ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

PH. REVOY

Sur les deux premiers invariants d'une forme quadratique

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 4, nº 2 (1971), p. 311-319
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1971_4_4_2_311_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 4, 1971, p. 311 à 319.

SUR LES DEUX PREMIERS INVARIANTS D'UNE FORME QUADRATIQUE

PAR PH. REVOY.

TABLE DES MATIÈRES.

1. L'ensemble X d'une extension quadratique.

Soit B une extension quadratique séparable de l'anneau commutatif et unitaire A, c'est-à-dire une A-algèbre commutative projective de rang 2 en tant que A-module, et séparable. Si σ désigne l'unique A-automorphisme de B différent de l'identité, la norme $N : B \to A$ définie par $N(x) = x\sigma(x)$ est une forme quadratique non dégénérée sur le A-module B, comme le montre un calcul local. En effet, localement B est de la forme $A[x]$ avec $x^2 = x + m$ et $1 + 4m$ est inversible dans A pour des raisons de séparabilité; la norme $N(u + vx)$, u et $v \in A$, est alors égale à $u^2 + uv - mv^2$ qui est bien une forme quadratique non dégénérée. L'algèbre de Clifford $C(B, N)$ est alors une A-algèbre centrale séparable et $C_0(B, N)$, partie homogène de degré 0 de $C(B, N)$ est une extension quadratique de A; si $u \in C_1(B, N)$ est l'image de l'unité de B dans $C(B, N)$, $u^2 = N(u) = 1$ et les applications $x \mapsto xu$ de $C_1(B, N) = B$ dans $C_0(B, N)$ et $y \mapsto yu$ de $C_0(B, N)$ dans $C_1(B, N)$ sont des isomorphismes réciproques de A-modules. On vérifie, par exemple par un calcul local, que les multiplications sur B et $C_0(B, N)$ coïncident. Ainsi $C_0(B, N)$ est isomorphe à B en tant que A-algèbre.

Soit alors

$$X(B) = \{ x \in C_0(B, N) \mid xy + yx = 0, \forall y \in C_1(B, N) \}.$$

L'algèbre $C(B, N)$ est munie d'une forme quadratique canonique Q de la façon suivante : soit $z \mapsto \bar{z}$ l'unique A-anti-automorphisme de $C(B, N)$ dont l'ensemble des invariants est le centre A de $C(B, N)$ et $Q(z) = z\bar{z}$. Pour cette forme, $C_0(B, N)$ et $C_1(B, N)$ sont orthogonaux et

$$(C(B, N), Q) = (C_0(B, N), N) \perp (B, -N).$$

Cela signifie en passant à la forme bilinéaire associée à Q que $xy = y\sigma(x)$ pour $x \in C_0(B, N)$ et $y \in C_1(B, N)$. On voit donc que

$$X(B) = \{ x \in C_0(B, N) = B \mid x + \sigma(x) = 0 \} = \operatorname{Ker}(1_B + \sigma)$$

en identifiant B et $C_0(B, N)$. En particulier, si $2 = 0$ dans A, $\sigma + 1_B = \sigma - 1_B$ et donc $X(B) = B^\sigma = A$. Si 2 est inversible dans A,

$$B = \operatorname{Ker}(1_B - \sigma) \oplus \operatorname{Ker}(1_B + \sigma) = A \oplus X(B)$$

car $1_B + \sigma$ et $1_B - \sigma$ sont à un facteur $\frac{1}{2}$ près, des projecteurs orthogonaux dont la somme est l'identité de B. Dans le cas général, $X(B)$ est un A-module projectif de type fini et de rang 1, comme on le voit par localisation. Si x et x' sont dans $X(B)$, la relation $xy + yx = 0$, $\forall y \in C_1(B, N)$ montre que, quel que soit y dans $B = C_1(B, N)$, $(xx')\,y = y(xx')$; donc xx' est dans le centre de $C(B, N)$ donc dans l'anneau A [remarquons qu'ici nous utilisons le fait que B et $C_0(B, N)$ sont des A-algèbres isomorphes]. L'application A-linéaire $\mu_B : X(B) \otimes X(B) \to A$ définie par $\mu_B(x \otimes x') = x.x'$ est un isomorphisme car c'est vrai localement : si $B = A[x]$ avec $x^2 = x + m$, $X(B)$ est le A-module libre engendré par $1 - 2x$ et $(1 - 2x)^2 = 1 + 4m$ est inversible dans A. Si 2 est inversible dans A, la multiplication sur $B = A \oplus X(B)$ est donnée de la manière suivante :

$$(a, x)\,(a', x') = (aa' + \mu_B(x \otimes x'),\ ax' + a'x)$$

et le module quadratique (B, N) possède la décomposition orthogonale

$$(B, N) = (A, m) \perp (X(B), -\bar{\mu}_B),$$

où m désigne la forme quadratique sur A définie par $m(a) = a^2$ et $-\bar{\mu}_B$ la forme quadratique sur $X(B)$

$$-\bar{\mu}_B(x) = -\mu_B(x \otimes x) = -x^2 = N(x)$$

car $\sigma(x) = -x$ dans $X(B)$.

2. L'ensemble X d'une algèbre de Clifford.

Soient (P, Q) un A-module quadratique, P projectif de type fini et de rang pair et Q non dégénérée, et C son algèbre de Clifford [2]. On pose

$$X(C) = \{ x \in C_0 \mid xy + yx = 0, \ \forall y \in P \},$$

C_0 désignant la sous-algèbre formée par les éléments homogènes de degré o, Il est clair que les éléments de X(C) commutent avec les éléments de C_0. donc que X(C) est dans le centre $Z(C_0)$ de l'algèbre C_0, qui est une extension quadratique séparable de l'anneau A. De plus, si $x \in Z(C_0)$ et $y \in P$, $xy = y\sigma(x)$ dans C, σ désignant toujours l'automorphisme distinct de l'identité de $Z(C_0)$: pour montrer cela, considérons l'anti-automorphisme canonique de T(P) défini par

$$x_1 \otimes \ldots \otimes x_n \mapsto x_n \otimes \ldots \otimes x_1.$$

Il induit un anti-automorphisme de C qui laisse invariants les éléments de P et qui conserve globalement C_0 et, en particulier, son centre $Z(C_0)$. Il est alors facile de vérifier que sa restriction à $Z(C_0)$ est l'automorphisme σ de $Z(C_0)$, d'où la relation indiquée. Se reportant à la définition de X(C), on voit que

$$X(C) = \operatorname{Ker}(\sigma + 1_{Z(C_0)}) = X(Z(C_0)).$$

Soient alors B et B′ deux extensions quadratiques séparables de A. On sait définir sur l'ensemble $\mathfrak{Q}(A)$ des classes d'isomorphismes d'extensions quadratiques séparables de A une structure de groupe [1] : $B \star B'$ est la classe de l'algèbre $(B \otimes B')^{\sigma \otimes \sigma'}$. Considérons alors dans $B \otimes B'$ le sous-A-module

$$X(B) \otimes X(B') : \quad (\sigma \otimes \sigma')(x \otimes x') = (-x) \otimes (-x') = x \otimes x'$$
$$\text{si} \quad x \in X(B) \quad \text{et} \quad x' \in X(B').$$

Donc $X(B) \otimes X(B')$ est un sous-module de $B \star B'$. De plus, l'automorphisme $\sigma \star \sigma'$ de $B \star B'$ distinct de l'identité n'est autre que la restriction à $B \star B'$ de $\sigma \otimes 1_{B'}$ ou de $1_B \otimes \sigma'$. En conséquence,

$$(\sigma \star \sigma')(x \otimes x') = -x \otimes x'$$

si $x \otimes x'$ est dans $X(B) \otimes X(B')$; donc $X(B) \otimes X(B')$ s'identifie à un sous-module de $X(B \star B')$. Si φ désigne cette injection, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
X(B)\otimes X(B')\otimes X(B)\otimes X(B') \arrow[r, "\varphi\otimes\varphi"] \arrow[d, "t"] & X(B\star B')\otimes X(B\star B') \arrow[dd, "\mu_{B\star B'}"] \\
X(B)\otimes X(B)\otimes X(B')\otimes X(B') \arrow[d, "\mu_B\otimes\mu_{B'}"] & \\
A\otimes A \arrow[r, "m"] & A
\end{tikzcd}$$

μ_B, $\mu_{B'}$ et $\mu_{B\star B'}$ désignent les applications vues au paragraphe 1, t est la transposition des facteurs dans le produit tensoriel et m la multiplication dans l'anneau A. Ceci nous montre que φ est un isomorphisme de A-modules et que $\mu_{B\star B'}=\mu_B\otimes\mu_{B'}$ par cet isomorphisme.

Rappelons que $\mathcal{H}_0(A)$ désigne le groupe des classes d'algèbres de Clifford de modules de rang pair [2] et désignons par $\mathcal{T}(A)$ le groupe formé par les paires (P, α), P A-module projectif de rang 1 et $\alpha : P\otimes P \to A$ isomorphisme de A-modules, défini dans [3]. On a alors la

Proposition 1. — *Les applications* $C\mapsto Z(C_0)$, $C\mapsto (X(C), \mu)$ *et* $B\mapsto (X(B), \mu_B)$ *induisent un triangle commutatif de groupes abéliens :*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}_0(A) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathcal{Q}(A) \arrow[dl] \\
& \mathcal{T}(A) &
\end{tikzcd}$$

Dans [2], on démontre que si C et C′ sont deux algèbres de Clifford de modules projectifs de rang pair,

$$Z((C\mathbin{\hat{\otimes}} C')_0)=Z(C_0)\star Z(C'_0);$$

pour le reste, la proposition résume les résultats de la partie 2. Remarquons que $\mathcal{H}_0(A)\to\mathcal{Q}(A)$ est surjective d'après la partie 1 et que si 2 est inversible dans A, $\mathcal{Q}(A)\to\mathcal{T}(A)$ est un isomorphisme ([3]). On peut donner une troisième définition de l'invariant X d'un module quadratique (P, Q). Si P est un module projectif de rang constant n, $\Lambda^n P$ est un module projectif de rang 1 ; si le rang de P n'est pas constant, soit r la fonction rang de P, $r : \mathrm{Spec}(A)\to\mathbf{N}$. On définit alors $\Lambda^r P$ et c'est bien un A-module projectif de rang 1. Si Φ est la forme bilinéaire symétrique à Q, $\Lambda^r\Phi$ est une forme bilinéaire symétrique sur $\Lambda^r P$ non dégénérée. $\Lambda^r\Phi$ induit un isomorphisme $\Lambda^r\Phi : \Lambda^r P\to(\Lambda^r P)^*$ auquel on peut associer un isomorphisme

$$\Lambda^r P\otimes\Lambda^r P\xrightarrow{1\otimes\Lambda^r\Phi}\Lambda^r P\otimes\Lambda^r P^*\xrightarrow{\tau}A,$$

le second isomorphisme τ étant l'isomorphisme $x \otimes x^{\star} \to x^{\star}(x)$. Supposons le module projectif P de rang pair, c'est-à-dire $r = 2r'$: on vérifie alors que

$$(X(C), \mu) \simeq (\Lambda^r P, (-1)^{r'} \tau \circ (1 \otimes \Lambda^r \Phi)).$$

La vérification se fait localement et pour cela on peut décomposer P en somme orthogonale de sous-modules de rang 2 et vérifier le résultat si le rang de P est égal à 2. Alors P a une base $\{e_1, e_2\}$, X(C) est libre et engendré par l'élément

$$x = \Phi(e_1, e_2) - 2e_2e_1 \quad \text{et} \quad x^2 = \Phi^2(e_1, e_2) - 4Q(e_1)Q(e_2) = -\operatorname{dét}\Phi,$$

alors que si y est le générateur $e_1 \wedge e_2$ de $\Lambda^2 P$,

$$\tau \circ (1 \otimes \Lambda^2 \Phi)(e_1 \wedge e_2 \otimes e_1 \wedge e_2) = \operatorname{dét}\Phi.$$

3. Le théorème $\otimes = \hat{\otimes}$.

Soient maintenant C et C′ deux algèbres de Clifford de modules projectifs rang pair P et P′ munis de formes quadratiques Q et Q′ non dégénérées. L'algèbre $C \hat{\otimes} C'$ est l'algèbre de Clifford de $(P \oplus P', Q \oplus Q')$ somme orthogonale des deux modules quadratiques. Soient alors $P'' = X(C) \otimes P'$ et Q'' la forme quadratique définie sur P'' par

$$Q''(x \otimes m') = \mu(x \otimes x)\, Q'(m') = x^2 . Q'(m');$$

Q'' est non dégénérée car localement cela revient à multiplier Q' par un élément inversible de A. L'injection naturelle $i : P'' = X(C) \otimes P \to C \hat{\otimes} C'$ vérifie la relation

$$[i(x \otimes m')]^2 = (x \otimes m')(x \otimes m') = x^2 m'^2 = Q''(x \otimes m')$$

donc se prolonge en un homomorphisme de A-algèbres de $C'' = C(P'', Q'')$ dans $C \hat{\otimes} C'$ qui est injectif, car c'est l'identité sur A et [que] C'' est une A-algèbre centrale séparable. Le commutant de C'' dans $C \hat{\otimes} C'$ contient $C \otimes 1$, car si $m \in P$ et $x \otimes m' \in X(C) \otimes P'$,

$$(m \otimes 1).(x \otimes m') = mx \otimes m', \qquad (x \otimes m').(m \otimes 1) = -xm \otimes m'$$

car le produit $C \hat{\otimes} C'$ est un produit tensoriel d'algèbres $\mathbf{Z}_2$-graduées et m et m' sont homogènes de degré 1. Comme $x \in X(C)$, $xm + mx = 0$ dans C et donc

$$(m \otimes 1).(x \otimes m') = (x \otimes m')(m \otimes 1)$$

et $C \otimes 1$ est la sous-algèbre de $C \hat{\otimes} C'$ engendrée par les éléments $m \otimes 1$ pour $m \in P$. Comme C est séparable ainsi que $C \hat{\otimes} C'$, et que C' et C'' sont de même rang [$P'' = X(C) \otimes P'$ a même rang que P'], on en déduit que C est exactement égale au commutant de C'' dans $C \hat{\otimes} C'$ ([1], chap. III, § 4, cor. 4.3, p. 107), donc $C \hat{\otimes} C' = C \otimes C''$, d'où le résultat de [2], p. 283. Remarquons que si $P_1 = P \otimes X(C')$ et $Q_1(m \otimes x') = x'^2 Q(m)$, alors $C \hat{\otimes} C'$ est isomorphe à $C_1 \otimes C'$, où $C_1 = C(P_1, Q_1)$, c'est-à-dire qu'on peut modifier l'un ou l'autre des deux facteurs de $C \hat{\otimes} C'$.

Corollaire ([2], [3]). — *Si* $2 = 0$ *dans* A, $C \otimes C' = C \hat{\otimes} C'$ *et la suite exacte de groupes abéliens* $0 \to N(A) \to \mathcal{H}_0(A) \to \mathcal{Q}(A) \to 0$ *se scinde. Si* $Z(C_0)$ *où* $Z(C'_0)$ *est* 0 *dans* $\mathcal{Q}(A)$, *on a de même* $C \otimes C' \simeq C \hat{\otimes} C'$.

En effet, dans les deux cas, $(X(C), \mu)$ est isomorphe à (A, m), donc $(P'', Q'') \simeq (P', Q')$ et $C'' \simeq C'$ (si $2 = 0$, il y a égalité). On peut, si $2 = 0$, le vérifier directement : si $x \in P$, $x' \in P'$,

$$(1 \otimes x')(x \otimes 1) = -x \otimes x' = x \otimes x' = (x \otimes 1)(1 \otimes x'),$$

d'où le résultat.

4. Le théorème fondamental.

Théorème [3]. — *Soient* (P, Q) et (P', Q') *deux* A-*modules projectifs de rang pair munis de formes quadratiques non dégénérées*, C *et* C' *leurs algèbres de Clifford et* B *et* B' *les extensions quadratiques* $Z(C_0)$ *et* $Z(C'_0)$ *correspondants. Alors*

$$C \hat{\otimes} C' \otimes C(B, N) \otimes C(B', N') \simeq C \otimes C' \otimes C(B \oplus B', N \oplus N'),$$

et les algèbres $C(B, N)$ *et* $C(B', N')$ *sont des algèbres triviales dans le groupe de Brauer de* A.

En effet, $(X(C), \mu_C)$ est isomorphe à $(X(B), \mu_B)$ et $(X(C'), \mu_{C'})$ à $(X(B'), \mu_{B'})$ d'après la partie 2. On applique alors le théorème $\otimes = \hat{\otimes}$ successivement en utilisant ces deux isomorphismes :

$$\begin{aligned}C \hat{\otimes} C' \otimes C(B, N) \otimes C(B', N') &\simeq C \otimes C(P' \otimes X(C), Q'') \otimes C(B, N) \otimes C(B', N') \\ &\simeq C \otimes (C' \hat{\otimes} C(B, N)) \otimes C(B', N') \simeq C \otimes C' \otimes C(B \otimes X(C'), N \otimes \bar{\mu}_{C'}) \otimes C(B', N') \\ &\simeq C \otimes C' \otimes (C(B, N) \hat{\otimes} C(B', N')) \simeq C \otimes C' \otimes C(B \oplus B', N \oplus N').\end{aligned}$$

La dernière assertion se démontre de la façon suivante : on sait [4] qu'une algèbre centrale séparable de rang 4 est triviale si elle possède un idempotent non trivial, c'est-à-dire linéairement indépendant avec 1. Si 2 est inversible dans A, soit u l'image de l'unité de B dans $C_1(B, N)$: alors $e = \frac{1}{2}(1 + u)$ est un idempotent non trivial de $C(B, N)$. Dans le cas général, considérons la trace $\mathrm{Tr} : B \to A$. C'est une forme linéaire sur le A-module B; elle est surjective car c'est vrai localement : si $B = A[x]$ avec $x^2 = x + m$, $\mathrm{Tr}(x) = 1$. Soit donc $y \in B$ tel que $\mathrm{Tr}(y) = 1$; appelons y_0 et y_1 ses images dans $C_0(B, N)$ et $C_1(B, N)$ respectivement. Alors $e = y_0 + y_1$ est un idempotent non trivial :

$$(y_0 + y_1)^2 = y_0^2 + y_1^2 + y_0 y_1 + y_1 y_0$$

et

$$y_0 y_1 + y_1 y_0 = (y_0 + \sigma(y_0))\, y_1 = \mathrm{Tr}(y)\, y_1 = y_1,$$
$$y_0^2 + y_1^2 = y_0^2 + \mathrm{N}(y_0) = y_0 \mathrm{Tr}\, y = y_0.$$

En conséquence $C(B, N)$ et $C(B', N')$ sont deux A-algèbres triviales dans le groupe de Brauer de A.

5. Conséquences.

1. Considérons la suite exacte de groupes abéliens :

$$0 \to \mathrm{N}(A) \to \mathcal{H}_0(A) \to \mathfrak{Q}(A) \to 0.$$

Un élément de $\mathcal{H}_0(A)$ est un couple (C, B) où C est la classe de l'algèbre de Clifford dans le groupe de Brauer de A et B l'extension quadratique $Z(C_0)$; si on note $B \cup B'$ la classe de l'algèbre $C(B \oplus B', N \oplus N')$ dans le groupe de Brauer de A, en fait dans le sous-groupe $\mathrm{N}(A)$ de $\mathcal{B}r(A)$,

$$(C, B) + (C, B') = (C + C' + B \cup B', B \bigstar B'),$$

d'après le théorème précédent ([3] et [5]).

2. Supposons 2 inversible dans A; nous avons vu, dans la première partie, que (B, N) possède la décomposition orthogonale

$$(B, N) = (A, m) \perp (X(B), -\bar{\mu}_B);$$

alors

$$(B \oplus B', N \oplus N') = (A \oplus A, m \oplus m) \perp (X(B) \oplus X(B'), -(\bar{\mu}_B \oplus \bar{\mu}_{B'}).$$

Donc

$$\begin{aligned} C(B \oplus B', N \oplus N') &\simeq C(A \oplus A, m \oplus m) \hat{\otimes} C(X(B) \oplus X(B'), -(\bar{\mu}_B \oplus \bar{\mu}_{B'})) \\ &= C(A \oplus A, m \oplus m) \otimes C(X(B) \oplus X(B'), \bar{\mu}_B \oplus \bar{\mu}_{B'}) \end{aligned}$$

d'après le théorème $\otimes = \hat{\otimes}$ car l'invariant X associé à $(A \oplus A, m \oplus m)$ est $(A, -m)$; comme $C(A \oplus A, m \oplus m)$ est triviale dans le groupe de Brauer de A, on a, dans $\mathcal{B}r(A)$, $B \cup B' = C(X(B) \oplus X(B'), \bar{\mu}_B \oplus \bar{\mu}_{B'})$. On retrouve ainsi les résultats de Wall dans le cas des corps de caractéristique différente de 2 [5].

3. Supposons que -1 soit un carré dans A, sans que 2 soit nécessairement inversible. Alors, si $\mathcal{W}(A)$ désigne le groupe de Witt de l'anneau A [1], $2\mathcal{W}(A) = 0$; en effet, si (P, Q) est un A-module quadratique, (P, Q) et (P, $-$ Q) sont isométriques; donc

$$(P, Q) \perp (P, Q) \simeq (P, Q) \perp (P, -Q) \simeq H(P)$$

l'espace hyperbolique associé à P [1]. En particulier, $2\mathcal{H}(A) = 0$ car $\mathcal{H}(A)$ est un quotient du groupe $\mathcal{W}(A)$.

Plus généralement, sans supposer que -1 soit un carré dans A, soit $A[i]$ l'extension de A obtenue en ajoutant à A une racine carrée de -1, extension qui n'est séparable que si 2 est inversible dans A. Soit (P, Q) un A-module quadratique de rang pair : $C(P \oplus P, Q \oplus Q)$ est dans $2\mathcal{H}_0(A)$, donc dans le sous-groupe N(A). De plus, $(P, Q) \perp (P, Q)$ devient hyperbolique par extensions des scalaires à $A[i]$; donc $C(P \oplus P, Q \oplus Q)$ devient triviale par cette extension des scalaires et $2\mathcal{H}_0(A) \subset \mathcal{B}r_2(A[i]/A)$ groupe des éléments d'ordre 2 du groupe de Brauer relatif de A par rapport à $A[i]$. De plus, si 2 est inversible dans A, la remarque précédente montre que ce sous-groupe de $\mathcal{B}r_2(A[i]/A)$ est formé de quaternions du fait de la formule $C \hat{\otimes} C - 2C = B \cup B$ et du fait que $2C = 0$ dans $\mathcal{B}r(A)$. On a donc la proposition :

Proposition 2 :

(i) *Si* -1 *est un carré dans* A, $2\mathcal{W}(A) = 0$;

(ii) *Quel que soit l'anneau* A, $2\mathcal{H}_0(A)$ *est un sous-groupe de* $\mathcal{B}r_2(A[i]/A)$;

(iii) *Si* 2 *est inversible dans* A, $2\mathcal{H}_0(A)$ *est formé de quaternions.*

Note ajoutée à la correction des épreuves. — Certains résultats de ce papier ont été obtenus indépendamment par Dario Picco (non publiés).

6. BIBLIOGRAPHIE.

[1] H. Bass, *Lectures on topics in algebraic* K-*theory*, Tata Inst. Fund. Research, Bombay, 1967.

[2] A. Micali et O. E. Villamayor, *Sur les algèbres de Clifford*, I (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 4e série, t. 1, 1968, p. 271-304).

[3] A. Micali et O. E. Villamayor, *Sur les algèbres de Clifford*, II (*Journal für R. und A. Math.*, 242, (1970), p. 61-90).

[4] A. Micali et O. E. Villamayor, *Algèbres de Clifford et groupe de Brauer* (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 4e série, t. 4, 1971, fasc. 2, p. 285-310).

[5] C. T. C. Wall, *Graded Brauer groups* (*J. R. und A. Math.*, vol. 213, 1964, p. 187-199).

(Manuscrit reçu le 5 octobre 1970.)

Ph. Revoy,
U.E.R. de Mathématiques,
Université des Sciences
et Techniques du Languedoc,
34-Montpellier.