X_{T-})$, ceci pour tout $a > 0$. Pour cela, il suffit que, pour toute fonction de la forme $G = \prod_{i=1}^{n} f_i \circ X_{T-s_i}$, où les f_i appartiennent à $\mathscr{E}_b^+$, on ait

$$\mathbf{E}^\mu[G \mid \mathscr{F}^\mu_{[T,T+a[}, X_{T-}] = \mathbf{E}^\mu[G \mid X_{T-}] \quad \mathbf{P}^\mu\text{-p. s.}$$

Or on a

$$\mathbf{E}^\mu[G \mid \mathscr{F}^\mu_{[T,T+a[}, X_{T-}] = \lim_n \mathbf{E}^\mu\left[G \,\middle|\, \mathscr{F}^\mu_{\left[T-\frac{1}{n},\, T+a\right[}\right]$$

et le dernier membre vaut $\mathbf{E}^\mu[G \mid X_{T-}]$ $\mathbf{P}^\mu$-p. s. d'après le premier cas du lemme 3.2.

4. Représentation des temps terminaux. — Considérons le problème suivant : un temps terminal d'un processus de Ray X est-il un temps de première entrée ? Il est facile de voir qu'il existe des temps terminaux qui ne sont pas des temps de première entrée pour X. Par contre, si l'on considère le processus couple (X_{t-}, X_t) on a le théorème :

Théorème 4.1. — *Supposons que les hypothèses* (L) *et* (CF) *soient vérifiées et soit* R *un temps terminal exact. Alors il existe un sous-ensemble borélien* K *de* $E \times E$ *tel que*

$$R = \inf (t > 0 : (X_{t-}, X_t) \in K) \quad \text{p. s.}$$

Si R est, par exemple, totalement inaccessible, on peut donner une forme plus précise de l'ensemble K. Dans l'énoncé suivant, B représente toujours l'ensemble des points de branchements et Δ est la diagonale de $E \times E$.

Théorème 4.2. — *Soit* R *un temps terminal exact. Alors :*

(1) *Si* R *est totalement inaccessible et si nous faisons l'hypothèse* (L), *il existe un ensemble borélien* K *de* $(E - B) \times (E - B) - \Delta$ *tel que*

$$R = \inf (t > 0 : (X_{t-}, X_t) \in K) \quad \text{p. s.}$$

(2) *Si* R *est prévisible et si nous faisons l'hypothèse de topologie cofine* (CF), *il existe un ensemble presque borélien* C *de* E *tel que*

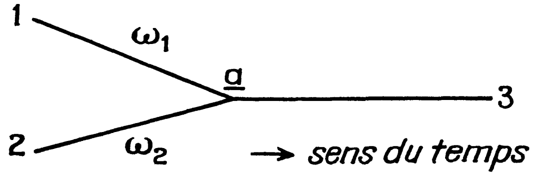
$$R = \inf (t > 0 : X_{t-} \in C) \quad \text{p. s.} \tag{4.1}$$

(3) *Si* R *est accessible et si nous faisons les hypothèses* (L) *et* (CF), *il existe un ensemble borélien* K *de* $(B \times E) \cup \Delta$ *tel que*

$$R = \inf (t > 0 : (X_{t-}, X_t) \in K) \quad \text{p. s.}$$

Remarques. — 1. Dans la première partie, l'hypothèse (L) sert à rendre l'ensemble K indépendant des mesures $\mathbf{P}^x$, $x \in E$.

2. Les deuxième et troisième parties de ce théorème peuvent être mises en défaut si nous ne faisons pas l'hypothèse (CF). En effet, considérons le processus de translation uniforme à trois branches :



Une particule se déplace de manière uniforme dans la branche 1 ou 2 et à partir du point a continue dans la branche 3. Il n'existe évidemment pas de topologie cofine au point a. Désignons par T le temps prévisible

$$T(\omega) = \begin{cases} T_{\{a\}}(\omega) & \text{sur } \{\omega = \omega_1\}, \\ \infty & \text{sur } \{\omega = \omega_2\}. \end{cases}$$

Ce n'est pas un temps de première entrée du couple (X_{t-}, X_t).

3. Dans la deuxième partie du théorème 4.2, l'ensemble C peut être choisi borélien si l'hypothèse (L) est vérifiée.

4. Soit un sous-ensemble de E et notons respectivement par S_C et T_C les temps $\inf(t > 0 : X_{t-} \in C)$ et $\inf(t > 0 : X_t \in C)$. Supposons que l'ensemble B des points de branchement est vide et que l'hypothèse (B) de Hunt est satisfaite. Alors, pour tout ensemble borélien C, on a $S_C = T_C$ et par suite l'expression (4.1) représente le temps d'entrée usuel T_C.

S'il n'y a pas de risques de confusion, nous utiliserons également la notation T_A pour les temps d'entrée du couple (X_{t-}, X_t) dans un ensemble A de $E \times E$:

$$T_A = \inf(t > 0 : (X_{t-}, X_t) \in A).$$

Avant de prouver les théorèmes 4.1 et 4.2, nous allons faire quelques remarques « techniques » :

Soient R un temps terminal exact et $f \in \mathcal{C}(E)$. Pour tout $p > 0$ et tout $x \in E$, posons

$$\Phi^p f(x) = \mathbf{E}^x[e^{-pR} f \circ X_R]. \tag{4.2}$$

Cette fonction est finement continue et presque borélienne et l'application $s \mapsto \Phi^p f \circ X_s$ est p. s. continue à droite et pourvue de limites à gauche (*voir* Blumenthal-Getoor [1], p. 87, (4.14)). De plus, et c'est très important car c'est la clef de l'hypothèse (CF), l'application $s \mapsto \Phi^p f \circ X_{s-}$ est p. s. pourvue de limites à gauche. En effet, cela résulte de ce que $\Phi^p f = P_0 \Phi^p f$ — c'est une conséquence directe de la définition de Φ^p — et de la proposition 2.1.

Lorsque l'hypothèse (CF) est vérifiée, introduisons les fonctions suivantes :

$$\overline{\Phi}^p f(x) = \limsup_{y \to x,\, y \neq x} \text{cofine}\ \Phi^p f(y), \qquad x \in E, \qquad f \in \mathcal{C}(E); \tag{4.3}$$

$$\Phi^\infty f = \lim_p \Phi^p f \qquad \text{et} \qquad \overline{\Phi}^\infty f = \lim_p \overline{\Phi}^p f. \tag{4.4}$$

Proposition 4.1. — *Faisons l'hypothèse* (CF) *et soient* $p > 0$, $f \in \mathcal{C}(E)$ *et* μ *une mesure de probabilité sur* E. *Alors la fonction* $\overline{\Phi}^p f$ *est cofinement* *continue, sauf peut-être pour un ensemble polaire pour le processus* $(X_{t-}, t > 0)$. *Si* S *est un temps d'arrêt strictement positif et prévisible pour la famille* $(\mathcal{F}_t^\mu)$, *on a* $\mathbf{P}^\mu$*-p. s. sur* $\{ S \leqq R,\ S < \infty \}$:

$$\overline{\Phi}^p f \circ X_{S-} = \mathbf{E}^\mu \left[e^{-p(R-S)} f \circ X_R \,|\, \mathcal{F}_{S-}^\mu \right]; \tag{4.5}$$

$$\overline{\Phi}^\infty f \circ X_{S-} = \mathbf{E}^\mu \left[I_{\{S=R\}} f \circ X_R \,|\, \mathcal{F}_{S-}^\mu \right] \tag{4.6}$$

et, en particulier,

$$\overline{\Phi}^\infty 1 \circ X_{S-} = \mathbf{P}^\mu \left[S = R \,|\, \mathcal{F}_{S-}^\mu \right]. \tag{4.7}$$

Démonstration. — La première phrase n'est pas autre chose que l'hypothèse (CF). Les formules (4.6) et (4.7) sont des conséquences de (4.5). (On voit en particulier que la limite définissant $\overline{\Phi}^\infty$ existe.) Il reste à démontrer (4.5). Soit (S_n) une suite de temps d'arrêt annonçant S, alors

$$\Phi^p f \circ X_{S_n} = \mathbf{E}^\mu \left[e^{-p(R-S_n)} f \circ X_R \,|\, \mathcal{F}_{S_n}^\mu \right] \quad \mathbf{P}^\mu\text{-p. s. sur } \{ S_n < R \}.$$

Lorsque $n \uparrow \infty$, $\Phi^p f \circ X_{S_n}$ tend vers $\overline{\Phi^p f} \circ X_S$ d'après l'hypothèse (CF), donc le membre de droite converge vers $\mathbf{E}^\mu [e^{-p(R-S)} f \circ X_R \,|\, \mathcal{F}_{S-}^\mu]$, d'où le résultat car les ensembles $\{ S_n < R \}$ décroissent vers $\{ S \leqq R \}$ lorsque $n \uparrow \infty$.

Posons, pour un nombre $p > 0$,

$$C \equiv \{ x : \overline{\Phi}^p 1(x) = 1 \} \qquad \text{et} \qquad D \equiv \{ x : \Phi^p 1(x) = 1 \}. \tag{4.8}$$

Ces définitions sont indépendantes de p; les ensembles C et D valent donc $\{ \overline{\Phi}^\infty 1 = 1 \}$ et $\{ \Phi^\infty 1 = 1 \}$ respectivement.

Lemme 4.1 (Les notations sont celles de la remarque 4 qui suit l'énoncé du théorème 4.2). — *On a*

$$R \leqq S_C \wedge T_D \quad \text{p. s.}$$

Démonstration. — Soit μ une mesure de probabilité sur E. La fonction $\Phi^p 1$ est finement continue, par suite $X_{T_D} \in D$ $\mathbf{P}^\mu$-p. s. sur $\{ T_D < \infty \}$. Donc on a $\mathbf{P}^\mu$-p. s., sur $\{ T_D < \infty \}$:

$$\mathbf{P}^\mu \left\{ R \circ \theta_{T_D} = 0 \,\middle|\, \mathcal{F}_{T_D}^\mu \right\} = \Phi^\infty 1 \circ X_{T_D} = 1;$$

d'où $R \leqq T_D$ $\mathbf{P}^\mu$-p. s. D'autre part, le processus (X_{t-}) est prévisible, par conséquent, d'après le lemme 1.1, il existe une suite (S_n) de temps d'arrêt prévisible pour $(\mathcal{F}_t^\mu)$ décroissant vers S_C, et telle que

$$\lim_n \mathbf{P}^\mu \{ X_{S_n^-} \in C \} = \mathbf{P}^\mu \{ S_C < \infty \}.$$

Or, sur $\{ X_{S_n^-} \in C \}$, nous avons

$$\mathbf{P}^{\mu} \{ R \circ \theta_{S_n} = 0 \mid \mathcal{F}^{\mu}_{S_n^-} \} = \overline{\Phi}^{\infty} 1 \circ X_{S_n^-} = 1 \quad \mathbf{P}^{\mu}\text{-p. s.}$$

Donc, en passant à la limite, nous voyons que

$$R \leqq S_C + R \circ \theta_{S_C} = S_C \quad \mathbf{P}^{\mu}\text{-p. s.}$$

Introduisons maintenant une notion nouvelle :

DÉFINITION 4.1. — *Soient* S *et* R *deux temps terminaux exacts. On appelle* âme *de* S *et* R *la variable aléatoire suivante :*

$$\hat{A}_{SR} = \inf (a + R \circ \theta_a : R \circ \theta_a = S \circ \theta_a, \ a \in \mathbf{Q}_+).$$

Le lecteur vérifiera sans difficulté la proposition suivante :

PROPOSITION 4.2. — *Soient* S *et* R *deux temps terminaux exacts dont l'un est effilé. Alors l'âme* $\hat{A}_{SR}$ *de* S *et* R *est encore un temps terminal exact. De plus, on a* $\hat{A}_{SR} \geqq S \vee R$ *et les ensembles* $\{ \hat{A}_{SR} = R \}$ *et* $\{ S = R \}$ *sont p. s. égaux.*

En général, il n'est pas possible de décomposer un temps terminal R en une partie accessible R_1 et une partie totalement inaccessible R_2 de telle sorte que R_1 et R_2 soient encore des temps terminaux. (Le lecteur peut essayer lorsque X est un processus de Poisson et $R = T_{\{1\}}$.) Nous allons donner une décomposition un peu plus compliquée qui nous permettra de déduire le théorème 4.1 du théorème 4.2 plus détaillé.

LEMME 4.2. — *Supposons que l'hypothèse* (CF) *est vérifiée et soit* R *un temps terminal exact. Alors on a*

$$R = S_C \wedge T_D \wedge \hat{A}_a \wedge \hat{A}_i \quad \text{p. s.},$$

où $\hat{A}_a$ (resp. $\hat{A}_i$) *est la borne inférieure d'une famille dénombrable de temps terminaux effilés et accessibles* (*resp. totalement inaccessibles*).

Remarque. — On peut se passer de l'hypothèse (CF), mais alors il faudrait remplacer le temps S_C par $\inf (t > 0 : (\Phi^p f \circ X_t)_- = 1)$.

Démonstration. — Soit n un entier supérieur à 1 et posons

$$\sigma_n = \inf \left(t > 0 : d\,(X_{t-}, X_t) \in \left[\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1} \right[\right);$$

$$\sigma_n^i = \inf \left(t > 0 : d\,(X_{t-}, X_t) \in \left[\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1} \right[\text{ et } X_{t-} \in E - B \right),$$

$$\sigma_n^a = \inf \left(t > 0 : d\,(X_{t-}, X_t) \in \left[\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1} \right[\text{ et } X_{t-} \in B \right).$$

Notons par $\hat{A}_n$ l'âme $\hat{A}_{R\sigma_n}$ de R et σ_n. Par le lemme 4.1 et la proposition 4.2, on a $R \leqq S_C \wedge T_D \wedge \left(\bigwedge_n \hat{A}_n\right)$ p. s.

Considérons le temps d'arrêt suivant :

$$U = \begin{cases} R & \text{si } R < S_C \wedge T_D \wedge \left(\bigwedge_n \hat{A}_n\right), \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il résulte de la proposition 4.2 que U ne peut pas coïncider avec un instant σ_n, $n \geqq 1$; par conséquent, sur $\{U > 0\}$, on a $X_{U-} = X_U$ p. s., donc U est prévisible d'après la proposition 1.3. Désignons par (U_n) une suite de temps d'arrêt annonçant U.

Sur $\{0 < U < \infty\}$, on a, d'après le théorème de convergence de Lévy,

$$1 = \lim_n \Phi^p 1 \circ X_{U_n} = \overline{\Phi}^p 1 \circ X_U \quad \text{p. s.}$$

Il en résulte que $X_{U-} = X_U \in C$ et $S_C \leqq U$, ce qui est contradictoire, et donc $R = S_C \wedge T_D \wedge \left(\bigwedge_n \hat{A}_n\right)$.

Sur $\{U = 0\}$, on a

$$0 = R < S_C \wedge T_D \wedge \left(\bigwedge_n \hat{A}_n\right), \qquad \text{donc} \quad \Phi^p 1 \circ X_R = 1;$$

mais R étant exact, si (t_n) est une suite de nombres strictement positifs décroissant vers zéro, on aura $t_n + R \circ \theta_{t_n} \downarrow 0$, et par suite, il existera un entier n_0 assez grand pour lequel

$$t_{n_0} + R \circ \theta_{t_{n_0}} < S_C \wedge T_D \wedge \left(\bigwedge_n \hat{A}_n\right).$$

Alors de deux choses, ou bien $\mathbf{P}^\mu\{R \circ \theta_{t_{n_0}} > 0\} > 0$ pour une mesure μ et on est ramené au cas précédent, car alors $\mathbf{P}^{X_{t_{n_0}}}\{R > 0\} = 1$, ou bien $R \circ \theta_{t_{n_0}} = 0$ p. s. pour $n \geqq n_0$, donc $X_{t_n} \in D$ et, par suite, $T_D = 0 = R$.

Enfin, nous obtenons l'énoncé complet du lemme en désignant par $\hat{A}_n^i$ (resp. $\hat{A}_n^a$) l'âme de R_n et de σ_n^i (resp. σ_n^a).

Démonstration du théorème 4.1. — Supposons que le théorème 4.2 soit démontré. Grâce aux hypothèses (L) et (CF), chaque âme $\hat{A}_n$ de la décomposition ci-dessus est p. s. un temps d'entrée d'un sous-ensemble borélien E_n de $E \times E$: $\hat{A}_n = T_{E_n}$ p. s. Comme S_C et T_D sont déjà des temps d'entrée, le temps terminal R sera évidemment le temps d'entrée du couple (X_{t-}, X_t) dans la réunion

$$(C \times E) \cup (E \times D) \cup \left(\bigcup_n E_n\right).$$

Démonstration du théorème 4.2. — *Première partie.* — Supposons l'hypothèse (L) vérifiée et notons par ξ la mesure de référence. Le temps $\mathbf{R}$, étant totalement inaccessible, coïncide avec un temps de saut du processus et on a $X_{R-} \in E - B$. Désignons par R_n l'âme de R et du temps σ_n^i défini plus haut. Le temps R_n est encore totalement inaccessible et il est clair que $R = \inf_n R_n$ p. s.

L'ensemble $\{\sigma_n^i = R_n\}$ appartient à la tribu $\mathcal{F}^{\xi}_{[\sigma_n^i - \delta, \sigma_n^i + \delta]}$ car σ_n et R étant des temps terminaux, on a, lorsque $\sigma_n^i - \delta > 0$:

$$\{\sigma_n^i = R\} = \{\sigma_n^i \circ \theta_{\sigma_n^i - \delta} = R \circ \theta_{\sigma_n^i - \delta}\}.$$

Par conséquent, $\{\sigma_n^i = R\} \in \bigcap_{\delta > 0} \mathcal{F}^{\xi}_{[\sigma_n^i - \delta, \sigma_n^i + \delta]}$. Mais cette dernière tribu vaut $\mathcal{C}^{\xi}(X_{\sigma_n^i -}, X_{\sigma_n^i})$ d'après le théorème 3.1. On en déduit qu'il existe un sous-ensemble E_n de $E \times E$ tel que

$$\{\sigma_n^i = R\} = \{(X_{\sigma_n^i -}, X_{\sigma_n^i}) \in E_n\} \quad \mathbf{P}^{\xi}\text{-p. s.} \tag{4.9}$$

En fait, on peut choisir E_n dans

$$\left\{(x, y) \in (E - B) \times (E - B) : d(x, y) \in \left[\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}\right[\right\}.$$

Montrons, maintenant, que $R_n = T_{E_n}$ p. s. Pour cela, considérons les fonctions

$$f(x) = \mathbf{P}^x\{\sigma_n^i = R_n < T_{E_n}\} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \mathbf{P}^x\{\sigma_n^i = T_{E_n} < R_n\}.$$

Puisque σ_n^i, R_n et T_{E_n} sont des temps terminaux et que $\sigma_n^i \leqq R_n \wedge T_{E_n}$, on a, pour tout $t > 0$,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^x[I_{\{t < \sigma_n^i\}} f \circ X_t] &= \mathbf{P}^x\{t < \sigma_n^i;\ \sigma_n^i \circ \theta_t = R_n \circ \theta_t < T_{E_n} \circ \theta_t\} \\ &= \mathbf{P}^x\{t < \sigma_n^i;\ \sigma_n^i = R_n < T_{E_n}\} \\ &\leqq f(x). \end{aligned}$$

Comme σ_n^i est strictement positif, le premier membre ci-dessus tendra vers $f(x)$ lorsque $t \downarrow 0$. En d'autres termes, la fonction f est excessive pour le processus tué à l'instant σ_n^i, processus qui satisfait encore à l'hypothèse (L) relativement à la même mesure de référence ξ. D'après (4.9), la fonction f est nulle ξ-p. s., donc identiquement. On montre, de même, que la fonction g est nulle. Par conséquent, on aura, pour tout $x \in E$,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^x\{R_n < T_{E_n}\} &\leqq \sum_{r \in \mathbf{Q}_+} \mathbf{P}^x\{R_n \circ \theta_r = \sigma_n^i \circ \theta_r < T_{E_n} \circ \theta_r\} \\ &= \sum_{r \in \mathbf{Q}_+} \mathbf{E}^x[f \circ X_r] = 0. \end{aligned}$$

De même, on trouve que $\mathbf{P}^x\{T_{E_n} < R_n\} = 0$ et, par conséquent, que $\mathbf{P}^x\{T_{E_n} = R_n\} = 1$ pour tout $x \in E$. La première partie du théorème 4.2 est alors démontrée puisque

$$R = \inf_n R_n = T_{\bigcup_n E_n} \quad \text{p. s.}$$

Deuxième partie. — Supposons que l'hypothèse (CF) soit vérifiée et que R soit un temps prévisible. Nous allons montrer que $R = S_C$ p. s., où C est l'ensemble défini en (4.8). Nous avons déjà vu au lemme 4.1 que $R \leq S_C$. Or sur $\{R > 0\}$ on a $\overline{\Phi}^\infty 1 \circ X_{R-} = 1$ p. s. d'après la proposition 4.1, donc $X_{R-} \in C$ et $S_C \leq R$ p. s. Il reste à montrer que $S_C = 0$ p. s. sur $\{R = 0\}$. Remarquons d'abord que si $t > 0$ est choisi tel que $X_{t-} = X_t$ $\mathbf{P}^x$-p. s. pour un x de E, alors

$$\overline{\Phi}^p 1 \circ X_t = \Phi^p 1 \circ X_t \quad \mathbf{P}^x\text{-p. s.}$$

Choisissons alors une suite (t_n) décroissante vers zéro, de points de continuité de X. Sur $\{R \circ \theta_{t_n} > 0\}$ l'argument ci-dessus nous montre que $X_{(t_n + R \circ \theta_{t_n})-} \in C$ et sur $\{R \circ \theta_{t_n} = 0\}$ on a

$$\overline{\Phi}^p 1 \circ X_{t_n} = \Phi^p 1 \circ X_{t_n} = 1 \quad \text{p. s.,}$$

donc $X_{t_n^-} \in C$.

Or le temps R étant exact, on a $\lim_n (t_n + R \circ \theta_{t_n}) = 0$ p. s. sur $\{R = 0\}$, et d'après ce qui précède, cela entraîne que $S_C = 0$ p. s.

Troisième partie. — Faisons les hypothèses (L) et (CF) et soit R un temps terminal exact fini et accessible. Raisonnons d'abord sur $\{R > 0\}$. On a p. s.

$$\{R > 0\} = \{(X_{R-}, X_R) \in \Delta\} \cup \{(X_{R-}, X_R) \in B \times E\}.$$

Sur $\{(X_{R-}, X_R) \in \Delta\}$, on montre, comme dans le deuxième partie, que R est un temps d'entrée. Sur $\{(X_{R-}, X_R) \in B \times E\}$, on procède de la manière suivante; tout d'abord posons

$$B_\varepsilon = \{x \in B : P_0(x, \{y : d(x, y) > \varepsilon\}) > \varepsilon\}, \qquad \varepsilon > 0.$$

Comme $B = \bigcup_n B_{\frac{1}{n}}$, nous allons restreindre la démonstration à l'ensemble $B_\varepsilon \times E$, et montrer qu'il existe un ensemble borélien K de $B_\varepsilon \times E$ tel que, sur $\{X_{R-} \in B_\varepsilon,\ R < \infty\}$, on ait $R = T_K$ p. s.

La coupe suivant $\omega \in \Omega$ de $H = \{(t, \omega) : X_{t-}(\omega) \in B_\varepsilon\}$ est un ensemble discret, par conséquent si S (resp. S_n, $n \in \mathbf{N}$) désigne le temps prévisible $S = \inf(t > 0 : X_{t-} \in B_\varepsilon)$ (resp. les itérés de S), alors l'ensemble prévisible H est la réunion des graphes des temps d'arrêt prévisibles (S_n).

Or $S \leqq R$ et l'ensemble $\{ S = R < \infty \}$ est $\mathcal{C}^{\xi}(X_{S-}, X_S)$-mesurable : en effet, en utilisant la proposition 4.1 et en désignant par ξ la mesure de référence, on a

$$\begin{aligned} I_{\{S=R<\infty\}} &= \mathbf{P}^{\xi}\{ S = R < \infty \mid \mathcal{F}_S \} \\ &= \mathbf{P}^{\xi}\{ S = R < \infty \mid \mathcal{F}_{S-}, X_S, S \leqq R < \infty \} \\ &= \mathbf{P}^{\xi}\{ S = R < \infty \mid \mathcal{F}_{S-}, \mid \mathcal{F}_{S-}, X_S \} \\ &= \mathbf{E}^{\xi}[I_{\{S\leqq R<\infty\}} \overline{\Phi}^{\infty} 1 \circ X_{S-} \mid \mathcal{F}_{S-}, X_S] \end{aligned}$$

et ce dernier terme est $\mathcal{C}^{\xi}(X_{S-}, X_S)$-mesurable.

Il existe donc un ensemble borélien K de $B_{\varepsilon} \times E$ vérifiant

$$\{ S = R < \infty \} = \{ (X_{S-}, X_S) \in K \} \quad \mathbf{P}^{\xi}\text{-p. s.}$$

On répète alors l'argument de la première partie consistant à montrer que la relation $\mathbf{P}^{\xi}\{ S = R < T_K \} = \mathbf{P}^{\xi}\{ S = T_K < R \} = 0$ entraîne $R = T_K$ p. s.

Il reste à envisager le cas où, pour une certaine loi μ sur E, on a $R = 0$ $\mathbf{P}^{\mu}$-p. s. Désignons par (t_n) une suite de nombres strictement positifs, décroissant vers zéro, et telle que les t_n sont des instants de continuité du processus X. Le temps R étant terminal exact, on a $\lim_n (t_n + R \circ \theta_{t_n}) = 0$. De deux choses, ou bien on est sur $\{ R \circ \theta_{t_n} > 0 \}$ et alors $R > 0$ $\mathbf{P}^{X_{t_n}}$-p. s. et on est ramené au cas précédent, ou bien on est sur $\{ R \circ \theta_{t_n} = 0 \}$ pour tout n, et alors $\Phi^p \circ X_{t_n} = 1$, donc $X_{t_n} \in C$ $\mathbf{P}^{\mu}$-p. s.; par suite,

$$(X_{t_n^-}, X_{t_n}) \in \Delta \cap (C \times C) \qquad \text{et} \qquad R = T_{\Delta \cap (C \times C)} \quad \mathbf{P}^{\mu}\text{-p. s.}$$

5. Fonctionnelles additives purement discontinues. — Dans ce paragraphe, nous considérons des fonctionnelles additives (A_t) d'un processus de Ray, éventuellement infinies. En particulier, nous ne supposons pas que la variable aléatoire A_0 est nulle; elle peut être infinie. Une fonctionnelle additive (A_t) sera dite *exacte* si, pour toute suite (t_n) de nombres positifs décroissant vers zéro, on a

$$A_t = \lim_n A_{t-t_n} \circ \theta_{t_n} \quad \text{p. s.}$$

(Cette propriété est automatiquement vérifiée si $A_0 = 0$ p. s.) Un point x de E est *permanent* pour la fonctionnelle additive A si $\mathbf{P}^x\{ A_0 = 0 \} = 1$; nous noterons par E_A l'ensemble de ces points. L'ensemble $E - E_A$ est presque borélien et finement fermé.

Notons que le premier instant où une fonctionnelle additive purement discontinue saute d'une certaine quantité est un temps terminal. Du fait que la fonctionnelle additive A peut être infinie, il faut définir correctement ses sauts. Pour $t > 0$, posons

$$\partial A_t = \begin{cases} \lim\limits_{\substack{r \uparrow t \\ r \in \mathbf{Q}_+}} (A_{t-r} \circ \theta_r - A_{(t-r)-} \circ \theta_r) & \text{si la limite existe} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

La limite ci-dessus existe p. s. s'il existe un nombre rationnel r inférieur strictement à t et tel que $A_{(t-r)-} \circ \theta_r < \infty$; en particulier, si $A_{t-} < \infty$, on aura $\partial A_t = A_t - A_{t-}$. Si la fonctionnelle additive A est purement discontinue, nous pouvons l'écrire sous la forme

$$A_t = A_0 + \sum_{0 < s \leq t} \partial A_s. \tag{5.1}$$

Nous dirons que la fonctionnelle additive A est *prévisible* si le processus $(A_t, t \geq 0)$ est prévisible, et *retorse* si $\partial A_t > 0$ entraîne que $X_{t-} \neq X_t$ et $X_{t-} \in E - B$ p. s. (en d'autres termes, la fonctionnelle ne saute qu'en des instants totalement inaccessibles).

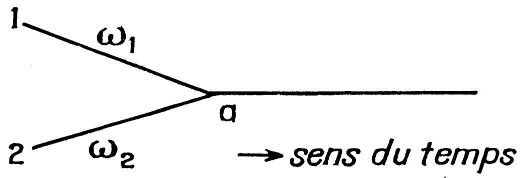
Le théorème de représentation ci-dessous, est connu pour les processus de Hunt vérifiant l'hypothèse (L) (Motoo et S. Watanabe [7]). Plus récemment, M. Sharpe [12] l'a démontré dans le cas de deux processus standards en dualité.

THÉORÈME 5.1. — *Supposons que les hypothèses* (L) *et* (CF) *soient vérifiées et donnons-nous une fonctionnelle additive exacte et purement discontinue* A. *Alors il existe une fonction borélienne* F *sur* $E \times E$ *telle que, pour tout* $t > 0$, *on ait*

$$A_t = \sum_{0 < s \leq t} F(X_{s-}, X_s) \quad p.\ s.$$

Lorsque A *est prévisible, la fonction* F *ne dépend pas de la deuxième coordonnée. De plus, l'hypothèse* (CF) *est inutile si* A *est retorse.*

Remarque. — L'hypothèse (CF) est essentielle si A est prévisible comme le montre le contre-exemple suivant : Y est le processus se composant de deux translations uniformes qui se rejoignent au point a :



On vérifie qu'il n'y a pas de topologie cofine. Désignons, comme au paragraphe 4, par T le temps égal à $T_{\{a\}}$ pour la trajectoire provenant de la branche 1, et égal à $+\infty$ pour l'autre. Posons alors $A_t = 0$ si $t < T$ et

$$\partial A_T = A_T - A_{T-} = 0 \quad (\text{resp. } 1) \quad \text{sur } \{\omega = \omega_1\} \ (\text{resp. } \{\omega = \omega_2\}).$$

Cette fonctionnelle additive ne vérifie pas la conclusion du théorème 5.1.

Démonstration du théorème 5.1. — Soient $\varepsilon > 0$ et I un ensemble borélien de $[\varepsilon, +\infty]$. Le temps $R_I = \inf(t > 0 : \partial A_t \in I)$ est un temps terminal exact et vérifie l'une des deux relations suivantes : $\partial A_{R_I} \in I$ ou $\partial A_{R_I} = +\infty$; en effet, lorsque $\partial A_{R_I} \notin I$, le temps R_I est une limite à droite de sauts de la fonctionnelle, dont les valeurs sont supérieures à ε, donc $\partial A_{R_I} = \infty$. Par conséquent, d'après la loi du tout ou rien de Blumenthal, si $\partial A_{R_I} \notin I$, on aura $X_{R_I} \in E - E_A$.

D'après le théorème 4.1, il existe un ensemble borélien K_I de $E \times E$ tel que

$$R_I = T_{K_I} \quad \text{p. s.} \tag{5.2}$$

Remarquons que si $X_{R_I} \notin E - E_A$, alors $R_I \circ \theta_{R_I} > 0$, et, par suite,

$$(X_{R_I^-}, X_{R_I}) \in K_I \quad \text{p. s.}$$

Posons $T_\infty = \inf(t > 0 : A_t = \infty)$. L'ensemble des instants t inférieurs strictement à T_∞ pour lequel $\partial A_t \in I$ est discret, sauf peut-être dans un voisinage de T_∞, de sorte que l'on a (en considérant les itérés de R_I) :

$$\{t < T_\infty : \partial A_t \in I\} = \{t < T_\infty : (X_{t-}, X_t) \in K_I\}. \tag{5.3}$$

Désignons par I et J deux sous-intervalles disjoints de $[\varepsilon, \infty]$ et utilisons les notations précédentes. L'ensemble $K_I \cap K_J$ est polaire pour le processus $((X_{t-}, X_t), 0 < t < T_\infty)$; en effet, d'après (5.3), si $(X_{t-}, X_t) \in K_I \cap K_J$, on a p. s. $\partial A_t \in I \cap J$ qui est vide.

Notons alors par I_{nk} l'intervalle $\left]\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]$, k, $n \in \mathbf{N}^+$, par I_∞ l'ensemble $\{\infty\}$, et posons, avec les notations précédentes $K_{nk} = K_{I_{nk}}$ et $K_\infty = K_{I_\infty}$. Quitte à considérer au besoin les ensembles $K_{nk} - \bigcup_{j=1}^{k-1} K_{nj}$ on peut supposer que les K_{nk}, $k \in \mathbf{N}^+$, sont disjoints entre eux et disjoints de K_∞.

Posons

$$F_n(x, y) = \begin{cases} \frac{k}{2^n} & \text{si } (x, y) \in K_{nk} \cap (E \times E_A), \\ \infty & \text{si } y \in E - E_A \text{ ou } (x, y) \in K_\infty, \\ 0 & \text{dans les autres cas.} \end{cases} \tag{5.4}$$

D'après les remarques précédentes, nous avons

$$(5.5)\qquad F_n(X_{t-}, X_t) \leqq \partial A_t \leqq F_n(X_{t-}, X_t) + \frac{1}{2^n} \quad \text{p. s. sur } \{0 < t < T_\infty\}.$$

Posons $F(x, y) = \limsup_n F_n(x, y)$ et faisant tendre n vers l'infini dans (5.5). En utilisant (5.1) on obtient

$$(5.6)\qquad A_t = \sum_{0<s\leqq t} F(X_{s-}, X_s) \quad \text{p. s. sur } \{0 < t < T_\infty\}.$$

Étudions maintenant la formule précédente à l'instant T_∞. Sur l'ensemble $\{0 < T_\infty < \infty\}$ de deux choses l'une, ou bien $A_{T_\infty^-} = \infty$ et alors les deux membres de (5.6) sont infinis, ou bien $A_{T_\infty^-} < \infty$ et alors $\partial A_{T_\infty} = \infty$, donc $T_\infty = R_\infty$. Dans ce cas-ci, soit $X_{R_\infty} \in E - E_A$, soit $X_{R_\infty} \in E_A$ et $(X_{R_\infty^-}, X_{R_\infty}) \in K_\infty$ d'après la remarque suivant (5.2). Bref, dans chaque cas $F(X_{T_\infty^-}, X_{T_\infty}) = \infty$ et, par conséquent, la relation (5.6) est vérifiée sur $\{0 < t < \infty\}$ pourvu que $T_\infty > 0$.

Il reste donc à étudier le cas où $T_\infty = 0$ et c'est ici que l'on utilisera l'exactitude de la fonctionnelle A. Soit x un point de E. Si x est régulier pour $E - E_A$, $\limsup_{t \downarrow 0} F(X_{t-}, X_t)$ vaut $+\infty$. Par conséquent, le membre de droite de (5.6) sera infini. Si x n'est pas régulier pour $E - E_A$, alors $T_\infty \circ \theta_s > 0$ pour s assez petit et l'on aura $\mathbf{P}^x$-p. s.

$$A_t = \lim_{s_n \downarrow 0} A_{t-s_n} \circ \theta_{s_n} = \lim_{s_n \downarrow 0} \sum_{s_n < s \leqq t} F(X_{s-}, X_s).$$

Par suite, la relation (5.6) sera encore vraie.

Lorsque A est retorse le temps terminal R_I est totalement inaccessible et on peut appliquer le théorème 4.2, (1), qui n'utilise pas l'hypothèse (CF), à la place du théorème 4.1.

Enfin si A est prévisible, on applique le théorème 4.2, (2) à la place du théorème 4.1. Par conséquent, les ensembles K_I sont de la forme $H_I \times E$, où H_I est un borélien de E, ce qui permet de remplacer la formule (5.4) par

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{2^n} & \text{si } x \in H_{I_{nk}} \cap E_A, \\ \infty & \text{si } x \in E - E_A \text{ ou } x \in H_\infty, \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

La suite de la démonstration, dans ce cas, est la même que précédemment, car T_∞ étant maintenant prévisible, si R est un temps d'arrêt prévisible on a $\{R = T_\infty\} \in \mathcal{F}_{R-}$ et $X_R \in E - E_A$ entraîne que $X_{R-} \in E - E_A$ p. s.

6. Système de Lévy. — Nous avons vu, au paragraphe précédent, que toute fonctionnelle additivement purement discontinue A d'un processus de Ray X se met sous la forme $\sum_{s \leq t} F(X_{s-}, X_s)$, où F est une fonction borélienne sur $E \times E$. Nous allons maintenant étudier plus particulièrement le cas où F est nulle sur la diagonale de $E \times E$. Pour cela, introduisons la notion de système de Lévy.

Définition 6.1. — *Soient* H *une fonctionnelle additive prévisible finie, et* N *un noyau sur* E *tel que* $N(x, \{x\}) = 0$ *pour tout* $x \in E$. *Nous dirons que* (N, H) *est un système de Lévy du processus de Ray* X *si pour toute loi* μ *sur* E *et toute fonction* F *borélienne positive sur* $E \times E$ *on a*

$$\mathbf{E}^{\mu}\left[\sum_{0<s\leq t} F(X_{s-}, X_s)\, I_{\{X_{s-} \neq X_s\}}\right] = \mathbf{E}^{\mu}\left[\int_0^t N(X_{s-}, F)\, dH_s\right],$$

où

$$N(x, F) = \int_E N(x, dy)\, F(x, y).$$

Nous avons le théorème :

Théorème 6.1. — *Supposons que l'hypothèse* (L) *soit vérifiée. Alors le processus fortement markovien* X *admet un système de Lévy* (N, H). *Lorsque l'ensemble* B *des points de branchement est vide, on peut choisir la fonctionnelle additive* H *continue.*

Démonstration. — Nous ne restreignons pas la généralité en supposant que les fonctions F de la définition 6.1 sont nulles sur la diagonale de $E \times E$. Notons par $I_{(E-B)\times E}$ (resp. $I_{B\times E}$) l'indicatrice de l'ensemble $(E - B)\times E$ (resp. $B\times E$) et posons $F^i = F.I_{(E-B)\times E}$ et $F^a = F.I_{B\times E}$. Le processus $(C_t) = \left(\sum_{s\leq t} F(X_{s-}, X_s)\right)$ est alors égal à la somme des deux processus C^i et C^a, où

$$C_t^i = \sum_{s\leq t} F^i(X_{s-}, X_s), \qquad C_t^a = \sum_{s\leq t} F^a(X_{s-}, X_s) \tag{6.0}$$

et la démonstration distinguera ces deux cas.

Premier cas : celui de C^i. — Ce cas revient à ne considérer que des sauts du processus croissant C, se produisant à des instants totalement inaccessibles, donc pratiquement à supposer que B est vide.

Oublions pour le moment le processus C et considérons des processus croissants beaucoup plus particuliers, à savoir ceux qui croissent là où les trajectoires ont une discontinuité d'amplitude appartenant à un intervalle déterminé : disons $[a, b]$, où $0 < a < b \leqq +\infty$.

Plus précisément, soit S un temps d'arrêt totalement inaccessible tel que

$$d(X_{S-}, X_S) \in [a, b[\quad \text{p. s.}$$

et S_n, le $n^{\text{ième}}$ itéré de S. Remarquons que $\lim_n S_n = +\infty$. Alors nous nous intéressons aux processus croissants de la forme

$$(6.1) \qquad Z^S = \sum_n I_{[S_n, +\infty[},$$

et nous calculerons le système de Lévy « correspondant ». Puis nous recollerons pour toutes les amplitudes de sauts possibles.

Construisons d'abord le *noyau n*. Posons

$$T = \inf(t > 0 : d(X_{t-}, X_t) \in [a, b[\text{ et } X_{t-} \in E - B)$$

et désignons par (T_n) les itérés de T. Les temps T_n, $n \in \mathbf{N}$, sont totalement inaccessibles et $\lim_n T_n = +\infty$ p. s. Notons toujours par ξ la mesure de référence. On peut écrire la mesure $\mathbf{P}^\xi\{(X_{T-}, X_T) \in dx\, dy\}$ sous la forme $\nu(dx)\, n(x, dy)$, où ν est la loi de X_{T-} et n le noyau « régulier » de la loi de X_T conditionnelle à X_{T-}. Par définition, on a donc, pour toute fonction borélienne positive f sur E,

$$(nf) \circ X_{T-} = \mathbf{E}^\xi[f \circ X_T \mid X_{T-}] \quad \mathbf{P}^\xi\text{-p. s.}$$

Mais, par le théorème 3.3, les tribus $\mathcal{F}_{T-}$ et $\mathcal{C}(X_{T+t}, t \geqq 0)$ sont conditionnellement indépendantes relativement à X_{T-}, d'où

$$(6.2) \qquad (nf) \circ X_{T-} = \mathbf{E}^\xi[f \circ X_T \mid \mathcal{F}_{T-}] \quad \mathbf{P}^\xi\text{-p. s.}$$

En fait, d'après la proposition suivante, le noyau n ne dépend pas de la mesure de référence.

PROPOSITION 6.1. — *Pour toute fonction borélienne positive f sur* E *et tout $x \in$* E, *on a*

$$(nf) \circ X_{T-} = \mathbf{E}^x[f \circ X_T \mid \mathcal{F}_{T-}] \quad \mathbf{P}^x\text{-p. s.}$$

Démonstration. — Soit g une fonction borélienne positive sur E. Posons

$$h(x) = \mathbf{E}^x[g \circ X_{T-}\, f \circ X_T], \qquad k(x) = \mathbf{E}^x[g \circ X_{T-}\, nf \circ X_{T-}].$$

Le lecteur vérifiera facilement que les fonctions h et k sont excessives pour le processus X tué à l'instant T.

Soit, alors A un ensemble borélien de E; d'après la formule (6.2), on a

$$\mathbf{E}^{\xi}[I_{\{X_0\in A\}}\, g\circ X_{T-}\, f\circ X_T] = \mathbf{E}^{\xi}[I_{\{X_0\in A\}}\, g\circ X_{T-}\, nf\circ X_{T-}],$$

ce qui s'écrit aussi

$$\int_A h(x)\,\xi(dx) = \int_A k(x)\,\xi(dx),$$

donc les deux fonctions excessives h et k sont égales ξ-p. s. et par suite, identiquement, puisque le processus Y vérifie encore l'hypothèse (L). Mais cela implique que

$$nf\circ X_{T-} = \mathbf{E}^x[f\circ X_T \mid X_{T-}] \quad \mathbf{P}^x\text{-p. s.},$$

d'où la proposition 6.1 en utilisant à nouveau le théorème 3.3.

Passons ensuite à la construction de la *fonctionnelle additive*. Faisons d'abord la remarque suivante :

PROPOSITION 6.2. — *Soient* R *un temps terminal totalement inaccessible,* $(R_n,\, n\in\mathbf{N})$ *ses itérés, et* $Z^R = \sum_n I_{[R_n, +\infty[}$. *Supposons que* $\lim_n R_n = +\infty$, *alors il existe une fonctionnelle additive continue* A^R *telle que :*

(1) $\mathbf{E}^x[A^R_R] = \mathbf{P}^x\{R<\infty\}$;

(2) $Z^R - A^R$ *est une martingale locale.*

Démonstration. — Notons encore par Y le processus X tué à l'instant T. C'est aussi un processus fortement markovien dont la durée de vie vaut T. La fonction $f(x) = \mathbf{P}^x\{T<\infty\}$ est un potentiel régulier pour le processus Y; le fait qu'elle soit excessive est bien connu et la régularité se déduit de ce que T est totalement inaccessible; il reste à vérifier que c'est un potentiel pour Y, or

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^x[f\circ Y_t] &= \mathbf{P}^x\{t<T,\ T\circ\theta_t<\infty\}\\ &= \mathbf{P}^x\{t<T<\infty\}\end{aligned}$$

qui tend vers zéro lorsque t tend vers l'infini.

Par conséquent, d'après Blumenthal-Getoor ([1], théor. 3.13), il existe une fonctionnelle additive continue de Y, notée $\tilde{A}$, telle que

$$f(x) = \mathbf{E}^x[\tilde{A}_\infty] = \mathbf{E}^x[\tilde{A}_T], \qquad x\in E.$$

Définissons alors la fonctionnelle additive A^R par

$$A^R_t = \begin{cases} \tilde{A}_t & \text{si } 0 \leqq t \leqq T,\\ A^R_{T_n} + \tilde{A}_{t-T_n}\circ\theta_{T_n} & \text{si } T_n \leqq t \leqq T_{n+1}.\end{cases}$$

C'est une fonctionnelle additive continue, du processus X, et elle vérifie la conclusion de la proposition 6.2.

Nous allons appliquer cette proposition à un temps terminal totalement inaccessible S tel que $d(X_{S-}, X_S) \in [a, b[$, et au temps

$$T = \inf(t > 0,\ d(X_{t-}, X_t) \in [a, b[\text{ et } X_{t-} \in E - B).$$

Il leur correspondra, par la formule (6.1) et par cette proposition, des processus croissants Z^S, Z^T et des fonctionnelles additives continues A^S, A^T tels que $Z^S - A^S$ et $Z^T - A^T$ soient des martingales locales. D'autre part, puisque $T \leqq S$, le processus Z^S sera nul si Z^T l'est. Il est donc naturel de penser que A^S est absolument continue par rapport à A^T.

En fait, on a la proposition suivante qui résoud pour les processus de la forme Z^S l'existence d'un système de Lévy. Nous désignons par K l'ensemble borélien de $E \times E$ tel que

$$S = \inf(t > 0 : (X_{t-}, X_t) \in K) \quad \text{p. s.},$$

d'après le théorème 4.2, (1). Enfin si A est une fonctionnelle additive et f une fonction borélienne positive sur E *nous noterons par* $f \bullet A$ *la fonctionnelle additive*

$$(f \bullet A)_t \equiv \int_0^t f \circ X_s \, dA_s.$$

Proposition 6.3. — *Nous utilisons les notations ci-dessus et nous désignons par g la fonction* $x \mapsto n(x, K_x)$, *où* K_x *est la coupe de* K *suivant* x. *Alors on a*

$$A^S = g \bullet A^T.$$

Démonstration. — Faisons d'abord la remarque suivante : puisque $S \circ \theta_T > 0$, on a $\{T = S\} = \{(X_{T-}, X_T) \in K\} = \{X_T \in K_{X_{T-}}\}$, et par suite, en utilisant la proposition 6.1, on obtient

$$\mathbf{P}^x\{T = S \mid \mathcal{F}_{T-}\} = g \circ X_{T-} \quad \mathbf{P}^x\text{-p. s. pour tout } x \in E.$$

Il suffira de prouver la proposition sur l'intervalle stochastique [0, T], on procéderait ensuite par itération; par conséquent, il suffit de montrer que

$$\mathbf{E}^x[A^S_T] = \mathbf{E}^x[(g \bullet A^T)_T] \quad \text{pour tout } x \in E, \tag{6.3}$$

car deux fonctionnelles additives continues, vérifiant (6.3) et qui engendrent donc le même potentiel, sont égales d'après un exercice de Blumenthal-Getoor [1].

Or, d'une part on a

$$\mathbf{P}^x[S = T] = \mathbf{E}^x[A_T^S] \quad \text{pour tout } x \in E.$$

En effet, le processus $(Z_{t\wedge S}^S - A_{t\wedge S}^S)$ est une martingale, donc

$$\mathbf{E}^x[Z_{t\wedge T\wedge S}^S] = \mathbf{E}^x[A_{t\wedge T\wedge S}^S];$$

prenons alors des limites croissantes suivant t, et remarquons que $T \leqq S$, d'où

$$\mathbf{E}^x[A_T^S] = \mathbf{E}^x[Z_T^S] = \mathbf{P}^x\{S \leqq T\} = \mathbf{P}^x\{S = T\}. \tag{6.4}$$

D'autre part, on a aussi

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^x[(g \bullet A^T)_T] &= \mathbf{E}^x\left[\int_0^T g \circ X_t \; dA_t^T\right]\\ &= \mathbf{E}^x\left[\int_0^T g \circ X_{t-} \, dA_t^T\right]\end{aligned}$$

puisque la fonctionnelle additive A^T est continue; mais le processus $(g \circ X_{t-})$ étant prévisible, le dernier membre de l'équation précédente vaut encore, par un théorème d'intégration bien connu (Meyer [8])

$$\mathbf{E}^x\left[\int_0^T g \circ X_{t-} \, dZ_t^T\right].$$

Ceci n'est pas autre chose que $\mathbf{E}^x[g \circ X_{T-}]$. Utilisons alors la remarque du début pour obtenir que pour tout $x \in E$, on a

$$\mathbf{E}^x[(g \bullet A^T)_T] = \mathbf{E}^x[g \circ X_{T-}] = \mathbf{P}^x[S = T],$$

ce qui, joint à la relation (6.4), démontre la proposition.

Nous allons maintenant passer au cas plus général : celui où le processus croissant C^i [*voir* (6.0)] n'est pas forcément de la forme Z^S.

Notons par I_K l'intervalle $\left[\frac{1}{k}, \frac{1}{k-1}\right[$, $k \geqq 1$ et posons

$$\begin{aligned} T^k &= \inf(t > 0 : d(X_{t-}, X_t) \in I_k \quad \text{et} \quad X_{t-} \in E\text{-}B),\\ T_n^k &= n^{\text{ième}} \text{ itéré de } T^k, \qquad n \in \mathbf{N},\\ Z^k &= \sum_n I_{[T_n^k, \infty[}, \end{aligned}$$

A^k : fonctionnelle additive continue associée à Z^k par la proposition 6.2;

n^k : noyau de Lévy correspondant à des discontinuités d'amplitude appartenant à I^k, plus exactement si f est une fonction borélienne positive, on a

$$(nf)(x) = \int_E n(x, dy) f(y) \mathrm{I}_{\{(x,y): d(x,y) \in \mathrm{I}_k\}}.$$

D'après Blumenthal-Getoor [1, p. 160], nous pouvons écrire que

$$\mathrm{A}^k = \sum_m \mathrm{A}^{km} \quad \text{p. s.},$$

où A^{km} est une fonction additive continue dont le 1-potentiel est borné par une constante $\mathrm{M}_m \geqq 0$. Il suffira de poser

$$\tilde{\mathrm{H}}^k = \sum_m \frac{1}{2^m \mathrm{M}_m} \mathrm{A}^{km},$$

$$\mathrm{H}^i = \sum_k \frac{1}{2^k} \mathrm{H}^k$$

pour constater que les $\tilde{\mathrm{H}}^k$, et par suite H^i, sont des fonctionnelles additives continues dont le 1-potentiel est borné par 1. Par conséquent, pour tout k on a $\mathrm{A}^k \ll \mathrm{H}^i$ et il existe une fonction borélienne f_k telle que $\mathrm{A}^k = f_k \bullet \mathrm{H}^i$. Définissons alors le noyau suivant, sur E :

$$\mathrm{N}^i(x, \Gamma - \{x\}) = \sum_k n^k(x, \Gamma) f_k(x),$$

$$\mathrm{N}^i(x, \{x\}) = 0, \qquad x \in \mathrm{E}, \qquad \Gamma \in \mathcal{E}.$$

La démonstration du théorème, au-dessus des points de non branchement, sera terminée si nous vérifions que $(\mathrm{N}^i, \mathrm{H}^i)$ est un système de Lévy. Pour cela, d'après le théorème des classes monotones, il suffit de le faire lorsque F est une indicatrice d'un ensemble borélien K de

$$\left\{(x, y) : d(x, y) \in \left[\frac{1}{k}, \frac{1}{k-1}\right[\right\}.$$

Posons $\mathrm{R} \equiv \mathrm{T}_k$ et désignons par R_n le $n^{\text{ième}}$ itéré de R. Il suffira de vérifier que

$$\left(\sum_n \mathrm{I}_{[\mathrm{R}_n, \infty[}(t) - \int_0^t \mathrm{N}^i(\mathrm{X}_{s-}, \mathrm{K}_{\mathrm{X}_{s-}})\, d\mathrm{H}^i_s\right)_{t \geqq 0}$$

est une martingale locale. Par conséquent, d'après la proposition 6.3, il suffit de montrer que

$$\mathrm{A}^{\mathrm{R}}_t = \int_0^t \mathrm{N}(\mathrm{X}_{s-}, \mathrm{K}_{\mathrm{X}_{s-}})\, d\mathrm{H}^i_s;$$

or si

$$g(x) = n^k(x, \mathrm{K}_x) = \left(\frac{1}{f_k(x)}\right) \mathrm{N}(x, \mathrm{K}_x),$$

alors on a

$$A^R_t = (g \bullet A^k)_t = ((gf_k) \bullet H^i)_t = \int_0^t N(X_{s-}, K_{X_{s-}})\, dH^i_s.$$

Deuxième cas. — Il nous reste à montrer l'existence d'un système de Lévy au-dessus des points de branchement. Nous aurons besoin de la proposition suivante :

PROPOSITION 6.4. — *Il existe une fonction borélienne f strictement positive sur* B *et telle que la fonctionnelle additive*

$$H^a = \sum_{0<s\leq t} f \circ X_{s-}$$

ait un 1-potentiel borné.

Démonstration. — Soit (x_k) une suite dans E et désignons par B_{km} la boule ouverte de centre x_k et de rayon $\frac{1}{m}$. Posons

$$B_{kmn} = B \cap B_{km} \cap \left\{ x : \mathbf{E}^x[\exp(-T_{B_{km}})] < 1 - \frac{1}{n} \right\},$$

où $T_{B_{km}} = \inf(t > 0 : X_t \in B_{km})$. Si $x \in B$, on a $\mathbf{P}^x\{X_0 = x\} = 0$; par conséquent, $\mathbf{P}^x\{T_{B_{km}} > \varepsilon\} > 0$ pourvu que ε soit assez petit et que B_{km} soit une boule de rayon suffisamment petit, et contenant x. On en déduit que $B = \bigcup_{k,m,n} B_{kmn}$. D'autre part, la définition de B_{kmn} entraîne que pour ε assez petit, on a $\mathbf{P}^x\{T_{B_{km}} > \varepsilon\} > \varepsilon$ pour tout x de B_{kmn}; de ceci il résulte que l'ensemble $\{t : X_{t-} \in B_{kmn}\}$ est p. s. discret.

Rangeons alors les (B_{kmn}) en une suite (B_j) et montrons que la fonctionnelle additive $H^j_t = \sum_{s\leq t} I_{\{X_{s-}\in B_j\}}$ a un 1-potentiel borné. Désignons par S_n, $n \in \mathbf{N}$, les itérés du temps $S = \inf(t > 0 : X_{t-} \in B_j)$. Le 1-potentiel de H^j vaut

$$\Phi^j(x) = \mathbf{E}^x\left[\sum_n e^{-S_n}\right].$$

Or

$$\mathbf{E}^x[e^{-S_{n+1}}] \leq \mathbf{E}^x[e^{-S_n}\, \mathbf{E}^x[e^{-(S_{n+1}-S_n)} \mid \mathcal{F}_{S_n^-}]];$$

d'autre part, puisque $X_{S_n^-} \in B_j$ p. s. sur $\{S_n < \infty\}$, $n < 1$, on aura

$$\mathbf{E}^x[e^{-(S_{n+1}-S_n)} \mid \mathcal{F}_{S_n^-}] \leq 1 - \frac{1}{n_j}, \qquad \text{où } B_j \equiv B_{k_j m_j n_j}.$$

Par conséquent, on a

$$\mathbf{E}^x[e^{-S_{n+1}}] \leq \mathbf{E}^x[e^{-S_n}]\left(1 - \frac{1}{n_j}\right) \leq \left(1 - \frac{1}{n_j}\right)^n.$$

On en déduit que $\Phi^j(x) \leqq \sum_n \left(1 - \frac{1}{n_j}\right)^{n-1} = n_j$. La démonstration sera terminée si l'on pose

$$H^a = \sum_j \frac{1}{2^j n_j} H^j$$

et si l'on remarque que H_t^a est de la forme $\sum_{0<s\leqq t} f \circ X_{s-}$ où

$$f = \sum_j \frac{1}{2^j n_j} I_{B_j}.$$

Revenons à la démonstration du théorème. Posons, avec les notations ci-dessus,

$$N^a(x, dy) = \begin{cases} \frac{1}{f(x)} P_0(x, dy) & \text{si } x \in B, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et montrons que (N^a, H^a) est un système de Lévy au-dessus des points de branchement. Soit F une fonction borélienne positive sur $E \times E$, et nulle sur $(E - B) \times E$. Nous voulons montrer que

$$\mathbf{E}^x \left[\sum_{s \leqq t} F(X_{s-}, X_s)\right] = \mathbf{E}^x \left[\int_0^t N^a(X_{s-}, F)\, dH_s^a\right].$$

Or il existe une suite dénombrable (T_n) de temps d'arrêt prévisibles telle que $P^x\{T_n = T_m\} = 0$ pour $n \neq m$ et telle que les ensembles $\{(t, \omega) : X_{t-}(\omega) \in B\}$ et $\bigcup_n [T_n]$ soient indistinguables l'un de l'autre. (*Voir*, par exemple, Meyer-Walsh [10].) Ceci entraîne que

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^x \left[\sum_{s \leqq t} F(X_{s-}, X_s)\right] &= \mathbf{E}^x \left[\sum_n F(X_{T_n^-}, X_{T_n}) I_{\{T_n \leqq t\}}\right] \\ &= \mathbf{E}^x \left[\sum_n \mathbf{E}^x [F(X_{T_n^-}, X_{T_n}) \mid \mathcal{F}_{T_n^-}] I_{\{T_n \leqq t\}}\right] \\ &= \mathbf{E}^x \left[\sum_n P_0(X_{T_n^-}, F) I_{\{T_n \leqq t\}}\right] \\ &= \mathbf{E}^x \left[\sum_n N^a(X_{T_n^-}, F) f \circ X_{T_n^-} I_{\{T_n \leqq t\}}\right] \\ &= \mathbf{E}^x \left[\int_0^t N^a(X_{s-}, F)\, dH_s^a\right], \end{aligned}$$

où l'on a utilisé les propositions 1.2 et 6.4. Cela achève la démonstration au-dessus de B.

On posera maintenant $H = H^i + H^a$, $N = N^i + N^a$ et on vérifie immédiatement que le couple (H, N) est un système de Lévy du processus de Ray X.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. M. BLUMENTHAL et R. K. GETOOR, *Markov Processes and Potential Theory*, Academic Press, New York, 1968.

[2] R. M. BLUMENTHAL et R. K. GETOOR, *Accessible terminal times* (*Proc. Fifth Berkeley Symposium*, 1965, vol. II, Part II. University of California Press, Calif., 1967, p. 1-8).

[3] K. L. CHUNG et J. B. WALSH, *To reverse a Markov process* (*Acta Mathematica*, vol. 123, 1969, p. 225-251).

[4] C. DELLACHERIE, *Théorie générale des processus*, Springer (à paraître).

[5] F. KNIGHT, *Note on regularization of Markov processes* (*Ill. J. Math.*, vol. 9, 1965, p. 548-557).

[6] H. KUNITA et T. WATANABE, *On certain reversed processes and their applications to potential theory and boundary theory* (*J. Math. and Mech.*, vol. 15, n° 3, 1966, p. 393-434).

[7] M. MOTOO et S. WATANABE, *On a class of additive functionals of Markov processes* (*J. Math. Kyoto Univ.*, vol. 4, n° 3, 1965, p. 429-469).

[8] P. A. MEYER, *Probability and Potentials*, Ginn, Blaisdell, 1966.

[9] P. A. MEYER, *Guide détaillé de la théorie générale des processus*, Séminaire de Probabilités, II; *Lecture Notes in Math.*, vol. 51, Springer-Verlag, 1968.

[10] P. A. MEYER et J. B. WALSH, *Quelques applications des résolvantes de Ray* (*Invent. Math.*, vol. 14, 1971, p. 143-166).

[11] D. RAY, *Resolvants, transition functions and strongly Markovian processes* (*Ann. Math.*, vol. 70, 1959, p. 43-72).

[12] M. SHARPE, *Discontinuous additive functionals of dual processes* (à paraître).

[13] M. SHARPE, *Exact multiplicatives functionals in duality* (*Ind. Univ. Math. J.* vol. 21, 1971, p. 27-60).

[14] J. B. WALSH, *Two footnotes to a theorem of Ray*, Séminaire de Probabilités, V; *Lecture Notes in Math.*, vol. 191, Springer-Verlag, 1971.

[15] J. B. WALSH, *Time reversal and completion of Markov processes* (*Invent. Math.*, vol. 10, 1970, p. 57-81).

[16] J. B. WALSH, *Transition functions of Markov processes* (à paraître).

[17] J. B. WALSH, *Markov processes and their functionals in duality* (à paraître).

[18] J. B. WALSH et M. WEIL, *Terminal times of Ray processes*. II, Colloque sur les Probabilités, Rome, mars 1971; Academic Press (à paraître).

[19] S. WATANABE, *On discontinuous additive functionals and Lévy measures of a Markov process*.

[20] M. WEIL, *Propriétés de continuité fine des fonctions coexcessives* (*Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.*, t. 12, 1969, p. 75-86).

(Manuscrit reçu le 9 juillet 1971.)

J. B. WALSH,
M. WEIL,
Département de Mathématique,
7, rue René-Descartes,
67-Strasbourg.