ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

MICHEL DUFLO
JEAN-PIERRE LABESSE

Sur la formule des traces de Selberg

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 4, nº 2 (1971), p. 193-284
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1971_4_4_2_193_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 4, 1971, p. 193 à 284.

SUR LA FORMULE DES TRACES DE SELBERG

PAR MICHEL DUFLO ET JEAN-PIERRE LABESSE.

TABLE DES MATIÈRES.

INTRODUCTION.

Soit $G = PL(2)$ le groupe quotient de $GL(2)$ par son centre. On note $\mathbf{A}$ l'anneau des adèles de $\mathbf{Q}$ (1). Ayant choisi une mesure $G_\mathbf{A}$-invariante sur $G_\mathbf{A}/G_\mathbf{Q}$, nous notons L^2_d la somme des sous-espaces fermés $G_\mathbf{A}$-invariants minimaux de $L^2 = L^2(G_\mathbf{A}/G_\mathbf{Q})$ et T_d la représentation naturelle de $G_\mathbf{A}$ dans L^2_d. Pour des fonctions F sur $G_\mathbf{A}$ assez régulières, on sait que l'opérateur $T_d(F)$ a une trace. En 1956, A. Selberg a donné, dans [20],

(1) Pour simplifier l'exposé nous n'avons pas traité le cas d'un corps de nombre de degré fini $\neq 1$ sur $\mathbf{Q}$.

une formule pour calculer cette trace et déterminé une classe de fonctions F pour laquelle cette formule est valable. (En fait, Selberg traite aussi du cas des groupes fuchsiens que nous n'abordons pas ici.) Comme Selberg n'a jamais publié ses démonstrations, et comme d'autre part les applications de sa formule sont de jour en jour plus importantes (*cf.* [17], [18]), il nous a paru utile d'en rédiger une.

Dans cette première partie, nous prouvons une formule des traces pour les fonctions F du type suivant : soit K le sous-groupe compact maximal standard; alors F est une fonction régulière à support compact sur $G_{\mathbf{A}}$, K-finie à droite et à gauche. Ceci suffit pour les applications aux formes automorphes holomorphes pour les sous-groupes de congruence de $G_{\mathbf{R}}$. Dans une seconde partie, nous prouverons la formule des traces avec des conditions plus faibles sur F, ce qui est nécessaire aux applications à la fonction zéta de Selberg.

Un mot sur le plan de ce mémoire : dans le premier chapitre, on prouve que $T_d(F)$ est à trace et donné par un noyau, ce qui nécessite la décomposition de la partie continue de L^2. La transformation de Selberg ramène alors le calcul de la trace de $T_d(F)$ au calcul des valeurs moyennes de F sur certaines orbites de $G_{\mathbf{A}}$ agissant dans lui-même par automorphismes intérieurs et au calcul d'un terme complémentaire. Il n'y a évidemment rien de nouveau dans cela, sinon le fait de démontrer la convergence de l'intégrale qui donne le noyau de $T_d(F)$ (*cf.* 1.6.8).

Le deuxième chapitre est consacré au calcul du terme complémentaire. La formule obtenue pour le terme complémentaire coïncide avec celle annoncée dans Jacquet-Langlands ([2]). Elle permet, en particulier, de démontrer que le terme complémentaire est, comme fonction de la composante à l'infini de F, une distribution tempérée sur $G_{\mathbf{R}}$, ce qui rend possible le calcul de sa transformée de Fourier. Nous utilisons un résultat d'analyse harmonique sur $G_{\mathbf{R}}$ (le théorème de « Paley-Wiener ») pour montrer que la considération des fonctions du type rappelé ci-dessus suffit pour l'application au calcul de la contribution de la série discrète de $G_{\mathbf{R}}$. Comme exemple d'application, nous présentons une démonstration de la formule d' « Eichler-Selberg » pour la trace des opérateurs de Hecke.

Les auteurs sont ou ont été des élèves de R. Godement et de R. P. Langlands. Il apparaîtra clairement au lecteur que ce qui suit leur doit beaucoup plus qu'ils ne sauraient l'exprimer.

([2]) Les paragraphes 1, 2 et 3 du chapitre II sont uniquement destinés à obtenir la formule (II.3.38). Une démonstration plus directe est esquissée dans le dernier chapitre du livre de Jacquet-Langlands [18] qui est paru pendant la rédaction du présent article.

CHAPITRE I.

Décomposition spectrale et formule des traces.

1. Notations et généralités.

Adèles. — Soit $\mathbf{Q}$ le corps des nombres rationnels. On note $\mathbf{A}$ l'anneau des adèles de $\mathbf{Q}$, $\mathbf{A}^\star$ le groupe des idèles de $\mathbf{Q}$, $\mathbf{O}_p$ (p premier) l'anneau des entiers de $\mathbf{Q}_p$, $\mathbf{O}_p^\star$ le groupe des unités de $\mathbf{O}_p$. On pose $\mathbf{O} = \prod_{p\neq\infty} \mathbf{O}_p$ et $\mathbf{O}^\star = \prod_{p\neq\infty} \mathbf{O}_p^\star$. On sait que $\mathbf{A} = (\mathbf{R}\times\mathbf{O}) + \mathbf{Q}$ et que $\mathbf{A}^\star = \mathbf{R}^\star\times\mathbf{O}^\star\times\mathbf{Q}^\star$ avec $(\mathbf{R}^\star\times\mathbf{O}^\star)\cap\mathbf{Q}^\star = \{1\}$. Un adèle x de composantes x_∞, x_2, x_3, x_5, ... sera noté $x = (x_\infty, x_2, x_3, \ldots)$. On notera τ le caractère de $\mathbf{A}$ décrit dans la thèse de Tate [22] qui permet d'identifier $\mathbf{A}$ et son dual de Pontrjagin. Notons dx la mesure de Haar auto-duale sur $\mathbf{A}$. On a alors $dx = \prod dx_p$, où dx_∞ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$ et où dx_p ($p\neq\infty$) est la mesure de Haar sur $\mathbf{Q}_p$ telle que $\int_{\mathbf{O}_p} dx_p = 1$. Sur $\mathbf{A}^\star$ on choisit la mesure de Haar $d^\star x = \prod d^\star x_p$ où $d^\star x_\infty = |x_\infty|^{-1}\,dx_\infty$ et où $d^\star x_p$ est la mesure de Haar sur $\mathbf{Q}_p^\star$ qui donne à $\mathbf{O}_p^\star$ la masse 1. On note $|x|$ le module d'un idèle x.

Soit Λ le groupe des caractères de $\mathbf{A}^\star/\mathbf{Q}^\star$. Nous notons Λ^u le groupe des caractères unitaires de $\mathbf{A}^\star/\mathbf{Q}^\star$ et $\langle\lambda, x\rangle$ la valeur du caractère λ sur l'idèle x. La loi de groupe dans Λ sera notée additivement.

Le groupe PL(2). — Soit $G = PL(2)$ le groupe algébrique sur $\mathbf{Q}$ quotient de $GL(2)$ par son centre. Si k est une algèbre sur $\mathbf{Q}$ et si $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in GL(2, k)$, nous noterons $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}$ son image dans G_k.

Dans $GL(2)$ soient U le sous-groupe des matrices $\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1\end{pmatrix}$, isomorphe au groupe additif, et H le sous-groupe des matrices $\begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$, isomorphe au groupe multiplicatif. Ces groupes sont isomorphes à leurs images dans G et celles-ci seront désignées par les mêmes lettres. On utilisera la convention suivante : si $u\in\mathbf{A}$, $\eta\in\mathbf{Q}$, $h\in\mathbf{A}^\star$, $\xi\in\mathbf{Q}^\star$, on pose

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} 1 & \eta \\ 0 & 1\end{pmatrix},\qquad \mathbf{h} = \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

On pose $G_\infty = G_{\mathbf{R}}$, $G_p = G_{\mathbf{Q}_p}$. On définit de même U_p et H_p. On pose $K_\infty = O(2)/\pm\{1\}$ et on note K_p l'image dans G_p de $GL(2, \mathbf{O}_p)$. Le groupe $G_{\mathbf{A}}$ s'identifie alors au « produit restreint » des G_p par rapport aux K_p. On pose $K = \prod K_p$. On sait que $G_{\mathbf{A}} = KH_{\mathbf{A}}U_{\mathbf{A}}$. Si $\mathbf{x} \in G_{\mathbf{A}}$, il peut s'écrire de plusieurs manières sous la forme $\mathbf{x} = \mathbf{khu}(\mathbf{k} \in K, \mathbf{h} \in H_{\mathbf{A}}, \mathbf{u} \in U_{\mathbf{A}})$, mais le nombre $r(\mathbf{x}) = |h|^{\frac{1}{2}}$ est indépendant de la décomposition.

On note G_f le groupe des adèles finis : c'est le sous-groupe formé des éléments de $G_{\mathbf{A}}$ dont la composante à l'infini est 1. On a donc $G_{\mathbf{A}} = G_\infty \times G_f$. On pose

$$K_f = K \cap G_f = \prod_{p \neq \infty} K_p.$$

On pose $P = HU$ et $w = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. On a la *décomposition de Bruhat* :

(I.1.1) $$G_{\mathbf{Q}} = P_{\mathbf{Q}} \cup P_{\mathbf{Q}} w U_{\mathbf{Q}},$$

ainsi que le résultat suivant :

(I.1.2) *Soit* $u \in \mathbf{A}$. *On pose* $h_\infty(\mathbf{u}w) = 1 + u_\infty^2$, *et* $h_p(\mathbf{u}w) = 1$ *si* $u_p \in \mathbf{O}_p$ *et* $h_p(\mathbf{u}w) = u_p^2$ *si* $u_p \notin \mathbf{O}_p$. *Soit* $h(\mathbf{u}w)$ *l'idèle dont nous venons d'écrire les composantes. Alors il existe un* $\mathbf{k} \in K$ *tel que l'on ait* $\mathbf{u}w = \mathbf{k}\mathbf{u}^{-1}\mathbf{h}(\mathbf{u}w)$.

La vérification de (I.1.2) est immédiate. On en déduit que

(I.1.3) $$r(\mathbf{u}w)^2 = (1 + u_\infty^2) \prod_{p \neq \infty} \operatorname{Max}(1, |u_p|^2).$$

(I.1.4) Si a et b sont deux entiers premiers entre eux et si $\eta = \frac{a}{b}$, alors $r(\eta w) = a^2 + b^2$.

Mesures de Haar. — Les isomorphismes $\mathbf{u} \to u$ de $U_{\mathbf{A}}$ sur $\mathbf{A}$ et $\mathbf{h} \to h$ de $H_{\mathbf{A}}$ sur $\mathbf{A}^\star$ fournissent les mesures de Haar sur $U_{\mathbf{A}}$ et $H_{\mathbf{A}}$. On choisit sur K la mesure de Haar pour laquelle K est de volume 1. On sait que si $\mathbf{x} = \mathbf{khu}$, alors

(I.1.5) $$d\mathbf{x} = r(\mathbf{x})^2 \, d\mathbf{k} \, d\mathbf{h} \, d\mathbf{u}$$

est une mesure de Haar sur $G_{\mathbf{A}}$.

Caractères. — L'isomorphisme $h \mapsto \mathbf{h}$ permet d'identifier Λ avec le groupe des caractères de $H_{\mathbf{A}}/H_{\mathbf{Q}}$. On posera, en particulier, $\langle \rho, \mathbf{h} \rangle = |h|^{\frac{1}{2}}$. Comme tout idèle $t \in \mathbf{A}^\star$ peut s'écrire

$$t = \left(\frac{t_\infty}{|t|}, t_2, \ldots, t_p, \ldots \right) . (|t|, 1, \ldots, 1, \ldots),$$

on voit que tout caractère $\lambda \in \Lambda$ peut s'écrire $\lambda = s\rho + \chi$, où s est le nombre complexe défini par l'équation

$$\langle s\rho, t\rangle = |t|^{\frac{s}{2}} = \langle \lambda, (|t|, 1, \ldots, 1, \ldots)\rangle$$

et où χ est le caractère unitaire défini par l'équation

$$\langle \chi, t\rangle = \left\langle \lambda, \left(\frac{t_\infty}{|t|}, t_2, \ldots, t_p, \ldots\right)\right\rangle.$$

Notons $\mathbf{A}_0^\star$ le groupe des idèles de module 1 ; il est clair que χ est déterminé par sa restriction à $\mathbf{A}_0^\star/\mathbf{Q}^\star$ qui est un groupe compact.

On écrira quelques fois χ comme produit de ses composantes locales $\chi = \prod \chi_p$, et si $p \neq \infty$ on dira que χ n'est pas ramifié en p si la restriction de χ_p à $\mathbf{O}_p^\star$ est le caractère trivial. Remarquons que si χ n'est ramifié en aucune place $p \neq \infty$, alors $\chi = 0$; en effet, $\mathbf{A}_0^\star/\mathbf{Q}^\star \simeq \prod_{p \neq \infty} \mathbf{O}_p^\star = \mathbf{O}^\star$. Pour cette raison χ est appelé la partie ramifiée de λ. Nous noterons $d\lambda$ la mesure de Haar sur Λ^u duale de la mesure dh sur $\mathrm{H}_\mathbf{A}/\mathrm{H}_\mathbf{Q}$. Si l'on écrit $\lambda = s\rho + \chi$ on a

$$\int_{\Lambda^u} f(\lambda)\, d\lambda = \frac{1}{4i\pi} \sum_\chi \int_{\mathrm{Re}(s)=0} f(s\rho + \chi)\, ds. \tag{I.1.6}$$

Domaine fondamental. — Soit d un nombre réel strictement positif. On note $\mathrm{H}_\mathbf{A}(d)$ l'ensemble des $\mathbf{h} \in \mathrm{H}_\mathbf{A}$ tels que $r(\mathbf{h}) = |h|^{\frac{1}{2}} < d$, et $\mathfrak{G}(d)$ l'ensemble des $\mathbf{x} \in \mathrm{G}_\mathbf{A}$ tels que $r(\mathbf{x}) < d$. On sait que

$$\mathfrak{G}(d) = \mathrm{K}\mathrm{H}_\mathbf{A}(d)\,\mathrm{U}_\mathbf{A},$$

et les deux résultats suivants sont bien connus :

(I.1.7) L'ensemble des $\gamma \in \mathrm{G}_\mathbf{Q}$ tels que $\mathfrak{G}(d) \# \mathfrak{G}(d)\gamma$ est fini modulo $\mathrm{P}_\mathbf{Q}$ (³).

(I.1.8) *Si d est assez grand, on a* $\mathrm{G}_\mathbf{A} = \mathfrak{G}(d)\,\mathrm{G}_\mathbf{Q}$.

On fixera par la suite un nombre d_0 vérifiant (I.1.8) et on posera $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(d_0)$.

(I.1.9) *Si $d < 1$, et si $\mathfrak{G}(d) \# \mathfrak{G}(d)\gamma$ avec $\gamma \in \mathrm{G}_\mathbf{Q}$, alors $\gamma \in \mathrm{P}_\mathbf{Q}$.*

Démonstration. — D'après (I.1.1), si $\gamma \notin \mathrm{P}_\mathbf{Q}$, alors $\gamma = \mu w \eta$ avec $\mu \in \mathrm{U}_\mathbf{Q}$ et $\eta \in \mathrm{P}_\mathbf{Q}$ donc si $\mathbf{x} = \mathbf{khu}$, on a :

$$r(\mathbf{x}\gamma) = r(\mathbf{hu}\mu w) = r(\mathbf{hu}\mu\mathbf{h}^{-1} w)\, r(\mathbf{h})^{-1}.$$

(³) La notation $\mathrm{A} \# \mathrm{B}$ signifie que l'intersection de A et B est non vide.

Or, par hypothèse, $r(\mathbf{x}) = r(\mathbf{h}) < d < 1$, donc $r(\mathbf{h})^{-1} > 1$; mais puisque $\mathbf{hu}\mu\mathbf{h}^{-1} \in U_{\mathbf{A}}$ et d'après (I.1.3), on a alors $r\,(\mathbf{hu}\,\mu\mathbf{h}^{-1}w) > 1$, donc $r(\mathbf{x}\gamma) > 1$.

C. Q. F. D.

Fonctions régulières. — On notera $\mathcal{D}(G_{\mathbf{A}})$ l'ensemble des combinaisons linéaires de fonctions numériques sur $G_{\mathbf{A}}$ de la forme $F = \prod F_p$, où $F_\infty \in \mathcal{D}(G_\infty)$, espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact, où $F_p \in \mathcal{D}(G_p)$, espace des fonctions localement constantes à support compact pour $p \neq \infty$ et où, pour presque tout p (fini), la fonction F_p est égale à la fonction caractéristique de K_p.

Une fonction numérique sur $G_{\mathbf{A}}$ sera dite *régulière* si elle coïncide, au voisinage de chaque point, avec un élément de $\mathcal{D}(G_{\mathbf{A}})$. On notera $\mathcal{D}(G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}})$ l'ensemble des fonctions à support compact sur $G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}}$ qui sont régulières sur $G_{\mathbf{A}}$; $\mathcal{D}(G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}})$ est dense dans $L^2(G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}})$. On définit de même les espaces $\mathcal{D}(H_{\mathbf{A}})$, $\mathcal{D}(G_{\mathbf{A}}/P_{\mathbf{Q}}U_{\mathbf{A}})$, etc. si m est un entier positif, $\mathcal{D}^m(G_{\mathbf{A}})$ est défini comme précédemment en imposant seulement à la composante F_∞ d'appartenir à $\mathcal{D}^m(G_\infty)$.

Opérateurs différentiels. — L'application tangente à la projection $GL(2, \mathbf{R}) \to G_\infty$ induit un isomorphisme de $\mathfrak{g} = sl(2, \mathbf{R})$ sur l'algèbre de Lie de G_∞. Si $F \in \mathcal{D}(G_{\mathbf{A}})$ et $X \in \mathfrak{g}$ on définit la fonction $X \star F$ par la formule suivante :

$$X \star F(\mathbf{x}) = \frac{d}{dt} F(\exp(-tX)\,\mathbf{x})\,|_{t=0}.$$

Il est clair que $X \star F \in \mathcal{D}(G_{\mathbf{A}})$, et que l'on a défini ainsi un homomorphisme de $\mathfrak{g}$ dans l'algèbre des opérateurs linéaires dans $\mathcal{D}(G_{\mathbf{A}})$, et donc un homomorphisme de l'algèbre enveloppante universelle $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$.

On pose :

$$H = i\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad X^+ = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}, \qquad X^- = \operatorname{conj}(X^+),$$
$$\Omega = H^2 + 2(X^+X^- + X^-X^+), \qquad D = \Omega - 2H^2.$$

L'élément Ω est un générateur du centre de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$, appelé opérateur de Casimir. L'élément D est K_∞-invariant, et la convolution par D est un opérateur différentiel elliptique.

Paramétrix. — Si D_1 et D_2 sont deux distributions sur G_∞, dont l'une est à support compact, on sait définir leur produit de convolution, noté $D_1 \star D_2$. Soient Δ un opérateur différentiel elliptique d'ordre n sur G_∞ et δ la distribution de Dirac à l'origine de G_∞; la théorie des équations aux dérivées partielles (*cf.* [16], p. 174) nous apprend qu'il existe des fonctions $f_\infty \in \mathcal{D}^{n-4}(G_\infty)$ et $g_\infty \in \mathcal{D}(G_\infty)$ telles que

$$\Delta(f_\infty) = \delta + g_\infty.$$

Appliquant ceci à l'opérateur différentiel

$$f_\infty \mapsto f_\infty \star D^m,$$

où D est l'élément de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ défini plus haut, on obtient le résultat suivant :
(I.1.10) *Il existe des fonctions* $f_\infty \in \mathcal{D}^{2m-4}(G_\infty)$ *et* $g_\infty \in \mathcal{D}(G_\infty)$ *telles que*

$$f_\infty \star D^m = \delta + g_\infty.$$

Une distribution T est dite K_∞-*centrale* si $T(kx) = T(xk)$ pour tout $k \in K_\infty$. Remarquons que D et δ sont deux distributions K_∞-centrales; on peut donc supposer que f_∞ et g_∞ sont K_∞-centrales. En utilisant une idée due à Laurent Schwartz, on en déduit le lemme suivant :

(I.1.11) *Soit n un entier positif, et soit* K_1 *un sous-groupe ouvert compact de* K_f. *Il existe des fonctions* $f \in \mathcal{D}^n(G_\mathbf{A})$ *et* $g \in \mathcal{D}(G_\mathbf{A})$, *qui sont centrales sous l'action de* $K_1 \times K_\infty$, *et un élément* $D_n \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$, K_∞-*central, tels que pour toute fonction* φ *régulière sur* $G_\mathbf{A}$ *et invariante à gauche par* K_1, *on ait*

$$\varphi = f \star (D_n \star \varphi) - g \star \varphi.$$

Démonstration. — Choisissons pour D_n une puissance D^m de D telle que $2m - 4 \geq n$. Nous avons défini en (I.1.10) deux fonctions f_∞ et g_∞; nous choisissons $f = f_\infty \otimes f_1$ et $g = g_\infty \otimes f_1$, où f_1 est la fonction caractéristique de K_1 divisée par le volume de K_1. Le lemme résulte alors immédiatement de (I.1.10).

Le lemme ci-dessus montre que *toute fonction* $\varphi \in \mathcal{D}(G_\mathbf{A})$ *s'écrit comme somme de produits de convolution de fonctions dans* $\mathcal{D}^n(G_\mathbf{A})$ *par des fonctions dans* $\mathcal{D}(G_\mathbf{A})$.

Formes automorphes. — Une fonction f sur $G_\mathbf{A}$ à valeurs dans un espace vectoriel normé est dite à *croissance lente* (dans $\mathfrak{G}$) s'il existe un entier n tel que

(I.1.12) $$\sup_{x \in \mathfrak{H}} |f(\mathbf{x})|\, r(\mathbf{x})^n < +\infty,$$

ce que nous écrivons encore [4]

$$|f(\mathbf{x})| \prec r(\mathbf{x})^{-n}, \qquad \mathbf{x} \in \mathfrak{G}.$$

[4] La notation $|f(x)| \prec g(x)$, $x \in A$ signifie qu'il existe un nombre $d > 0$ tel que, pour tout $x \in A$, on ait $|f(x)| < d\, g(x)$.

Une fonction f est dite à *décroissance rapide* si pour tout n on a

$$|f(\mathbf{x})| \prec r(\mathbf{x})^n, \qquad \mathbf{x} \in \mathfrak{G}.$$

Une fonction numérique sur $G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}}$ sera appelée une *forme automorphe* si elle est régulière, K-finie à gauche, valeur propre de l'opérateur de Casimir Ω, et à croissance lente.

Soit $\mathfrak{I}$ une représentation de K dans un espace de Hilbert V de dimension finie. Une fonction sur $G_{\mathbf{A}}$ à valeurs dans V sera dite de type $\mathfrak{I}$ à gauche (resp. à droite) si

(I.1.13) $f(\mathbf{kx}) = \mathfrak{I}(\mathbf{k})f(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{k} \in K, \mathbf{x} \in G_{\mathbf{A}}) \qquad [\text{resp. } f(\mathbf{xk}) = \mathfrak{I}(\mathbf{k})^{-1}f(\mathbf{x})].$

Une fonction f régulière sur $G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}}$ à valeurs dans V, à croissance lente de type $\mathfrak{I}$ à gauche, et telle que

(I.1.14) $$\Omega \star f = sf \qquad (s \in \mathbf{C}),$$

sera appelée une *forme automorphe de type* $(\mathfrak{I}, s)$.

Remarque. — Notre définition des formes automorphes est plus restrictive que celle de Harish-Chandra [qui, au lieu de (I.1.14) exige seulement que l'espace vectoriel engendré par les $\Omega^n \star f$ soit de dimension finie].

Le résultat suivant s'applique en particulier aux formes automorphes :

(I.1.15) *Soit f une fonction* K*-finie localement sommable sur* $G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}}$, *et (en tant que distribution) valeur propre de Ω. Alors il existe une fonction $g \in \mathcal{D}(G_{\mathbf{A}})$ telle que $g \star f = f$. En particulier, f est égale presque partout à une fonction régulière (cf.* [4]).

2. Formes paraboliques.

On munit $G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}}$ de la mesure invariante quotient. On note T la représentation naturelle de $G_{\mathbf{A}}$ dans $L^2(G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}}) = L^2$. Nous désignerons par L^2_d le sous-espace fermé engendré par les sous-espaces invariants minimaux (le spectre discret), et par T_d la restriction de T à L^2_d.

Pour toute fonction f localement intégrable sur $G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}}$ nous posons

(I.2.1) $$f^0(\mathbf{x}) = \int_{U_{\mathbf{A}}/U_{\mathbf{Q}}} f(\mathbf{xu})\, d\mathbf{u},$$

expression définie pour presque tout $\mathbf{x} \in G_{\mathbf{A}}$. On dit que f est *parabolique si* $f^0 = 0$.

On note L_0^2 le sous-espace de L^2 formé des fonctions paraboliques de carré intégrable. C'est un sous-espace fermé $G_{\mathbf{A}}$-invariant. On note T_0 la restriction de T à L_0^2. Rappelons quelques résultats fondamentaux concernant les formes paraboliques.

(I.2.2) *Pour tout entier* $n \geqq 2$ *et toute fonction* $F \in \mathcal{D}^n(G_{\mathbf{A}})$ *il existe une constante* $c(F)$ *et un compact* $B \subset H_{\mathbf{A}}$ *tels que, pour toute fonction localement intégrable* f *sur* $G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}}$ *et tout* $\mathbf{x} = \mathbf{khu} \in \mathfrak{S}$, *on ait*

$$|F \star f(\mathbf{x}) - F \star f^0(\mathbf{x})| < c(F)\, r(\mathbf{x})^{2(n-1)} \int_{\mathbf{K}\,\mathrm{B}\,\mathbf{h}\mathrm{U}_{\mathbf{A}}/\mathrm{U}_{\mathbf{Q}}} |f(y)|\, dy.$$

Preuve. — Il suffit de remarquer que les hypothèses permettent de refaire les raisonnements de ([13], p. 3 à 5).

Comme dans [13], on déduit de (I.2.2) les conséquences suivantes :

(I.2.3) *Sous les mêmes hypothèses que* (I.2.2), *il existe une constante* $c'(F)$ *telle que, pour tout* $f \in L^2$ *et tout* $\mathbf{x} \in \mathfrak{S}$, *on ait*

$$|F \star f(\mathbf{x}) - F \star f^0(\mathbf{x})| < c'(F)\, r(\mathbf{x})^{2(n-1)} \|f\|_2.$$

(I.2.4) *Sous les mêmes hypothèses que* (I.2.2), *l'opérateur* $T_0(F)$ *est de Hilbert-Schmidt.*

(I.2.5) *On a* $L_0^2 \subset L_d^2$, *et les multiplicités des représentations irréductibles de* $G_{\mathbf{A}}$ *qui interviennent dans* L^2 *sont finies.* [Pour un énoncé plus précis, *voir* (I.7.5) plus loin.]

(I.2.6) *Les formes automorphes paraboliques sont à décroissance rapide et leur ensemble est total dans* L_0^2. *Plus généralement, si* f *est une forme automorphe, pour tout entier* n, *on a* $|f(\mathbf{x}) - f^0(\mathbf{x})| \prec r(\mathbf{x})^n$ *pour* $\mathbf{x} \in \mathfrak{S}$.

Le résultat suivant est important pour la suite :

(I.2.7) *Soit* F *une fonction* K-*finie à gauche régulière sur* $G_{\mathbf{A}}$. *On suppose que pour tout* $X \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ *la fonction* $X \star F$ *soit intégrable. Alors l'opérateur* $T_0(F)$ *est à trace.*

Démonstration. — Remarquons d'abord que $T_0(F)$ est un opérateur borné puisque F est intégrable; d'autre part, que $D \star F$ vérifie les mêmes hypothèses que F, et enfin que nous sommes en mesure d'appliquer (I.1.11) à F. Il existe donc F', $F'' \in \mathcal{D}^n(G_{\mathbf{A}})$ et $D_n \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ tels que

$$F = F' \star D_n \star F - F'' \star F.$$

Donc

$$T_0(F) = T_0(F')\, T_0(D_n \star F) - T_0(F'')\, T_0(F).$$

Comme $T_0(F')$ et $T_0(F'')$ sont des opérateurs de Hilbert-Schmidt d'après (I.2.4), on en déduit que $T_0(F)$ est de Hilbert-Schmidt. Il en est donc de même de $T_0(D_n \star F)$ puisque $D_n \star F$ vérifie, comme F, les hypothèses de l'énoncé. L'équation ci-dessus prouve alors que $T_0(F)$ est somme de produits d'opérateurs de Hilbert-Schmidt, donc à trace.

3. Séries d'Eisenstein.

Définition des séries d'Eisenstein. — Soient $\lambda = s\rho + \chi \in \Lambda$ un caractère de $H_{\mathbf{A}}$ et $\mathfrak{S}$ une représentation unitaire irréductible de K dans un espace de Hilbert V. On notera $V(\mathfrak{S}, \lambda)$ le sous-espace de V formé des éléments qui vérifient :

$$\mathfrak{S}(\mathbf{hu})\,v = \langle -\lambda - \rho, \mathbf{h}\rangle v = \langle -\chi, \mathbf{h}\rangle v \tag{I.3.1}$$

pour tout $\mathbf{h} \in H_{\mathbf{A}} \cap K$ et tout $\mathbf{u} \in U_{\mathbf{A}} \cap K$. Il est clair que $V(\mathfrak{S}, \lambda) = V(\mathfrak{S}, \chi)$. On note $P(\mathfrak{S}, \chi)$ la projection orthogonale de V sur $V(\mathfrak{S}, \chi)$.

Soit $\mathbf{x} = \mathbf{khu} \in G_{\mathbf{A}}$. On pose

$$L(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \lambda) = \mathfrak{S}(\mathbf{k})\langle -\lambda - \rho, \mathbf{h}\rangle P(\mathfrak{S}, \chi). \tag{I.3.2}$$

Il est bien connu que si $\mathrm{Re}(s) > 1$, la série

$$E(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \lambda) = \sum_{G_{\mathbf{Q}}/P_{\mathbf{Q}}} L(\mathbf{x}, \gamma, \mathfrak{S}, \lambda) \tag{I.3.3}$$

converge absolument et définit une fonction analytique de s.

Le prolongement analytique de (I.3.3) est lié à la décomposition spectrale de l'espace L^2. On peut étudier ces problèmes par les méthodes générales (c'est-à-dire qui se généralisent, par exemple, aux groupes fuchsiens (*cf.* [15] ou [19]). Nous préférons employer une méthode adaptée de [13]; en effet, celle-ci fournit immédiatement les singularités de (I.3.3) dans le demi-plan $\mathrm{Re}(s) \geq 0$, et des formules explicites utilisées pour prouver la majoration (I.3.41) ci-dessous qui joue un rôle important dans la suite.

Dans GL $(2, \mathbf{A})$ on pose

$$\tilde{K}_\infty = O(2, \mathbf{R}), \qquad \tilde{K}_p = GL(2, \mathbf{O}_p) \quad p \neq \infty, \qquad \tilde{K} = \prod \tilde{K}_p;$$

K est l'image de $\tilde{K}$ par la projection de $GL(2, \mathbf{A})$ dans $G_{\mathbf{A}}$. Une représentation $\mathfrak{S}$ de K définit par composition une représentation de $\tilde{K}$ triviale sur le centre de $\tilde{K}$; nous la noterons encore $\mathfrak{S}$.

Remarquons, d'autre part, qu'une représentation unitaire irréductible $\mathfrak{S}$ de K (resp. $\tilde{K}$) est produit tensoriel de représentations $\mathfrak{S}_p$ unitaires, irréductibles de K_p (resp. $\tilde{K}_p$), et que $\mathfrak{S}_p = 1$ pour presque tout p.

LES SÉRIES E_φ ET LEUR PROLONGEMENT ANALYTIQUE. — On note $\mathcal{S}(\mathbf{A}\times\mathbf{A})$ l'espace des fonctions de Schwartz-Bruhat sur $\mathbf{A}\times\mathbf{A}$ à valeurs dans End(V). Si $u = (u', u'')$ et $v = (v', v'')$ sont des éléments de $\mathbf{A}\times\mathbf{A}$, on pose

$$u \wedge v = u'v'' - v'u''.$$

Si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{A}\times\mathbf{A})$, on définit sa transformée de Fourier par la formule suivante :

$$\hat{\varphi}(v) = \int_{\mathbf{A}\times\mathbf{A}} \varphi(u)\,\tau(u \wedge v)\,du. \tag{I.3.4}$$

Le groupe GL(2, $\mathbf{A}$) opère naturellement dans $\mathbf{A}\times\mathbf{A}$; d'autre part, nous identifions un idèle t et la matrice $\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$. Soient $\mathbf{x} \in \mathrm{GL}(2, \mathbf{A})$ et $h \in \mathbf{A}^*$. Le résultat suivant est facile à établir.

(I.3.5) *La transformée de Fourier de la fonction* $u \mapsto \varphi(\mathbf{x}tu)$ est

$$u \mapsto \hat{\varphi}[\mathbf{x}t^{-1}\det(\mathbf{x}^{-1})\,u]\,|\,t^{-2}\det(\mathbf{x}^{-1})\,|.$$

Soient $\lambda = s\rho + \chi \in \Lambda$ et $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{A}\times\mathbf{A})$. On pose $e_1 = (1, 0) \in \mathbf{A}\times\mathbf{A}$. Si $\mathrm{Re}(s) > 0$, on définit une fonction sur GL(2, $\mathbf{A}$) en posant

$$L_\varphi(\mathbf{x}, \lambda) = \langle \det\mathbf{x}, \lambda + \rho \rangle \int_{\mathbf{A}^*} \varphi(\mathbf{x}te_1)\,\langle 2\lambda + 2\rho, t \rangle\, d^*t. \tag{I.3.6}$$

Il est immédiat de voir que cette formule définit par passage au quotient une fonction sur $G_\mathbf{A}$, et que $L_\varphi(\mathbf{xhu}, \lambda) = \langle -\lambda - \rho, \mathbf{h} \rangle L_\varphi(\mathbf{x}, \lambda)$ pour tout $\mathbf{x} \in G_\mathbf{A}$, tout $\mathbf{h} \in H_\mathbf{A}$ et tout $\mathbf{u} \in U_\mathbf{A}$. Si l'on suppose, en plus, que φ est de type $(\mathfrak{S}, \chi)$, c'est-à-dire si l'on a

$$\varphi(\mathbf{k}u) = \langle \det\mathbf{k}, -\chi \rangle\, \mathfrak{S}(\mathbf{k})\, \varphi(u) \tag{I.3.7}$$

pour tout $\mathbf{k} \in \tilde{K}$ et tout $u \in \mathbf{A}\times\mathbf{A}$, il est clair que l'on a

$$L_\varphi(\mathbf{x}, \lambda) = L(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \lambda)\, L_\varphi(1, \lambda) \quad \text{pour tout } \mathbf{x} \in G_\mathbf{A}. \tag{I.3.8}$$

Soient $\lambda = s\rho + \chi$ et $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{A}\times\mathbf{A})$. On suppose que $\mathrm{Re}(s) > 1$. On pose

$$E_\varphi(\mathbf{x}, \lambda) = \sum_{G_\mathbf{Q}/P_\mathbf{Q}} L_\varphi(\mathbf{x}\gamma, \lambda). \tag{I.3.9}$$

Il est clair que si l'on pose

$$\Theta_\varphi(\mathbf{x}, t) = \sum_{\substack{\mu \in \mathbf{Q}\times\mathbf{Q} \\ \mu \neq (0,0)}} \varphi(\mathbf{x} t \mu), \tag{I.3.10}$$

on trouve

$$\mathrm{E}_\varphi(\mathbf{x}, \lambda) = \langle \lambda + \rho, \det \mathbf{x} \rangle \int_{\mathbf{A}^*/\mathbf{Q}^*} \Theta_\varphi(\mathbf{x}, t) \langle 2\lambda + 2\rho, t \rangle d^* t. \tag{I.3.11}$$

Considérons alors sur $\mathrm{GL}(2, \mathbf{A})$ la fonction définie par la formule

$$\mathrm{E}_\varphi^+(\mathbf{x}, \lambda) = \langle \lambda + \rho, \det \mathbf{x} \rangle \int_{\substack{\mathbf{A}^*/\mathbf{Q}^* \\ |t| > \langle -\rho, \det \mathbf{x} \rangle}} \Theta_\varphi(\mathbf{x}, t) \langle 2\lambda + 2\rho, t \rangle d^* t. \tag{I.3.12}$$

Soient h et $t \in \mathbf{R}_+$, et C un compact de GL (2, $\mathbf{A}$). On rappelle que, par convention, on écrit $\mathbf{h} = \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $t = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$. Puisque $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{A} \times \mathbf{A})$, il existe un compact $\mathrm{B} \subset \mathbf{A}_f \times \mathbf{A}_f$, tel que, quels que soient $\mathbf{x} \in \mathrm{C}$, h et $t \in \mathbf{R}_+$ on ait

$$\begin{cases} \varphi(\mathbf{x h} t u) = 0 & \text{si } \; u_f \notin \mathrm{B}, \\ \varphi(\mathbf{x h} t u) \prec \| \mathbf{h} t u_\infty \|^{-n} & \text{si } \; u_f \in \mathrm{B} \end{cases} \tag{I.3.13}$$

pour tout entier n positif. Sous les mêmes conditions, il existe donc un réseau $\Gamma \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ tel que

$$|\Theta_\varphi(\mathbf{xh}, t)| \prec \sum_{\gamma \in \Gamma - \{0,0\}} \| \mathbf{h} t \gamma \|^{-n}.$$

On en déduit le résultat suivant :

(I.3.14) *Soient* C *un compact de* $\mathrm{GL}(2, \mathbf{A})$ *et* n *un entier* ≥ 3. *On a*

$$|\Theta_\varphi(\mathbf{xh}, t)| \prec h^{-n} t^{-n}$$

dans l'ensemble $t > 0$, $0 < h < 1$, $\mathbf{x} \in \mathrm{C}$.

En effet, dans l'inégalité de croissance précédant ce lemme, la série est convergente pour $n \geq 3$. D'autre part, si $u_\infty = (a, b)$ on a évidemment

$$\| \mathbf{h} u \|^{-n} = | h^2 a^2 + b^2 |^{-\frac{n}{2}} \leq h^{-n} | a^2 + b^2 |^{-\frac{n}{2}}.$$

Le lemme (I.3.14) en résulte aussitôt.

D'après le lemme précédent, le second membre de (I.3.12) converge uniformément pour $\mathrm{Re}(s) + 2 \leq n$, de sorte que $\mathrm{E}_\varphi^+(\mathbf{x}, \lambda)$ est une fonction entière de λ; on a, de plus, la majoration suivante :

(I.3.15) *Pour tout h tel que $0 < h < 1$, si $\lambda = s\rho + \chi$ avec* $\operatorname{Re}(s) \leqq n-2$, *on a*

$$|E_\varphi^+(\mathbf{xh}, \lambda)| \prec |h|^{-\frac{n}{2}}$$

uniformément pour $\mathbf{x} \in C$.

Démonstration. — D'après (I.3.12) et (I.3.14), on a

$$|E_\varphi^+(\mathbf{xh}, \lambda)| \prec |\langle \lambda+\rho, \det(\mathbf{xh})\rangle| \int_{\substack{|t| > \langle -\rho, \det(\mathbf{xh})\rangle \\ t \in \mathbf{A}^*/\mathbf{Q}^*}} h^{-n} |t|^{-n} |\langle 2\lambda + 2\rho, t\rangle| \, d^\star t$$

$$= |\det \mathbf{xh}|^{\frac{\operatorname{Re}(s)+1}{2}} h^{-n} \int_{t=|\det \mathbf{xh}|^{-\frac{1}{2}}}^{+\infty} |t|^{\operatorname{Re}(s)+1-n} \, d^\star t.$$

Cette intégrale converge si $\operatorname{Re}(s) \leqq n-2$ et vaut

$$|\det x|^{\frac{n}{2}} \frac{h^{-\frac{n}{2}}}{n - \operatorname{Re}(s) + 1},$$

d'où le lemme.

Revenons à (I.3.10). Compte tenu de (I.3.5), la formule de Poisson prouve l'égalité suivante :

(I.3.16) $\quad \Theta_\varphi(\mathbf{x}, h) + \varphi(0) = |h^{-2} \det(\mathbf{x}^{-1})| \{\Theta_{\hat\varphi}(\mathbf{x}, h^{-1} \det(\mathbf{x}^{-1})) + \hat\varphi(0)\}.$

Il en résulte facilement que l'on peut écrire

(I.3.17) $\quad E_\varphi(\mathbf{x}, \lambda) = E_\varphi^+(\mathbf{x}, \lambda) + E_{\hat\varphi}^+(\mathbf{x}, -\lambda) + \delta(2\chi)\langle \chi, \det \mathbf{x}\rangle \left\{\dfrac{\varphi(0)}{-s-1} + \dfrac{\hat\varphi(0)}{s-1}\right\},$

où l'on a posé $\delta(2\chi) = 0$ si $2\chi \neq 0$ et $\delta(2\chi) = 1$ si $2\chi = 0$. Ceci démontre que $E_\varphi(\mathbf{x}, s\rho + \chi)$ se prolonge en une fonction méromorphe de s dont les seules singularités sont des pôles simples en $s = \pm 1$ si $2\chi = 0$ et il est clair qu'on a l'équation fonctionnelle

(I.3.18) $$E_\varphi(\mathbf{x}, \lambda) = E_{\hat\varphi}(\mathbf{x}, -\lambda).$$

On déduit aussi de (I.3.15) le résultat suivant :

(I.3.19) *Soient a et $b \in \mathbf{R}$, avec $a \leqq b$. Il existe un entier n tel que l'on ait*

$$\left| E_\varphi(\mathbf{x}, s\rho + \chi) - \delta(2\chi)\langle \chi, \det \mathbf{x}\rangle \left\{\frac{\hat\varphi(0)}{s-1} - \frac{\varphi(0)}{s+1}\right\}\right| \prec r(x)^{-n}$$

dans l'ensemble $\mathbf{x} \in \mathfrak{G}$, $a \leqq \operatorname{Re}(s) \leqq b$.

On déduit de (I.3.19) et de la formule de Cauchy le résultat suivant :

(I.3.20) *Soit f une fonction mesurable sur* $G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}}$, *à valeurs dans* V *et à décroissance rapide. Alors l'intégrale*

$$\int_{G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}}} f(\mathbf{x})\, E_\varphi(\mathbf{x}, \lambda)\, d\mathbf{x}$$

est absolument convergente et définit une fonction méromorphe de λ.

Choix de φ et calcul de L_φ. — Supposons maintenant que φ soit de type $(\mathfrak{I}, \chi)$ [*cf.* (I.3.7)] de sorte que $L_\varphi(\mathbf{x}, \lambda)$ est de type $\mathfrak{I}$ à gauche. Il est immédiat de vérifier sur (I.3.5) que $\hat{\varphi}$ est alors de type $(\mathfrak{I}, -\chi)$; mais d'après (I.3.8), on a

$$\text{(I.3.21)}\quad E_\varphi(\mathbf{x}, \lambda) = E(\mathbf{x}, \mathfrak{I}, \lambda)\, L_\varphi(1.\lambda) \qquad \text{si}\quad \lambda = s\rho + \chi \quad \text{et}\quad \operatorname{Re}(s) > 1.$$

Pour exploiter l'équation précédente, nous supposons que $V(\mathfrak{I}, \chi) \neq \{0\}$, et nous choisissons une fonction φ particulière de type $(\mathfrak{I}, \chi)$, à savoir $\varphi = \prod \varphi_p$, où les φ_p sont définies comme suit :

(I.3.22) Si $p \neq \infty$ et si $\mathfrak{I}_p = 1$ [ce qui est le cas pour presque tout p, et suppose χ_p non ramifié puisque $V(\mathfrak{I}, \chi)$ est supposé $\neq \{0\}$], alors φ_p est la fonction caractéristique de $\mathbf{O}_p \times \mathbf{O}_p$.

(I.3.23) Si $p \neq \infty$ et si $\mathfrak{I}_p \neq 1$, alors

$$\varphi_p(ke_1) = \langle -\chi_p, \det\mathbf{k}\rangle\, \mathfrak{I}_p(k)\, P(\mathfrak{I}_p, \chi_p) \quad \text{pour tout } k \in \tilde{K}_p,$$
$$\varphi_p(u) = 0 \qquad \text{si}\quad u \notin \tilde{K}_p e_1.$$

Remarquons que χ_∞ est ou bien le caractère trivial, ou bien le caractère signe.

(I.3.24) Si $\mathfrak{I}_\infty$ est de dimension 1, de sorte que $\mathfrak{I}_\infty(\mathbf{k}) = \langle \chi_\infty, \det\mathbf{k}\rangle$ puisque $V(\mathfrak{I}_\infty, \chi_\infty) \neq \{0\}$ on pose $\varphi_\infty(u) = e^{-\pi\|u\|^2}$.

(I.3.25) Si $\mathfrak{I}_\infty$ est de dimension 2, il existe une base de V_∞ et un entier $n > 0$ tels que

$$\mathfrak{I}_\infty\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^{2in\theta} & 0\\ 0 & e^{-2in\theta}\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{I}_\infty\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix};$$

on pose alors

$$\varphi_\infty(x, y) = e^{-\pi(x^2+y^2)}\begin{pmatrix}(x+iy)^{2n} & \varepsilon(x+iy)^{2n}\\ \varepsilon(-x+iy)^{2n} & (-x+iy)^{2n}\end{pmatrix},$$

avec $\varepsilon = \chi_\infty(-1)$.

Pour chaque p calculons l'intégrale

$$\int_{\mathbf{Q}_p^*} \varphi_p(te) \langle 2(s+1)\rho + 2\chi, t\rangle d^*t.$$

Dans le cas (I.3.22), elle vaut $[1-\overline{\chi}_p(p)^2 p^{-s-1}]^{-1}$. Dans le cas (I.3.23), on trouve $\mathrm{P}(\mathfrak{I}_{p_1}, \chi_p)$. Dans les cas (I.3.24) et (I.3.25), on trouve

$$\Gamma\left[n+\frac{1}{2}(s+1)\right]\pi^{-\frac{1}{2}(s+1)-n}\mathrm{P}(\mathfrak{I}_\infty, \chi_\infty),$$

avec $n=0$ dans le cas (I.3.24). Si donc φ est la fonction définie ci-dessus, et si l'on note

$$\mathrm{L}(\chi, s) = \prod_{\substack{p\neq\infty \\ \chi_p \text{ non ramifié}}} [1-\chi_p(p)\,p^{-s}]^{-1},$$

la fonction L classique, on voit que l'on a

(I.3.26) $$\mathrm{L}_\varphi(1, s\rho+\chi) = \mathrm{L}_\varphi(s\rho+\chi)\,\mathrm{P}(\mathfrak{I}, \chi),$$

avec

$$\mathrm{L}_\varphi(s\rho+\chi) = \Gamma\left[n+\frac{1}{2}(s+1)\right]\pi^{-\frac{1}{2}(s+1)-n}\prod_{\substack{p\neq\infty \\ \mathfrak{I}_p\neq 1 \\ \chi_p \text{ non ramifié}}} [1-\overline{\chi}_p(p^2)\,p^{-s-1}]\,\mathrm{L}(-2\chi, s+1).$$

Il résulte de là et des propriétés bien connues des fonctions $\mathrm{L}(\chi, s)$ que $\mathrm{L}_\varphi(s\rho+\chi)$ se prolonge en une fonction méromorphe de s qui ne s'annule pas pour $\mathrm{Re}(s)\geqq 0$.

On voit donc, d'après (I.3.21), que *la fonction* $\mathrm{E}(\mathbf{x}, \mathfrak{I}, s\rho+\chi)$ *se prolonge en une fonction méromorphe de s dans tout le plan complexe, dont les seules singularités dans le demi-plan* $\mathrm{Re}(s)\geqq 0$ *sont au plus un pôle simple en* $s=1$ *si* $2\chi=0$. Remarquons d'ailleurs que le résidu en $s=1$ ne peut être non nul que si $\mathfrak{I}(\mathbf{k}) = \langle \chi, \det \mathbf{k}\rangle$: en effet, le résidu est une fonction de type $\mathfrak{I}$ comme $\mathrm{E}(\mathbf{x}, \mathfrak{I}, \lambda)$, proportionnelle d'après (I.3.17) à la fonction

(I.3.27) $$\mathrm{D}\;(\mathbf{x}) = \langle \chi, \det \mathbf{x}\rangle.$$

Calcul de $\mathrm{L}_{\hat\varphi}$. — Nous allons maintenant calculer $\mathrm{L}_{\hat\varphi}(1, s\rho+\chi)$. C'est une fonction holomorphe pour $\mathrm{Re}(s)>0$, qui admet un prolongement méromorphe à tout le plan.

Si $p\neq\infty$ est une place telle que $\mathfrak{I}_p = \mathrm{id}$ on a choisi pour φ_p la fonction caractéristique du réseau des entiers; d'après le choix du caractère τ [*cf.* (I.1)], on a donc $\hat\varphi_p = \varphi_p$.

Si $p=\infty$, on a également choisi une fonction telle que $\hat\varphi_\infty = \varphi_\infty$, comme on le vérifie facilement.

Enfin si $p \neq \infty$ et $\mathfrak{I}_p \neq \mathrm{id}$, on sait déjà que $\hat{\varphi}_p$ est une fonction localement constante à support compact. De plus, on a

$$\hat{\varphi}_p(0) = \int_{\mathbf{Q}_p \times \mathbf{Q}_p} \varphi_p(u)\, du = \mathfrak{I}_p(k) \int_{\mathbf{Q}_p \times \mathbf{Q}_p} \varphi_p(u)\, |\det k|\, du = \mathfrak{I}_p(k)\, \hat{\varphi}_p(0)$$

pour tout $k \in \tilde{\mathrm{K}}_p$, d'où $\hat{\varphi}_p(0) = 0$ puisque $\mathfrak{I}_p$ est irréductible.

Donc $\hat{\varphi}$ est nulle au voisinage de l'infini et de zéro, de sorte que

$$\lambda \mapsto \int_{\mathbf{Q}_p^\star} \hat{\varphi}_p(te_1) \langle 2\lambda + 2\rho, t \rangle\, d^\star t$$

est une fonction entière de λ.

En résumé, on voit que

$$\mathrm{L}_{\hat{\varphi}}(1, s\rho + \chi) = \mathrm{L}(-2\chi, s+1) \prod_{\substack{\mathfrak{I}_p \neq \infty \\ p \neq 1 \\ \chi_p \text{ non ramifié}}} (1 - \overline{\chi}_p(p)^2 p^{-s-1})$$

$$\times \Gamma\left(n + \frac{s+1}{2}\right) \pi^{-n\frac{s+1}{2}} \mathrm{P}(\mathfrak{I}_\infty, \chi_\infty) \prod_{\substack{\mathfrak{I}_p \neq 1 \\ p \neq \infty}} \int_{\mathbf{Q}} \hat{\varphi}(te_1) \langle 2\lambda + 2\rho, t \rangle\, d^\star t.$$

La fonction M; l'équation fonctionnelle des séries d'Eisenstein. — Soit toujours φ la fonction de type $(\mathfrak{I}, \chi)$ décrite plus haut, et posons

$$\text{(I.3.28)} \qquad \mathrm{M}(\mathfrak{I}, s\rho + \chi) = \frac{\mathrm{L}_{\hat{\varphi}}(1, -s\rho - \chi)}{\mathrm{L}_{\varphi}(s\rho + \chi)}.$$

Il sera utile d'introduire aussi les expressions suivantes :

$$m(s\rho + \chi) = \pi^s \frac{\mathrm{L}(2\chi, -s+1)}{\mathrm{L}(-2\chi, s+1)} \frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right)};$$

$$\mathrm{R}_\infty(\mathfrak{I}_\infty, \lambda) = \mathrm{P}(\mathfrak{I}_\infty, \chi_\infty) \frac{\Gamma\left(n + \frac{1-s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right)}{\Gamma\left(n + \frac{1+s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)};$$

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{R}_p(\mathfrak{I}_p, \lambda) = \displaystyle\int_{\mathbf{Q}_p^\star} \hat{\varphi}_p(te_1) \langle -2\lambda + 2\rho, t \rangle\, d^\star t \\ \qquad \text{si } p \neq \infty, \quad \mathfrak{I}_p \neq 1, \quad \chi_p \text{ ramifié}; \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{R}_p(\mathfrak{I}_p, \lambda) = \dfrac{1 - \chi_p(p)^2 p^{-1+s}}{1 - \overline{\chi}_p(p)^2 p^{-1-s}} \displaystyle\int_{\mathbf{Q}_p^\star} \hat{\varphi}_p(te_1) \langle -2\lambda + 2\rho, t \rangle\, d^\star t \\ \qquad \text{si } p \neq \infty, \quad \mathfrak{I}_p \neq 1, \quad \chi_p \text{ non ramifié}; \end{array}\right.$$

$$\mathrm{R}_p(\mathfrak{I}_p, \lambda) = 1 \qquad \text{si } \mathfrak{I}_p = 1$$

Avec ces notations (I.3.28) s'écrit encore

(I.3.29) $$\mathrm{M}(\mathfrak{S}, \lambda) = m(\lambda) \prod_p \mathrm{R}_p(\mathfrak{S}_p, \lambda).$$

D'après (I.3.18) et (I.3.21), on a

$$\mathrm{E}(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \lambda)\, \mathrm{L}_\varphi(1, \lambda) = \mathrm{E}(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, -\lambda)\, \mathrm{L}_{\hat{\varphi}}(1, \lambda).$$

D'après (I.3.28), on a donc

$$\mathrm{E}(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \lambda)\, \mathrm{P}(\mathfrak{S}, \lambda) = \mathrm{E}(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, -\lambda)\, \mathrm{M}(\mathfrak{S}, \lambda).$$

Or il résulte des définitions (I.3.2) et (I.3.3) que

$$\mathrm{L}(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \lambda)\, \mathrm{P}(\mathfrak{S}, \lambda) = \mathrm{L}(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \lambda), \qquad \text{donc} \quad \mathrm{E}(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \lambda)\, \mathrm{P}(\mathfrak{S}, \lambda) = \mathrm{E}(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \lambda);$$

on obtient donc

(I.3.30) $$\mathrm{E}(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \lambda) = \mathrm{E}(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, -\lambda)\, \mathrm{M}(\mathfrak{S}, \lambda)$$

pour tout $\mathbf{x} \in \mathrm{G}_{\mathbf{A}}$ et tout $\lambda \in \Lambda$.

Les résultats suivants sont démontrés dans ([13], p. 13 et 18).

(I.3.31) $$\mathrm{M}(\mathfrak{S}, -\lambda)\, \mathrm{M}(\mathfrak{S}, \lambda) = \mathrm{P}(\mathfrak{S}, \lambda);$$

(I.3.32) $$\mathrm{M}(\mathfrak{S}, \bar{\lambda}) = \mathrm{M}(\mathfrak{S}, \lambda)^*;$$

(I.3.33) $$\mathrm{E}^0(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \lambda) = \mathrm{L}(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \lambda) + \mathrm{L}(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, -\lambda)\, \mathrm{M}(\mathfrak{S}, \lambda);$$

(I.3.34) Si $\lambda = s\rho + \chi$ et $\mathrm{Re}(s) > 1$, on a

$$\int_{\mathrm{U}_{\mathbf{A}}} \mathrm{L}(\mathbf{xu}w, \mathfrak{S}, \lambda)\, d\mathbf{u} = \mathrm{L}(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, -\lambda)\, \mathrm{M}(\mathfrak{S}, \lambda).$$

Le résidu de $\mathrm{M}(\mathfrak{S}, \lambda)$ en $s = 1$. — Il résulte de (I.3.29) ou de (I.3.33), et des faits analogues concernant $\mathrm{E}(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, s\rho + \chi)$, que $\mathrm{M}(\mathfrak{S}, s\rho + \chi)$ est holomorphe si $\mathrm{Re}(s) \geqq 0$, sauf si $2\chi = 0$ et $\mathfrak{S} = \mathrm{D}_\chi$, auquel cas il y a un pôle simple en $s = 1$. Pour calculer le résidu, nous remarquons que

(I.3.35) Si $2\chi = 0$, on a

$$\mathrm{M}(\mathrm{D}_\chi, s\rho + \chi) = \xi(1-s)/\xi(1+s) = \xi(s)/\xi(1+s),$$

où l'on a posé $\xi(s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$.

[Pour faire ce calcul, il est plus facile de prendre pour φ_p la fonction caractéristique de $\mathbf{O}_p \times \mathbf{O}_p$ que celle fournie par (I.3.23).] On déduit de (I.3.35) le résultat suivant :

(I.3.36) *Le résidu en* $s = 1$ *de* $\mathrm{M}(\mathrm{D}_\chi, s\rho + \chi)$ *est égal à* $\frac{\pi}{\zeta(2)} = \frac{6}{\pi}$.

Posons

(I.3.37) $\alpha =$ volume de $G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}}$,

Ceci permet d'énoncer :

(I.3.38) *Le résidu en* $s = 1$ *de* $M(D_\chi, s\rho + \chi)$ *est égal à* $\frac{2}{\alpha}$.

Une proposition équivalente est :

(I.3.39) $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Il est facile de prouver (I.3.39) par un calcul direct. On peut, par exemple, se ramener au calcul du volume d'un domaine fondamental pour SL (2, **Z**) opérant dans le demi-plan de Poincaré, mais cette méthode ne s'applique qu'au cas où le corps de base est **Q**. Dans le « cas général », on peut prouver (I.3.38) directement. Pour cela on remarque que (I.3.38) est équivalent à (I.4.5) ci-dessous, et que l'on peut prouver (I.4.5) sans utiliser (I.3.38); on utilise alors la décomposition spectrale, de l'opérateur essentiellement self-adjoint $T(\Omega)$ (*cf.* [10]).

On peut également démontrer (I.3.38) en utilisant le fait que le nombre de Tamagawa de SL (2) est égal à 1. On a, en effet,

$$\operatorname*{Res}_{s=1} M(D_\chi, s\rho + \chi) = \operatorname*{Res}_{s=1} E(1, D_\chi, s\rho + \chi),$$

et d'après (I.3.36), il suffit d'étudier le cas où $2\chi = 0$. D'après (I.3.21), le résidu cherché vaut $\frac{\hat{\varphi}(0)}{L_\varphi(\rho)}$ où $\varphi = \prod \varphi_p$, où $\varphi_\infty(u) = e^{-\pi \|u\|^2}$, et où φ_p est la fonction caractéristique du réseau des entiers si $p \neq \infty$; en particulier $\hat{\varphi}(0) = 1$. Donc

$$\operatorname*{Res}_{s=1} M(D_\chi, s\rho + \chi) = \frac{1}{\beta},$$

avec

$$\beta = \int_{\mathbf{A}^*} \varphi(t e_1) \, |t|^2 \, d^* t = \int_{SL(2,\mathbf{A})/U_{\mathbf{A}}} \varphi(g e_1) \, dg,$$

où dg est la mesure de Haar qui donne la masse 1 au sous-groupe ouvert compact $\tilde{K} \cap SL(2, \mathbf{A})$. Par ailleurs, on sait (*cf.* [13], p. 12) que

$$1 = \hat{\varphi}(0) = \int_{SL(2,\mathbf{A})/U_{\mathbf{A}}} \varphi(g e_1) \, d_\tau g,$$

où $d_\tau g$ est la mesure de Tamagawa sur SL (2, **A**).

Donc

$$\int_{\mathrm{SL}(2,\mathbf{A})/\mathrm{SL}(2,\mathbf{Q})} dg = \beta \int_{\mathrm{SL}(2,\mathbf{A})/\mathrm{SL}(2,\mathbf{Q})} d_\tau g = \beta.$$

Il convient donc de comparer α et β. Pour cela nous introduisons le groupe $G'_{\mathbf{A}}$ qui est l'image de SL $(2, \mathbf{A})$ dans $G_{\mathbf{A}} = \mathrm{PL}\,(2, \mathbf{A})$. On voit facilement que $G_{\mathbf{A}}/G'_{\mathbf{A}} \simeq \mathbf{A}^\star/\mathbf{A}^{\star 2}$ est isomorphe à $\mathbf{Q}^\star/\mathbf{Q}^{\star 2} \times \mathrm{R}$, où R est un groupe compact, et que $G'_{\mathbf{A}} = \mathrm{SL}\,(2, \mathbf{A})/\mathrm{B}_{\mathbf{A}}$ où B est le groupe des racines carrées de l'unité. Les mesures sur $G_{\mathbf{A}}$ et SL $(2, \mathbf{A})$ sont déjà fixées; on choisit une mesure de Haar arbitraire sur $G'_{\mathbf{A}}$, ceci fixe des mesures db et dr sur $\mathrm{B}_{\mathbf{A}}$ et R dont les masses totales seront notées b et r.

Il nous faut calculer α/β. Pour cela on introduit la fonction caractéristique J de l'ensemble des $\mathbf{x} \in \mathrm{GL}\,(2, \mathbf{A})$ tels que $\det \mathbf{x} \in \mathbf{O}^\star\,(\mathbf{A}^\star)^2$. Remarquons que si μ est un rationnel tel que $\mu \in \mathbf{O}^\star\,(\mathrm{A}^\star)^2$, alors $\mu \in (\mathbf{Q}^\star)^2$ et il est alors clair que

$$\alpha = \int_{G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}}} \sum_{G_{\mathbf{Q}}/G'_{\mathbf{Q}}} \mathrm{J}\,(\mathbf{x}\gamma)\,d\mathbf{x} = \int_{G_{\mathbf{A}}/G'_{\mathbf{Q}}} \mathrm{J}\,(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$$

$$= \int_{G_{\mathbf{A}}/G'_{\mathbf{A}}} \int_{G'_{\mathbf{A}}/G'_{\mathbf{Q}}} \mathrm{J}\,(\mathbf{xy})\,d\mathbf{x}\,d\mathbf{y} = r \int_{G'_{\mathbf{A}}/G'_{\mathbf{Q}}} \mathrm{J}\,(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}.$$

Posons $G'' = \mathrm{SL}\,(2)$. Comme $\mathrm{B}_{\mathbf{Q}}$ a deux éléments, le volume de $\mathrm{B}_{\mathbf{A}}/\mathrm{B}_{\mathbf{Q}}$ est $\frac{b}{2}$, et donc

$$\alpha = r\left(\frac{2}{b}\right) \int_{G''_{\mathbf{A}}/G''_{\mathbf{Q}}} \mathrm{J}\,(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \frac{2r}{b}\beta.$$

Pour calculer $\frac{r}{b}$ il suffit de remarquer que si l'on note K' le sous-groupe $\mathrm{K} \cap G'_{\mathbf{A}}$ de $G'_{\mathbf{A}}$, et K'' le sous-groupe $\tilde{\mathrm{K}} \cap \mathrm{SL}\,(2, \mathbf{A})$, on a

$$\mathrm{K}' = \mathrm{K}''/\mathrm{B}_{\mathbf{A}}, \qquad \mathrm{K}/\mathrm{K}' \simeq \mathrm{R}.$$

Vu le choix des mesures de Haar, on a

$$\frac{r}{b} = \frac{\text{volume K}}{\text{volume K}''} = 1,$$

donc $\alpha = 2\beta$, ce qui démontre (I.3.38).

Le résidu en $s = 1$ de $\mathrm{E}(\mathbf{x}, \mathrm{D}_\chi, s\rho + \chi)$ est proportionnel à $\mathrm{D}_\chi(\mathbf{x})$ d'après (I.3.17), il résulte immédiatement de (I.3.33) et (I.3.38) que ce résidu est $\frac{2}{\alpha}\,\mathrm{D}_\chi(\mathbf{x})$.

Comportement asymptotique de M et de M'. — Nous aurons besoin d'informations sur le comportement de $M(\mathfrak{I}, s\rho+\chi)$ dans les bandes $0 \leqq \mathrm{Re}(s) \leqq d$. Pour cela, on examine les différents facteurs qui interviennent dans (I.3.29). A l'infini dans cette bande, la fonction $\frac{1}{L(-2\chi, s+1)}$ est majorée en module par un polynôme en $\log|\mathrm{Im}\, s|$ (*cf.* [3], p. 71), et la fonction $L(2\chi, -s+1)$ par un polynôme en $\mathrm{Im}(s)$ (*cf.* [3], p. 50). La formule de Stirling (*cf.* [3], p. 79) montre qu'il en est de même de

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right)}.$$

Le facteur $R_\infty(\mathfrak{I}_\infty, \lambda)$ est une fraction rationnelle de degré 0, donc bornée à l'infini; enfin les facteurs $R_p(\mathfrak{I}_p, \lambda)$ sont bornés si $p \neq \infty$ puisque

$$\left|\int_{\mathbf{Q}_p^*} \hat{\varphi}_p(te_1)\langle -2\lambda+2\rho, t\rangle d^*t\right| \leqq \int_{\mathbf{Q}} |\hat{\varphi}_p(te_1)|\langle -2\rho(\mathrm{Re}(s)-1), t\rangle d^*t;$$

de sorte que l'on a le résultat suivant :

(I.3.40) $|M(\mathfrak{I}, s\rho+\chi)|$ *est majoré à l'infini dans une bande* $0 \leqq \mathrm{Re}(s) \leqq d$ *par un polynôme en* $|\mathrm{Im}(s)|$.

Nous démontrerons en (I.5.12) qu'en fait $M(\mathfrak{I}, s\rho+\chi)$ est borné à l'infini dans une telle bande verticale.

Nous allons maintenant majorer, lorsque $\mathrm{Re}(s) = 0$, l'expression

$$\frac{d}{ds} M(\mathfrak{I}, s\rho+\chi) = M(\mathfrak{I}, s\rho+\chi)\frac{m'(s\rho+\chi)}{m(s\rho+\chi)} + m(s\rho+\chi)\sum_p R'_p(\mathfrak{I}_p, s\rho+\chi)\prod_{q\neq p} R_q(\mathfrak{I}_q, s\rho+\chi).$$

Sur l'axe $\mathrm{Re}(s) = 0$, $M(\mathfrak{I}, s\rho+\chi)$ est une isométrie de $V(\mathfrak{I}, \chi)$ dans $V(\mathfrak{I}, -\chi)$ d'après (I.3.31) et (I.3.32); on a, de plus, $|m(\lambda)| = 1$, comme il est clair sur la définition de $m(\lambda)$; enfin les facteurs R_p, qui sont presque tous égaux à 1, sont bornés sur cet axe. Il suffit d'étudier $\frac{m'}{m}$ et R'_p. Or d'après ([3], p. 71 et 78), les dérivées logarithmiques $\frac{L'}{L}(-2\chi, s+1)$ et $\frac{\Gamma'}{\Gamma}(s+1)$ sont majorées en valeur absolue par des polynômes en $\log|\mathrm{Im}(s)|$. R_∞ étant une fraction rationnelle de degré 0; sa dérivée tend vers 0 à l'infini. Enfin, en raisonnant comme ci-dessus pour prouver (I.3.40), on voit facilement que lorsque $p \neq \infty$ la dérivée R'_p est bornée. En résumé, on a prouvé

$$\text{(I.3.41)} \qquad M'(\mathfrak{S}, s\rho + \chi) = \frac{d}{ds} M(\mathfrak{S}, s\rho + \chi)$$

est majoré en valeur absolue sur l'axe imaginaire pur par un polynôme en $\log |\operatorname{Im}(s)|$.

Pour finir, rappelons un certain nombre de faits démontrés dans [13]. Quel que soit $\mathbf{x} \in G_{\mathbf{A}}$, les singularités de $E(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \lambda)$ sont au plus celles de $M(\mathfrak{S}, \lambda)$. Si λ n'est pas un point singulier de $M(\ ,\ )$, la fonction $E(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \lambda)$ est une forme automorphe de type $(\mathfrak{S}, s^2 - 1)$ (avec $\lambda = s\rho + \chi$). *Si f est une forme automorphe parabolique, la fonction $x \mapsto E(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \lambda) f(\mathbf{x})$ est à décroissance rapide sur* $G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}}$ (puisque le premier facteur est à croissance lente et f à décroissance rapide), *et l'on a*

$$\text{(I.3.42)} \qquad \int_{G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}}} E(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \lambda) f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0.$$

Plus généralement, il résulte de (I.3.19) et de (I.3.21) que *si f est une fonction mesurable sur* $G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}}$, *à valeurs dans* $\mathbf{C}$ *ou dans* $\operatorname{End}(V)$, *et à décroissance rapide, l'intégrale*

$$\text{(I.3.43)} \qquad \int_{G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}}} f(\mathbf{x}) E(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \lambda)\, d\mathbf{x}$$

définit une fonction méromorphe de λ.

Si f est une fonction numérique, on posera en particulier :

$$\text{(I.3.44)} \qquad \hat{f}(\mathfrak{S}, \lambda) = \int_{G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}}} f(\mathbf{x}) E(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \bar{\lambda})^* d\mathbf{x}.$$

Alors $\hat{f}(\mathfrak{S}, s\rho + \chi)$ est holomorphe pour $\operatorname{Re}(s) \geqq 0$, sauf si $2\chi = 0$ et $\mathfrak{S} = D_\chi$, auquel cas il y a un pôle simple en $s = 1$ avec un résidu égal à $\left(\frac{2}{\alpha}\right)(f, D_\chi)$. Enfin (I.3.30) entraîne l'équation fonctionnelle

$$\text{(I.3.45)} \qquad \hat{f}(\mathfrak{S}, \lambda) = M(\mathfrak{S}, \lambda) \hat{f}(\mathfrak{S}, -\lambda).$$

Nous verrons en (I.6) d'autres propriétés des fonctions $\hat{f}(\mathfrak{S}, \lambda)$. Les fonctions $\hat{f}(\mathfrak{S}, \lambda)$ sont appelées dans [13] les « transformées de Laplace » de f.

4. Décomposition spectrale.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(G_{\mathbf{A}}/H_{\mathbf{Q}}U_{\mathbf{A}})$. Posons

$$\theta_\varphi(\mathbf{x}) = \sum_{\gamma \in G_{\mathbf{Q}}/P_{\mathbf{Q}}} \varphi(\mathbf{x}\gamma)\,; \tag{I.4.1}$$

$$\hat{\varphi}(\mathfrak{s}, \lambda) = \int_{H_{\mathbf{A}}/H_{\mathbf{Q}}} \int_{K} \mathfrak{s}(\mathbf{k})^{-1} \varphi(\mathbf{kh}) \langle -\lambda + \rho, \mathbf{h} \rangle \, d\mathbf{h}\, d\mathbf{k}. \tag{I.4.2}$$

Notons L^2_1 l'orthogonal de L^2_0 dans L^2. Les θ_φ sont des fonctions à support compact sur $G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}}$ dont l'ensemble est dense dans L^2_1. La transformée de Laplace de θ_φ est

$$\hat{\theta}_\varphi(\mathfrak{s}, \lambda) = \hat{\varphi}(\mathfrak{s}, \lambda) + M(\mathfrak{s}, \lambda)\, \hat{\varphi}(\mathfrak{s}, -\lambda). \tag{I.4.3}$$

Compte tenu de (I.3.40) il est clair qu'elle décroît rapidement à l'infini dans les bandes verticales des demi-plans $s\rho + \chi$, avec $\mathrm{Re}(s) \geq 0$, et le produit scalaire dans L^2 de θ_φ et θ_ψ [avec φ et ψ dans et $\mathcal{D}(G_{\mathbf{A}}/H_{\mathbf{Q}}U_{\mathbf{A}})$ K-finies] est donné par

$$(\theta_\varphi, \theta_\psi) = \frac{1}{\alpha} \sum_{2\chi = 0} (\theta_\varphi, D_\chi)\,(D_\chi, \theta_\psi) + \frac{1}{2} \sum_{\mathfrak{s}} \int_{\Lambda^u} \mathrm{Sp}_{\mathfrak{s}}[\hat{\theta}_\varphi(\mathfrak{s}, \lambda)\, \theta_\psi(\mathfrak{s}, \lambda)^*]\, d\lambda. \tag{I.4.4}$$

La seconde somme est prise sur l'ensemble des classes de représentations unitaires irréductibles de K. On rappelle que $\mathrm{Sp}_{\mathfrak{s}}(\ ) = \dim(\mathfrak{s})\ \mathrm{tr}(\ )$. Remarquez que puisque φ et ψ sont supposées K-finies, les deux sommes qui figurent dans (I.4.4) sont finies. La démonstration de (I.4.4) est faite dans ([13], § 7).

Il est clair que les sous-espaces $\mathbf{C}\, D_\chi$ (avec $2\chi = 0$) de L^2 sont mutuellement orthogonaux et stables sous $G_{\mathbf{A}}$. Notons L^2_c le sous-espace de L^2_1 orthogonal aux D_χ, et P_c la projection orthogonale sur L^2_c : On déduit immédiatement de (I.4.4) la formule

$$(P_c\theta_\varphi, \theta_\psi) = (P_c\theta_\varphi, P_c\theta_\psi) = \frac{1}{2} \sum_{\mathfrak{s}} \int_{\Lambda^u} \mathrm{Sp}_{\mathfrak{s}}[\theta_\varphi(\mathfrak{s}, \lambda)\, \hat{\theta}_\psi(\mathfrak{s}, \lambda)^*]\, d\lambda. \tag{I.4.5}$$

On déduit de (I.4.5) que L^2_c est somme continue de représentations de $G_{\mathbf{A}}$ induites par les caractères de $P_{\mathbf{A}}$ triviaux sur $H_{\mathbf{Q}}U_{\mathbf{A}}$ (*cf.* [13]). Compte tenu de (I.2.5), on obtient le résultat suivant :

(I.4.6) *Le sous-espace discret* L^2_d *de* L^2 *est somme directe de* L^2_0 *et des sous-espaces* $\mathbf{C}\, D_\chi$ (avec $2\chi = 0$).

Soit F une fonction intégrable sur $G_{\mathbf{A}}$, régulière K-finie à gauche. On voit facilement que $T(F)\,D_\chi = (F, D_\chi)\,D_\chi$ est nul sauf au plus pour un nombre fini de valeurs de χ, de sorte qu'on déduit de (I.4.6) et (I.2.7) le résultat suivant :

(I.4.7) *Soit* F *une fonction* K-*finie à gauche régulière sur* $G_{\mathbf{A}}$. *On suppose que pour tout* $X \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ *la fonction* $X \star F$ *est intégrable. Alors l'opérateur* $T_d(F)$ *est à trace.*

On déduit de la décomposition en somme continue de L^2_c le résultat suivant :

(I.4.8) *Soit f un élément de* L^2 *qui est valeur propre de* Ω. *Alors* $f \in L^2_d$.

5. Les séries E″.

Les séries E''_c et E'''_c. — Elles ont été introduites par Selberg [21] pour réaliser le prolongement analytique des séries d'Eisenstein dans les groupes Fuchsiens (*cf.* [15] et [19]). On fixe un nombre réel c avec $0 < c < 1$. On pose

$$\text{(I.5.1)} \qquad L''_c(\mathbf{x}, \mathfrak{I}, \lambda) = \begin{cases} L(\mathbf{x}, \mathfrak{I}, \lambda) & \text{si } r(\mathbf{x}) \geqq c, \\ -L(\mathbf{x}, \mathfrak{I}, -\lambda)\,M(\mathfrak{I}, \lambda) & \text{si } r(\mathbf{x}) < c; \end{cases}$$

$$\text{(I.5.2)} \quad L'''_c(\mathbf{x}, \mathfrak{I}, \lambda) = L(\mathbf{x}, \mathfrak{I}, \lambda) - L''_c(\mathbf{x}, \mathfrak{I}, \lambda) = \begin{cases} 0 & \text{si } r(\mathbf{x}) \geqq c, \\ E^0(\mathbf{x}, \mathfrak{I}, \lambda) & \text{si } r(\mathbf{x}) < c. \end{cases}$$

Il résulte de (I.1.7) que pour tout $d > 0$, l'ensemble des $\gamma \in G_{\mathbf{Q}}$ tels que

$$\mathfrak{S}(d)\,\gamma \not\equiv \mathfrak{S}(c)$$

est fini modulo $P_{\mathbf{Q}}$. Par suite :

(I.5.3) *La série*

$$E'''_c(\mathbf{x}, \mathfrak{I}, \lambda) = \sum_{\gamma \in G_{\mathbf{Q}}/P_{\mathbf{Q}}} L'''_c(\mathbf{x}\gamma, \mathfrak{I}, \lambda),$$

se réduit à une somme portant sur un ensemble fini indépendant de $\mathbf{x}$ *lorsque* $\mathbf{x}$ *reste dans un ensemble* $\mathfrak{S}(d)$. *La série ci-dessus définit une fonction méromorphe de* λ *dont les singularités sont au plus celles de* $M(\mathfrak{I}, \lambda)$.

D'après (I.1.9), on a

$$\text{(I.5.4)} \qquad E'''_c(\mathbf{x}, \mathfrak{I}, \lambda) = L'''_c(\mathbf{x}, \mathfrak{I}, \lambda) \quad \text{si } r(\mathbf{x}) < 1$$

et, en particulier, on a

$$\text{(I.5.5)} \qquad E'''_c(\mathbf{x}, \mathfrak{I}, \lambda) = E^0(\mathbf{x}, \mathfrak{I}, \lambda) \qquad \text{si } r(\mathbf{x}) < c.$$

On pose

$$E''_c(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \lambda) = E(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \lambda) - E'''_c(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \lambda).$$

Pour chaque $\mathbf{x}$ ceci définit une fonction méromorphe de λ dont les singularités sont au plus celles de $M(\mathfrak{S}, \lambda)$. Si $\lambda = s\rho + \chi$, alors

$$\text{(I.5.6)} \qquad E''_c(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \lambda) = \sum_{G_{\mathbf{Q}}/P_{\mathbf{Q}}} L''_c(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \lambda) \quad \text{si } \operatorname{Re}(s) > 1.$$

Il résulte de (I.5.5) que

$$E''_c(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \lambda) = E(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \lambda) - E^0(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \lambda) \quad \text{si } r(\mathbf{x}) < c.$$

Comme $E(., \mathfrak{S}, \lambda)$ est une forme automorphe, la proposition (I.2.6) montre alors que

(I.5.7) $E''_c(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \lambda)$ *est à décroissance rapide dans* $\mathfrak{G}$ *et, en particulier, est de carré intégrable sur* $G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}}$.

Orthogonalité de E''_c et E'''_c. — Le but de ce qui suit est de calculer la norme de E''_c dans L^2. Soient $\lambda = s\rho + \chi$ et $\mu = z\rho + \xi$ deux points de Λ qui ne sont pas des pôles de $M(\mathfrak{S}, .)$.

(I.5.8) *L'intégrale ci-dessous est absolument convergente et on a*

$$\int_{G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}}} E'''_c(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \mu)^\star E''_c(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \lambda)\, d\mathbf{x} = 0.$$

Démonstration. — La convergence de l'intégrale sera assurée si l'on montre la convergence absolue de

$$\int_{G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}}} \left\{ \sum_{\gamma \in G_{\mathbf{Q}}/P_{\mathbf{Q}}} L'''_c(\mathbf{x}\gamma, \mathfrak{S}, \mu)^\star E''_c(\mathbf{x}\gamma, \mathfrak{S}, \lambda) \right\} d\mathbf{x}$$
$$= \int_{G_{\mathbf{A}}/P_{\mathbf{Q}}} L'''_c(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \mu)^\star E''_c(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \lambda)\, dx.$$

Comme $L'''_c(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \lambda) = 0$ dès que $r(\mathbf{x}) > c$ il suffit d'intégrer pour $r(\mathbf{x}) < c$; or $L'''_c(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \mu)$ est à croissance lente et $E''_c(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \lambda)$ à décroissance rapide lorsque $r(\mathbf{x}) \to 0$ d'après (I.5.7); d'où la convergence. Nous pouvons, de plus, écrire :

$$\int_{G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}}} E'''_c(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \mu)^\star E''_c(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \lambda)\, d\mathbf{x}$$
$$= \int_{G_{\mathbf{A}}/P_{\mathbf{Q}}} L'''_c(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \mu)^\star E''_c(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \lambda)\, d\mathbf{x}$$
$$= \int_{G_{\mathbf{A}}/P_{\mathbf{Q}}U_{\mathbf{A}}} L'''_c(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \mu)^\star E''^{0}_c(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \lambda)\, d\mathbf{x},$$

mais si $r(\mathbf{x}) < c$ on a $\mathrm{E}_c''^{0}(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \lambda) = 0$; la quantité à intégrer est donc toujours nulle et (I.5.8) est démontré.

PRODUIT SCALAIRE DE DEUX SÉRIES E_c''. — Nous allons démontrer que si $\lambda = s\rho + \chi$ et $\mu = z\rho + \xi$ avec $s \neq \pm \bar{z}$, on a

(I.5.9)
$$\begin{aligned}\int_{G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}}} & \mathrm{E}_c''(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \mu)^* \mathrm{E}_c''(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \lambda)\, d\mathbf{x} \\ &= \frac{2\delta(\chi - \xi)}{s + \bar{z}} [c^{-s-\bar{z}} \mathrm{P}(\mathfrak{S}, \chi) - c^{s+\bar{z}} \mathrm{M}(\mathfrak{S}, \mu)^* \mathrm{M}(\mathfrak{S}, \lambda)] \\ &\quad + \frac{2\delta(\chi + \xi)}{s - \bar{z}} [\bar{c}^{s+\bar{z}} \mathrm{M}(\mathfrak{S}, \mu)^* - c^{s-\bar{z}} \mathrm{M}(\mathfrak{S}, \lambda)],\end{aligned}$$

où l'on a posé $\delta(\chi) = 0$ si $\chi \neq 0$ et $\delta(\chi) = 1$ si $\chi = 0$.

Nous montrerons aussi que si $\lambda = s\rho + \chi$ avec $\mathrm{Re}(s) = 0$ et $s \neq 0$, on a

(I.5.10)
$$\begin{aligned}\int_{G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}}} & \mathrm{E}_c''(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \lambda)^* \mathrm{E}_c''(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \lambda)\, d\mathbf{x} \\ &= -4 \log(c)\, \mathrm{P}(\mathfrak{S}, \chi) - 2\mathrm{M}(\mathfrak{S}, \lambda)^* \frac{d}{ds} \mathrm{M}(\mathfrak{S}, \lambda) \\ &\quad + \frac{\delta(2\chi)}{s} [c^{-2s} \mathrm{M}(\mathfrak{S}, \lambda)^* - c^{2s} \mathrm{M}(\mathfrak{S}, \lambda)].\end{aligned}$$

Pour démontrer (I.5.9), on observe d'abord que, d'après (I.5.8), le premier membre de (I.5.9) est égal à

$$(\star) \qquad \int_{G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}}} \mathrm{E}(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \mu)^* \mathrm{E}_c''(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \lambda)\, d\mathbf{x}.$$

Supposons pour le moment que $\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(z) > 1$, et montrons d'abord que

$$(\star\star) \qquad \int_{G_{\mathbf{A}}/P_{\mathbf{Q}}} |\mathrm{E}(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \mu)^* \mathrm{L}_c''(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \lambda)|\, d\mathbf{x} < \infty.$$

En effet, on peut majorer $|\mathrm{L}(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \lambda)|$ par $\mathrm{L}[\mathbf{x}, \mathrm{id}, \mathrm{Re}(s)\rho]$ et donc $|\mathrm{E}(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \mu)|$ par $\mathrm{E}[\mathbf{x}, \mathrm{id}, \mathrm{Re}(z)\rho]$ puisque $\mathrm{Re}(z) > 1$. On est donc amené d'après (I.5.1) à prouver la convergence des intégrales

$$\int_{\substack{G_{\mathbf{A}}/P_{\mathbf{Q}} \\ r(x) < c}} \mathrm{E}[\mathbf{x}, \mathrm{id}, \mathrm{Re}(z)\rho]\, \mathrm{L}[\mathbf{x}, \mathrm{id}, -\mathrm{Re}(s)\rho]\, d\mathbf{x}$$

et

$$\int_{\substack{G_{\mathbf{A}}/P_{\mathbf{Q}} \\ r(\mathbf{x}) > c}} \mathrm{E}[\mathbf{x}, \mathrm{id}, \mathrm{Re}(z)\rho]\, \mathrm{L}[\mathbf{x}, \mathrm{id}, \mathrm{Re}(s)\rho]\, d\mathbf{x}.$$

La première intégrale s'écrit

$$\int_{\substack{G_{\mathbf{A}}/P_{\mathbf{Q}}U_{\mathbf{A}} \\ r(\mathbf{x})<c}} E^0[\mathbf{x}, \mathrm{id}, \mathrm{Re}(z)\,\rho]\, L[\mathbf{x}, \mathrm{id}, -\mathrm{Re}(s)\,\rho]\, d\mathbf{x},$$

ce qui, d'après (I.1.5) et (I.3.33), est égal à

$$\int_{\substack{\mathbf{A}^*/\mathbf{Q}^* \\ |h|^{\frac{1}{2}}<c}} \langle 2\rho, h\rangle [\langle(-\mathrm{Re}(z)-1)\,\rho, h\rangle + \langle(\mathrm{Re}(z)-1)\,\rho, h\rangle \mathrm{M}(\mathrm{id}, \mathrm{Re}(z)\,\rho)]$$

$$\times \langle(\mathrm{Re}(s)-1)\,\rho, h\rangle\, dh$$

$$= \int_0^{c^2} \left[t^{\frac{1}{2}\mathrm{Re}(s-z)} + t^{\frac{1}{2}\mathrm{Re}(s+z)} \mathrm{M}(\mathrm{id}, \mathrm{Re}(z)\,\rho)\right] d^*t$$

Cette intégrale converge puisque $\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(z) > 1 > 0$. On voit de même que la seconde intégrale converge.

Il résulte de ($\star\star$) et de calculs bien connus que ($\star$) est égal pour $\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(z) > 1$ à l'intégrale

$$\int_{G_{\mathbf{A}}/P\ U_{\mathbf{A}}} E^0(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \mu)\, L''_c(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \lambda)\, d\mathbf{x}.$$

La fonction à intégrer étant K-invariante à gauche, (I.1.5) montre que ceci est égal à

$$\int_{H_{\mathbf{A}}/H_{\mathbf{Q}}} \langle 2\rho, \mathbf{h}\rangle E^0(\mathbf{h}, \mathfrak{S}, \mu)^* L''_c(\mathbf{h}, \mathfrak{S}, \lambda)\, d\mathbf{h}.$$

D'après (I.5.1) et (I.3.33), ceci vaut

$$\int_{\substack{\mathbf{A}^*/\mathbf{Q}^* \\ |h|^{\frac{1}{2}}<c}} \langle 2\rho, \mathbf{h}\rangle [\langle -\bar{\mu}-\rho, \mathbf{h}\rangle \mathrm{P}(\mathfrak{S}, \mu) + \langle \bar{\mu}-\rho, \mathbf{h}\rangle \mathrm{M}(\mathfrak{S}, \mu)]^* \langle \lambda-\rho, \mathbf{h}\rangle \mathrm{M}(\mathfrak{S}, \lambda)\, d\mathbf{h}$$

$$+ \int_{\substack{\mathbf{A}^*/\mathbf{Q}^* \\ |h|^{\frac{1}{2}}>c}} \langle 2\rho, \mathbf{h}\rangle [\langle -\bar{\mu}-\rho, \mathbf{h}\rangle \mathrm{P}(\mathfrak{S}, \mu) + \langle \bar{\mu}-\rho, \mathbf{h}\rangle \mathrm{M}(\mathfrak{S}, \mu)^*] \langle -\lambda-\rho, \mathbf{h}\rangle \mathrm{P}(\mathfrak{S}, \lambda)\, d\mathbf{h}.$$

On en déduit aussitôt (I.5.9) lorsque $\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(z) > 1$.

Si maintenant nous remarquons que, d'après (I.3.32), on a

$$\mathrm{M}(\mathfrak{S}, \bar{\lambda}) = \mathrm{M}(\mathfrak{S}, \lambda)^*,$$

il est clair que le second membre de (I.5.9) est une fonction méromorphe de s et $\bar{z}$. D'autre part, d'après (I.3.43), l'intégrale ($\star$) ci-dessus est une fonction méromorphe de $\bar{\mu}$; le premier membre de (I.5.9) est donc une fonction méromorphe de $\bar{\mu}$. Il en est évidemment de même en λ.

Le principe du prolongement analytique établit alors (I.5.9) en général. Lorsque $s = +\bar{z}$ le second membre de la formule n'a pas de sens, mais en fixant une des variables, z par exemple, on peut passer à la limite en s, les deux membres étant méromorphes; on obtient ainsi la formule (I.5.10) lorsque $\mathrm{Re}(s) = \mathrm{Re}(z) = 0$, et $s = z \neq 0$.

En faisant $\lambda = \mu = s\rho + \chi$, et $s = \sigma + i\tau$ avec $\sigma > 0$ et $\tau \neq 0$ dans (I.5.9), on trouve

$$
\begin{aligned}
\text{(I.5.11)}\quad & \int_{G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}}} \mathrm{tr}[E''_c(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \lambda)^* E''_c(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \lambda)]\, d\mathbf{x} \\
&= \| E''_c(., \mathfrak{S}, \lambda) \|_2^2 = \sigma^{-1} \{ c^{-2\sigma} \dim V(\mathfrak{S}, \lambda) - c^{2\sigma} \mathrm{tr}[M(\mathfrak{S}, \lambda)^* M(\mathfrak{S}, \lambda)] \} \\
&\quad + (i\tau)^{-1} \delta(2\chi) \{ c^{-2i\tau} \mathrm{tr}[M(\mathfrak{S}, \lambda)^*] - c^{2i\tau} \mathrm{tr}[M(\mathfrak{S}, \lambda)] \}.
\end{aligned}
$$

En écrivant que cette expression est positive, on en déduit comme dans ([15], chap. IV, § 8) que

(I.5.12) $\| M(\mathfrak{S}, \lambda) \|$ *est borné à l'infini dans les bandes verticales,* $0 \leqq \mathrm{Re}(s) \leqq d$.

On déduit alors de (I.5.11) et (I.5.12) que

(I.5.13) $\| E''_c(., \mathfrak{S}, \lambda) \|_2$ *est borné à l'infini dans les bandes verticales,* $0 < d' \leqq \mathrm{Re}(s) \leqq d$.

Nous aurons surtout besoin d'une majoration sur l'axe imaginaire pur. En utilisant (I.5.10), (I.3.41) et (I.5.12) on trouve

(I.5.14) *Lorsque s est imaginaire pur,* $\| E''_c(., \mathfrak{S}, s\rho + \chi) \|_2$ *est majoré par un polynôme en* $\log|s|$.

Quelques inégalités. — Nous aurons besoin des inégalités suivantes pour démontrer la convergence de certaines intégrales.

Tout d'abord, rappelons que $M(\mathfrak{S}, \lambda)$ étant borné sur l'axe imaginaire pur, on a

$$| L'''_c(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \lambda) | \prec r(\mathbf{x})^{-1}.$$

On déduit alors de (I.5.3) que pour $\mathbf{x} \in \mathfrak{G}$ et $\lambda \in \Lambda^u$,

$$| E'''_c(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \lambda) | \prec r(\mathbf{x})^{-1}.$$

D'après (I.2.2), ceci montre que si $F' \in \mathcal{D}^n(G_{\mathbf{A}})$, on a

$$| F' \star E'''_c(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \lambda) - F' \star E'''^{\,0}_c(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \lambda) | \prec r(\mathbf{x})^{2n-3}$$

pour $\mathbf{x} \in \mathfrak{S}$ et $\lambda \in \Lambda^u$. Par ailleurs, et supposant toujours $F' \in \mathcal{D}^n(G_{\mathbf{A}})$, le lemme (I.2.3) montre que

$$|F' \star E''_c(\mathbf{x}, \mathfrak{I}, \lambda) - F' \star E''^{0}_c(\mathbf{x}, \mathfrak{I}, \lambda)| \prec r(\mathbf{x})^{2n-2} \| E''_c(., \mathfrak{I}, \lambda) \|_2$$

pour $\mathbf{x} \in \mathfrak{S}$ et $\lambda \in \Lambda^u$. On a donc *a fortiori* démontré que

$$|F' \star E(\mathbf{x}, \mathfrak{I}, \lambda) - F' \star E^0(\mathbf{x}, \mathfrak{I}, \lambda)| \prec r(\mathbf{x})^{2n-3}(1 + \| E''_c(., \mathfrak{I}, \lambda) \|_2)$$

(puisque $E = E''_c + E'''_c$) pour $\mathbf{x} \in \mathfrak{S}$ et $\lambda \in \Lambda^u$.

Nous allons en déduire que

(I.5.15) *Soient n et n' deux entiers $\geqq 2$, pour toute fonction* $F \in \mathcal{D}^{n+2n'}(G_{\mathbf{A}})$ on a

$$|F \star E(\mathbf{x}, \mathfrak{I}, s\rho + \chi) - F \star E^0(\mathbf{x}, \mathfrak{I}, s\rho + \chi)| \prec r(\mathbf{x})^{2n-3}(1 + |s|)^{1-2n'}$$

pour s imaginaire pur et $\mathbf{x} \in \mathfrak{S}$.

Compte tenu de (I.5.14), l'inégalité (I.5.15) résulte de ce que

$$\Omega \star E(\mathbf{x}, \mathfrak{I}, \lambda) = (s^2 - 1) E(\mathbf{x}, \mathfrak{I}, \lambda)$$

et de l'inégalité précédant (I.5.15) appliquée à la fonction $F' = \Omega^{n'} \star F$.

(I.5.16) *Si* $F \in \mathcal{D}^{2(n+1)}(G_{\mathbf{A}})$ *avec* $n \geqq 2$, on a

$$|F \star E(\mathbf{x}, \mathfrak{I}, s\rho + \chi)| \prec r(\mathbf{x})^{-1}(1 + |s|)^{1-2n}$$

pour $\mathbf{x} \in \mathfrak{S}$ *et s imaginaire pur.*

Posons $F' = \Omega^n \star F$; d'après (I.5.15), il suffit de prouver que

$$r(\mathbf{x}) |F' \star E^0(\mathbf{x}, \mathfrak{I}, s\rho + \chi)|$$

est borné pour $\mathbf{x} \in \mathfrak{S}$ et s imaginaire pur; ceci résulte immédiatement du fait que l'on a

$$|E^0(\mathbf{x}, \mathfrak{I}, s\rho + \chi)| \prec r(\mathbf{x})^{-1}$$

pour $\mathbf{x} \in \mathfrak{S}$ et s imaginaire pur, et de ce que F' est à support compact.

Soit maintenant F une fonction continue sur $G_{\mathbf{A}}$, K-finie à droite et à gauche, et à support compact; posons

$$\text{(I.5.17)} \quad \hat{F}(\mathfrak{I}, \lambda, \mathfrak{I}') = \int_K \int_K \int_{H_{\mathbf{A}}^{\star}} \int_{U_{\mathbf{A}}} F(\mathbf{khuk}') \mathfrak{I}(\mathbf{k})^* \otimes \mathfrak{I}'(\mathbf{k}')^* \langle \lambda + \rho, \mathbf{h} \rangle \, d\mathbf{k} \, d\mathbf{k}' \, d\mathbf{h} \, d\mathbf{u}.$$

Il est clair que l'on a

$$\hat{\mathrm{F}}(\mathfrak{S}, \lambda, \mathfrak{S}') = \int_{\mathrm{K}}\int_{\mathrm{G}_{\mathbf{A}}} \mathrm{F}(\mathbf{x}\mathbf{k}^{-1})\,\mathrm{L}(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \bar{\lambda})^{\star} \otimes \mathfrak{S}'(\mathbf{k})\, d\mathbf{k}\, d\mathbf{x}; \tag{I.5.18}$$

$$\hat{\mathrm{F}}(\mathfrak{S}, \lambda, \mathfrak{S}') = \int_{\mathrm{K}}\int_{\mathrm{G}_{\mathbf{A}}} \mathrm{F}(\mathbf{k}^{-1}\mathbf{x})\,\mathfrak{S}(\mathbf{k}) \otimes \mathrm{L}(\mathbf{x}, \mathfrak{S}', -\lambda)\, d\mathbf{k}\, d\mathbf{x}. \tag{I.5.19}$$

On déduit de (I.5.18) en utilisant le théorème de Peter-Weyl, d'abord pour $\lambda = s\rho + \chi$ avec $\mathrm{Re}(s) > 1$, puis pour tout λ par prolongement analytique la formule suivante :

$$\check{\mathrm{F}} \star \mathrm{E}(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \bar{\lambda})^{\star} = \sum_{\mathfrak{S}'} \mathrm{Sp}_{\mathfrak{S}'}[\hat{\mathrm{F}}(\mathfrak{S}, \lambda, \mathfrak{S}')\,\mathrm{E}(\mathbf{x}, \mathfrak{S}', \bar{\lambda})^{\star}] \qquad \text{où} \quad \check{\mathrm{F}}(\mathbf{x}) = \mathrm{F}(\mathbf{x}^{-1}). \tag{I.5.20}$$

De même, on a

$$\mathrm{F} \star \mathrm{E}(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, -\lambda) = \sum_{\mathfrak{S}'} \mathrm{Sp}_{\mathfrak{S}'}[\hat{\mathrm{F}}(\mathfrak{S}', \lambda, \mathfrak{S})\,\mathrm{E}(\mathbf{x}, \mathfrak{S}', -\lambda)]. \tag{I.5.21}$$

Posons

$$\mathrm{H}_{\mathrm{F}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \lambda) = \sum_{\mathfrak{S}} \sum_{\mathfrak{S}'} \mathrm{Sp}_{\mathfrak{S} \otimes \mathfrak{S}'}[\hat{\mathrm{F}}(\mathfrak{S}, \lambda, \mathfrak{S}')\,\mathrm{E}(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, -\lambda) \otimes \mathrm{E}(\mathbf{y}, \mathfrak{S}', \lambda)^{\star}]. \tag{I.5.22}$$

Supposons que $\mathrm{F} = \mathrm{F}' \star \mathrm{F}''$, où F' et F'' sont des fonctions K-finies continues à support compact sur $\mathrm{G}_{\mathbf{A}}$. En vertu de (I.5.20), de (I.5.21) et du théorème de Peter-Weyl, on a

$$\mathrm{H}_{\mathrm{F}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \lambda) = \sum_{\mathfrak{S}} \mathrm{Sp}_{\mathfrak{S}}[\mathrm{F}'' \star \mathrm{E}(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, -\lambda) . \check{\mathrm{F}}' \star \mathrm{E}(\mathbf{y}, \mathfrak{S}, \bar{\lambda})^{\star}]. \tag{I.5.23}$$

(I.5.24) *Soit n un entier. Il existe un entier n' tel que pour toute* $\mathrm{F} \in \mathcal{D}^{n'}(\mathrm{G}_{\mathbf{A}})$, K-*finie à droite et à gauche, pour* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathfrak{G}$ *et s imaginaire pur, on ait*

$$|\mathrm{H}_{\mathrm{F}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s\rho + \chi)| \prec r(\mathbf{x})^{-1} r(\mathbf{y})^{-1} (|s| + 1)^{-n}.$$

Démonstration. — Compte tenu de (I.1.11), il suffit de voir qu'il existe n'' tel que cette inégalité soit vérifiée pour les fonctions de la forme $\mathrm{F} = \mathrm{F}' \star \mathrm{F}''$, avec F' et $\mathrm{F}'' \in \mathcal{D}^{n''}(\mathrm{G}_{\mathbf{A}})$.

Ceci résulte immédiatement de (I.5.23) et de (I.5.16).

6. La projection sur le spectre continu.

Soit $f \in \mathcal{D}(\mathrm{G}_{\mathbf{A}}/\mathrm{G}_{\mathbf{Q}})$. La transformée de Laplace $\hat{f}(\mathfrak{S}, \lambda)$ de f a été définie en (I.3.44).

(I.6.1) $\hat{f}(\mathfrak{S}, \lambda)$ *est à décroissance rapide sur l'axe imaginaire pur.*

Démonstration. — Soit d'abord g une fonction continue à support compact sur $G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}}$. On a

$$\left|\int_{G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}}} g(\mathbf{x})\, E'''_c(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \lambda)\, d\mathbf{x}\right| \prec 1,$$

pour s imaginaire pur; comme g est à support compact, il suffit en effet, d'après (I.5.3), de remarquer que la fonction $\lambda \mapsto L'''_c(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \lambda)$ est bornée sur l'axe imaginaire pur.

D'autre part, l'inégalité de Schwarz montre que

$$\left|\int_{G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}}} g(\mathbf{x})\, E''_c(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \lambda)\, d\mathbf{x}\right| \prec \| E''_c(.\,, \mathfrak{S}, \lambda)\|_2.$$

On a donc au total d'après (I.5.14), pour $\lambda = s\rho + \chi$,

$$\left|\int_{G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}}} g(\mathbf{x})\, E(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \lambda)\, d\mathbf{x}\right| \prec (1 + |s|).$$

En choisissant $g = \Omega^n \star f$, la proposition (I.6.1) résulte de ce qui précède et du fait que

$$(\Omega^n \star f)^\wedge(\mathfrak{S}, \lambda) = (s^2 - 1)^n \hat{f}(\mathfrak{S}, \lambda).$$

Nous supposons maintenant que f est K-finie à gauche. On a alors $\hat{f}(\mathfrak{S}, s\rho + \chi) = 0$, sauf pour un nombre fini de valeurs de $\mathfrak{S}$ et de χ.

(I.6.2) *Lorsque* $\mathbf{x}$ *reste dans un compact fixe de* $G_{\mathbf{A}}$ *l'intégrale*

$$\int_{\Lambda^u} \sum_{\mathfrak{S}} \mathrm{Sp}_{\mathfrak{S}}[\hat{f}(\mathfrak{S}, \lambda)\, E(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, -\lambda)]\, d\lambda$$

est uniformément convergente.

Démonstration. — D'après (I.1.11), il suffit de le prouver pour des fonctions de la forme $f = F \star g$, où $g \in \mathcal{D}(G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}})$ est K-finie à gauche et où $F \in \mathcal{D}^n(G_{\mathbf{A}})$ pour un entier n quelconque choisi à l'avance, est K-finie à droite et à gauche. On tire tout de suite de (I.3.39) que

$$\hat{f}(\mathfrak{S}, \lambda) = \int_{G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}}} g(\mathbf{y})\, \check{F} \star E(y, \mathfrak{S}, \bar{\lambda})^* \, d\mathbf{y}.$$

Il résulte alors de (I.5.20) et de (I.5.22) que

$$\sum_{\mathfrak{S}} \mathrm{Sp}_{\mathfrak{S}}[\hat{f}(\mathfrak{S}, \lambda)\, E(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, -\lambda)] = \int_{G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}}} H_F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \lambda)\, g(\mathbf{y})\, d\mathbf{y};$$

notre assertion est donc une conséquence de (I.5.24).

Le résultat précédent nous permet de définir un opérateur P sur l'espace des fonctions K-finies à gauche dans $\mathcal{D}(G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}})$, et à valeurs dans l'espace des fonctions continues sur $G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}}$; il est donné par la formule

$$(\mathrm{P}f)(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\sum_{\mathfrak{S}}\int_{\Lambda^u} \mathrm{Sp}_{\mathfrak{S}}[\hat{f}(\mathfrak{S}, \lambda)\,\mathrm{E}(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \lambda)]\,d\lambda.$$

(I.6.3) *On a* $\mathrm{P}f \in \mathrm{L}^2(G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}})$ *pour toute* $f \in \mathcal{D}(G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}})$ *et* K-*finie à gauche.*

Démonstration. — Remplaçant E par E''_c et par E'''_c dans (I.6.2), nous obtenons des opérateurs P'' et P''' dont P est la somme. Il résulte de (I.6.1) et de (1.5.14) que $\mathrm{P}''f \in \mathrm{L}^2$. Pour montrer que $\mathrm{P}'''f \in \mathrm{L}^2$, il suffit, d'après (I.1.5) et (I.5.4), de prouver que la fonction

$$\int_{\Lambda^u} \hat{f}(\mathfrak{S}, \lambda)\,[\langle \lambda - \rho, \mathbf{h}\rangle + \mathrm{M}(\mathfrak{S}, -\lambda)\langle -\lambda - \rho, \mathbf{h}\rangle]\langle \rho, \mathbf{h}\rangle\,d\lambda$$

est de carré intégrable sur $H_{\mathbf{A}}/H_{\mathbf{Q}}$. Compte tenu de (I.3.45), cette intégrale vaut

$$2\int_{\Lambda^u} \hat{f}(\mathfrak{S}, \lambda)\langle \lambda, \mathbf{h}\rangle\,d\lambda,$$

ce qui est la transformée de Fourier d'une fonction de carré intégrable, et est donc de carré intégrable.

(I.6.4) *Si f et g sont deux éléments* K-*finis de* $\mathcal{D}(G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}})$, *on a*

$$(\mathrm{P}f, g) = (f, \mathrm{P}g) = \frac{1}{2}\sum_{\mathfrak{S}}\int_{\Lambda^u} \mathrm{Sp}_{\mathfrak{S}}[\hat{g}(\mathfrak{S}, \lambda)^* \hat{f}(\mathfrak{S}, \lambda)]\,d\lambda.$$

Démonstration. — Par définition, on a

$$(\mathrm{P}f, g) = \frac{1}{2}\int_{G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}}} \overline{g(\mathbf{y})}\left\{\int_{\Lambda^u}\sum_{\mathfrak{S}} \mathrm{Sp}_{\mathfrak{S}}(\hat{f}(\mathfrak{S}, \lambda)\,\mathrm{E}(\mathbf{y}, \mathfrak{S}, -\lambda))\,d\lambda\right\}d\mathbf{y};$$

mais d'après (I.6.1) et (I.6.2), on peut intervertir les intégrations puisque g est à support compact; on obtient alors

$$(\mathrm{P}f, g) = \frac{1}{2}\sum_{\mathfrak{S}}\int_{\Lambda^u} \mathrm{Sp}_{\mathfrak{S}}\hat{f}(\mathfrak{S}, \lambda)\left(\int_{G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}}} \overline{g(\mathbf{y})}\,\mathrm{E}(\mathbf{y}, \mathfrak{S}, -\lambda)\,d\mathbf{y}\right)d\lambda,$$

et le résultat cherché résulte de la définition (I.3.44) de $\hat{f}(\mathfrak{S}, \lambda)$.

Montrons maintenant que $\mathrm{P}f \in \mathrm{L}^2_1$; il suffit, pour cela, d'après (I.2.6), de montrer que si g est une forme automorphe parabolique, on a $(\mathrm{P}f, g) = 0$.

Comme les séries d'Eisenstein sont orthogonales aux formes paraboliques, il suffit de montrer que l'on peut intervertir les intégrations dans l'expression

$$\int_{G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}}} g(\mathbf{y})\,d\mathbf{y}\int_{\Lambda^u} \hat{f}(\mathfrak{S}, \lambda)\,\mathrm{E}(\mathbf{y}, \mathfrak{S}, -\lambda)\,d\lambda;$$

mais, d'après (I.1.16), on a $g = \mathrm{F} \star g$ pour une $\mathrm{F} \in \mathcal{D}(G_{\mathbf{A}})$, et le résultat cherché est une conséquence immédiate de (I.5.16) et (I.6.1) puisque l'intégrale ci-dessus peut encore s'écrire

$$\int_{G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}}} g(\mathbf{y})\,d\mathbf{y}\int_{\Lambda^u} \hat{f}(\mathfrak{S}, \lambda)\,\check{\mathrm{F}}\star\mathrm{E}(\mathbf{y}, \mathfrak{S}, -\lambda)\,d\lambda.$$

Mais, en comparant (I.4.5) et (I.6.4) on voit que

$$(\mathrm{P}_c\theta_\varphi, \theta_\psi) = (\mathrm{P}\theta_\varphi, \theta_\psi)$$

pour φ et $\psi \in \mathcal{D}(G_{\mathbf{A}}/H_{\mathbf{Q}}U_{\mathbf{A}})$ et K-finies à gauche. Comme les fonctions θ_φ sont denses dans L^2_1, on a

$$\mathrm{P}_c\theta_\varphi = \mathrm{P}\theta_\varphi.$$

Soit alors $f \in \mathcal{D}(G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}})$ et K-finie, on a

$$(\mathrm{P}_c f, \theta_\varphi) = (f, \mathrm{P}_c\theta_\varphi) = (f, \mathrm{P}\theta_\varphi) = (\mathrm{P}f, \theta_\varphi).$$

Comme $\mathrm{P}f$ et $\mathrm{P}_c f$ sont dans L^2_1 et que les θ_φ y sont denses, on a finalement prouvé le résultat suivant :

(I.6.5) *Soit f un élément* K-*fini de* $\mathcal{D}(G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}})$, *alors*

$$\mathrm{P}_c f = \mathrm{P}f.$$

Remarque. — On pourrait démontrer, sans beaucoup plus de peine, cette égalité pour un espace de fonction beaucoup plus grand; cependant, celui que nous considérons suffit à notre propos.

Considérons une fonction K-finie à gauche et à droite $\mathrm{F} \in \mathcal{D}(G_{\mathbf{A}})$ et notons P_d la projection orthogonale de L^2 sur L^2_d. D'après (I.4.7), $\mathrm{P}_d\mathrm{T}(\mathrm{F})$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt; il existe donc une fonction L_F dans $L^2(G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}} \times G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}})$ telle que l'on ait

$$(\mathrm{I}.6.6) \qquad (\mathrm{P}_d\mathrm{T}(\mathrm{F})f, g) = \int_{G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}}}\int_{G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}}} \mathrm{L}_\mathrm{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\,f(\mathbf{y})\,\overline{g(\mathbf{x})}\,d\mathbf{y}\,d\mathbf{x}$$

quels que soient f et $g \in L^2$.

Posons $K_F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{G_\mathbf{Q}} F(\mathbf{x}\gamma\mathbf{y}^{-1})$. Il est clair que si f et g sont dans $\mathcal{D}(G_\mathbf{A}/G_\mathbf{Q})$, on a

(I.6.7) $$(T(F)f, g) = \int_{G_\mathbf{A}/G_\mathbf{Q}} \int_{G_\mathbf{A}/G_\mathbf{Q}} K_F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) \overline{g(\mathbf{x})}\, d\mathbf{x}\, d\mathbf{y}.$$

Calculons $P_c T(F) f = P_c(F \star f)$. Il résulte de la démonstration de (I.6.2) que, si f est un élément K-fini de $\mathcal{D}(G_\mathbf{A}/G_\mathbf{Q})$, on a

$$\sum_{\mathfrak{S}} \mathrm{Sp}_{\mathfrak{S}}[(F\star f)\hat{\ }(\mathfrak{S}, \lambda)\, E(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, -\lambda)] = \int_{G_\mathbf{A}/G_\mathbf{Q}} H_F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \lambda) f(\mathbf{y})\, d\mathbf{y},$$

où $H_F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \lambda)$ est donné par (I.5.22).

D'autre part, (I.5.24) montre que

(I.6.8) $$\int_{G_\mathbf{A}/G_\mathbf{Q}} \int_{G_\mathbf{A}/G_\mathbf{Q}} \int_{\Lambda^u} | H_F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \lambda) f(\mathbf{y}) \overline{g(\mathbf{x})} |\, d\mathbf{y}\, d\mathbf{x}\, d\lambda < \infty$$

et que l'intégrale

(I.6.9) $$H_F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} \int_{\Lambda^u} H_F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \lambda)\, d\lambda$$

converge uniformément lorsque $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ restent dans des compacts fixes; donc $H_F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ est fonction continue de $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Maintenant, (I.6.2), (I.6.5) et (I.6.8) montrent que

(I.6.10) $$P_c T(F) f(\mathbf{x}) = \int_{G_\mathbf{A}/G_\mathbf{Q}} H_F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f(\mathbf{y})\, d\mathbf{y},$$

(I.6.11) $$(P_c T(F) f, g) = \int_{G_\mathbf{A}/G_\mathbf{Q}} \int_{G_\mathbf{A}/G_\mathbf{Q}} H_F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) \overline{g(\mathbf{x})}\, d\mathbf{x}\, d\mathbf{y}.$$

Comme on peut approcher toute fonction continue à support compact sur $(G_\mathbf{A}/G_\mathbf{Q}) \times (G_\mathbf{A}/G_\mathbf{Q})$ par des fonctions de la forme $f \otimes g$, on voit, en comparant (I.6.6), (I.6.7) et (I.6.11), que L_F est presque partout égale à la fonction continue $K_F - H_F$.

Nous avons vu en (I.4.7) que $T_d(F)$ est un opérateur à trace. Il est représenté par le noyau continu $K_F - H_F \in L^2(G_\mathbf{A}/G_\mathbf{Q} \times G_\mathbf{A}/G_\mathbf{Q})$. Dans ces conditions, on sait (*cf.* textes à paraître de Bourbaki) que la fonction $\mathbf{x} \mapsto K_F(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - H_F(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ est intégrable et que son intégrale est la trace de $T_d(F)$.

Nous résumons ce que nous avons démontré :

(I.6.12) THÉORÈME. — *Soit* F *un élément* K-*fini à droite et à gauche de* $\mathcal{D}(G_{\mathbf{A}})$. *On définit* $F(\mathfrak{S}, \lambda, \mathfrak{S}')$ *comme en* (I.5.18). *L'intégrale*

$$H_F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}\int_{\Lambda^u} \sum_{\mathfrak{S}} \sum_{\mathfrak{S}'} \mathrm{Sp}_{\mathfrak{S}\otimes\mathfrak{S}'}[\hat{F}(\mathfrak{S}, \lambda, \mathfrak{S}')\, E(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, -\lambda) \otimes E(\mathbf{y}, \mathfrak{S}', \bar{\lambda})^*]\, d\lambda$$

converge uniformément lorsque $\mathbf{x}$ *et* $\mathbf{y}$ *restent dans des compacts fixes. On pose* $K_F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{G_{\mathbf{Q}}} F(\mathbf{x}\gamma\mathbf{y}^{-1})$. *La fonction* $K_F - H_F$ *est continue de carré intégrable sur* $G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}} \times G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}}$. *L'opérateur* $T_d(F)$ *est à trace, et donné par le noyau* $K_F - H_F$. *La fonction* $\mathbf{x} \mapsto K_F(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - H_F(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ *est intégrable sur* $G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}}$ *et l'on a*

$$\mathrm{tr}\, T_d(F) = \int_{G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}}} [K_F(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - H_F(\mathbf{x}, \mathbf{x})]\, d\mathbf{x}.$$

7. La transformation de Selberg.

Soit k un corps. Soient $\gamma \in G_k$ et γ' un représentant de γ dans $GL(2, k)$. Nous dirons que γ est

k-elliptique si les valeurs propres de γ' n'appartiennent pas à k,

k-hyperbolique si les valeurs propres de γ' sont dans k et distinctes,

k-unipotent si les valeurs propres de γ' sont égales (et donc dans k).

On notera G_E l'ensemble des éléments $\mathbf{Q}$-elliptiques, G_H l'ensemble des éléments $\mathbf{Q}$-hyperboliques, G_U l'ensemble des éléments $\mathbf{Q}$-unipotents. On posera $G_P = G_H \cup G_U$ et $G_P^* = G_P - \{1\}$. Il est clair que $G_{\mathbf{Q}} = G_E \cup G_P$.

Soit $F \in \mathcal{D}(G_{\mathbf{A}})$. On définit K_F comme dans (I.6.12) de sorte que

$$K_F(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \sum_{G_E} F(\mathbf{x}\gamma\mathbf{x}^{-1}) + \sum_{G_P^*} F(\mathbf{x}\gamma\mathbf{x}^{-1}) + F(1). \tag{I.7.1}$$

Nous remarquons maintenant que

$$\int_{G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}}} \sum_{G_E} |F(\mathbf{x}\gamma\mathbf{x}^{-1})|\, d\mathbf{x} < \infty. \tag{I.7.2}$$

En effet, *la fonction* $\mathbf{x} \mapsto \sum_{\gamma \in G_E} F(\mathbf{x}\gamma\mathbf{x}^{-1})$ est *continue* et à *support compact* mod $G_{\mathbf{Q}}$. La continuité résulte de ce que si $\mathbf{x}$ reste dans un compact fixe, la série se réduit à une somme finie puisque G_E est discret et que F est à support compact. La seconde assertion résulte immédiatement du lemme suivant :

(I.7.3) *Soit* C *un compact de* G_A. *Il existe un nombre* $d_C > 0$ *tel que si* $\mathbf{x} \in G_{\mathbf{A}}$ *et* $\gamma \in G_{\mathbf{Q}}$ *vérifient les deux relations*

$$r(\mathbf{x}) < d_c, \qquad \mathbf{x}\gamma\mathbf{x}^{-1} \in C,$$

alors $\gamma \in P_{\mathbf{Q}}$.

Démonstration. — On peut évidemment raisonner dans $GL(2, \mathbf{A})$ au lieu de $G_{\mathbf{A}}$. Si $\mathbf{x} = \mathbf{khu}$ est une décomposition d'Iwasawa de $\mathbf{x}$, il est clair que

$$\mathbf{x}\gamma\mathbf{x}^{-1} \in C \Rightarrow \mathbf{hu}\gamma\mathbf{u}^{-1}\mathbf{h}^{-1} \in C',$$

où C′ est encore un compact. Mais

$$\begin{pmatrix} h & \star \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h & \star \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \star & \star \\ ch^{-1} & \star \end{pmatrix};$$

par suite, la relation $\mathbf{hu}\gamma\mathbf{u}^{-1}\mathbf{h}^{-1} \in C'$ implique $|ch^{-1}| < 1$, donc $|c| < |h|$. Si $|h|$ est petit, il s'ensuit que $c = 0$ puisque $c \in \mathbf{Q}$.

C. Q. F. D.

Soient $\gamma \in G_{\mathbf{Q}}$ et k une algèbre sur $\mathbf{Q}$. Nous notons $G_k(\gamma)$ le centralisateur de γ dans G_k. Sur chaque $G_{\mathbf{A}}(\gamma)$ nous choisissons une mesure de Haar. Il est bien connu que si $\gamma \in G_E$, l'espace $G_{\mathbf{A}}(\gamma)/G_{\mathbf{Q}}(\gamma)$ est compact; soit $v(\gamma)$ son volume. La relation (I.7.2) justifie les transformations suivantes :

$$\begin{aligned}
&\int_{G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}}} \sum_{G_E} F(\mathbf{x}\gamma\mathbf{x}^{-1})\, d\mathbf{x} \\
&= \sum_{\gamma \in \{G_E\}} \int_{G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}}} \sum_{\delta \in G_{\mathbf{Q}}/G_{\mathbf{Q}}(\gamma)} F(\mathbf{x}\delta\gamma\delta^{-1}\mathbf{x}^{-1})\, d\mathbf{x} = \sum_{\gamma \in \{G_E\}} \int_{G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}}(\gamma)} F(\mathbf{x}\gamma\mathbf{x}^{-1})\, d\mathbf{x} \\
&= \sum_{\gamma \in \{G_E\}} v(\gamma) \int_{G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{A}}(\gamma)} F(\mathbf{x}\gamma\mathbf{x}^{-1})\, d\mathbf{x},
\end{aligned}$$

en notant $\{G_E\}$ l'ensemble des classes de conjugaison sous $G_{\mathbf{Q}}$ de G_E. Maintenant, (I.6.12), (I.7.1), (I.7.2) et le calcul ci-dessus prouvent le résultat suivant :

(I.7.4) *Soit* F *un élément* K-*fini à droite et à gauche de* $\mathcal{D}(G_{\mathbf{A}})$. *On a*

$$\operatorname{tr} T_d(F) = \alpha F(1) + \sum_{\{G_E\}} v(\gamma) \int_{G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{A}}(\gamma)} F(\mathbf{x}\gamma\mathbf{x}^{-1})\, d\mathbf{x} + I(F),$$

où l'on a posé :

$$\mathrm{I}(\mathrm{F}) = \int_{\mathrm{G}_{\mathbf{A}}/\mathrm{G}_{\mathbf{Q}}} \left(\sum_{\mathrm{G}_{\mathrm{P}}^{*}} \mathrm{F}(\mathbf{x}\gamma\mathbf{x}^{-1}) - \mathrm{H}_{\mathrm{F}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \right) d\mathbf{x}.$$

Toutes les séries et intégrales convergent absolument.

Si R et R′ sont deux représentations unitaires de $\mathrm{G}_{\mathbf{A}}$, notons $i(\mathrm{R}, \mathrm{R}')$ leur nombre d'entrelacement. Notons $\hat{\mathrm{G}}_{\mathbf{A}}$ l'ensemble des classes de représentations unitaires irréductibles de $\mathrm{G}_{\mathbf{A}}$. On a évidemment

$$\mathrm{T}_d(\mathrm{F}) = \sum_{\mathrm{R} \in \hat{\mathrm{G}}_{\mathbf{A}}} i(\mathrm{R}, \mathrm{T}_d)\, \mathrm{tr}\,\mathrm{R}(\mathrm{F}).$$

Mais d'autre part, on sait d'après ([18], th. 2.2) que l'on a

(I.7.5) $\qquad i(\mathrm{R}, \mathrm{T}_d) \leqq 1$ *pour tout* $\mathrm{R} \in \hat{\mathrm{G}}_{\mathbf{A}}$.

[En fait, il est prouvé dans [18] que $i(\mathrm{R}, \mathrm{T}_0) \leqq 1$, et que $i(\mathrm{R}, \mathrm{T}_0) = 0$ si l'on suppose de plus que R est de dimension finie, de sorte que (I.7.5) résulte trivialement de (I.4.6).] On peut donc compléter (I.7.4) par la proposition suivante :

(I.7.6) *Soit* F *une fonction intégrale sur* G telle que $\mathrm{T}_d(\mathrm{F})$ soit *traçable. On a*

$$\mathrm{tr}\,\mathrm{T}_d(\mathrm{F}) = \sum_{\substack{\mathrm{R} \in \hat{\mathrm{G}}_{\mathbf{A}} \\ i(\mathrm{R}, \mathrm{T}_d) \neq 0}} \mathrm{tr}\,\mathrm{R}(\mathrm{F}),$$

Naturellement, chaque R(F), où R est un élément de $\hat{\mathrm{G}}_{\mathbf{A}}$ qui intervient dans T_d, est traçable et la série ci-dessus converge absolument.

La conjonction de (I.7.4) et de (I.7.6) donne ce qu'on appelle habituellement « la formule des traces de Selberg ». Cette formule pose immédiatement les problèmes suivants :

(i) calculer (par exemple, en fonction de la transformée de Fourier de F) les intégrales figurant dans (I.7.4);

(ii) étendre la classe des fonctions F pour laquelle cette formule est valable.

Selberg lui-même a résolu ces problèmes lorsque F est de la forme $\mathrm{F} = \mathrm{F}_0 \otimes \mathrm{F}_\infty$, où F_0 est (par exemple) la fonction caractéristique d'un sous-groupe ouvert compact de G_f (*cf.* [20]). Nous espérons revenir sur ces questions plus tard. Dans le prochain chapitre, nous allons calculer une nouvelle expression pour le nombre I(F) qui apparaît dans (I.7.4), et que nous appellerons dans la suite « le terme complémentaire ».

CHAPITRE II.

CALCUL DU TERME COMPLÉMENTAIRE.

1. Premières évaluations.

LA DÉCOMPOSITION $\tilde{H}_F = H''_F + H'''_F$. — Dans tout ce chapitre nous fixons une fonction $F \in \mathcal{D}(G_{\mathbf{A}})$ qui est de plus K-finie à droite et à gauche. Il faut évaluer l'intégrale

$$\text{(II.1.1)} \qquad I(F) = \int_{G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}}} \left[\sum_{\gamma \in G_p^\star} F(\mathbf{x}\gamma\mathbf{x}^{-1}) - H_F(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \right] d\mathbf{x}.$$

Nous pouvons, pour calculer cette intégrale, commencer par une intégration à gauche sur K. Si nous posons

$$\text{(II.1.2)} \qquad F^K(\mathbf{x}) = \int_K F(\mathbf{kxk}^{-1})\, d\mathbf{k},$$

il est facile de voir, grâce aux relations d'orthogonalité dans les groupes compacts, que

$$\text{(II.1.3)} \qquad I(F) = \int_{G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}}} \left[\sum_{\gamma \in G^\star} F^K(\mathbf{x}\gamma\mathbf{x}^{-1}) - \tilde{H}_F(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \right] d\mathbf{x},$$

où l'on a posé

$$\text{(II.1.4)} \qquad \tilde{H}_F(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \frac{1}{2} \int_{\Lambda^u} \sum_{\mathfrak{S}} \mathrm{Sp}_{\mathfrak{S}} [\hat{F}(\mathfrak{S}, \lambda)\, E(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \bar{\lambda})^\star E(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, -\lambda)]\, d\lambda$$

et

$$\text{(II.1.5)} \qquad \hat{F}(\mathfrak{S}, \lambda) = \int_K \int_{H_{\mathbf{A}}} \int_{U_{\mathbf{A}}} F^K(\mathbf{khu})\, \mathfrak{S}(k)^\star \langle -\lambda + \rho, \mathbf{h} \rangle\, d\mathbf{k}\, d\mathbf{h}\, d\mathbf{u}$$
$$= \int_{G_{\mathbf{A}}} F^K(\mathbf{x})\, L(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \bar{\lambda})^\star\, d\mathbf{x}.$$

La fonction $s \mapsto \hat{F}(\mathfrak{S}, s\rho + \chi)$ *est une fonction entière, à décroissance rapide à l'infini dans toute bande verticale* $a \leq \mathrm{Re}(s) \leq b$ [puisque c'est une transformée de Fourier de fonction de $\mathcal{D}(G_{\mathbf{A}})$] et qui est *identiquement nulle sauf pour un nombre fini de valeurs de* $\mathfrak{S}$ *et* χ puisque F est supposée K-finie. On voit facilement que l'on a

$$\text{(II.1.6)} \qquad F^K \star E(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \bar{\lambda})^\star = \hat{F}(\mathfrak{S}, \lambda)\, E(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \bar{\lambda})^\star.$$

Soit c un nombre réel tel que $0 < c < 1$. En I.5, nous avons défini des fonctions E''_c et E'''_c telles que $E = E''_c + E'''_c$. Nous poserons

$$\text{(II.1.7)} \qquad H'''_F(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{\mathfrak{S}} \int_{\Lambda^u} \mathrm{Sp}_{\mathfrak{S}} [\hat{F}(\mathfrak{S}, \lambda)\, E'''_c(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \bar{\lambda})^\star\, E'''_c(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, -\lambda)]\, d\lambda.$$

Il résulte de (I.5.3) que cette intégrale converge uniformément lorsque $\mathbf{x}$ reste dans un compact. On définit de même $H''_F(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ en remplaçant E'''_c dans E''_c dans (II.1.7).

En calculant formellement et en utilisant les relations d'orthogonalité (I.5.8) entre E''_c et E'''_c, la formule (II.1.1) s'écrit encore

$$I(F) = \int_{G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}}} \left[\sum_{\gamma \in G^\star_{\mathbf{Q}}} F^K(\mathbf{x}\gamma\mathbf{x}^{-1}) - H'''_F(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - H''_F(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \right] d\mathbf{x} = I'''(F) - I''(F),$$

où l'on pose, *a priori* formellement,

$$I''(F) = \int_{G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}}} H''_F(\mathbf{x}, \mathbf{x})\, d\mathbf{x};$$

$$I'''(F) = \int_{G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}}} \left[\sum_{\gamma \in G^\star_{\mathbf{Q}}} F^K(\mathbf{x}\gamma\mathbf{x}^{-1}) - H'''_F(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \right] d\mathbf{x}.$$

Le but de ce numéro est de justifier ces calculs et d'évaluer $I''(F)$. Considérons d'abord l'intégrale

$$\text{(II.1.8)} \qquad \int_{G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}}} \int_{\Lambda^u} [\hat{F}(\mathfrak{S}, \lambda)\, E''_c(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \bar{\lambda})^\star\, E''_c(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, -\lambda)]\, d\mathbf{x}\, d\lambda.$$

Elle est majorée par l'intégrale

$$\int_{\Lambda^u} |\hat{F}(\mathfrak{S}, \lambda)| . \| E''_c(\,.\,, \mathfrak{S}, -\lambda) \|^2\, d\lambda,$$

convergente d'après (I.5.14) puisque $\hat{F}(\mathfrak{S}, \lambda)$ est à décroissance rapide. Il en est donc de même de (II.1.8) et, par suite, aussi de

$$\text{(II.1.9)} \qquad \int_{G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}}} H''_F(\mathbf{x}, \mathbf{x})\, d\mathbf{x} = I''(F).$$

Pour évaluer $I''(F)$, posons

$$\text{(II.1.10)} \qquad g_F(\xi) = \int_{U_{\mathbf{A}}} F^K(\xi\mathbf{u})\, d\mathbf{u};$$

les formules d'inversion de Fourier pour K et $H_{\mathbf{A}}/H_{\mathbf{Q}}$ prouvent que

$$\sum_{\mathfrak{S}} \int_{\Lambda^u} \mathrm{Sp}_{\mathfrak{S}} \hat{F}(\mathfrak{S}, \lambda)\, d\lambda = \sum_{\xi \in H_{\mathbf{Q}}} g_F(\xi); \tag{II.1.11}$$

cette série se réduit d'ailleurs à une somme finie puisque F est à support compact [*cf.* (II.5.8) plus bas].

Comme l'intégrale (II.1.8) est convergente, on peut calculer $I''(F)$ par la formule

$$I''(F) = \frac{1}{2} \sum_{\mathfrak{S}} \int_{\Lambda^u} \mathrm{Sp}_{\mathfrak{S}} \left[\hat{F}(\mathfrak{S}, \lambda) \int_{G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}}} E''_c(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \bar{\lambda})^{\star} E''_c(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, -\lambda)\, d\mathbf{x} \right] d\lambda.$$

D'après (I.5.10) et (II.1.11), on a

$$\begin{aligned} I''(F) = {} & -2 \sum_{\xi} g_F(\xi) \log c - \sum_{\mathfrak{S}} \int_{\Lambda} \mathrm{Sp}_{\mathfrak{S}} [\hat{F}(\mathfrak{S}, \lambda)\, M(\mathfrak{S}, \lambda)\, M'(\mathfrak{S}, -\lambda)]\, d\lambda \\ & + \sum_{2\chi = 0} \sum_{\mathfrak{S}} \frac{1}{4i\pi} \int_{\mathrm{Re}(s)=0} \mathrm{Sp}_{\mathfrak{S}} \left[\hat{F}(\mathfrak{S}, s\rho + \chi)\, \frac{c^{-2s} M(\mathfrak{S}, -s\rho + \chi) - c^{2s} M(\mathfrak{S}, s\rho + \chi)}{2s} \right] ds. \end{aligned}$$

Nous allons évaluer le comportement asymptotique de cette expression lorsque $c \to 0$.

Pour étudier l'intégrale du dernier terme ci-dessus nous étudierons plus généralement l'expression :

$$\beta(c) = \frac{1}{4i\pi} \int_{\mathrm{Re}(s)=0} \varphi(s)\, \frac{c^{-2s} a(-s) - c^{2s} a(s)}{2s}\, ds,$$

où $\varphi(s)$ est une fonction entière, à décroissance rapide à l'infini dans toute bande verticale, et où $a(s)$ est une fonction holomorphe bornée dans une bande $0 \leqq \mathrm{Re}(s) \leqq \delta$. On a

$$\begin{aligned} \beta(c) &= \frac{-1}{8i\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\substack{\mathrm{Re}(s)=0 \\ |s| > \varepsilon}} \varphi(s)\, \frac{c^{2s} a(s) - c^{-2s} a(-s)}{s}\, ds \\ &= \frac{-1}{8i\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\substack{\mathrm{Re}(s)=0 \\ |s| > \varepsilon}} [\varphi(s) + \varphi(-s)]\, \frac{c^{2s} a(s)}{s}\, ds. \end{aligned}$$

En raison des hypothèses d'holomorphie et de croissance faites sur φ et a, la méthode des résidus montre que

$$\begin{aligned} \beta(c) &= \frac{1}{4} \varphi(0)\, a(0) - \frac{1}{8i\pi} \int_{\mathrm{Re}(s)=\delta} [\varphi(s) + \varphi(-s)]\, \frac{c^{2s} a(s)}{s}\, ds \\ &= \frac{1}{4} \varphi(0)\, a(0) + c^{2\delta} O(1) \qquad \text{quand} \quad c \to 0. \end{aligned}$$

En appliquant ceci au calcul de $I''(F)$, on obtient

$$\text{(II.1.12)}\qquad I''(F) = -\sum_{\mathfrak{S}} \int_{\Lambda^u} \mathrm{Sp}_{\mathfrak{S}}[\hat{F}(\mathfrak{S}, \lambda)\, M(\mathfrak{S}, \lambda)\, M'(\mathfrak{S}, -\lambda)]\, d\lambda$$

$$+ \frac{1}{4} \sum_{2\chi=0} \hat{F}(\mathfrak{S}, \chi)\, M(\mathfrak{S}, \chi) - 2 \sum_{\xi \in H_{\mathbf{Q}}} g_F(\xi) \log c + c^{2\delta} O(1)$$

quand $c \to 0$.

Nous allons montrer maintenant que certaines intégrales analogues à $I''(F)$ sont nulles.

Considérons tout d'abord l'intégrale :

$$\text{(II.1.13)}\qquad \int_{G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}}} \int_{\Lambda^u} |\hat{F}(\mathfrak{S}, \lambda)\, E''_c(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \lambda)^\star\, E'''_c(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, -\lambda)|\, d\mathbf{x}\, d\lambda.$$

Elle est majorée par l'intégrale

$$\int_{\Lambda^u} \int_{G_{\mathbf{A}}/P_{\mathbf{Q}}} |\hat{F}(\mathfrak{S}, \lambda)\, E''_c(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \bar{\lambda})^\star\, L'''_c(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, -\lambda)|\, d\mathbf{x}\, d\lambda.$$

Si $r(\mathbf{x}) > c$, on sait que $L'''_c(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \lambda) = 0$. Si $r(\mathbf{x}) < c$, on sait d'après (I.5.5) que $E''_c(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \lambda) = E(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \lambda) - E^0(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \lambda)$ et d'après (II.1.6) on a donc

$$|\hat{F}(\mathfrak{S}, \lambda)\, E''_c(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \bar{\lambda})^\star| = |F^K \star E(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \bar{\lambda})^\star - F^K \star E^0(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \bar{\lambda})^\star|;$$

il résulte alors de (I.5.15) que, pour tout n, on a

$$|\hat{F}(\mathfrak{S}, s\rho + \chi)\, E''_c(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \bar{s}\rho - \chi)^\star| \prec r(\mathbf{x})^{2n-3}(1 + |s|)^{1-2n}$$

dans l'ensemble $\mathrm{Re}(s) = 0$, $\mathbf{x} \in \mathfrak{G}(c)$. On en conclut aussitôt que (II.1.13) converge. On en déduit alors de (I.5.8) que

$$\text{(II.1.14)}\qquad \int_{G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}}} \int_{\Lambda^u} \hat{F}(\mathfrak{S}, \lambda)\, E''_c(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \bar{\lambda})^\star\, E'''_c(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, -\lambda)\, d\lambda\, d\mathbf{x} = 0.$$

On a évidemment un résultat analogue en échangeant les rôles de E''_c et de E'''_c. De là on déduit la décomposition cherchée de $I(F)$; en effet, pour cela considérons la fonction

$$\text{(II.1.15)}\qquad \mathbf{x} \mapsto \sum_{G_P^\star} F^K(\mathbf{x}\gamma\mathbf{x}^{-1}) - H'''_F(\mathbf{x}, \mathbf{x});$$

puisque le second membre de (II.1.3) est absolument convergent, ce qui précède montre que cette fonction est intégrale sur $G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}}$ et que, si l'on pose

(II.1.16) $$\mathrm{I}'''(\mathrm{F}) = \int_{G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}}} \Big\{ \sum_{G_p^\star} \mathrm{F}^{\mathrm{K}}(\mathbf{x}\gamma\mathbf{x}^{-1}) - \mathrm{H}'''_{\mathrm{F}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \Big\} d\mathbf{x},$$

on a, comme annoncé, la relation

(II.1.17) $$\mathrm{I}(\mathrm{F}) = \mathrm{I}'''(\mathrm{F}) - \mathrm{I}''(\mathrm{F}).$$

Évaluations asymptotiques dans $\mathfrak{G}$. — Pour calculer $\mathrm{I}'''(\mathrm{F})$, nous aurons besoin d'une évaluation asymptotique dans $\mathfrak{G}$ des deux termes qui interviennent dans (II.1.15). On examine d'abord

$$\sum_{G_p^\star} \mathrm{F}^{\mathrm{K}}(\mathbf{x}\gamma\mathbf{x}^{-1}).$$

Nous avons vu en (I.7.3) que

(II.1.18) $$\sum_{G_p} \mathrm{F}(\mathbf{x}\gamma\mathbf{x}^{-1}) = \sum_{P_{\mathbf{Q}}} \mathrm{F}^{\mathrm{K}}(\mathbf{x}\gamma\mathbf{x}^{-1})$$

si $r(\mathbf{x})$ est assez petit.

Le second membre de (II.1.18) peut encore s'écrire

$$\sum_{\boldsymbol{\xi}\in H_{\mathbf{Q}}} \sum_{\boldsymbol{\eta}\in U_{\mathbf{Q}}} \mathrm{F}^{\mathrm{K}}(\mathbf{x}\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\eta}\mathbf{x}^{-1}).$$

La somme sur les $\boldsymbol{\xi}$ porte sur un ensemble fini indépendant de $\mathbf{x}$ [*cf.* (II.5.8) plus bas]. D'autre part, si l'on pose $\mathbf{x} = \mathbf{khu}$, on trouve avec les conventions de notation définies en (I. 1)

$$\begin{aligned}\sum_{\boldsymbol{\eta}\in U_{\mathbf{Q}}} \mathrm{F}^{\mathrm{K}}(\mathbf{hu}\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\eta}\mathbf{u}^{-1}\mathbf{h}^{-1}) &= \sum_{\eta\in\mathbf{Q}} \mathrm{F}^{\mathrm{K}}\begin{pmatrix} \xi & h[(\xi-1)u+\eta] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= |h|^{-1} \sum_{\eta\in\mathbf{Q}} \overline{\tau}(u(\xi-1)\eta) \int_{\mathbf{A}} \mathrm{F}^{\mathrm{K}}\begin{pmatrix} \xi & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tau(vh^{-1}\eta)\, dv,\end{aligned}$$

d'après la formule de Poisson. Puisque la fonction $v \mapsto \mathrm{F}^{\mathrm{K}}\begin{pmatrix} \xi & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est dans $\mathcal{D}(\mathbf{A})$, cette série est égale à

$$|h|^{-1} \int_{\mathbf{A}} \mathrm{F}^{\mathrm{K}}\begin{pmatrix} \xi & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} dv + \mathrm{o}(|h|^n) = |h|^{-1} \sum_{H_{\mathbf{Q}}} g_{\mathrm{F}}(\xi) + \mathrm{O}(|h|^n)$$

lorsque $|h|$ tend vers o, ceci quel que soit $n > 0$. D'où le résultat suivant :
(II.1.19) *Quel que soit l'entier n on a*

$$\left| \sum_{\gamma \in \mathrm{G}_p^*} \mathrm{F^K}(\mathbf{x}\gamma\mathbf{x}^{-1}) + \mathrm{F}(1) - r(\mathbf{x})^{-2} \sum_{\xi} g_{\mathrm{F}}(\xi) \right| \prec r(\mathbf{x})^n \quad dans\ \mathfrak{G}.$$

Considérons maintenant la fonction $\mathrm{H}_{\mathrm{F}}'''(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ donnée par (II.1.7). Si $\mathbf{x} = \mathbf{khu}$ et si $r(\mathbf{h}) < c$, on a pour tout $\lambda \in \Lambda^u$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_c'''(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \bar{\lambda})^* \mathrm{E}_c'''(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, -\lambda) &= \mathrm{L}_c'''(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \bar{\lambda})^* \mathrm{L}_c'''(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, -\lambda) \\
&= [\langle -\lambda - \rho, h \rangle \mathrm{P}(\mathfrak{S}, -\chi) + \langle \lambda - \rho, h \rangle \mathrm{M}(\mathfrak{S}, \bar{\lambda})^*] \\
&\quad \times [\langle \lambda - \rho, h \rangle \mathrm{P}(\mathfrak{S}, -\chi) + \langle -\lambda - \rho, h \rangle \mathrm{M}(\mathfrak{S}, -\lambda)] \\
&= 2\langle -2\rho, h \rangle \mathrm{P}(\mathfrak{S}, -\chi) + \langle 2\lambda - 2\rho, h \rangle \mathrm{M}(\mathfrak{S}, \lambda) \mathrm{P}(\mathfrak{S}, -\chi) \\
&\quad + \langle -2\lambda - 2\rho, h \rangle \mathrm{P}(\mathfrak{S}, -\chi) \mathrm{M}(\mathfrak{S}, -\lambda),
\end{aligned}$$

car $\mathrm{M}(\mathfrak{S}, \bar{\lambda})^* = \mathrm{M}(\mathfrak{S}, \lambda)$ et $\mathrm{M}(\mathfrak{S}, \lambda)\, \mathrm{M}(\mathfrak{S}, -\lambda) = \mathrm{P}(\mathfrak{S}, -\chi)$.

On remarque, d'autre part, sur (II.1.5) que l'on a

$$\text{(II.1.20)} \qquad \hat{\mathrm{F}}(\mathfrak{S}, \lambda) = \hat{\mathrm{F}}(\mathfrak{S}, \lambda)\, \mathrm{P}(\mathfrak{S}, -\chi) = \mathrm{P}(\mathfrak{S}, -\chi)\, \hat{\mathrm{F}}(\mathfrak{S}, \lambda),$$

et donc

$$\begin{aligned}
\text{(II.1.21)} \quad & \mathrm{Sp}_{\mathfrak{S}}(\hat{\mathrm{F}}(\mathfrak{S}, \lambda)\, \mathrm{E}_c'''(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, \lambda)^* \mathrm{E}_c'''(\mathbf{x}, \mathfrak{S}, -\lambda)) \\
&= 2\, r(\mathbf{x})^{-2} \mathrm{Sp}_{\mathfrak{S}} \hat{\mathrm{F}}(\mathfrak{S}, \lambda) + \langle 2\lambda - 2\rho, h \rangle \mathrm{Sp}_{\mathfrak{S}}[\mathrm{F}(\mathfrak{S}, \lambda)\, \mathrm{M}(\mathfrak{S}, \lambda)] \\
&\quad + \langle -2\lambda - 2\rho, h \rangle \mathrm{Sp}_{\mathfrak{S}}[\hat{\mathrm{F}}(\mathfrak{S}, \lambda)\, \mathrm{M}(\mathfrak{S}, -\lambda)]
\end{aligned}$$

lorsque $r(\mathbf{x}) < c$.

On en déduit alors de (II.1.11), de (II.1.7), et d'un simple changement de variables, le résultat suivant :

(II.1.22) *Si* $\mathbf{x} = \mathbf{khu}$ *et si* $r(\mathbf{h}) < c$, *on a*

$$\mathrm{H}_{\mathrm{F}}'''(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - r(\mathbf{x})^{-2} \sum g_{\mathrm{F}}(\xi) = \frac{1}{2} \sum_{\mathfrak{S}} \int_{\Lambda^u} \mathrm{Sp}_{\mathfrak{S}}[\hat{\mathrm{F}}(\mathfrak{S}, \lambda) + \hat{\mathrm{F}}(\mathfrak{S}, -\lambda)\, \mathrm{M}(\mathfrak{S}, \lambda)] \langle 2\lambda - 2\rho, h \rangle\, d\lambda.$$

Le second membre de (II.1.22) peut maintenant être majoré de la manière suivante. Soit b un nombre réel, tel que $b > 1$. On sait, d'après (I.5.12), que $\mathrm{M}(\mathfrak{S}, s\rho + \chi)$ est borné dans la bande $0 \leqq \mathrm{Re}(s) \leqq b$, sauf éventuellement au voisinage du pôle $s = 1$. Vu le comportement dans les bandes verticales de la fonction $\hat{\mathrm{F}}(\mathfrak{S}, s\rho + \chi)$, on peut remplacer l'intégrale du second membre de (II.1.22) par une intégrale sur $\Lambda^u + b\rho$, plus un terme provenant du résidu en $s = 1$. Notons $\beta(F)$ ce terme; on peut montrer que

$$\beta(F) = -\frac{1}{\alpha}\int_{G_{\mathbf{A}}}\sum_{2\chi=0} F(\mathbf{x})\, D_\chi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

mais nous n'utiliserons pas cette formule. On peut majorer l'intégrale sur $\Lambda^u + b\rho$ par $d\langle 2(b-1)\rho, h\rangle$, où d est une constante ne dépendant pas de h.

Choisissant $b = \frac{n}{2} + 1$, on obtient donc le résultat suivant :

(II.1.23) *Quel que soit $n > 0$ on a*

$$\left| H'''_F(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - r(\mathbf{x})^{-2}\sum_{\xi} g_F(\xi) - \beta(F)\right| \prec r(\mathbf{x})^n$$

pour tout $\mathbf{x} \in \mathfrak{G}$.

D'après (II.1.19) et (II.1.23) la fonction (II.1.15) est bornée sur $G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}}$ (ce qui prouve à nouveau qu'elle est intégrable) et même de carré intégrable.

Grâce aux évaluations asymptotiques (II.1.19) et (II.1.23) on voit que les fonctions $H'''_F(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ et $\sum_{G^*_P} F^K(\mathbf{x}\gamma\mathbf{x}^{-1})$ sont à croissance lente dans $\mathfrak{G}$.

Pour calculer $I'''(F)$ nous calculerons les produits scalaires des deux fonctions ci-dessus avec une famille f_a de fonctions particulières à décroissance rapide tendant vers 1 dans L^2 lorsque a tend vers 0, puis nous passerons à la limite. Si, en effet, on pose

$$\int_{G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}}} f_a(\mathbf{x}) \sum_{G^*_P} F^K(\mathbf{x}\gamma\mathbf{x}^{-1})\, d\mathbf{x} = J_a(F), \tag{II.1.24}$$

$$\int_{G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}}} f_a(\mathbf{x})\, H'''_c(\mathbf{x}, \mathbf{x})\, d\mathbf{x} = J'_a(F), \tag{II.1.25}$$

ces deux intégrales sont convergentes, puisqu'on suppose f_a à décroissance rapide; et comme la fonction (II.1.15) est dans L^2 on a

$$I'''(F) = \lim_{a\to 0}[J_a(F) - J'_a(F)]. \tag{II.1.26}$$

Choix des fonctions f_a. — Il sera commode, pour calculer le second membre de (II.1.26), de choisir la famille de fonctions f_a obtenue en posant tout d'abord, pour $s \in \mathbf{C}$:

$$\mu(s) = \int_0^\infty \exp(-t - t^{-1})\, t^{\frac{1}{2}(s+1)}\, d^*t. \tag{II.1.27}$$

puis en définissant pour $0 < a < 1$, une fonction sur $G_{\mathbf{A}}/H_{\mathbf{Q}}U_{\mathbf{A}}$ par la formule

(II.1.28) $$\varphi_a(\mathbf{x}) = a\alpha\,\mu(1)^{-1}\exp[-a\,r(\mathbf{x})^2 - a^{-1}\,r(\mathbf{x})^{-2}];$$

ceci fait les fonctions f_a cherchées s'obtiennent en observant que *la série*

(II.1.29) $$f_a(\mathbf{x}) = \theta_{\varphi_a}(\mathbf{x}) = \sum_{\gamma \in G_{\mathbf{Q}}/P_{\mathbf{Q}}} \varphi_a(\mathbf{x}\gamma)$$

converge et a pour somme une fonction à décroissance rapide sur $G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}}$, *orthogonale aux formes paraboliques.*

Les fonctions $\hat{\varphi}_a(\vartheta, s\rho + \chi)$ et $\hat{f}_a(\vartheta, s\rho + \chi)$ [définies comme en (I.4.2) et (I.3.44)] sont nulles si $\vartheta \neq \mathrm{id}$ et $\chi \neq 0$. On posera

$$\hat{\varphi}_a(s) = \hat{\varphi}_a(\mathrm{id}, s\rho) \qquad \text{et} \qquad \hat{f}_a(s) = \hat{f}_a(\mathrm{id}, s\rho).$$

Les relations suivantes sont faciles à vérifier :

(II.1.30) $$\hat{\varphi}_a(s) = \alpha\, a^{\frac{1}{2}(s+1)}\,\mu(-s)\,\mu(1)^{-1};$$

(II.1.31) $$\int_{G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}}} f_a(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \hat{\varphi}_a(-1) = \alpha = \int_{G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}}} d\mathbf{x}.$$

On peut calculer (f_a, f_a) par la formule (I.4.4), ce qui donne

(II.1.32) $$(f_a, f_a) = \alpha + \frac{1}{8i\pi}\int_{\mathrm{Re}(s)=0} |\hat{f}_a(s)|^2\,ds.$$

Comme $\hat{f}_a(s) = \hat{\varphi}_a(s) + M(\mathrm{id}, s\rho)\,\hat{\varphi}_a(-s)$ et comme $M(\mathrm{id}, s\rho)$ est de module 1 sur l'axe imaginaire pur, l'intégrale ci-dessus est $O(a)$ lorsque $a \to 0$, en vertu de (II.1.30). On dispose maintenant de tous les éléments pour calculer $(f_a - 1, f_a - 1)$; on trouve

$$\begin{aligned}(f_a - 1, f_a - 1) &= \alpha + O(a) - 2\,\mathrm{Re}(f_a, 1) + (1, 1)\\ &= \alpha + O(a) - 2\alpha + \alpha = O(a).\end{aligned}$$

D'où le résultat suivant :

(II.1.33) *La fonction f_a tend vers* 1 *dans* L^2 *lorsque* $a \to 0$.

Maintenant que nous avons construit notre famille de fonction f_a nous pouvons passer au calcul de $J_a(F)$ et $J'_a(F)$.

Calcul de $J'_a(F)$. — Rappelons d'abord que

$$J'_a(F) = \frac{1}{2}\int_{G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}}} f_a(\mathbf{x})\left\{\int_{\Lambda^u}\sum_{\vartheta}\mathrm{Sp}_\vartheta[\hat{F}(\vartheta, \lambda)\,E_c'''(\mathbf{x}, \vartheta, \bar{\lambda})\,E_c'''(\mathbf{x}, \vartheta, -\lambda)]\,d\lambda\right\}d\mathbf{x}$$

et commençons par montrer que

$$\int_{G_{\mathbf{A}}/P_{\mathbf{Q}}}\int_{\Lambda^u} |f_a(\mathbf{x})\,\hat{F}(\mathfrak{I}, \lambda)\,E_c'''(\mathbf{x}, \mathfrak{I}, +\bar{\lambda})^* L_c'''(\mathbf{x}, \mathfrak{I}, -\lambda)|\,d\mathbf{x}\,d\lambda < +\infty.$$

En effet, L_c''' est nulle si $r(\mathbf{x}) > c$ et $f_a(\mathbf{x})$ et $O(r(\mathbf{x})^n)$ lorsque $r(\mathbf{x}) \to 0$; d'autre part, d'après (I.5.4), $L_c''' = E_c'''$ dès que $r(\mathbf{x}) < 1$; on est donc ramené à prouver que l'intégrale

$$\int_{\substack{H_{\mathbf{A}}/H_{\mathbf{Q}}\\ r(\mathbf{x})<c}}\int_{\Lambda^u} r(\mathbf{x})^n\,|\hat{F}(\mathfrak{I}, \lambda)\,L_c'''(\mathbf{x}, \mathfrak{I}, \bar{\lambda})^* L_c'''(\mathbf{x}, \mathfrak{I}, \lambda)|\,d\mathbf{x}\,d\lambda$$

est convergente dès que n est assez grand. Mais on sait que l'on a

$$|L_c'''(\mathbf{x}, \mathfrak{I}, \lambda)| \prec r(\mathbf{x})^{-1} \quad \text{dans } \Lambda^u \times G_{\mathbf{A}};$$

notre assertion résulte alors de ce que $\hat{F}^K(\mathfrak{I}, \lambda)$ est à décroissance rapide sur l'axe imaginaire pur, et nulle sauf pour un nombre fini de χ. $J'_a(F)$ est donc donné par l'intégrale double

$$J'_a(F) = \frac{1}{2}\int_{G_{\mathbf{A}}/P_{\mathbf{Q}}}\int_{\Lambda^u} f_a(\mathbf{x}) \sum_{\mathfrak{I}} \mathrm{Sp}_{\mathfrak{I}}\{\hat{F}(\mathfrak{I}, \lambda)\,L_c'''(\mathbf{x}, \mathfrak{I}, \lambda)^* L_c'''(\mathbf{x}, \mathfrak{I}, -\lambda)\}\,d\mathbf{x}\,d\lambda,$$

comme le montre un calcul formel évident.

D'après (II.1.21), cette intégrale peut encore s'écrire

$$J'_a(F) = \int_{H_{\mathbf{A}}(c)/H_{\mathbf{Q}}} f_a^0(\mathbf{h})\left[r(\mathbf{h})^{-2}\sum g_F(\xi) + B(\mathbf{h})\right] r(\mathbf{h})^2\,d\mathbf{h}$$

où l'on a posé

$$B(\mathbf{h}) = \frac{1}{2}\sum_{\mathfrak{I}}\int_{\Lambda^u} \mathrm{Sp}_{\mathfrak{I}}[\hat{F}(\mathfrak{I}, \lambda) + \hat{F}(\mathfrak{I}, -\lambda)]\,M(\mathfrak{I}, \lambda)\langle 2\lambda - 2\rho, \mathbf{h}\rangle\,d\lambda.$$

Les raisonnements qui précèdent (II.1.23) montrent que $B(\mathbf{h})$ est borné. Par ailleurs, la formule d'inversion de Fourier permet de déduire de (I.3.44) que

$$f_a^0(\mathbf{h}) = \frac{1}{4i\pi}\int_{\mathrm{Re}(s)=b>1} \hat{f}_a(s)\langle (s-1)\rho, \mathbf{h}\rangle\,ds.$$

Le résidu en $s = 1$ de la fonction $s \mapsto \hat{f}_a(s)$ vaut $\hat{\varphi}_a(-1)\frac{2}{\alpha} = 2$ d'après (I.3.38). En déplaçant le contour d'intégration on trouve donc

$$|f_a^0(\mathbf{h}) - 1| = \left|\frac{1}{4i\pi}\int_{\mathrm{Re}(s)=0} \hat{f}_a(s)\langle (s-1)\rho, \mathbf{h}\rangle\,ds\right| \prec r(\mathbf{h})^{-1}$$

dans $H_{\mathbf{A}}$. Tout ce qui précède montre donc que

$$(\text{II}.1.34)\qquad \varepsilon_a(c) = \int_{H_{\mathbf{A}}(c)/H_{\mathbf{Q}}} f_a^0(\mathbf{h})\, B(\mathbf{h})\, r(\mathbf{h})^2\, d\mathbf{h} = \int_{H_{\mathbf{A}}(c)/H_{\mathbf{Q}}} [O(r(\mathbf{h})^2) + O(r(\mathbf{h}))]\, d\mathbf{h}$$

tend vers zéro avec c uniformément dans $1 > a > 0$. Pour calculer $J'_a(F)$ il nous reste à évaluer

$$\int_{H_{\mathbf{A}}(c)/H_{\mathbf{Q}}} f_a^0(\mathbf{h})\, d\mathbf{h} = \int_{H_{\mathbf{A}}(c)/H_{\mathbf{Q}}} f_a^0(\mathbf{h}) \langle (1-s)\rho, \mathbf{h}\rangle \langle (s-1)\rho, \mathbf{h}\rangle\, d\mathbf{h}.$$

Mais si $\operatorname{Re}(s) > 1$, on déduit de (I.3.44) que

$$(\text{II}.1.35)\qquad \hat{f}_a(s) = \int_{H_{\mathbf{A}}/H_{\mathbf{Q}}} f_a^0(\mathbf{h}) \langle (-s+1)\rho, \mathbf{h}\rangle\, d\mathbf{h}, \qquad \operatorname{Re}(s) > 1$$

et, par application de la formule de Plancherel, on voit que

$$\int_{H_{\mathbf{A}}(c)/H_{\mathbf{Q}}} f_a^0(\mathbf{h})\, d\mathbf{h} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\operatorname{Re}(s)=b>1} \frac{c^{s-1}}{s-1} \hat{f}_a(s)\, ds.$$

Si l'on déplace le contour d'intégration, cette équation devient

$$\int_{H_{\mathbf{A}}(c)/H_{\mathbf{Q}}} f_a^0(\mathbf{h})\, d\mathbf{h} = \operatorname*{Res}_{s=1}\left[\frac{c^{s-1}}{s-1} \hat{f}_a(s)\right] + \frac{1}{2i\pi} \int_{\operatorname{Re}(s)=0} \frac{c^{s-1}}{s-1} \hat{f}_a(s)\, ds.$$

On rappelle que $\hat{f}_a(s) = \hat{\varphi}_a(s) + M(\text{id}, s\rho)\, \hat{\varphi}_a(-s)$ et que d'après (II.1.30), on a

$$|\hat{\varphi}_a(s)| = a^{\frac{\operatorname{Re}(s)+1}{2}} \alpha \left|\frac{\mu(s)}{\mu(1)}\right|,$$

d'où l'on déduit que

$$(\text{II}.1.36)\qquad \int_{H_{\mathbf{A}}(c)/H_{\mathbf{Q}}} g_F(\xi)\, f_a^0(\mathbf{h})\, d\mathbf{h} = \operatorname*{Res}_{s=1}\left[g_F(\xi) \frac{c^{s-1}}{s-1} \hat{\varphi}_a(-s)\, M(\text{id}, s\rho)\right] + O\left(a^{\frac{1}{2}}\right)$$

lorsque $a \to 0$.

En combinant (II.1.34) et (II.1.36) on voit qu'au total, on a démontré que l'on a

$$(\text{II}.1.37)\qquad J'_a(F) = \sum_{\xi} \operatorname*{Res}_{s=1}\left[g_F(\xi) \frac{c^{s-1}}{s-1} \hat{\varphi}_a(-s)\, M(\text{id}, s\rho)\right] + O\left(a^{\frac{1}{2}}\right) + \varepsilon_a(c)$$

lorsque $a \to 0$ avec $c \in]0, 1[$.

Il nous reste à calculer $J_a(F)$, ce qui sera l'objet du paragraphe suivant.

2. Calcul de $J_a(F)$.

Nous rappelons que nous avons construit une famille f_a de fonctions à décroissance rapide sur $G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}}$ en (II.1.28) et (II.1.29), et que $J_a(F)$ a été défini par la formule (II.1.24). Mais, par construction, φ_a et f_a sont des fonctions *positives* et $J_a(F)$ reste convergente si l'on remplace F par sa valeur absolue. On peut donc écrire que

$$\text{(II.2.1)} \qquad J_a(F) = \int_{G_{\mathbf{A}}/P_{\mathbf{Q}}} \varphi_a(\mathbf{x}) \sum_{\gamma \in G_P^\star} F^K(\mathbf{x}\gamma\mathbf{x}^{-1})\, d\mathbf{x}.$$

On rappelle que $G_P^\star$ est l'ensemble des éléments de $G_{\mathbf{Q}}$ qui sont, soit hyperboliques, et donc conjugués d'un élément de $H_{\mathbf{Q}}^\star = H_{\mathbf{Q}} - \{1\}$, soit unipotents et différents de 1, et donc conjugués d'un élément de $U_{\mathbf{Q}}^\star = U_{\mathbf{Q}} - \{1\}$. Notons $N(H_{\mathbf{Q}}) = H_{\mathbf{Q}} \cup w H_{\mathbf{Q}}$ Le normalisateur de $H_{\mathbf{Q}}$ dans $G_{\mathbf{Q}}$. Il est facile de voir que l'on a la relation

$$\sum_{G_P^\star} F^K(\mathbf{x}\gamma\mathbf{x}^{-1}) = \sum_{\gamma \in G_{\mathbf{Q}}/P_{\mathbf{Q}}} \sum_{\boldsymbol{\mu} \in U_{\mathbf{Q}}^\star} F^K(\mathbf{x}\gamma\boldsymbol{\mu}\gamma^{-1}\mathbf{x}^{-1}) + \sum_{\gamma \in G_{\mathbf{Q}}/N(H_{\mathbf{Q}})} \sum_{\boldsymbol{\xi} \in H_{\mathbf{Q}}^\star} F^K(\mathbf{x}\gamma\boldsymbol{\xi}\gamma^{-1}\mathbf{x}^{-1}).$$

En utilisant la décomposition de Bruhat (I.1.1) et en regroupant convenablement les termes, on obtient

$$\text{(II.2.2)} \qquad \begin{aligned}\sum_{G_P^\star} F^K(\mathbf{x}\gamma\mathbf{x}^{-1}) = {} & \sum_{\boldsymbol{\mu} \in U_{\mathbf{Q}}^\star} F^K(\mathbf{x}\boldsymbol{\mu}\mathbf{x}^{-1}) + \sum_{\boldsymbol{\xi} \in H_{\mathbf{Q}}^\star} \sum_{\boldsymbol{\mu} \in U_{\mathbf{Q}}} F^K(\mathbf{x}\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\mu}\mathbf{x}^{-1}) \\ & + \sum_{\boldsymbol{\xi} \in H_{\mathbf{Q}}} \Delta(\xi) \sum_{\boldsymbol{\mu} \in U_{\mathbf{Q}}} \sum_{\boldsymbol{\eta} \in U_{\mathbf{Q}}^\star} F^K(\mathbf{x}\boldsymbol{\mu} w \boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\eta} w^{-1}\boldsymbol{\mu}^{-1}\mathbf{x}^{-1}),\end{aligned}$$

où l'on a posé $\Delta(\xi) = 1$ si $\xi = 1$, et $\Delta(\xi) = \frac{1}{2}$ si $\xi \neq 1$.

Notons que lorsque $\mathbf{x}$ reste dans un compact toutes les sommes sont finies. D'après (II.5.8) les sommes en ξ portent sur un ensemble fini de ξ, indépendant de $\mathbf{x} \in G_{\mathbf{A}}$. Nous considérons donc les intégrales absolument convergentes suivantes :

$$\text{(II.2.3)} \qquad \int_{G_{\mathbf{A}}/P_{\mathbf{Q}}} \varphi_a(\mathbf{x}) \sum_{\boldsymbol{\eta} \in U_{\mathbf{Q}}^\star} F^K(\mathbf{x}\boldsymbol{\eta}\mathbf{x}^{-1})\, d\mathbf{x};$$

$$\text{(II.2.4)} \qquad \int_{G_{\mathbf{A}}/P_{\mathbf{Q}}} \varphi_a(\mathbf{x}) \sum_{\boldsymbol{\mu} \in U_{\mathbf{Q}}} F^K(\mathbf{x}\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\mu}\mathbf{x}^{-1})\, d\mathbf{x} \qquad (\text{où } \boldsymbol{\xi} \in H_{\mathbf{Q}}^\star);$$

$$\text{(II.2.5)} \qquad J_a(\xi) = \int_{G_{\mathbf{A}}/P_{\mathbf{Q}}} \varphi_a(\mathbf{x}) \sum_{\boldsymbol{\mu} \in U_{\mathbf{Q}}} \sum_{\boldsymbol{\eta} \in U_{\mathbf{Q}}^\star} F^K(\mathbf{x}\boldsymbol{\mu} w \boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\eta} w^{-1}\boldsymbol{\mu}^{-1}\mathbf{x}^{-1})\, d\mathbf{x}.$$

Examinons tout d'abord (II.2.3). Comme la quantité à intégrer est invariante à gauche par K et à droite par $U_{\mathbf{A}}$, l'intégrale (II.2.3) se réduit à

$$\int_{H_{\mathbf{A}}/H_{\mathbf{Q}}} \varphi_a(\mathbf{h}) \sum_{\eta \in U^*_{\mathbf{Q}}} F^K(\mathbf{h}\eta\mathbf{h}^{-1}) \langle 2\rho, \mathbf{h} \rangle d\mathbf{h}.$$

En vue, comme d'habitude, d'appliquer la formule de Plancherel nous posons

$$\text{(II.2.6)} \quad Z(F, \lambda) = \int_{H_{\mathbf{A}}/H_{\mathbf{Q}}} \sum_{\gamma \in U^*_{\mathbf{Q}}} F^K(\mathbf{h}\gamma\mathbf{h}^{-1}) \langle \lambda + \rho, \mathbf{h} \rangle d\mathbf{h}$$
$$= \int_{\mathbf{A}^*} F^K\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \langle \lambda + \rho, t \rangle d^*t, \qquad \text{pour } \lambda = s\rho + \chi \text{ et } \mathrm{Re}(s) > 1,$$

comme F^K est K-centrale $Z(F, s\rho + \chi)$ *est identiquement nul si* $\chi \neq 0$. D'autre part, $Z(F, \lambda)$ n'est rien d'autre qu'une fonction zêta de Tate associée à la fonction $t \mapsto F^K\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. *La fonction* $s \mapsto Z(F, s\rho)$ *se prolonge donc en une fonction méromorphe dans le plan complexe, les singularités étant, au plus, des pôles simples en* $s = \pm 1$. En particulier, le résidu en $s = 1$ est $2 g_F(1)$, où $g_F(1)$ est défini comme en (II.1.10). *De plus,* $Z(F, s\rho)$ *est bornée à l'infini dans les bandes verticales du plan complexe.*

Comme (II.2.3) peut s'écrire

$$\int_{H_{\mathbf{A}}/H_{\mathbf{Q}}} \langle -\lambda + \rho, \mathbf{h} \rangle \varphi_a(\mathbf{h}) \sum_{\gamma \in U^*_{\mathbf{Q}}} F^K(\mathbf{h}\gamma\mathbf{h}^{-1}) \langle \lambda + \rho, \mathbf{h} \rangle d\mathbf{h},$$

la formule de Plancherel montre que (II.2.3) est égale à

$$(4i\pi)^{-1} \int_{\substack{\mathrm{Re}(s) = b \\ b > 1}} \hat{\varphi}_a(s)\, Z(F, s\rho)\, ds = O(a)$$

comme il résulte de (II.1.30).

Considérons (II.2.4). On peut l'écrire

$$\int_{\mathbf{A}^*/\mathbf{Q}^*} \int_{\mathbf{A}/\mathbf{Q}} \varphi_a(\mathbf{h}) \sum_{\mu \in \mathbf{Q}} F^K\begin{pmatrix} \xi & hu\mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} r(\mathbf{h})^2\, du\, d^*h = \int_{\mathbf{A}^*/\mathbf{Q}^*} \int_{\mathbf{A}} \varphi_a(\mathbf{h})\, F^K\begin{pmatrix} \xi & hu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} r(\mathbf{h})^2\, d^*h.$$

Faisant le changement de variable $u \to h^{-1}u$, on trouve

$$g_F(\xi) \int_{H_{\mathbf{A}}/H_{\mathbf{Q}}} \varphi_a(\mathbf{h})\, d\mathbf{h} = g_F(\xi)\, \hat{\varphi}_a(1).$$

Pour justifier ces transformations, il faut prouver que les intégrales sont convergentes. Pour cela, il suffit de procéder comme ci-dessus en remplaçant F par sa valeur absolue. Compte tenu de (II.1.30), on voit que (II.2.4) est aussi $O(a)$ lorsque $a \to 0$.

Il nous reste à étudier (II.2.5). En intégrant d'abord sur $U_{\mathbf{A}}/U_{\mathbf{Q}}$, on voit que (II.2.5) s'écrit

$$\int_{{}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}/{}^{\mathrm{H}}\mathbf{Q}} r(\mathbf{h})^2 \varphi_a(\mathbf{h}) \int_{\mathrm{U}_\mathbf{A}} \sum_{\eta \in \mathrm{U}_\mathbf{Q}^*} \mathrm{F}^{\mathrm{K}}(\mathbf{h}\mathbf{u} w \boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\eta} w^{-1} \mathbf{u}^{-1} \mathbf{h}^{-1})\, d\mathbf{u}\, d\mathbf{h},$$

et en posant

$$\text{(II.2.7)} \qquad \int_{\mathrm{U}_\mathbf{A}} \sum_{\eta \in \mathrm{U}_\mathbf{Q}^*} \mathrm{F}^{\mathrm{K}}(\mathbf{h}\mathbf{u} w \boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\eta} w^{-1} \mathbf{u}^{-1} \mathbf{h}^{-1})\, d\mathbf{u} = \psi_{\mathrm{F}}^{\xi}(\mathbf{h}),$$

la formule (II.2.5) peut encore s'écrire

$$\text{(II.2.8)} \qquad \mathrm{J}_a(\xi) = \int_{{}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}/{}^{\mathrm{H}}\mathbf{Q}} \varphi_a(\mathbf{h}) \langle (1+s)\rho, \mathbf{h} \rangle \psi_{\mathrm{F}}^{\xi}(\mathbf{h}) \langle (1-s)\rho, \mathbf{h} \rangle\, d\mathbf{h}.$$

Dans un premier temps, nous admettrons la proposition suivante :

(II.2.9) *L'intégrale*

$$\int_{{}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}/{}^{\mathrm{H}}\mathbf{Q}} |\psi_{\mathrm{F}}^{\xi}(\mathbf{h}) \langle (1-s)\rho, \mathbf{h} \rangle |\, d\mathbf{h}$$

est convergente pour $\mathrm{Re}(s) > 1$.

La proposition (II.2.9) permet de poser, pour tout $\lambda \in \Lambda$ avec $\mathrm{Re}(s) > 1$:

$$\text{(II.2.10)} \qquad \mathrm{Z}(\mathrm{F}, \lambda, \xi) = \int_{{}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}/{}^{\mathrm{H}}\mathbf{Q}} \psi_{\mathrm{F}}^{\xi}(\mathbf{h}) \langle \rho - \lambda, \mathbf{h} \rangle\, d\mathbf{h}.$$

Comme F^{K} est K-centrale $\mathrm{Z}(\mathrm{F}, s\rho + \chi, \xi)$ est nul si $\chi \neq 0$.

(II.2.11) *Si* $b > 1$, *alors* $r(\mathbf{h})^{1-b} \psi_{\mathrm{F}}^{\xi}(\mathbf{h})$ *est de carré intégrable sur* $\mathrm{H}_\mathbf{A}/\mathrm{H}_\mathbf{Q}$.

Démonstration. — D'après (II.2.10), la transformée de Fourier de $r^{-b+1} \psi_{\mathrm{F}}^{\xi}$ [qui est intégrable, d'après (II.2.9)] est la fonction

$$\lambda \mapsto \mathrm{Z}(\mathrm{F}, \lambda + b\rho, \xi) \quad \text{sur } \Lambda^u,$$

de sorte qu'il suffit de prouver que $\mathrm{Z}(\mathrm{F}, s\rho, \xi)$ est de carré intégrable sur la droite $\mathrm{Re}(s) = b$. Considérons l'élément $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ de l'algèbre de Lie de G_∞. Il existe une fonction continue à support compact F′ sur $G_{\mathbf{A}}$ telle que

$$\frac{1}{|t|}\left| F[\exp(tX)\,\mathbf{x}\exp(-tX)] - F(\mathbf{x})\right| \leq F'(\mathbf{x})$$

pour tout $\mathbf{x} \in G_{\mathbf{A}}$ et tout t dans un voisinage convenable de o dans **R**. On a donc, en particulier,

$$|\psi_F^\xi[\exp(tX)\,\mathbf{h}] - \psi_F^\xi(\mathbf{h})|.|t|^{-1} \leq \psi_{F'}^\xi(\mathbf{h}).$$

Il résulte de (II.2.9) appliqué à F′ que

$$\int_{H_{\mathbf{A}}/H_{\mathbf{Q}}} t^{-1}\{\psi_F^\xi[\exp(tX)\,\mathbf{h}] - \psi_F^\xi(\mathbf{h})\}\langle(1-s)\,\rho\,;\,\mathbf{h}\rangle\,d\mathbf{h}$$

est borné sur la droite $\mathrm{Re}(\mathbf{s}) = b$, uniformément lorsque t reste dans un voisinage convenable de o. Mais on a

$$\langle(1-s)\,\rho,\ \exp(tX)\rangle = e^{(1-s)t},$$

de sorte que cette intégrale est égale à

$$t^{-1}[e^{(s-1)t} - 1]\,Z(F,\,s\rho,\,\xi).$$

Faisant tendre t vers zéro, on voit que $(s-1)\,Z(F, s\rho, \xi)$ est borné sur la droite $\mathrm{Re}(s) = b$, ce qui prouve (II.2.11).

Remarque. — Un peu plus de travail permet de montrer que $Z(F, s\rho, \xi)$ est intégrable sur la droite $\mathrm{Re}(s) = b$, de sorte que la formule d'inversion de Fourier montre que la fonction $r^{-b+1}\,\psi_F$ est bornée si $b > 1$. On voit aussi, directement sur (II.2.7) que $\psi_F(h) = 0$ dès que **h** est assez petit.

Nous pouvons donc appliquer la formule de Plancherel sur $H_{\mathbf{A}}/H_{\mathbf{Q}}$, ce qui donne

$$\text{(II.2.12)}\qquad J_a(\xi) = (4i\pi)^{-1}\int_{\mathrm{Re}(s)=b>1} Z(F,\,s\rho,\,\xi)\,\hat{\varphi}_a(-s)\,ds.$$

Il résulte des propriétés analytiques de $Z(F, s\rho, \xi)$ annoncées en (II.2.14) ci-dessous que l'on peut déplacer le contour d'intégration dans (II.2.12) pour trouver

$$J_a(\xi) = \frac{1}{2}\operatorname*{Res}_{s=1}[Z(F,\,s\rho,\,\xi)\,\hat{\varphi}_a(-s)] + (4i\pi)^{-1}\int_{\mathrm{Re}(s)=0} Z(F,\,s\rho,\,\xi)\,\hat{\varphi}_a(-s)\,ds.$$

Mais, d'après (II.1.30), cette dernière intégrale est $O(a^{\frac{1}{2}})$ *lorsque* $a \to 0$. Donc, on a

$$\text{(II.2.13)} \qquad J_a(\xi) = \frac{1}{2}\left[\operatorname*{Res}_{s=1}[Z(F, s\rho, \xi)\,\hat{\varphi}_a(-s)] + O\left(a^{\frac{1}{2}}\right)\right]$$

lorsque $a \to 0$.

Il nous reste donc à prouver (II.2.9) et que

(II.2.14) $Z(F, s\rho, \xi)$ *est une fonction analytique de s lorsque* $\mathrm{Re}(s) > 1$, *qui se prolonge en une fonction méromorphe dans le demi-plan* $\mathrm{Re}(s) \geq 0$ *avec, pour seule singularité, un pôle double en* $s = 1$. *De plus, cette fonction est à croissance lente à l'infini dans les bandes verticales* $0 \leq \mathrm{Re}(s) \leq b$.

Étude de $Z(F, s\rho, \xi)$. — La démonstration de (II.2.9) et de (II.2.14) sera faite simultanément. On commence par supposer que $F = |F|$ et que s est réel si bien que les transformations suivantes sont justifiées.

Faisons passer $\mathbf{h}$ par-dessus $\mathbf{u}$ et w dans la formule de définition (II.2.7) de ψ_F^ξ, on obtient alors

$$\psi_F^\xi(\mathbf{h}) = \langle -2\rho, \mathbf{h}\rangle \int_{U_{\mathbf{A}}} \sum_{\eta \in U_{\mathbf{Q}}^*} F^K(\mathbf{u}w\mathbf{h}\eta\xi\mathbf{h}w^{-1}\mathbf{u}^{-1})\,du.$$

En (I.1.2), on a défini un élément $\mathbf{h}(\mathbf{u}w) = \begin{bmatrix} h(\mathbf{u}w) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ tel que $\mathbf{u}^{-1}\mathbf{h}(\mathbf{u}w) \in K\mathbf{u}w$. Si l'on pose $f_F^\xi(u) = F^K\begin{pmatrix} \xi & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, pour tout $u \in \mathbf{A}$, il est clair que $f_F^\xi \in \mathcal{D}(\mathbf{A})$ lorsque $F \in \mathcal{D}(G_{\mathbf{A}})$. Ces notations permettent d'écrire

$$F^K(\mathbf{u}w\mathbf{h}^{-1}\eta\xi\mathbf{h}w^{-1}\mathbf{u}^{-1}) = f_F^\xi[h(\mathbf{u}w)\,h^{-1}\eta + (\xi - 1)\,u]$$

et donc

$$\psi_F^\xi(\mathbf{h}) = \langle -2\rho, \mathbf{h}\rangle \int_{\mathbf{A}} \sum_{\eta \in \mathbf{Q}^*} f_F^\xi[h(\mathbf{u}w)\,h^{-1}\eta + (\xi - 1)\,u]\,du.$$

Comme on suppose $F = |F|$ et s réel, on peut, au moins formellement, écrire (II.2.10) sous les formes suivantes :

$$Z(F, s\rho, \xi) = \int_{\mathbf{A}^*/\mathbf{Q}^*} \int_{\mathbf{A}} \sum_{\eta \in \mathbf{Q}^*} f_F^\xi[h(\mathbf{u}w)\,h^{-1}\eta + (\xi - 1)\,u]\langle(-1-s)\,\rho, h\rangle\, d^*h\,du.$$

En regroupant les sommes sur $\mathbf{A}^*/\mathbf{Q}^*$ et sur $\mathbf{Q}^*$, et en faisant le changement de variable $h(\mathbf{u}w)\,h^{-1}\eta = t$, on obtient

$$\text{(II.2.15)} \qquad Z(F, s\rho, \xi) = \int_{\mathbf{A}^*} \int_{\mathbf{A}} f_F^\xi[t + (\xi - 1)\,u]\frac{|t|^{\frac{s+1}{2}}}{R(u)^{s+1}}\,d^*t\,du,$$

où l'on a posé

(II.2.16) $$\mathrm{R}(u) = \langle \rho, \mathbf{h}(\mathbf{u}w)\rangle = r(\mathbf{u}w).$$

Nous sommes donc amenés à étudier la convergence et l'analyticité de (II.2.15). Nous distinguerons suivant que $\xi = 1$ ou $\xi \neq 1$.

Le cas $\xi = 1$. — Il est immédiat que si $\xi = 1$, la formule (II.2.15) donne

$$\mathrm{Z}(\mathrm{F}, s\rho, 1) = \int_{\mathbf{A}^\star} f_{\mathrm{F}}^{1}(t)\,|t|^{\frac{s+1}{2}}\,d^\star t \int_{\mathbf{A}} \mathrm{R}(u)^{-s-1}\,du;$$

les deux intégrales convergent lorsque $\mathrm{Re}(s) > 1$ et, d'après (II.2.6) et (I.3.34), on a

(II.2.17) $$\mathrm{Z}(\mathrm{F}, s\rho, 1) = \mathrm{Z}(\mathrm{F}, s\rho)\,\mathrm{M}(\mathrm{id}, s\rho).$$

Les propositions (II.2.9) et (II.2.14) en résultent facilement.

Le cas $\xi \neq 1$. — Toujours sous l'hypothèse $\mathrm{F} = |\mathrm{F}|$ et s réel, on a

(II.2.18) $$\mathrm{Z}(\mathrm{F}, s\rho, \xi) = \int_{\mathbf{A}^\star}\int_{\mathbf{A}} f_{\mathrm{F}}^{\xi}[(\xi - 1)\,u]\,\mathrm{R}(u-t)^{-s-1}\,|t|^{\frac{s+1}{2}}\,du\,d^\star t$$

grâce au changement de variable $u \mapsto u - (\xi - 1)^{-1}\,t$.

Pour étudier la convergence de cette intégrale, nous allons supposer $\mathrm{F} = \prod \mathrm{F}_p$ décomposable, donc aussi $f_{\mathrm{F}}^{\xi} = \prod_p f_{\mathrm{F}_p}^{\xi}$ et nous introduisons les facteurs locaux de (II.2.18), soit

(II.2.19) $$\mathrm{G}_{\mathrm{F}_p}^{\xi}(z) = \int_{\mathbf{Q}_p^\star}\int_{\mathbf{Q}_p} f_{\mathrm{F}_p}^{\xi}[(\xi - 1)\,u]\,\mathrm{R}_p(u-t)^{-2z}\,|t|_p^{z}\,d^\star t\,du$$

où l'on a posé

(II.2.20) $$\mathrm{R}_p(u) = \begin{cases} \mathrm{Max}(1, |u|_p) & \text{si } p \neq \infty, \\ \sqrt{1 + u_\infty^2} & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Remarquons que, d'après (I.1.3), on a

$$\mathrm{R}(u) = \prod_p \mathrm{R}_p(u) \qquad \text{pour} \quad u \in \mathbf{A}.$$

Il est immédiat que l'*intégrale*

(II.2.21) $$\int_{\mathbf{Q}_p^\star} |t|_p^{z}\,\mathrm{R}_p(u-t)^{-2z}\,d^\star t$$

est uniformément convergente lorsque $\mathrm{Re}(z) \geqq \varepsilon > 0$ *et que* u *reste dans un compact fixe de* $\mathbf{Q}_p$. Comme la fonction $u \mapsto f^{\xi}_{\mathrm{F}_p}[(\xi - 1)u]$ est dans $\mathcal{O}(\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p})$ on en déduit que l'intégrale (II.2.19) est convergente pour $\mathrm{Re}(z) > 0$, et définit une fonction analytique dans ce demi-plan. On remarquera que

$$\text{(II.2.22)} \qquad |\mathrm{G}^{\xi}_{\mathrm{F}_p}(z)| \leqq \mathrm{G}^{\xi}_{|\mathrm{F}_p|}(\mathrm{Re}(z)).$$

Pour obtenir le domaine de convergence de (II.2.18) nous devons déterminer les valeurs de z pour lesquelles le produit $\prod \mathrm{G}^{\xi}_{\mathrm{F}_p}(z)$ est multipliable. Pour cela, on remarque que, puisque $f^{\xi}_{\mathrm{F}} \in \mathcal{O}(\mathbf{A})$, il existe un ensemble fini S de places, comprenant la place à l'infini, tel que pour $p \notin \mathrm{S}$ la fonction $u \mapsto f^{\xi}_{\mathrm{F}_p}[(\xi - 1)u]$ soit égale à 1 pour $u \in \mathbf{O}_p$, et à 0 ailleurs. Par ailleurs, si $p \neq \infty$ et si $u \in \mathbf{O}_p$ on voit facilement que

$$\mathrm{Max}(1, |u - t|_p) = \mathrm{Max}(1, |t|_p),$$

c'est-à-dire que

$$\text{(II.2.23)} \qquad \mathrm{R}_p(u - t) = \mathrm{R}_p(t) \quad \text{pour} \quad u \in \mathbf{O}_p \quad \text{et} \quad t \in \mathbf{Q}_p \qquad (p \neq \infty).$$

Donc on a

$$\mathrm{G}^{\xi}_{\mathrm{F}_p}(z) = \int_{\mathbf{Q}_p^*} \int_{\mathbf{O}_p} \mathrm{R}_p(u - t)^{-2z} |t|^z \, d^*t \, du = \int_{\mathbf{Q}_p^*} \mathrm{R}_p(t)^{-2z} |t|^z \, d^*t$$

pour $p \notin \mathrm{S}$ et $\mathrm{Re}(z) > 0$. D'autre part,

$$\text{(II.2.24)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_{\mathbf{Q}_p^*} \mathrm{R}_p(t)^{-2z} |t|^z \, d^*t = \sum_{n \in \mathbf{Z}} p^{-nz} \mathrm{Max}(1, p^{-n})^{-2z} = \frac{1 + p^{-z}}{1 - p^{-z}} = \frac{1 - p^{-2z}}{(1 - p^{-z})^2} \\ \qquad\qquad\qquad \text{pour} \quad \mathrm{Re}(z) > 0 \quad \text{et} \quad p \neq \infty. \end{array} \right.$$

Il en résulte immédiatement que le produit $\prod \mathrm{G}^{\xi}_{\mathrm{F}_p}(z)$ est multipliable pour $\mathrm{Re}(z) > 1$ et que si $z = \frac{s+1}{2}$ on a :

$$\text{(II.2.25)} \qquad \mathrm{Z}(\mathrm{F}, s\rho, \xi) = \prod \mathrm{G}^{\xi}_{\mathrm{F}_p}(z) = \frac{\zeta(z)^2}{\zeta(2z)} \prod_{p \in \mathrm{S}} \mathrm{G}^{\xi}_{\mathrm{F}_p}(z) \prod_{\substack{p \in \mathrm{S} \\ p \neq \infty}} \frac{1 - p^{-z}}{1 + p^{-z}}$$

lorsque $\mathrm{Re}(z) > 1$, et $\xi \neq 1$. On en déduit donc (II.2.9) lorsque $\xi \neq 1$. D'après les propriétés bien connues des fonctions ζ, on voit que $\mathrm{Z}(\mathrm{F}, s\rho, \xi)$, qui est défini par (II.2.25) lorsque $\mathrm{Re}(s) > 1$, se prolonge en une fonction méromorphe de s au moins pour $\mathrm{Re}(s) \geqq 0$, et que, dans ce demi-plan, elle a pour seule singularité un pôle double en $s = 1$. On a déjà utilisé, pour démontrer (II.3.40), le fait que ζ est à croissance lente à l'infini dans toute bande verticale et que $\frac{1}{\zeta(s)}$ est à croissance lente à l'infini dans toute bande de la forme $1 \leqq \operatorname{Re}(s) < b$; compte tenu de (II.2.22), la proposition (II.2.14) en résulte alors pour $\xi \neq 1$.

3. Calcul du terme complémentaire.

Calcul de $I'''(F)$. — On a démontré au paragraphe 2 que

$$J_a(F) = O(a) + \sum_{\xi \in H_{\mathbf{Q}}} J_a(\xi)\,\Delta(\xi)$$

et que

$$J_a(\xi) = \frac{1}{2}\operatorname*{Res}_{s=1}[Z(F, s\rho, \xi)\,\hat{\varphi}_a(-s)] + O\left(a^{\frac{1}{2}}\right);$$

rappelons également la formule

$$\text{(II.1.37)} \quad J'_a(F) = \operatorname*{Res}_{s=1}\left[\hat{\varphi}_a(-s)\,M(\mathrm{id}, s\rho)\,\frac{c^{s-1}}{s-1}\sum g_F(\xi)\right] + O\left(a^{\frac{1}{2}}\right) + \varepsilon_a(c).$$

Comme on a

$$\text{(II.1.26)} \qquad I'''(F) = \lim_{a\to 0}[J_a(F) - J'_a(F)],$$

on voit que

$$\text{(II.3.1)} \qquad I'''(F) = \lim_{a\to 0}\left[\frac{1}{2}\operatorname*{Res}_{s=1}\left\{\hat{\varphi}_a(-s)\sum_{\xi\in H_{\mathbf{Q}}} N(s, \xi)\right\} + \varepsilon_a(c)\right],$$

où l'on a posé

$$\text{(II.3.2)} \qquad N(s, \xi) = \Delta(\xi)\,Z(F, s\rho, \xi) - 2g_F(\xi)\,\frac{c^{s-1}}{s-1}\,M(\mathrm{id}, s\rho).$$

Nous allons démontrer la proposition suivante :

(II.3.3) *La singularité de* $N(s, \xi)$ *en* $s = 1$ *est au plus un pôle simple.*

Pour démontrer (II.3.3) nous distinguerons le cas $\xi = 1$ et le cas $\xi \neq 1$.

Le cas $\xi = 1$. — On rappelle que $\Delta(1) = 1$ et que, d'après (II.2.17), on a

$$Z(F, s\rho, 1) = Z(F, s\rho)\,M(\mathrm{id}, s\rho).$$

Les remarques qui suivent (II.2.6) montrent que

$$\text{(II.3.4)} \qquad Z(F; s\rho) = \frac{2g_F(1)}{s-1} + \ldots$$

au voisinage de $s = 1$. Donc

$$\mathrm{N}(s, 1) = \mathrm{M}(\mathrm{id}, s\rho)\left[\mathrm{Z}(\mathrm{F}, s\rho) - \frac{2g_{\mathrm{F}}(1)}{s-1}\right]$$

possède au plus un pôle simple en $s = 1$, avec

$$\text{(II.3.5)} \qquad \operatorname*{Res}_{s=1} \mathrm{N}(s, 1) = \operatorname*{Res}_{s=1} \mathrm{M}(\mathrm{id}, s\rho) \lim_{s \to 1}\left[\mathrm{Z}(\mathrm{F}, s\rho) - \frac{2g_{\mathrm{F}}(1)}{s-1}\right]$$

puisque le pôle de $\mathrm{M}(\mathrm{id}, s\rho)$ est simple en $s = 1$.

Le cas $\xi \neq 1$. — On rappelle que $\Delta(\xi) = \frac{1}{2}$ lorsque $\xi \neq 1$ et que, d'après (II.2.25),

$$\text{(II.3.6)} \qquad \mathrm{Z}(\mathrm{F}, s\rho, \xi) = \frac{\zeta\left(\frac{s+1}{2}\right)^2}{\zeta(s+1)} \prod_{p \in \mathrm{S}} \mathrm{G}^{\xi}_{\mathrm{F}_p}\left(\frac{s+1}{2}\right) \prod_{\substack{p \in \mathrm{S} \\ p \neq \infty}} \frac{1 - p^{-\frac{1+s}{2}}}{1 + p^{-\frac{1+s}{2}}}.$$

Comme $\zeta\left(\frac{s+1}{2}\right)^2 = \frac{4}{(s-1)^2} + \ldots$ au voisinage de $s = 1$, on voit que

$$\mathrm{Z}(\mathrm{F}, s\rho, \xi) = \frac{4}{(s-1)^2}\left[\frac{1}{\zeta(2)} \prod_{p \in \mathrm{S}} \mathrm{G}^{\xi}_{\mathrm{F}_p}(1) \prod_{\substack{p \in \mathrm{S} \\ p \neq \infty}} \frac{1 - p^{-1}}{1 + p^{-1}}\right] + \ldots$$

au voisinage de $s = 1$. Calculons $\mathrm{G}^{\xi}_{\mathrm{F}_p}(1)$: d'après (II.2.19), on a

$$\mathrm{G}^{\xi}_{\mathrm{F}_p}(1) = \int_{\mathbf{Q}_p^\star} \int_{\mathbf{Q}_p} f^{\xi}_{\mathrm{F}_p}[(\xi - 1)u]\, \mathrm{R}_p(u - t)^{-2}\, |t|\, d^\star t\, du.$$

D'après le choix des mesures de Haar, on a

$$\text{(II.3.7)} \qquad |t|_p\, d^\star t = \frac{1}{1 - p^{-1}}\, dt \quad \text{pour } p \neq \infty \quad \text{et} \quad |t|_\infty\, d^\star t = dt.$$

Dans tous les cas on peut donc faire le changement de variable $t \mapsto t + u$, d'où

$$\text{(II.3.8)} \qquad \mathrm{G}^{\xi}_{p}(1) = \int_{\mathbf{Q}_p} f^{\xi}_{\mathrm{F}_p}[(\xi - 1)u]\, du \int_{\mathbf{Q}_p^\star} \frac{|t|\, d^\star t}{\mathrm{R}_p(t)^2}.$$

On calcule immédiatement

$$\text{(II.3.9)} \qquad \int_{\mathbf{Q}_p^\star} \frac{|t|_p\, d^\star t}{\mathrm{R}_p(t)^2} = \frac{1 + p^{-1}}{1 - p^{-1}} \quad \text{si } p \neq \infty$$

et

$$\text{(II.3.10)} \qquad \int_{\mathbf{R}} \frac{|t|_\infty\, d^\star t}{\mathrm{R}_\infty(t)^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^2} = \pi,$$

au total, il vient donc

$$Z(F, s\rho, \xi) = \frac{4}{(s-1)^2}\left[\frac{\pi}{\zeta(2)}\prod_{p\in S}\int_{\mathbf{Q}_p} f^{\xi}_{F_p}[(\xi-1)u]\,du\right]+\ldots.$$

Par définition de l'ensemble S, on a

$$\int_{\mathbf{Q}_p} f^{\xi}_{F_p}[(\xi-1)u]\,du = \int_{\mathbf{O}_p} du = 1 \qquad \text{pour} \quad p \notin S,$$

et donc

$$\prod_{p\in S}\int_{\mathbf{Q}_p} f^{\xi}_{F_p}[(\xi-1)u]\,du = \int_{\mathbf{A}} f^{\xi}_{F}[(\xi-1)u]\,du,$$

mais $\xi - 1$ est un nombre rationnel non nul, donc de norme 1 et l'on a, par suite,

(II.3.11) $$\int_{\mathbf{A}} f^{\xi}_{F}[(\xi-1)u]\,du = \int_{\mathbf{A}} f^{\xi}_{F}(u)\,du = g_F(\xi).$$

Ceci montre alors que

$$N(s, \xi) = \frac{2}{(s-1)^2}\,\frac{\pi}{\zeta(2)}\,g_F(\xi) - \frac{2g_F(\xi)\,c^{s-1}}{s-1}\,M(\mathrm{id}, s\rho)+\ldots$$

au voisinage de $s=1$. La proposition (II.3.3) lorsque $\xi \neq 1$ résulte alors de ce que, d'après (I.3.38),

(II.3.12) $$M(\mathrm{id}, s\rho) = \frac{1}{s-1}\,\frac{2}{\alpha}+\ldots,$$

avec $\alpha = \frac{\pi}{3}$, et du fait que $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

On peut maintenant revenir au calcul de $I'''(F)$, et comme $N(s, \xi)$ a un pôle simple en $s=1$, on voit d'après (II.3.1) que

$$I'''(F) = \lim_{a\to 0}\left\{\frac{1}{2}\hat{\varphi}_a(-1)\operatorname*{Res}_{s=1}\sum_{\xi\in H_{\mathbf{Q}}} N(s, \xi) + \varepsilon_a(c)\right\}.$$

Nous savons, d'après (II.1.31), que $\hat{\varphi}_a(-1) = \alpha =$ volume $G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}}$ et comme

$$c^{s-1} = 1 + (s-1)\log c + \ldots$$

au voisinage de $s=1$, on a

(II.3.13) $$I'''(F) = -2\sum g_F(\xi)\log c + \frac{\alpha}{2}\operatorname*{Res}_{s=1}\sum\left\{\Delta(\xi)\,Z(F, s\rho, \xi) - \frac{2g_F(\xi)}{s-1}M(\mathrm{id}, s\rho)\right\} + \lim_{a\to 0}\varepsilon_a(c).$$

Remarquons que (II.1.34) montre que $\varepsilon_a(c)$ a une limite lorsque $a \to 0$; nous noterons $\varepsilon(c)$ cette limite, qui est une fonction qui tend vers zéro avec c.

Rappelons maintenant que $I''(F)$ est donné par la formule (II.1.12). Les termes en $-2g_F(\xi)\log c$ se détruisent, et $I(F)$ est égal à la somme d'un terme constant (c'est-à-dire ne dépendant pas de c) et de l'expression $\varepsilon(c) + c^{2\delta}O(1)$, qui tend vers zéro avec c. Comme $I(F)$ est indépendant de c, ce dernier terme est nul, et l'on a donc

$$
\text{(II.3.14)} \qquad \begin{aligned} I(F) = {} & \frac{\alpha}{2}\operatorname*{Res}_{s=1} \sum_{\xi \in \mathbf{Q}^*} \left[\Delta(\xi)\, Z(F, s\rho, \xi) - \frac{2g_F(\xi)}{s-1} M(\mathrm{id}, s\rho)\right] \\ & + \sum_{\mathfrak{S}} \int_{\Lambda^u} \mathrm{Sp}_{\mathfrak{S}}[\hat{F}(\mathfrak{S}, \lambda)\, M(\mathfrak{S}, \lambda)\, M'(\mathfrak{S}, -\lambda)]\, d\lambda \\ & - \frac{1}{4} \sum_{2\chi=0} \sum_{\mathfrak{S}} \mathrm{Sp}_{\mathfrak{S}}[\hat{F}(\mathfrak{S}, \chi)\, M(\mathfrak{S}, \chi)] \end{aligned}
$$

pour toute fonction $F \in \mathcal{D}(G_{\mathbf{A}})$ K-*finie à droite et à gauche.*

Nous allons encore transformer cette formule, en donner différentes formes, et en expliciter des cas particuliers. Tout d'abord nous calculons le résidu qui y figure. Dans tout ce qui suit nous supposons $F \in \mathcal{D}(G_{\mathbf{A}})$ décomposable, $F = \prod F_p$; K-finie à droite et à gauche.

Calcul du résidu : *Cas* $\xi = 1$. — Il faut calculer

$$
\operatorname*{Res}_{s=1} \left\{ Z(F, s\rho, 1) - \frac{2g_F(1)}{s-1} M(\mathrm{id}, s\rho) \right\}.
$$

Nous rappelons d'abord les formules suivantes :

$$
\text{(II.2.17)} \qquad Z(F, s\rho, 1) = Z(F, s\rho)\, M(\mathrm{id}, s\rho)
$$

et

$$
\text{(II.2.6)} \qquad Z(F, s\rho) = \prod_p \int_{\mathbf{Q}_p^*} F_p^K\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \langle (s+1)\rho, t \rangle\, d^*t, \qquad \mathrm{Re}(s) > 1;
$$

rappelons aussi que le résidu en $s = 1$ de $Z(F, s\rho)$ est égal à $2g_F(1)$, et celui de $M(\mathrm{id}, s\rho)$ à $\frac{2}{\alpha}$.

Le résidu cherché est donc égal, d'après (II.2.17), à

$$
\frac{2}{\alpha} \lim_{s \to 1} \left\{ Z(F, s\rho) - \frac{2g_F(1)}{s-1} \right\}.
$$

Mais pour presque tout p la fonction $t \mapsto \mathrm{F}_p^{\mathrm{K}}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la fonction caractéristique de $\mathbf{O}_p$, et il est facile de vérifier qu'alors

$$\int_{\mathbf{Q}} \mathrm{F}_p^{\mathrm{K}}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \langle (s+1)\rho, t \rangle \, d^\star t = \left(1 - p^{-\frac{s+1}{2}}\right)^{-1}.$$

Posons

$$\varphi_p(s) = \begin{cases} 1 - p^{-\frac{1+s}{2}} & \text{si } p \neq \infty, \\ 1 & \text{si } p = \infty. \end{cases} \tag{II.3.15}$$

Il est clair que l'intégrale

$$\theta_p(\mathrm{F}_p, s) = \varphi_p(s) \int_{\mathbf{Q}_p^\star} \mathrm{F}_p^{\mathrm{K}}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \langle (s+1)\rho, t \rangle \, d^\star t, \tag{II.3.16}$$

qui est une fonction analytique de s lorsque $\mathrm{Re}(s) > -1$, est égale à 1 pour presque tout p. En observant que

$$\prod \varphi_p(s)^{-1} = \zeta\left(\frac{s+1}{2}\right) \qquad \text{si} \quad \mathrm{Re}(s) > 1,$$

on voit que

$$\mathrm{Z}(\mathrm{F}, s\rho) = \zeta\left(\frac{s+1}{2}\right) \prod_p \theta_p(\mathrm{F}_p, s) \qquad \text{si} \quad \mathrm{Re}(s) > -1.$$

(Le produit est trivialement multipliable puisque presque tous les facteurs sont égaux à 1 identiquement.)

Posons

$$g_{\mathrm{F}_p}(\xi) = \int_{\mathbf{Q}_p} \mathrm{F}_p^{\mathrm{K}}\begin{pmatrix} \xi & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} du = \int_{\mathbf{Q}_p} f_{\mathrm{F}_p}^{\xi}(u) \, du. \tag{II.3.17}$$

Comme

$$dt = (1 - p^{-1}) \, |t|_p \, d^\star t = \varphi_p(1) \, |t|_p \, d^\star t \tag{II.3.18}$$

si $p \neq \infty$, et

$$dt = |t|_\infty \, d^\star t = \varphi_\infty(1) \, |t|_\infty \, d^\star t,$$

on a

$$\theta_p(\mathrm{F}_p, 1) = \varphi_p(1) \int_{\mathbf{Q}_p^\star} \mathrm{F}_p^{\mathrm{K}}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \langle 2\rho, t \rangle \, d^\star t = g_{\mathrm{F}_p}(1),$$

d'où l'on tire aussitôt que

$$\prod \theta_p(\mathrm{F}_p, 1) = \prod_p g_{\mathrm{F}_p}(1) = g_{\mathrm{F}}(1).$$

Le développement de Laurent de $\zeta\left(\frac{s+1}{2}\right)$ étant donné par

$$\zeta\left(\frac{s+1}{2}\right)=\frac{2}{s-1}+\lambda_0+\ldots$$

au voisinage de $s=1$, on voit qu'en notant $\theta'_p(\mathrm{F}, s)$ la dérivée de $\theta_p(\mathrm{F}_p, s)$, le développement de Laurent au voisinage de $s=1$ de $\mathrm{Z}(\mathrm{F}, s\rho)$ est donné par

$$\mathrm{Z}(\mathrm{F}, s\rho)=\frac{2g_{\mathrm{F}}(1)}{s-1}+\lambda_0 g_{\mathrm{F}}(1)+2\sum_p \theta'_p(\mathrm{F}_p, 1)\prod_{q\neq p} g_{\mathrm{F}_q}(1)+\ldots,$$

la série ci-dessus étant en fait une somme finie.

On a donc au total la formule

$$\text{(II.3.19)}\qquad \operatorname*{Res}_{s=1}\left[\mathrm{Z}(\mathrm{F}, s\rho, 1)-\frac{2g_{\mathrm{F}}(1)}{s-1}\mathrm{M}(\mathrm{id}, s\rho)\right]=\frac{2}{\alpha}\left\{\lambda_0 g_{\mathrm{F}}(1)+2\sum_p \theta'_p(\mathrm{F}_p, 1)\prod_{q\neq p} g_{\mathrm{F}_p}(1)\right\}.$$

Calcul du résidu : *Cas* $\xi\neq 1$. — Rappelons les formules

$$\text{(II.2.25)}\qquad \mathrm{Z}(\mathrm{F}, s\rho, \xi)=\prod \mathrm{G}^{\xi}_{\mathrm{F}_p}\left(\frac{s+1}{2}\right),\qquad \mathrm{Re}(z)>1;$$

$$\text{(II.2.19)}\qquad \mathrm{G}^{\xi}_{\mathrm{F}_p}(z)=\int_{\mathbf{Q}_p^*}\int_{\mathbf{Q}_p} f^{\xi}_{\mathrm{F}_p}[(\xi-1)u]\,\mathrm{R}(u-t)^{-2z}\,|t|^z\,d^*t\,du,\qquad \mathrm{Re}(z)>0.$$

Introduisons les fonctions

$$\text{(II.3.20)}\qquad \psi_p(z)=\int_{\mathbf{Q}_p^*}\frac{|t|_p^z}{\mathrm{R}_p(t)^{2z}}\,d^*t,\qquad \mathrm{Re}(z)>0$$

[*cf.* (II.2.21)]. On a remarqué en (II.2.23) que

$$\mathrm{G}^{\xi}_{\mathrm{F}_p}(z)=\psi_p(z)\quad \text{pour presque tout } p.$$

D'autre part, on a [*cf.* (II.2.24)]

$$\prod_{p\neq\infty}\psi_p(z)=\frac{\zeta(z)^2}{\zeta(2z)}\qquad \text{si}\quad \mathrm{Re}(z)>1.$$

Afin d'étudier le développement limité de $\mathrm{Z}(\mathrm{F}, s\rho, \xi)$ on est amené à étudier pour tout p le développement limité au voisinage de $z=1$ du produit

$$\prod_p \mathrm{G}^{\xi}_{\mathrm{F}_p}(z)\,\psi_p^{-1}(z),$$

dont presque tous les facteurs sont triviaux. Pour cela nous allons étudier l'expression

(II.3.21) $$\psi_p(z, u) = \int_{\mathbf{Q}_p^*} \frac{|t|_p^z}{\mathrm{R}_p(u-t)^{2z}}\, d^*t, \qquad \mathrm{Re}(z) > 0.$$

Il est clair sur la définition de $\mathrm{R}_p(u)$ que

$$\psi_p(z, u) = \psi_p(z) \qquad \text{si} \quad p \neq \infty \quad \text{et} \quad |u|_p \leqq 1,$$

car on a

$$\mathrm{R}_p(u-t) = \mathrm{R}_p(t) \qquad \text{si} \quad |u|_p \leqq 1 \quad \text{et} \quad p \neq \infty;$$

que $\psi_p(z, 0) = \psi_p(z)$; et que

(II.3.22) $$\mathrm{G}_{\mathrm{F}_p}^{\xi}(z) = \int_{\mathbf{Q}_p} f_{\mathrm{F}_p}^{\xi}[(\xi - 1)u]\, \psi_p(z, u)\, du.$$

Le développement de $\psi_p(z, u)$ pour $p \neq \infty$. — Un calcul p-adique, que nous ne reproduirons pas, montre que l'on a

$$\psi_p(z, u) = \frac{2\,\mathrm{R}_p(u)^{-z} p^{-z}}{1 - p^{-z}} + \frac{1 - 2p^{-1}}{1 - p^{-1}} \mathrm{R}_p(u)^{-z} + \frac{\mathrm{R}_p(u)^{z-1}}{1 - p^{-1}} + \frac{\mathrm{R}_p(u)^{z-1} p^{1-2z} - \mathrm{R}_p(u)^{-z}}{1 - p^{1-2z}}.$$

On en déduit que

$$\frac{d}{dz} \psi_p(z, u) \Big|_{z=1} = \frac{1 + p^{-1}}{1 - p^{-1}} \log \mathrm{R}_p(u) - \frac{2p^{-1} \log p}{(1 - p^{-1})^2}.$$

Mais comme le montre un calcul facile, on a

$$\frac{d}{dz} \int_{\mathbf{Q}_p^*} \frac{|t|_p}{\mathrm{R}_p(t)^{2z}}\, d^*t \Big|_{z=1} = \frac{-2p^{-1} \log p}{(1 - p^{-1})^2}.$$

Les deux égalités précédentes (ou bien un calcul direct) montrent aussi que

(II.3.23) $$\int_{\mathbf{Q}_p^*} \frac{|t|_p \log |t|_p}{\mathrm{R}_p(u-t)^2}\, d^*t = \frac{1 + p^{-1}}{1 - p^{-1}} \log \mathrm{R}_p(u);$$

en résumé, on a, si $p \neq \infty$,

(II.3.24) $$\psi_p(z, u) = \psi_p(z)\,[1 + (z-1) \log \mathrm{R}_p(u) + \mathrm{O}(z-1)^2].$$

Le développement limité de $\psi_p(z, u)$ pour $p = \infty$. — Nous allons voir que l'on a la même formule à l'infini. En effet, on obtient par la méthode des résidus

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|t|_\infty^z}{1 + (u-t)^2}\, d^*t = \pi \frac{\sin \dfrac{\pi z}{2}}{\sin \pi z} [(1 - iu)^z + (1 + iu)^z]$$

et donc, en dérivant,

$$\text{(II.3.25)}\quad \frac{d}{dz}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|t|_\infty^z}{1+(u-t)^2}d^*t\Big|_{z=1}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\log|t|_\infty}{1+(u-t)^2}dt=\pi\log\sqrt{1+u^2}$$
$$=\pi\log R_\infty(u)=\psi_\infty(1)\log R_\infty(u).$$

Au voisinage de $z=1$, on a

$$\psi_\infty(z,u)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t^z}{[1+(u-t)^2]^z}d^*t$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{[1+(u-t)^2]^z}+(z-1)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\log|t|}{1+(u-t)^2}dt+O(z-1)^2$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^2)^z}+(z-1)\psi_\infty(1)\log R_\infty(u)+O(z-1)^2.$$

Appliquant l'égalité précédente pour $u=0$, on obtient

$$\text{(II.3.26)}\qquad \psi_\infty(z,0)=\psi_\infty(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^2)^z}+O(z-1)^2,$$

ce qui permet alors d'obtenir la formule cherchée :

$$\text{(II.3.27)}\qquad \psi_\infty(z,u)=\psi_\infty(z)[1+(z-1)\log R_\infty(u)+O(z-1)^2]$$

au voisinage de $z=1$.

Retour au global. — Nous avons donc démontré que, pour tout p, on a

$$\text{(II.3.28)}\qquad \int_{\mathbf{Q}_p^*}\frac{|t|_p\log|t|_p}{R_p(u-t)^2}d^*t=\psi_p(1)\log R_p(u),$$

d'où nous avons déduit que pour tout p on a

$$\psi_p(z,u)=\psi_p(z)[1+(z-1)\log R_p(u)+O(z-1)^2]$$

au voisinage de $z=1$. D'autre part, lorsque u reste dans un compact de $\mathbf{A}$ on sait que l'on a $\psi_p(z,u)=\psi_p(z)$ pour presque tout p; il en résulte que le produit

$$\prod_p\psi_p(z,u)\,\psi_p(z)^{-1}$$

est multipliable au voisinage de $z=1$ et vaut

$$1+(z-1)\log R(u)+O(z-1)^2.$$

D'après (II.3.22), on en déduit immédiatement que

$$(\text{II}.3.29)\qquad \prod_p \mathrm{G}^{\xi}_{\mathrm{F}_p}(z)\,\psi_p(z)^{-1}$$
$$=\prod_p\left\{\psi_p(z)^{-1}\int_{\mathbf{Q}} f^{\xi}_{\mathrm{F}_p}[(\xi-1)\,u]\,\psi_p(z,\,u)\,du\right\}$$
$$=\int_{\mathbf{A}} f^{\xi}_{\mathrm{F}}[(\xi-1)\,u]\,[1+(z-1)\log \mathrm{R}(u)+\mathrm{O}(z-1)^2]\,du$$
$$=g_{\mathrm{F}}(\xi)+(z-1)\int_{\mathbf{A}} f^{\xi}_{\mathrm{F}}[(\xi-1)\,u]\log\mathrm{R}(u)\,du+\mathrm{O}(z-1)^2$$

au voisinage de $z=1$; noter qu'on intègre sur un compact, et que le produit est fini. D'autre part,

$$\mathrm{Z}(\mathrm{F},\,s\rho,\,\xi)=\prod \mathrm{G}^{\xi}_{\mathrm{F}_p}\left(\frac{s+1}{2}\right)=\frac{\zeta\left(\frac{s+1}{2}\right)^2}{\zeta(s+1)}\psi_\infty\left(\frac{s+1}{2}\right)\prod_p\left\{\mathrm{G}^{\xi}_{\mathrm{F}_p}\left(\frac{s+1}{2}\right)\psi_p\left(\frac{s+1}{2}\right)^{-1}\right\}.$$

Nous voulons calculer, lorsque $\xi\neq 1$, l'expression

$$\operatorname*{Res}_{s=1}\left\{\Delta(\xi)\,\mathrm{Z}(\mathrm{F},\,s\rho,\,\xi)-\frac{2g_{\mathrm{F}}(\xi)}{s-1}\mathrm{M}(\mathrm{id},\,s\rho)\right\}.$$

D'après (I.3.34), on a

$$\mathrm{M}(\mathrm{id},\,s\rho)=\int_{\mathrm{U}_{\mathbf{A}}}\mathrm{L}(\mathbf{u}w,\,\mathrm{id},\,s\rho)\,d\mathbf{u}=\int_{\mathbf{A}}\mathrm{R}(u)^{-s-1}=\frac{\zeta(s)}{\zeta(s+1)}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{du}{(1+u^2)^{\frac{s+1}{2}}}$$

ou encore, d'après (II.3.26),

$$\mathrm{M}(\mathrm{id},\,s\rho)=\frac{\zeta(s)}{\zeta(s+1)}\left[\psi_\infty\left(\frac{s+1}{2}\right)+\mathrm{O}(s-1)^2\right].$$

Nous sommes ainsi ramenés au calcul de

$$\operatorname*{Res}_{s=1}\left\{\frac{1}{2}\frac{\zeta\left(\frac{s+1}{2}\right)^2}{\zeta(s+1)}\psi_\infty\left(\frac{s+1}{2}\right)\prod_p \mathrm{G}^{\xi}_p\left(\frac{s+1}{2}\right)\psi_p\left(\frac{s+1}{2}\right)^{-1}-\frac{2g_{\mathrm{F}}(\xi)}{s-1}\frac{\zeta(s)}{\zeta(s+1)}\psi_\infty\left(\frac{s+1}{2}\right)\right\}$$
$$=\frac{\psi_\infty(1)}{\zeta(2)}\operatorname*{Res}_{s=1}\left\{\frac{1}{2}\zeta\left(\frac{s+1}{2}\right)^2\prod_p \mathrm{G}^{\xi}_p\left(\frac{s+1}{2}\right)\psi_p\left(\frac{s+1}{2}\right)^{-1}-2\frac{g_{\mathrm{F}}(\xi)}{s-1}\zeta(s)\right\}$$

en utilisant (II.3.29) et le fait que $\zeta\left(\frac{s+1}{2}\right)^2=\frac{4}{(s-1)^2}+\ldots$, on obtient

$$=\frac{\psi_\infty(1)}{\zeta(2)}\int_{\mathbf{A}} f^{\xi}_{\mathrm{F}}[(\xi-1)\,u]\log\mathrm{R}(u)\,du+g_{\mathrm{F}}(\xi)\frac{\psi_\infty(1)}{\zeta(2)}\operatorname*{Res}_{s=1}\left[\frac{1}{2}\zeta\left(\frac{s+1}{2}\right)^2-\frac{2\zeta(s)}{s-1}\right].$$

Mais $\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \lambda_0 + \ldots$, d'où

$$\zeta\left(\frac{s+1}{2}\right)^2 = \frac{4}{(s-1)^2} + \frac{4\lambda_0}{s-1} + \ldots.$$

Le résidu dans la dernière formule ci-dessus est donc nul. En remarquant enfin que $\frac{\psi_\infty(1)}{\zeta(2)} = \frac{\pi}{\zeta(2)} = \frac{2}{\alpha}$, on peut donc énoncer la proposition ci-dessous.

Lorsque $\xi \neq 1$, *on a*

$$\text{(II.3.30)} \qquad \operatorname*{Res}_{s=1}\left\{\Delta(\xi)\, Z(F, s\rho, \xi) - \frac{2g_F(\xi)}{s-1} M(\mathrm{id}, s\rho)\right\}$$

$$= \frac{2}{\alpha}\int_{\mathbf{A}} f_F^\xi[(\xi-1)u] \log R(u)\, du$$

$$= \frac{2}{\alpha}\int_{\mathbf{A}} F^K\begin{pmatrix}\xi & (\xi-1)u\\ 0 & 1\end{pmatrix} \log R(u)\, du$$

$$= \frac{2}{\alpha}\sum_p \int_{\mathbf{Q}_p} F^K\begin{pmatrix}\xi & u\\ 0 & 1\end{pmatrix} \log R_p\left(\frac{u}{\xi-1}\right) du \prod_{q\neq p} g_{F_q}(\xi).$$

Nous avons donné en (I.3.29) une formule de décomposition de l'opérateur $M(\mathfrak{P}, \lambda)$ en produit d'une fonction scalaire $m(\lambda)$ indépendante de $\mathfrak{P}$ et d'un nombre fini d'opérateurs $R_p(\mathfrak{P}_p, \lambda)$. On sait, d'après (I.3.31), que

$$M(\mathfrak{P}, -\lambda)\, M(\mathfrak{P}, \lambda) = P(\mathfrak{P}, \lambda);$$

d'autre part, il est clair sur la formule de définition que $m(\lambda)\, m(-\lambda) = 1$. Les opérateurs $R_p(\mathfrak{P}_p, \lambda)$

$$V(\mathfrak{P}, \lambda) \mapsto V(\mathfrak{P}, -\lambda),$$

sont inversibles; nous noterons $R_p(\mathfrak{P}_p, \lambda)^{-1}$ l'opérateur inverse, prolongé à tout V en le choisissant nul sur l'orthogonal de $V(\mathfrak{P}_p - \lambda)$. Comme $R(\mathfrak{P}, \lambda) = \prod R_p(\mathfrak{P}_p, \lambda)$ est un isomorphisme isométrique de $V(\mathfrak{P}, \lambda)$ dans $V(\mathfrak{P}, -\lambda)$ lorsque $\mathrm{Re}(s) = 0$ et $\lambda = s\rho + \chi$, et comme

$$R(\mathfrak{P}, -\lambda)\, R(\mathfrak{P}, \lambda) = P(\mathfrak{P}, \lambda),$$

on a donc

$$R_p(\mathfrak{P}_p, \lambda)^{-1} = R(\mathfrak{P}, -\lambda) \prod_{q\neq p} R_q(\mathfrak{P}_q, \lambda),$$

ce qui montre que l'opérateur $R_p(\mathfrak{P}_p, \lambda)^{-1}$ est borné sur l'axe imaginaire pur, tous les facteurs du second membre l'étant.

En prenant la dérivée logarithmique de la relation

$$\mathrm{M}(\mathfrak{S}, -\lambda) = m(-\lambda)\prod \mathrm{R}_p(\mathfrak{S}_p, -\lambda)$$

et en tenant compte des équations fonctionnelles de $\mathrm{M}(\mathfrak{S}, -\lambda)$ et $m(-\lambda)$, il vient, d'autre part,

$$\text{(II.3.31)}\qquad \begin{aligned}&\mathrm{M}(\mathfrak{S}, \lambda)\,\mathrm{M}'(\mathfrak{S}, -\lambda)\\ &\quad = m(\lambda)\,m'(-\lambda) + \sum_p \mathrm{R}_p(\mathfrak{S}_p, -\lambda)^{-1}\mathrm{R}'_p(\mathfrak{S}_p, -\lambda),\end{aligned}$$

où M', m' et R'_p sont les dérivées des fonctions $s \mapsto \mathrm{M}(\mathfrak{S}, s\rho + \chi)$, etc. La somme ci-dessus est finie, et toutes les fonctions qu'elle fait intervenir sont à croissance lente sur l'axe imaginaire pur; plus précisément, $\dfrac{m'(\lambda)}{m(\lambda)}$ est à croissance polynomiale en $\log|\operatorname{Im}(s)|$, et les termes $\mathrm{R}_p(\mathfrak{S}_p, -\lambda)^{-1}\mathrm{R}'_p(\mathfrak{S}_p, -\lambda)$ sont bornés, soit parce que $\mathrm{R}_\infty(\mathfrak{S}_\infty, -\lambda)$ est une fonction rationnelle de s, soit parce que la définition de $\mathrm{R}_p(\mathfrak{S}_p, -\lambda)$ ne fait intervenir, pour $p \neq \infty$, que des fonctions exponentielles de s [*voir* les formules qui précèdent (I.3.21)]. Si $\mathrm{F} \in \mathcal{D}(\mathrm{G}_{\mathbf{A}})$, posons

$$\text{(II.3.32)}\qquad \hat{\mathrm{F}}(\lambda) = \int_{\mathrm{H}_{\mathbf{A}}}\int_{\mathrm{U}_{\mathbf{A}}} \mathrm{F}^{\mathrm{K}}(\mathbf{hu})\langle -\lambda + \rho, \mathbf{h}\rangle\, d\mathbf{h}\, d\mathbf{u},$$

et si $\mathrm{F}_p \in \mathcal{D}(\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p})$, posons de même :

$$\text{(II.3.33)}\qquad \hat{\mathrm{F}}_p(\lambda) = \int_{\mathrm{H}_p}\int_{\mathrm{U}_p} \mathrm{F}^{\mathrm{K}}_p(\mathbf{hu})\langle -\lambda + \rho, \mathbf{h}\rangle\, d\mathbf{h}\, d\mathbf{u};$$

c'est la trace de l'opérateur de convolution par F (resp. F_p) dans l'espace de la représentation de $\mathrm{G}_{\mathbf{A}}$ (resp. G_p) induite par le caractère λ de $\mathrm{H}_{\mathbf{A}}\mathrm{U}_{\mathbf{A}}$ (resp. $\mathrm{H}_p\mathrm{U}_p$). Il est immédiat de voir que

$$\text{(II.3.34)}\qquad \begin{cases}\hat{\mathrm{F}}\;(\lambda) = \displaystyle\sum_{\mathfrak{S}} \mathrm{Sp}_{\mathfrak{S}}\,\hat{\mathrm{F}}\;(\mathfrak{S}, \lambda),\\ \hat{\mathrm{F}}_p(\lambda) = \displaystyle\sum_{\mathfrak{S}_p} \mathrm{Sp}_{\mathfrak{S}_p}\hat{\mathrm{F}}_p(\mathfrak{S}_p, \lambda),\end{cases}$$

où

$$\hat{\mathrm{F}}_p(\mathfrak{S}_p, \lambda) = \iiint_{\mathrm{K}_p\times\mathrm{H}_p\times\mathrm{U}_p} \mathrm{F}^{\mathrm{K}}_p(\mathbf{khu})\,\mathfrak{S}_p(\mathbf{k})^{-1}\langle -\lambda + \rho, \mathbf{h}\rangle\, d\mathbf{k}\, d\mathbf{h}\, d\mathbf{u}.$$

Il est, par ailleurs, bien connu que

$$\hat{\mathrm{F}}(\lambda) = \hat{\mathrm{F}}(-\lambda).$$

On peut donc effectuer, d'après (II.3.31), la transformation suivante :

(II.3.35)
$$\sum_{\mathfrak{I}}\int_{\Lambda^u}\mathrm{Sp}_{\mathfrak{I}}\hat{\mathrm{F}}(\mathfrak{I},\lambda)\,\mathrm{M}(\mathfrak{I},\lambda)\,\mathrm{M}'(\mathfrak{I},-\lambda)\,d\lambda$$
$$=\int_{\Lambda^u}\sum_{\mathfrak{I}}\mathrm{Sp}_{\mathfrak{I}}\hat{\mathrm{F}}(\mathfrak{I},\lambda)\frac{m'(-\lambda)}{m(-\lambda)}\,d\lambda$$
$$+\sum_{\mathfrak{I}}\sum_{p}\int_{\Lambda^u}\mathrm{Sp}_{\mathfrak{I}}\hat{\mathrm{F}}(\mathfrak{I},\lambda)\,\mathrm{R}_p(\mathfrak{I},-\lambda)^{-1}\mathrm{R}'_p(\mathfrak{I},\lambda)\,d\lambda$$
$$=\int_{\Lambda^u}\hat{\mathrm{F}}(\lambda)\frac{m'(\lambda)}{m(\lambda)}\,d\lambda$$
$$+\sum_{p}\sum_{\mathfrak{I}_p}\int_{\Lambda^u}\mathrm{Sp}_{\mathfrak{I}_p}\hat{\mathrm{F}}_p(\mathfrak{I}_p,\lambda)\mathrm{R}_p(\mathfrak{I}_p,-\lambda)^{-1}\mathrm{R}'_p(\mathfrak{I}_p,-\lambda)\prod_{q\neq p}\hat{\mathrm{F}}_q(\lambda)\,d\lambda;$$

ces intégrales convergent en raison du fait qu'elles portent sur des produits de fonctions à décroissance rapide par des fonctions à croissance lente.

(II.3.36) *Supposons* $2\lambda=0$, *c'est-à-dire que* $\lambda=s\rho+\chi$ *avec* $s=0$ *et* $2\chi=0$. *Alors on a*
$$\mathrm{M}(\mathfrak{I},\lambda)=\mathrm{P}(\mathfrak{I},\chi)=\mathrm{P}(\mathfrak{I},-\chi).$$

On a, en effet, visiblement $m(\lambda)=1$ dans ce cas, d'où, d'après (I.3.29),
$$\mathrm{M}(\mathfrak{I},\lambda)=\prod_{\substack{\mathfrak{I}_p\neq 1\\ p\neq\infty}}\int_{\mathbf{Q}_p^*}\hat{\varphi}_p(te_1)\langle 2\rho,t\rangle\,d^*t\,\mathrm{P}(\mathfrak{I}_\infty,\chi)=\prod_{\substack{\mathfrak{I}_p\neq 1\\ p\neq\infty}}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}\int_{\mathbf{Q}_p}\hat{\varphi}_p(te_1)\,dt\,\mathrm{P}(\mathfrak{I}_\infty,\chi).$$

On se rappelle que $\hat{\varphi}_p$ est la transformée de Fourier définie en (I.3.4) de la fonction $\varphi(ae_1+be_2)$; par la formule d'inversion de Fourier, on obtient
$$\int_{\mathbf{Q}}\hat{\varphi}_p(te_1)\,dt=\int_{\mathbf{Q}_p}dt\int_{\mathbf{Q}_p}\int_{\mathbf{Q}_p}\varphi(ae_1+be_2)\,\tau(-tb)\,da\,db$$
$$=\int_{\mathbf{Q}_p}\varphi_p(ae_1)\,da=\left(1-\frac{1}{p}\right)\mathrm{P}(\mathfrak{I}_p,\chi)$$

d'après le choix de la fonction φ_p et de la mesure da ; donc
$$\mathrm{M}(\mathfrak{I},\lambda)=\prod\mathrm{P}(\mathfrak{I}_p,\chi)=\mathrm{P}(\mathfrak{I},\chi).$$

On en déduit que
$$\sum_{2\chi=0}\sum_{\mathfrak{I}}\mathrm{Sp}_{\mathfrak{I}}\hat{\mathrm{F}}(\mathfrak{I},\chi)\,\mathrm{M}(\mathfrak{I},\chi)=\sum_{2\chi=0}\sum_{\mathfrak{I}}\mathrm{Sp}_{\mathfrak{I}}\hat{\mathrm{F}}(\mathfrak{I},\chi)\,\mathrm{P}(\mathfrak{I},\chi)$$
$$=\sum_{2\chi=0}\sum_{\mathfrak{I}}\mathrm{Sp}_{\mathfrak{I}}\hat{\mathrm{F}}(\mathfrak{I},\chi)\,\mathrm{P}(\mathfrak{I},-\chi).$$

Mais nous savons, d'après (II.1.20), que

$$\hat{\mathrm{F}}(\mathfrak{I}, \chi)\,\mathrm{P}(\mathfrak{I}, -\chi) = \hat{\mathrm{F}}(\mathfrak{I}, \chi);$$

on a donc

$$\text{(II.3.37)} \qquad \sum_{2\chi=0}\sum_{\mathfrak{I}} \mathrm{Sp}_{\mathfrak{I}}\hat{\mathrm{F}}(\mathfrak{I}, \chi)\,\mathrm{M}(\mathfrak{I}, \chi) = \sum_{2\chi=0}\sum_{\mathfrak{I}} \mathrm{Sp}_{\mathfrak{I}}\hat{\mathrm{F}}(\mathfrak{I}, \chi) = \sum_{2\chi=0}\hat{\mathrm{F}}(\chi).$$

D'après (II.3.14, 19, 30, 35 et 37), on voit que

(II.3.38) *Lorsque* $\mathrm{F} = \prod \mathrm{F}_p \in \mathcal{D}(\mathrm{G}_{\mathbf{A}})$ *est une fonction décomposable* K-*finie à droite et à gauche, on peut écrire le terme complémentaire sous la forme suivante* (*cf.* [18]) :

$$\begin{aligned}\mathrm{I}(\mathrm{F}) = \mathrm{I}\Big(\prod_p \mathrm{F}_p\Big) &= \lambda_0 g_{\mathrm{F}}(1) + 2\sum_p \theta'_p(\mathrm{F}_p, 1)\prod_{q\neq p} g_{\mathrm{F}_q}(1)\\ &+ \sum_{\xi\in\mathbf{Q}^*-\{1\}}\sum_p \int_{\mathbf{Q}_p} \mathrm{F}^{\mathrm{K}}_p\begin{pmatrix}\xi & u\\ 0 & 1\end{pmatrix}\log \mathrm{R}_p\Big(\frac{u}{\xi-1}\Big)\,du \prod_{q\neq p} g_{\mathrm{F}_q}(\xi)\\ &+ \sum_p \sum_{\mathfrak{I}_p}\int_{\Lambda^u} \mathrm{Sp}_{\mathfrak{I}_p}[\hat{\mathrm{F}}_p(\mathfrak{I}_p, \lambda)\,\mathrm{R}_p(\mathfrak{I}_p, -\lambda)^{-1}\mathrm{R}'_p(\mathfrak{I}_p, -\lambda)]\prod_{q\neq p}\hat{\mathrm{F}}_q(\lambda)\,d\lambda\\ &+ \int_{\Lambda^u}\frac{m'(\lambda)}{m(\lambda)}\hat{\mathrm{F}}(\lambda)\,d\lambda - \frac{1}{4}\sum_{2\chi=0}\hat{\mathrm{F}}(\chi).\end{aligned}$$

(II.3.39) *Pour toute fonction* $\mathrm{F} \in \mathcal{D}(\mathrm{G}_{\mathbf{A}})$ *qui est* K-*finie à droite et à gauche, on a*

$$\begin{aligned}\mathrm{I}(\mathrm{F}) &= \lim_{s\to 1}\Big[\mathrm{Z}(\mathrm{F}, s\rho) - \frac{2g_{\mathrm{F}}(1)}{s-1}\Big] + \sum_{\xi\in\mathbf{Q}^*-\{1\}}\int_{\mathbf{A}} \mathrm{F}^{\mathrm{K}}\begin{pmatrix}\xi & u\\ 0 & 1\end{pmatrix}\log \mathrm{R}\Big(\frac{u}{\xi-1}\Big)\,du\\ &+ \int_{\Lambda^u}\sum_{\mathfrak{I}} \mathrm{Sp}_{\mathfrak{I}}[\hat{\mathrm{F}}(\mathfrak{I}, \lambda)\,\mathrm{R}(\mathfrak{I}, -\lambda)^{-1}\mathrm{R}'(\mathfrak{I}, -\lambda)]\,d\lambda\\ &+ \int_{\Lambda^u}\frac{m'(\lambda)}{m(\lambda)}\hat{\mathrm{F}}(\lambda) - \frac{1}{4}\sum_{2\chi=0}\hat{\mathrm{F}}(\chi).\end{aligned}$$

Cette dernière formule semble plus simple que la précédente, cependant celle-là permet de voir immédiatement que dans le cas où $\mathrm{F} = \prod \mathrm{F}_p$ est décomposée, alors

(II.3.40) *S'il existe une place* p_0 *telle que*

$$\hat{\mathrm{F}}_{p_0}(\lambda) = 0$$

pour tout λ, *ou de façon équivalente, si*

$$\int_{\mathrm{U}_{p_0}} \mathrm{F}^{\mathrm{K}}_{p_0}(\mathbf{hu})\, d\mathbf{u} = 0$$

pour tout $\mathbf{h} \in \mathrm{H}_{p_0}$ [*ce qui implique entre autres que* $g_{\mathrm{F}_{p_0}}(\xi) = 0$ *pour tout* $\xi \in \mathrm{Q}^\star$], *alors on a*

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}\Big(\prod \mathrm{F}_p\Big) &= 2\,\theta'_{p_0}(\mathrm{F}_{p_0}, 1) \prod_{q \neq p_0} g_{\mathrm{F}_q}(1) \\
&\quad + \sum_{\xi \in \mathbf{Q}^\star - \{1\}} \int_{\mathbf{Q}_{p_0}} \mathrm{F}^{\mathrm{K}}_p \begin{pmatrix} \xi & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \log \mathrm{R}_p\Big(\frac{u}{\xi - 1}\Big)\, du \prod_{q \neq p_0} g_{\mathrm{F}_p}(\xi) \\
&\quad + \sum_{\mathfrak{I}_{p_0}} \int_{\Lambda^u} \mathrm{Sp}_{\mathfrak{I}_{p_0}}[\hat{\mathrm{F}}_{p_0}(\mathfrak{I}, \lambda)\, \mathrm{R}'(\mathfrak{I}_{p_0}, -\lambda)] \prod_{q \neq p_0} \hat{\mathrm{F}}_q(\lambda)\, d\lambda.
\end{aligned}$$

Corollaire.

(II.3.41) *S'il existe deux places* p_0 *et* p_1 *telles que* $\hat{\mathrm{F}}_p(\lambda) = 0$ *pour tout* λ, *alors* $\mathrm{I}(\mathrm{F}) = 0$.

Ce corollaire est central dans la démonstration du théorème 16.1 de Jacquet-Langlands [18].

Nous allons encore donner une autre formule pour I(F) qui distingue une place p.

(II.3.42) *Soit* $\mathrm{F} = \prod \mathrm{F}_q \in \mathcal{D}(\mathrm{G}_{\mathbf{A}})$ *une fonction décomposable* K-*finie à droite et à gauche. Si l'on pose*

$$\mathrm{F}_0 = \prod_{q \neq p} \mathrm{F}_q, \qquad g_{\mathrm{F}_0}(\xi) = \prod_{q \neq p} g_{\mathrm{F}_q}(\xi), \qquad \ldots,$$

le terme complémentaire peut s'écrire :

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}(\mathrm{F}) &= \mathrm{I}(\mathrm{F}_p \otimes \mathrm{F}_0) \\
&= \varphi_p(1)^{-1} \psi_p(1)^{-1} \sum_{\mathbf{Q}^\star} \int_{\mathbf{Q}_p} \int_{\mathbf{Q}_p} \mathrm{F}_p \begin{pmatrix} \xi & (\xi - 1)\,u + t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g_{\mathrm{F}_0}(\xi)\, \mathrm{R}_p(u)^{-2} \log |\,t\,|_p\, du\, dt \\
&\quad + \sum_{\mathfrak{I}} \int_{\Lambda^u} \mathrm{Sp}_{\mathfrak{I}} \{\hat{\mathrm{F}}_p(\mathfrak{I}_p, \lambda)\, \hat{\mathrm{F}}_0(\mathfrak{I}_0, \lambda)\, \mathrm{M}(\mathfrak{I}, \lambda)\, \mathrm{M}'(\mathfrak{I}, \lambda)\}\, d\lambda - \frac{1}{4} \sum_{2\chi = 0} \mathrm{F}_p(\chi)\, \hat{\mathrm{F}}_0(\chi) \\
&\quad + \sum_{\mathbf{Q}^\star} g_{\mathrm{F}_p}(\xi)\, \mathrm{B}_p(\mathrm{F}_0, \xi),
\end{aligned}$$

où $\mathrm{B}_p(\mathrm{F}_0, \xi)$ *est une certaine constante.*

Démonstration. — On compare terme à terme les formules (II.3.38) et (II.3.42), et l'on remarque qu'il suffit de démontrer que les termes qui contiennent des $g_{F_q}(\xi)$ en facteur coïncident.

Considérons d'abord le cas $\xi = 1$. D'après (II.3.18) et (II.3.20), on voit que

$$2\theta'_p(F_p, 1) = 2\frac{d}{ds}\left\{\varphi_p(s)\,\varphi_p(1)^{-1}\int_{\mathbf{Q}_p} F_p^K\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix}dt + \varphi_p(1)\int_{\mathbf{Q}_p^*} F_p^K\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix}|t|_p^{(s+1)/2}d^*t\right\}_{s=1}$$

$$= 2g_{F_p}(1)\frac{d}{ds}\frac{\varphi_p(s)}{\varphi_p(1)}\bigg|_{s=1} + \int_{\mathbf{Q}_p} F_p^K\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix}\log|t|_p\,dt.$$

D'autre part, d'après (II.3.18), on a

$$\int_{\mathbf{Q}_p}\frac{du}{R_p(u)^2} = \varphi_p(1)\,\psi_p(1)$$

et donc

$$2\theta'_p(F_p, 1) = 2g_{F_p}(1)\frac{\varphi'_p(1)}{\varphi_p(1)} + \varphi_p(1)^{-1}\psi_p(1)^{-1}\int_{\mathbf{Q}_p}\int_{\mathbf{Q}_p} F_p\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix}R_p(u)^{-2}\log|t|_p\,du\,dt.$$

Il y a, par ailleurs, un nombre fini de termes où $\theta'_q(F_q, 1) \neq 0$, avec $q \neq p$, ces termes ont tous $g_{F_p}(1)$ en facteur; la vérification est complète dans le cas $\xi = 1$.

Lorsque $\xi \neq 1$, il apparaît dans (II.3.38) le terme

$$\int_{\mathbf{Q}_p} F_p^K\begin{pmatrix}\xi & u\\ 0 & 1\end{pmatrix}\log R_p\left(\frac{u}{\xi-1}\right)du = \int_{\mathbf{Q}_p} F_p^K\begin{pmatrix}\xi & (\xi-1)u\\ 0 & 1\end{pmatrix}|\xi-1|_p\log R_p(u)\,du,$$

mais, d'après (II.3.28), on a

$$\log R_p(u) = \varphi_p(1)^{-1}\,\psi_p(1)^{-1}\int_{\mathbf{Q}_p}\frac{\operatorname{Log}|t|_p}{R_p(u-t)^2}dt,$$

ce terme s'écrit encore

$$\varphi_p(1)^{-1}\psi_p(1)^{-1}\int_{\mathbf{Q}_p}\int_{\mathbf{Q}_p} F_p^K\begin{pmatrix}\xi & (\xi-1)u\\ 0 & 1\end{pmatrix}R_p(u-t)^{-2}|\xi-1|_p\log|t|_p\,du\,dt$$

$$= \varphi_p(1)^{-1}\,\psi_p(1)^{-1}\int_{\mathbf{Q}_p}\int_{\mathbf{Q}_p} F_p^K\begin{pmatrix}\xi & (\xi-1)u+t\\ 0 & 1\end{pmatrix}\log|t|_p\,R_p(u)^{-2}\,du\,dt - g_{F_p}(\xi)\log|\xi-1|_p$$

et la formule (II.3.42) en résulte facilement.

C'est la formule (II.3.42) avec $p = \infty$ que nous utiliserons au paragraphe 5 pour étudier la transformée de Fourier à la place à l'infini du terme complémentaire.

Remarque. — Nous appelons *distribution centrale* une forme linéaire continue T sur $\mathcal{D}(G_{\mathbf{A}})$ qui vérifie, de plus,

$$T(F_1 \star F_2) = T(F_2 \star F_1),$$

ce qui peut encore s'écrire sous la forme symbolique suivante :

$$T(xyx^{-1}) = T(y)$$

pour tout x et tout $y \in G_{\mathbf{A}}$.

On peut montrer que I (F) est une distribution centrale, mais hélas les expressions données pour I(F) au paragraphe 3 sont des sommes de distributions qui ne sont pas toutes centrales. Cette difficulté sera résolue partiellement pour la place à l'infini au paragraphe 5 ci-dessous.

4. **Analyse harmonique sur** G_∞.

Nous aurons besoin, dans les paragraphes suivants, de quelques résultats d'analyse harmonique sur G_∞. Soit $G'_\infty = SL(2, \mathbf{R})/\pm 1$ la composante neutre de G_∞. Les résultats analogues relatifs à G'_∞ sont en général classiques et ceux relatifs à G_∞ s'en déduisent facilement, car G_∞ est produit semi-direct de G'_∞ par un groupe d'ordre 2.

Notations. — Notons $K'_\infty = K_\infty \cap G'_\infty$ l'image du groupe des rotations, et $k(\theta) \in K'$ l'image de la rotation d'angle θ. La mesure de Haar sur K_∞, qui donne à K_∞ la masse 1, donne à K'_∞ la masse 1/2. Soit m un entier pair; nous noterons φ_m la fonction sur K'_∞ définie par $\varphi_m(k(\theta)) = 2^{1/2} e^{im\theta}$. Nous identifions comme d'habitude $\mathbf{R}^\star$ et H_∞ par l'isomorphisme $\mathbf{h} \to \begin{bmatrix} h & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Un quasi-caractère λ de H_∞ s'écrit de manière unique sous la forme $\lambda = s\rho + \chi$, où $\rho(\mathbf{h}) = |h|^{1/2}$, et où χ est soit le caractère trivial, soit le caractère signe noté ε. Nous noterons Λ_∞ le groupe des caractères de H_∞, Λ^u_∞ le groupe des caractères unitaires. On munit H_∞ et U_∞ des mesures de Haar habituelles, et Λ^u_∞ de la mesure $d\lambda$ duale de dh. On sait que $G_\infty = K_\infty H_\infty U_\infty$, et que $d\mathbf{x} = |h|\, d\mathbf{k}\, d\mathbf{h}\, d\mathbf{u}$ est une mesure de Haar sur G_∞. Notez que l'on a aussi $G'_\infty = K'_\infty H_\infty U_\infty$, et que $\mathbf{x} \in G_\infty$ s'écrit de manière unique sous la forme $\mathbf{x} = \mathbf{khu}$ avec $\mathbf{k} \in K'_\infty$, $\mathbf{h} \in H_\infty$ et $\mathbf{u} \in U_\infty$.

Nous noterons $\mathcal{H}(G_\infty)$ l'algèbre de convolution des fonctions K_∞-finies à droite et à gauche de $\mathcal{D}(G_\infty)$; on définit de même $\mathcal{H}(G'_\infty)$. Soit D une représentation unitaire de G_∞ dans un espace de Hilbert $\mathcal{L}$ et soit $\tilde{\mathcal{L}}$ le sous-espace dense des vecteurs K_∞-finis; on sait associer à D une représentation D de $\mathcal{H}(G_\infty)$ dans $\tilde{\mathcal{E}}$. On sait que si D est irréductible alors $\tilde{D}$ est *admissible* au sens de Jacquet-Langlands [18] puisque les représentations irréductibles de K_∞ interviennent en nombre fini de fois dans D (*cf.* [12]). Comme la classe d'équivalence de $\tilde{D}$ détermine celle de D, il est naturel, pour déterminer l'ensemble des représentations unitaires irréductibles de G_∞, de donner d'abord la classification des représentations admissibles de $\mathcal{H}(G_\infty)$.

Représentations admissibles. — Si $\lambda \in \Lambda_\infty$, on note $B(\lambda)$ l'espace des fonctions f sur G_∞ qui vérifient les conditions suivantes :

(i) f est continue et K_∞-finie à gauche;

(ii) $f(\mathbf{xhu}) = \langle -\lambda - \rho, \mathbf{h}\rangle f(\mathbf{x})$ pour tout $\mathbf{x} \in G_\infty$, tout $\mathbf{h} \in H_\infty$ et tout $\mathbf{u} \in U_\infty$.

Il est clair que f est déterminée par sa restriction à K'_∞. Notons $\varphi_m(\lambda)$ l'unique élément de $\tilde{B}(\lambda)$ qui prolonge φ_m ($m \in 2\mathbf{Z}$). Les $\varphi_m(\lambda)$ forment une base de $\tilde{B}(\lambda)$. On définit, d'autre part, une représentation $\tilde{T}_\lambda$ de $\mathcal{H}(G_\infty)$ dans $\tilde{B}(\lambda)$ en posant, pour $F \in \mathcal{H}(G_\infty)$ et $f \in \tilde{B}(\lambda)$:

$$\tilde{T}_\lambda(F).f = F \star f.$$

On définit aussi une représentation de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ dans $B(\lambda)$ en posant, pour $X \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ et $f \in B(\lambda)$:

$$\tilde{T}_\lambda(X) f = X \star f.$$

Si Ω est l'opérateur de Casimir, on voit facilement (*cf.* [18], p. 167) que l'on a

$$\text{(II.4.1)} \qquad \tilde{T}_\lambda(\Omega) = s^2 - 1 \qquad (\text{avec } \lambda = s\rho + \chi).$$

Les assertions suivantes sont des cas particuliers du théorème 5.11 de [18] et de sa démonstration.

(II.4.2) *La représentation $\tilde{T}_\lambda$ de $\mathcal{H}(G_\infty)$ dans $\tilde{B}(\lambda)$ est irréductible si et seulement si (posant $\lambda = s\rho + \chi$) s n'est pas un entier impair. Dans ce cas, $\tilde{T}_\lambda$ est équivalente à $\tilde{T}_{\lambda'}$ si et seulement si $\lambda' = \pm\lambda$. Pour tout entier pair m posons*

$$\text{(II.4.3)} \qquad a_m(\lambda) = a_m(s) = \Gamma\left(\frac{1}{2}(1 - s + |m|)\right)\Big/\Gamma\left(\frac{1}{2}(1 + s + |m|)\right).$$

L'opérateur de $\tilde{B}(\lambda)$ dans $\tilde{B}(-\lambda)$ qui envoie $\varphi_m(\lambda)$ sur $a_m(\lambda)\,\varphi_m(-\lambda)$ entrelace $\tilde{T}_\lambda$ et $\tilde{T}_{-\lambda}$.

(II.4.4) *Soit n un entier impair positif. Le seul sous-espace invariant non trivial de* $\tilde{\mathrm{B}}(\lambda)$ *(où $\lambda = n\rho + \chi$, $\chi = 0$ ou $\chi = \varepsilon =$* signe) *est le sous-espace engendré par les $v_m(\lambda)$, avec $|m| \geqq n+1$. Posons*

$$\tilde{\mathrm{V}}(\lambda) = \sum_{|m| \geqq n+1} \mathbf{C} v_m(\lambda)$$

et notons $\tilde{\mathrm{S}}_{n\rho+\chi}$ la restriction de $\tilde{\mathrm{T}}_{n\rho+\chi}$ à $\mathrm{V}(n\rho+\chi)$. *Notons ε le caractère signe; alors $\tilde{\mathrm{S}}_{n\rho+\varepsilon}$ et $\tilde{\mathrm{S}}_{n\rho}$ sont irréductibles et équivalentes.*

(II.4.5) *Soit n un entier négatif impair. Le seul sous-espace invariant non-trivial de* $\tilde{\mathrm{B}}(n\rho+\chi)$ *est le sous-espace*

$$\tilde{\mathrm{W}}(n\rho+\chi) = \sum_{|m| \leqq -n-1} \mathbf{C}\, v_m(n\rho+\chi).$$

La restriction $\tilde{d}_\lambda$ de $\tilde{\mathrm{T}}_\lambda$ à $\tilde{\mathrm{W}}(\lambda)$ est irréductible; d_λ et $d_{\lambda+\varepsilon}$ sont équivalentes.

Remarque. — Lorsque $n = -1$, la dimension $\mathrm{W}(n\rho+\chi)$ est égale à 1. Il est clair que $\tilde{d}_{-\rho}$ est associée à la représentation triviale δ_0 de G_∞, et que $\tilde{d}_{-\rho+\varepsilon}$ est associée à la représentation δ_ε définie par $\delta_\varepsilon(\mathbf{x}) = 1$ si $\mathbf{x} \in \mathrm{G}'_\infty$ et $\delta_\varepsilon(\mathbf{x}) = -1$ si $\mathbf{x} \in \tau \mathrm{G}'_\infty$ avec $\tau = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(II.4.6) *Toute représentation admissible irréductible de $\mathcal{H}(\mathrm{G}_\infty)$ est équivalente à l'une des représentations $\tilde{\mathrm{T}}_\lambda$, $\tilde{\mathrm{S}}_\lambda$ ou $\tilde{d}_\lambda$ ci-dessus. De plus, les restrictions de $\tilde{\mathrm{T}}_\lambda$ et $\tilde{\mathrm{T}}_{\lambda+\varepsilon}$ à $\mathcal{H}(\mathrm{G}'_\infty)$ sont équivalentes. La restriction de $\tilde{\mathrm{S}}_{n\rho}$ à $\mathcal{H}(\mathrm{G}'_\infty)$ se décompose en deux représentations inéquivalentes $\mathrm{S}^+_{n\rho}$ et $\mathrm{S}^-_{n\rho}$ réalisées dans les espaces*

$$\mathrm{V}^+(n\rho) = \sum_{m \geqq n+1} \mathbf{C}\, v_m(n\rho) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{V}^-(n\rho) = \sum_{m \leqq -n-1} \mathbf{C}\, v_m(n\rho).$$

Remarquez que si $\mathrm{F} \in \mathcal{H}(\mathrm{G}_\infty)$ et si $\lambda \in \Lambda_\infty$, l'opérateur $\mathrm{T}_\lambda(\mathrm{F})$ est de rang fini. On a (*cf.* (7.6.3), p. 274 de [18]) :

$$\text{(II.4.7)} \qquad \operatorname{tr} \tilde{\mathrm{T}}_\lambda(\mathrm{F}) = \int_{\mathrm{K}_\infty} \int_{\mathrm{H}_\infty} \int_{\mathrm{U}_\infty} \mathrm{F}(\mathbf{khuk}^{-1}) \langle \lambda + \rho, \mathbf{h} \rangle \, d\mathbf{k}\, d\mathbf{h}\, d\mathbf{u}.$$

Nous allons déduire de (II.4.7) le résultat suivant :

(II.4.8) *Soit $\mathbf{h} \in \mathrm{H}_\infty$, $\mathbf{h} \neq 1$. Soit $\mathrm{F} \in \mathcal{H}(\mathrm{G}_\infty)$. On a*

$$\int_{\mathrm{G}_\infty/\mathrm{H}_\infty} \mathrm{F}(\mathbf{xhx}^{-1})\, d\mathbf{x} = |1-h|^{-1} \int_{\Lambda^u_\infty} \langle -\lambda-\rho, \mathbf{h} \rangle \operatorname{tr} \mathrm{T}_\lambda(\mathrm{F})\, d\lambda.$$

Démonstration. — La première intégrale est égale à

$$\int_{K_\infty}\int_{U_\infty} F(\mathbf{kuhu}^{-1}\mathbf{k}^{-1})\,d\mathbf{k}\,d\mathbf{u}.$$

On écrit : $\mathbf{uhu}^{-1} = \mathbf{h}\begin{pmatrix} 1 & (h^{-1}-1)u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot$ Faisant le changement de variable $u \mapsto (h^{-1}-1)^{-1}u$ l'intégrale devient égale à

$$|h^{-1}-1|^{-1}\int_{K_\infty}\int_{U_\infty} F(\mathbf{khuk}^{-1})\,d\mathbf{k}\,d\mathbf{u},$$

en appliquant la formule d'inversion de Fourier sur H_∞ à (II.4.7), on obtient (II.4.8).

Définissons maintenant les fonctions sphériques. Si l et m sont deux entiers pairs et si $\lambda \in \Lambda_\infty$, on pose :

(II.4.9) $$c_{l,m}(\mathbf{x}, \lambda) = \int_{K'_\infty} v_l(\lambda)(\mathbf{x}^{-1}\mathbf{k})\, v_m(\mathbf{k}^{-1})\,d\mathbf{k}$$

et si $F \in \mathcal{H}(G_\infty)$, on pose

(II.4.10) $$\tilde{F}_{l,m}(\lambda) = \int_{G_\infty} F(\mathbf{x})\, c_{l,m}(\mathbf{x}, \lambda)\,d\mathbf{x}.$$

Il est clair que l'on a

(II.4.11) $$T_\lambda(F)\, v_l(\lambda) = \sum_m \tilde{F}_{l,m}(\lambda)\, v_m(\lambda).$$

Il résulte alors de (II.4.2) que l'on a

$$a_l(\lambda)\,\tilde{F}_{l,m}(-\lambda) = a_m(\lambda)\,F_{l,m}(\lambda).$$

Ceci étant valable pour tout $F \in \mathcal{H}(G_\infty)$, on en déduit la relation

(II.4.12) $$a_l(\lambda)\, c_{l,m}(\mathbf{x}, -\lambda) = a_m(\lambda)\, c_{l,m}(\mathbf{x}, \lambda).$$

On a, en particulier, pour tout $F \in \mathcal{H}(G_\infty)$

(II.4.13) $$F_{0,0}(\rho) = F_{0,0}(-\rho) = \int_G F(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \delta_0(F);$$

(II.4.14) $$F_{0,0}(\rho+\varepsilon) = F_{0,0}(-\rho+\varepsilon) = \int_G F(\mathbf{x})\,\delta_\varepsilon(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \delta_\varepsilon(F).$$

Si l'on pose

$$\tau = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

il est clair que G_∞ est produit semi-direct de G'_∞ et du sous-groupe $\{1, \tau\}$.

On remarque que, dans $\tilde{B}(\lambda)$,

$$\varphi_m(\tau x \tau^{-1}) = \varphi_{-m}(x)$$

et que $\varphi_m(x\tau) = \langle \chi, \tau \rangle \varphi_m(x)$ si $\lambda = s\rho + \chi$. On peut définir $T_\lambda(\tau)$ dans $\tilde{B}(\lambda)$ par la relation

$$\text{(II.4.15)} \qquad T_\lambda(\tau)\,\varphi_m = \langle \chi, \tau \rangle \varphi_{-m} \quad \text{si} \quad \lambda = s\rho + \chi.$$

Supposons $\lambda \in \Lambda_\infty^u$; d'après (II.4.6), on a

$$\text{(II.4.16)} \qquad \hat{F}(\lambda) = \operatorname{tr} T_\lambda(F) = \operatorname{tr} T_{\lambda+\varepsilon}(F) = \hat{F}(\lambda + \varepsilon)$$

pour toute fonction $F \in \mathcal{H}(G'_\infty)$. Toujours d'après (II.4.6) on sait que si $F \in \mathcal{H}(G'_\infty)$, alors $\tilde{S}_{n\rho}(F)$ laisse stable $\tilde{V}^+(n\rho)$ et $\tilde{V}^-(n\rho)$; il est clair que $\tilde{S}_{n\rho}(\tau)$ échange $\tilde{V}^+(n\rho)$ et $\tilde{V}^-(n\rho)$, donc

$$\text{(II.4.17)} \qquad \operatorname{tr} \tilde{S}_{n\rho}(\tau)\,\tilde{S}_{n\rho}(F) = 0 \quad \text{pour toute fonction } F \in \mathcal{H}(G'_\infty).$$

Plus généralement, d'après (II.4.15), on a

$$\text{(II.4.18)} \quad \operatorname{tr} T_\lambda(\tau)\,T_\lambda(F) = -\operatorname{tr} T_{\lambda+\varepsilon}(\tau)\,T_{\lambda+\varepsilon}(F) \quad \text{pour toute fonction } F \in \mathcal{H}(G'_\infty).$$

Les trois remarques ci-dessus seront utiles pour dériver la formule de Plancherel pour G_∞ de celle pour G'_∞.

Avant de déterminer les classes de représentations unitaires irréductibles de G_∞, rappelons celles de G'_∞. Il est bien connu depuis Bargmann [1] que les représentations unitaires irréductibles de $G'_\infty = SL(2, \mathbf{R})/\{\pm 1\}$ sont équivalentes à l'une des représentations ci-dessous.

(II.4.19) (i) La représentation D'_s dont l'espace des vecteurs K'_∞-finis est $\tilde{B}(s\rho)$ avec, soit

$$\operatorname{Re}(s) = 0 \quad \text{(série principale)},$$

soit

$$\operatorname{Im}(s) = 0 \quad \text{et} \quad |s| < 1 \quad \text{(série supplémentaire)}.$$

La représentation associée est $\tilde{T}_{s\rho}$;

(ii) Les représentations D_n^+ et D_n^-, où n est un entier positif impair, dont l'espace des vecteurs K'_∞-finis sont $V^+(n\rho)$ et $V^-(n\rho)$ et dont les représentations associées sont $\tilde{S}^+(n\rho)$ et $\tilde{S}^-(n\rho)$;

(iii) La représentation δ'_0 triviale.

On en déduit alors que toute représentation unitaire irréductible de G_∞ est équivalente à l'une des représentations ci-dessous.

(II.4.20) (i) La représentation $D_{s\rho+\chi}$ avec, soit $\mathrm{Re}(s)=0$ (séries principales), soit $\mathrm{Im}(s)=0$ et $|s|<1$ (séries supplémentaires) avec la représentation associée $\tilde{D}_{s\rho+\chi}=\tilde{T}_{s\rho+\chi}$. Par restriction à G'_∞ les représentations $D_{s\rho+\chi}$ sont équivalentes à D'_s.

(ii) La représentation D_n, où n est un entier positif impair, dont la représentation associée $\tilde{D}_n=\tilde{S}_{n\rho}$. Par restriction à G'_∞, on a $D_n=D_n^+\oplus D_n^-$.

(iii) Les représentations δ_0 et δ_ε constantes sur les composantes connexes.

Moyenne sur les orbites elliptiques. — On pose $\hat{F}(n\rho)=\mathrm{tr}\, D_n(F)$ pour toute fonction $F\in\mathcal{D}(G_\infty)$, et on rappelle que l'on a posé $\hat{F}(\lambda)=\mathrm{tr}\, D_\lambda(F)$ pour $\lambda\in\Lambda''_\infty$. On pose également

$$\lambda=i\nu(\lambda)\rho+\chi.$$

Lorsque $0<\theta<\pi$, on a

$$\text{(II.4.21)}\quad \int_{G_\infty} F(xk(\theta)x^{-1})\,dx=\frac{\pi}{\sin\theta}\int_{\Lambda''}\frac{\mathrm{ch}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\nu(\lambda)}{\mathrm{ch}\frac{\pi}{2}\nu(\lambda)}\hat{F}(\lambda)\,d\lambda - \frac{1}{\sin\theta}\sum_{\substack{n>0\\ \text{impair}}}\hat{F}(n\rho)\sin(n\theta),$$

avec

$$k(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}.$$

Nous ne démontrerons pas cette formule; indiquons simplement comment on peut se ramener à la formule analogue pour $G'_\infty=\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})/\pm\{1\}$ qui est, elle-même, un cas particulier de la formule bien connue pour $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$: Toute fonction $f\in\mathcal{H}(G_\infty)$ s'écrit pour la forme

$$F(x)=F_1(x)+F_2(\tau x),$$

avec F_1 et $F_2\in\mathcal{D}(G'_\infty)$, et on se ramène à un problème sur G'_∞ grâce aux remarques (II.4.16, 17 et 18) et à la description des représentations unitaires irréductibles, ensuite il convient de comparer des mesures de Haar avec celles utilisées par exemple dans [11]. Il est classique d'en dériver alors la formule de Plancherel :

$$\text{(II.4.22)}\quad F(1)=\frac{1}{4}\int_{\Lambda''_\infty}\nu(\lambda)\,\mathrm{th}\left(\frac{\pi\nu(\lambda)}{2}\right)\hat{F}(\lambda)\,d\lambda+\frac{1}{4\pi}\sum_{\substack{n>0\\ \text{impair}}}n\hat{F}(n\rho)$$

pour $F \in \mathcal{D}(G_\infty)$ et $\lambda = i\nu(\lambda)\rho + \chi$.

Remarque :

$$\int_{\Lambda_\infty^u} \hat{F}(\lambda)\, d\lambda = \sum_\chi \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{F}(i\nu\rho + \chi)\, d\nu.$$

L'ESPACE $\mathcal{S}(G_\infty)$, ET LA TRANSFORMATION DE FOURIER.

Si $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbf{R})$, posons

(II.4.23) $$\|\mathbf{x}\|^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{|ad - bc|};$$

il est clair que cette fonction est, en fait, définie sur $G_\infty = PL(2, \mathbf{R})$. On vérifie immédiatement que

$$\|\mathbf{kx}\| = \|\mathbf{xk}\| = \|\mathbf{x}\| \qquad \text{pour} \quad \mathbf{k} \in K_\infty.$$

(II.4.24) *L'espace $\mathcal{S}(G_\infty)$ est l'espace des fonctions numériques sur G_∞, K_∞-finies à droite et à gauche, indéfiniment différentiables et telles que*

$$\mu_{X,Y,r}(F) = \sup_{\mathbf{x} \in G_\infty} |X \star F \star Y(\mathbf{x})| . \|\mathbf{x}\| (1 + \log \|\mathbf{x}\|)^r < +\infty$$

quels que soient X et $Y \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ *et* $r \in \mathbf{R}$. On munit $\mathcal{S}(G_\infty)$ de la topologie fournie par ces semi-normes. Les injections

$$\mathcal{H}(G_\infty) \hookrightarrow \mathcal{S}(G_\infty) \hookrightarrow L^2(G_\infty)$$

sont continues et à images denses. $\mathcal{S}(G_\infty)$ est une algèbre topologique pour le produit de convolution (*cf.* [8]).

Remarque. — On a $\mathcal{S}(G_\infty) \subset L^2(G_\infty)$, mais il est faux que $\mathcal{S}(G_\infty) \subset L^1(G_\infty)$: en effet, $\|x\|^{-2} \in \mathcal{S}(G_\infty)$ mais n'est pas intégrable.

Une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}(G_\infty)$ sera appelée *une distribution tempérée.*

Remarque. — Vu l'hypothèse de K-finitude des fonctions de $\mathcal{S}(G_\infty)$, il n'est en général pas vrai qu'une « distribution tempérée » soit dans $\mathcal{D}'(G_\infty)$ (5).

On peut démontrer que l'intégrale

(II.4.10) $$\tilde{F}_{l,m}(\lambda) = \int_{G_\infty} F(\mathbf{x})\, C_{l,m}(\mathbf{x}, \lambda)\, d\mathbf{x}$$

---

(5) Bien que contraire à l'usage, nous employons le mot « distribution » pour les formes linéaires continues sur $\mathcal{H}(G_\infty)$ même si elles ne se prolongent pas à $\mathcal{D}(G_\infty)$.

est convergente pour $F \in \mathcal{S}(G_\infty)$ lorsque $\lambda \in \Lambda_\infty^u$ et lorsque $\lambda = n\rho$ avec $|l|$ et $|m| \geq n+1$. Comme F est K_∞-finie à droite et à gauche, les fonctions $\tilde{F}_{l,m}(\lambda)$ non identiquement nulles sont en nombre fini. Par définition, la transformée de Fourier de $F \in \mathcal{S}(G_\infty)$ est la fonction $\tilde{F}$ sur $\Lambda_\infty^u \cup (2N+1)\rho \subset \Lambda_\infty$ définie ci-dessous :

(i) Pour $\lambda \in \Lambda_\infty^u$, $\tilde{F}(\lambda)$ est la matrice $\{\tilde{F}_{l,m}(\lambda)\}$, l et m pairs, dont les coefficients sont nuls dès que l et m sont assez grands pour tout $\lambda \in \Lambda_\infty^u$. Les fonctions

$$x \mapsto \tilde{F}_{l,m}(ix\rho + \chi)$$

sont dans l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ des fonctions à décroissance rapide ainsi que toutes leurs dérivées.

(ii) Pour $\lambda = n\rho$, n entier positif impair, $\tilde{F}(n\rho)$ est la matrice $\{\tilde{F}_{l,m}(n\rho)\}$ avec $|l|$ et $|m| > n+1$, l et m entiers pairs.

$\tilde{F}(n\rho)$ a un nombre fini de coefficients non nuls et est nulle dès que n est assez grand.

(iii) $a_l(\lambda)\,\tilde{F}_{l,m}(-\lambda) = a_m(\lambda)\,\tilde{F}_{l,m}(\lambda)$ pour $\lambda \in \Lambda_\infty^u$.

(II.4.25) *La transformation de Fourier* $F \to \tilde{F}$ *est un isomorphisme de* $\mathcal{S}(G_\infty)$ *sur l'espace des fonctions* $\tilde{F}$ *vérifiant les conditions* (i), (ii) *et* (iii) *ci-dessus* (*cf.* [8]).

Nous poserons $\hat{F}(\lambda) = \operatorname{tr} \tilde{F}(\lambda)$ pour les fonctions $F \in \mathcal{S}(G_\infty)$. On voit que si $\lambda \in \Lambda_\infty^u$ alors $\hat{F}(\lambda) \in \mathcal{S}(\Lambda_\infty^u) \simeq \mathcal{S}(\mathbf{R}) \oplus \mathcal{S}(\mathbf{R})$.

(II.4.26) *Soit* I *une distribution tempérée sur* G_∞, *centrale, i.e. telle que*

$$I(F_1 \star F_2) = I(F_2 \star F_1)$$

pour toute fonction F_1 *et* $F_2 \in \mathcal{S}(G_\infty)$. *Alors il existe une distribution* μ *sur* $\mathcal{S}(\Lambda_\infty^u)$ *et des nombres* a_n (*n entier positif impair*) *tels que pour toute fonction* $F \in \mathcal{S}(G_\infty)$, *on ait*

$$I(F) = \int_{\Lambda_\infty^u} \hat{F}(\lambda)\, d\mu(\lambda) + \sum_{\substack{n>0 \\ n \text{ impair}}} a_n \hat{F}(n\rho).$$

Démonstration. — Tout d'abord, d'après le théorème d'isomorphisme (II.4.25) ci-dessus, il existe des distributions tempérées $\mu_{l,m}$ et des formes linéaires $M(n)$ telles que

$$I(F) = \sum_{l,m} \int_{\Lambda_\infty^u} \tilde{F}_{l,m}(\lambda)\, d\mu_{l,m}(\lambda) + \sum_{n>0} \langle \tilde{F}(n\rho), M(n) \rangle.$$

Il est bien connu en algèbre linéaire que puisque

$$\langle \tilde{F}_1(n\rho)\,\tilde{F}_2(n\rho),\ M(n)\rangle = \langle \tilde{F}_2(n\rho)\,\tilde{F}_1(n\rho),\ M(n)\rangle,$$

alors

$$\langle \tilde{F}(n\rho),\ M(n)\rangle = a_n \operatorname{tr}\tilde{F}(n\rho) = a_n \hat{F}(n\rho).$$

Soient maintenant, l et m deux entiers pairs, nous allons prouver que les fonctions de la forme $\alpha\beta$, où α et $\beta \in \mathcal{S}(\Lambda^u_\infty)$ vérifient

$$(a)\qquad \alpha(\lambda) = \frac{a_l(\lambda)}{a_0(\lambda)}\alpha(-\lambda);$$

$$(b)\qquad \beta(\lambda) = \frac{a_0(\lambda)}{a_m(\lambda)}\beta(-\lambda),$$

sont denses dans l'espace des fonctions $\gamma \in \mathcal{S}(\Lambda^u_\infty)$ qui vérifient

$$(c)\qquad \gamma(\lambda) = \frac{a_l(\lambda)}{a_m(\lambda)}\gamma(-\lambda).$$

Il suffit de démontrer cette densité pour les fonctions à support compact. Soit donc γ une fonction de $\mathcal{S}(\Lambda^u_\infty)$ vérifiant la condition (c) ci-dessus, et à support dans un compact V. Soit ψ une fonction de $\mathcal{S}(\Lambda^u_\infty)$ égale à 1 sur V et vérifiant

$$\psi(\lambda) = \psi(-\lambda).$$

D'autre part, les fonctions $a_n(\lambda)$ sont de module 1 lorsque $\lambda \in \Lambda^u_\infty$, on choisit la détermination continue (et donc aussi indéfiniment différentiable) pour $\sqrt{a_n(\lambda)}$ dans chacune des deux composantes connexes de Λ^u_∞, qui vaut 1 pour $\lambda = 0$ et $\lambda = \varepsilon$. Il est clair que l'on a

$$\gamma(\lambda) = \left[\gamma(\lambda)\sqrt{a_0(\lambda)\,a_l(-\lambda)}\right]\left[\psi(\lambda)\sqrt{a_0(-\lambda)\,a_l(\lambda)}\right],$$

d'où trivialement l'assertion de densité.

En utilisant les matrices $\tilde{F}(\lambda)$ et $\tilde{F}'(\lambda)$ dont les seuls coefficients non nuls sont

$$\tilde{F}_{l,0}(\lambda) = \alpha(\lambda) \qquad \text{et} \qquad \tilde{F}'_{0,m}(\lambda) = \beta(\lambda),$$

on voit que

$$\int_{\Lambda^u_\infty} \alpha(\lambda)\,\beta(\lambda)\,d\mu_{l,m}(\lambda) = 0, \qquad l \neq m$$

et

$$\int_{\Lambda^u_\infty} \alpha(\lambda)\,\beta(\lambda)\,d\mu_{l,l}(\lambda) = \int_{\Lambda^u_\infty} \alpha(\lambda)\,\beta(\lambda)\,d\mu_{0,0}(\lambda).$$

La propriété de densité ci-dessus montre que l'on peut choisir $\mu_{l,m} = 0$ si $l \neq m$ et $\mu_{l,l} = \mu_{0,0}$ pour tout l. En posant $\mu = \mu_{0,0}$ on a prouvé (II.4.26).

(II.4.27) *Coefficients de la série discrète.*

Soit n un entier positif impair, et posons

$$f_n\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{cases} \left[\dfrac{(a+ic+d-ib)^2}{4(ad-bc)}\right]^{-\frac{n+1}{2}} & \text{si} \quad ad-bc>0, \\ 0 & \text{si} \quad ad-bc<0. \end{cases}$$

La fonction f_n est invariante par le centre de GL $(2, \mathbf{R})$, et définit donc une fonction sur G_∞. Il est clair que $f_n \in \mathcal{S}(G_\infty)$ et que

$$f_n[k(\theta)\mathbf{x}] = f_n[\mathbf{x}\,k(\theta)] = e^{-i(n+1)\theta} f_n(\mathbf{x}).$$

On vérifie, de plus, que

$$\Omega \star f_n = (n^2-1) f_n;$$

donc f_n est proportionnelle à la fonction

$$\mathbf{x} \mapsto c_{n+1,\, n+1}(\mathbf{x},\, n\rho),$$

mais comme ces deux fonctions valent 1 en $\mathbf{x}=1$, elles sont égales.

Une application du théorème de Paley-Wiener pour SL $(2, \mathbf{R})$. — Soit $s \mapsto \mathcal{F}(s)$ une fonction numérique holomorphe de type exponentiel à décroissance rapide sur l'axe $\mathrm{Re}(s)=0$ [i. e. $x \mapsto \mathcal{F}(ix)$ est la transformée de Fourier d'une fonction de $\mathcal{D}(\mathbf{R})$]. On suppose, de plus, que

$$\mathcal{F}(s) = \mathcal{F}(-s).$$

Soit r un entier pair positif. Le théorème de Paley-Wiener ([7], p. 17) nous apprend qu'il existe une fonction $F' \in \mathcal{D}(G'_\infty)$ dont la transformée de Fourier vérifie

$$\tilde{F}'_{l,m} = 0 \quad \text{si} \quad l \neq m \quad \text{ou si} \quad l = m \neq r,$$
$$\tilde{F}'_{r,r}(s\rho + \chi) = \mathcal{F}(s) \quad \text{lorsque} \quad \mathrm{Re}(s) = 0.$$

Comme $F' \in \mathcal{D}(G'_\infty)$, ceci entraîne les relations suivantes :

$$\tilde{F}'_{r,r}(n\rho) = \mathcal{F}(n) \quad \text{si} \quad r \geq n+1 \geq 2$$

et également

$$\delta_0(F') = \delta_\varepsilon(F') = 0 \quad \text{si} \quad r \neq 0,$$
$$\mathcal{F}(1) = \delta_0(F') = \delta_\varepsilon(F') = \int_{G'_\infty} F'(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \quad \text{si} \quad r = 0.$$

Nous choisissons maintenant un entier impair positif n. Soit $\mathcal{F}$ une fonction comme ci-dessus, vérifiant, de plus

$$\mathcal{F}(n) = 1.$$

Appliquons le procédé ci-dessus avec $r = n+1$ et $r = n-1$, et notons F la différence des deux fonctions obtenues, Nous pouvons énoncer la proposition

(II.4.28) *La fonction* F *est un élément de* $\mathcal{H}(G'_\infty)$ *vérifiant les relations suivantes :*

(i) $\hat{F}(\lambda) = 0$ *si* $\lambda \in \Lambda^u_\infty$; $\hat{F}(m\rho) = 0$ *si* $m \neq n$;

(ii) $\tilde{F}_{l,m}(n\rho) = 0$ *si* $l \neq n+1$ *ou* $m \neq n+1$; $\tilde{F}_{n+1,n+1}(n\rho) = \hat{F}(n\rho) = 1$;

(iii) *Si* $n = 1$: $\delta_0(F) = \delta_\varepsilon(F) = -1$; *si* $n \geq 3$: $\delta_0(F) = \delta_\varepsilon(F) = 0$.

Cette proposition résulte en effet immédiatement de ce qui précède, si l'on se rappelle que

$$\hat{F}(\lambda) = \sum_l \tilde{F}_{l,l}(\lambda) = \tilde{F}_{n+1,n+1}(\lambda) + \tilde{F}_{n-1,n-1}(\lambda) = \mathcal{F}(s) - \mathcal{F}(s),$$

lorsque $\lambda = s\rho + \chi \in \Lambda^u_\infty$, et que

$$\hat{F}(m\rho) = \sum_{|l| \geq n+1} \tilde{F}_{l,l}(m\rho).$$

[Notez que $\tilde{F}_{l,m}(n\rho)$ n'est pas défini si $|l|$ ou $|m| \leq n-1$.]

Remarque. — Soit $\mathcal{L}$ l'espace de D_n; notons $\mathcal{L}_m \subset \mathcal{L}$ le sous-espace des vecteurs x tels que

$$D_n(k(\theta))x = e^{-im\theta}x.$$

On sait que $\mathcal{L}_m \neq 0$ si et seulement si $|m| \geq n+1$. L'assertion (ii) de (II.4.28) montre que $D_n(F)$ est la projection orthogonale $\mathcal{L} \to \mathcal{L}_{n+1}$.

5. La transformée de Fourier à l'infini du terme complémentaire.

Nous fixons dans ce paragraphe une fonction F_f sur le groupe G_f des adèles finis, qui est K_f-finie à droite et à gauche, et à support compact. Nous allons calculer dans un cas particulier $I(F_\infty \oplus F_f)$ en fonction de la transformée de Fourier de F_∞.

Nous allons montrer que

(II.5.1) *La forme linéaire*

$$F_\infty \mapsto I(F_\infty \oplus F_f)$$

définie pour $F_\infty \in \mathcal{H}(G_\infty)$, *se prolonge en une forme linéaire continue sur* $\mathcal{S}(G_\infty)$, *c'est-à-dire définit une distribution tempérée sur* G_∞.

Remarquons d'abord que, d'après (II.3.42), on a

$$\text{(II.5.2)}\quad \mathrm{I}(\mathrm{F}_\infty \oplus \mathrm{F}_0) = \frac{1}{\pi} \sum_{\xi \in \mathbf{Q}^*} \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} \mathrm{F}_\infty^{\mathrm{K}} \begin{pmatrix} \xi & (\xi - 1) u + t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g_{\mathrm{F}_0}(\xi) \frac{\log|t|}{1+u^2} \, du \, dt$$
$$+ \sum_{\mathfrak{I}} \int_{\Lambda^u} \mathrm{Sp}_{\mathfrak{I}} \{ (\hat{\mathrm{F}}_\infty^{\mathrm{K}}(\mathfrak{I}_\infty, \lambda) \, \hat{\mathrm{F}}_f^{\mathrm{K}}(\mathfrak{I}_f, \lambda) \, \mathrm{M}(\mathfrak{I}, \lambda) \, \mathrm{M}'(\mathfrak{I}, -\lambda)) \} \, d\lambda$$
$$- \frac{1}{4} \sum_{2\chi = 0} \hat{\mathrm{F}}_\infty(\chi) \, \hat{\mathrm{F}}_f(\chi) + \sum_{\xi \in \mathbf{Q}^*} g_{\mathrm{F}_\infty}(\xi) \, \mathrm{B}_\infty(\mathrm{F}_f, \xi)$$

pour toute fonction $\mathrm{F}_\infty \in \mathcal{H}(\mathrm{G}_\infty)$.

Soit maintenant $\mathrm{F}_\infty \in \mathcal{S}(\mathrm{G}_\infty)$; par définition de cet espace, pour tout nombre r, on a

$$|\mathrm{F}(\mathbf{x})| \prec \|\mathbf{x}\|^{-1} (1 + \log \|\mathbf{x}\|)^{-r}$$

pour tout $\mathbf{x} \in \mathrm{G}_\infty$.

On en déduit que la *forme linéaire*

$$\text{(II.5.3)}\qquad \mathrm{F}_\infty \mapsto g_{\mathrm{F}_\infty}(\xi) = \int_{\mathbf{R}} \mathrm{F}_\infty^{\mathrm{K}} \begin{pmatrix} \xi & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} du$$

est une distribution tempérée, puisque si $r > 1$, on a

$$\int_{\mathbf{R}} \mathrm{F}_\infty^{\mathrm{K}} \begin{pmatrix} \xi & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} du \prec \int_{\mathbf{R}} \frac{[1 + \log(1 + \xi^2 + u^2)]^{-r}}{\sqrt{1 + \xi^2 + u^2}} \, du < +\infty$$

De même, la forme linéaire

$$\mathrm{F}_\infty \mapsto \hat{\mathrm{F}}_\infty^{\mathrm{K}}(\mathfrak{I}_\infty, \lambda) = \int_{\mathrm{K}_\infty} \int_{\mathrm{H}_\infty} \int_{\mathrm{U}_\infty} \mathrm{F}_\infty^{\mathrm{K}}(\mathbf{khu}) \langle -\lambda + \rho, \mathbf{h} \rangle \mathfrak{I}_\infty(\mathbf{k})^* \, d\mathbf{k} \, d\mathbf{h} \, d\mathbf{u}$$

est une distribution tempérée, qui est de plus bornée, lorsque $\lambda \in \Lambda^u$ et $\mathfrak{I}_\infty \in \hat{\mathrm{K}}_\infty$ (ensemble des représentations unitaires irréductible de K_∞). En effet, on a

$$|\hat{\mathrm{F}}_\infty^{\mathrm{K}}(\mathfrak{I}_\infty, \lambda)| \leq \int_{\mathrm{K}_\infty} \int_{\mathrm{H}_\infty} \int_{\mathrm{U}_\infty} |\mathrm{F}_\infty^{\mathrm{K}}(\mathbf{khu}) \langle \rho, h \rangle \, d\mathbf{k} \, d\mathbf{h} \, d\mathbf{u}$$
$$< \int_{\mathrm{K}_\infty} \int_{\mathrm{H}_\infty} \int_{\mathrm{U}_\infty} \langle \rho, h \rangle \|\mathbf{khu}\|^{-1} (1 + \log \|\mathbf{khu}\|)^{-r} \, d\mathbf{k} \, d\mathbf{h} \, d\mathbf{u},$$

et comme $\|kx\| = \|x\|$, on est ramené à étudier la convergence de l'intégrale double

$$\int_{\mathbf{R}_+^*} \int_{\mathbf{R}} \frac{[1 + \log(h + h^{-1} + u^2)]^{-r}}{\sqrt{h + h^{-1} + u^2}} \, d^* h \, du,$$

qui, par le changement de variable $u \to u'\sqrt{h+h^{-1}}$, devient

$$\int_{\mathbf{R}_+^*}\int_{\mathbf{R}} \frac{d^*h\,du}{\sqrt{1+u^2}\,\{[\log(1+u^2)+\log(h+h^{-1})]+1\}^r},$$

intégrale dont la convergence équivaut à celle d'intégrales du type

$$\int_1^\infty\int_1^\infty \frac{du\,d^*h}{u\{[\log u+\log h]+1\}^r} = \int_1^\infty\int_1^\infty \frac{du\,dh}{uh\{\log uh+1\}^r},$$

or cette dernière intégrale couverge lorsque $r > 2$. En remarquant que l'application $F_\infty \mapsto \Omega^n \star F_\infty$ est un endomorphisme continu de $\mathcal{S}(G_\infty)$ par définition de cet espace, et que, si $\lambda = s\rho + \chi$, on a

$$(\Omega^n \star F_\infty^K)(\mathfrak{I}_\infty, \lambda) = (s^2-1)^n \hat{F}_\infty^K(\mathfrak{I}_\infty, \lambda),$$

on en déduit la proposition suivante :

(II.5.4) *Il existe une semi-norme μ_n continue sur $\mathcal{S}(G_\infty)$ telle que*

$$|\hat{F}_\infty^K(\mathfrak{I}_\infty, s\rho+\chi)| \leqq (1+|s|)^{-n}\mu_n(F_\infty).$$

Rappelons qu'une fonction $F_\infty \in \mathcal{S}(G_\infty)$ est K_∞-finie.

Comme $\hat{F}_\infty^K(\mathfrak{I}_\infty, \lambda)\,\hat{F}_f^K(\mathfrak{I}_f, \lambda)$ est nul pour presque toute représentation $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_\infty \otimes \mathfrak{I}_f$, que $|\hat{F}_f^K(\mathfrak{I}_f, \lambda)| \leqq \hat{F}_f^K(\mathrm{id}, 0)$ et que $M(\mathfrak{I}, \lambda)\,M'(\mathfrak{I}, -\lambda)$ est à croissance polynomiale sur l'axe imaginaire pur, il est alors clair que

$$(\text{II.5.5}) \qquad F_\infty \mapsto \sum_{\mathfrak{I}} \int_{\Lambda^u} \mathrm{Sp}\{\hat{F}_\infty^K(\mathfrak{I}_\infty, \lambda)\,\hat{F}_f(\mathfrak{I}_f, \lambda)\,M(\mathfrak{I}, \lambda)\,M'(\mathfrak{I}, -\lambda)\}\,d\lambda$$

est une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}(G_\infty)$. Il en est évidemment de même de

$$(\text{II.5.6}) \qquad F_\infty \mapsto -\frac{1}{4}\sum_{2\chi=0} \hat{F}_\infty(\chi)\,\hat{F}_f(\chi).$$

Nous devons encore étudier la convergence de l'intégrale

$$(\text{II.5.7}) \qquad \int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}} F_\infty^K\begin{pmatrix} \xi & (\xi-1)u+t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\log|t|}{1+u^2}\,du\,dt$$

lorsque $F_\infty \in \mathcal{S}(G_\infty)$, ce qui revient à étudier, lorsque $\xi \neq 1$,

$$\int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}} \frac{[1+\log(1+(u+t)^2)]^{-r}}{\sqrt{1+(u+t)^2}}\,\frac{\log|t|}{1+u^2}\,du\,dt,$$

soit encore, d'après (II.3.28),

$$\pi\int_{\mathbf{R}}\frac{[1+\log(1+u^2)]^{-r}}{\sqrt{1+u^2}}\log\sqrt{1+u^2}\,du,$$

qui converge lorsque $r>2$; et lorsque $\xi=1$

$$\int_{\mathbf{R}}\frac{[1+\log(1+t^2)]^{-r}}{\sqrt{1+t^2}}\log|t|\,dt,$$

qui converge également lorsque $r>2$.

Pour montrer que $\mathrm{I}(\mathrm{F}_\infty\otimes\mathrm{F}_f)$ se prolonge en forme linéaire continue sur $\mathcal{S}(\mathrm{G}_\infty)$, il nous reste à montrer que les sommes en ξ sont finies. Ceci résulte du lemme (II.5.8) ci-dessous et de ce que

$$\mathrm{F}(\mathbf{u}\boldsymbol{\xi}\mathbf{u}^{-1})=\mathrm{F}\begin{pmatrix}\xi & (1-\xi)\,u\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

(II.5.8) *Soit* B *un compact de* G_f. *Le nombre de classe de conjugaison sous* $\mathrm{G}_{\mathbf{A}}$, *d'éléments* $\mathbf{Q}$*-hyperboliques de* $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}}$, *qui rencontrent* B *est fini.*

Démonstration. — La fonction $\mathbf{x}\mapsto(\mathrm{tr}\,\mathbf{x})^2/\det\mathbf{x}$ est une fonction continue sur $\mathrm{GL}(2,\mathbf{A})$, invariante par le centre et par automorphismes intérieurs. Elle définit par passage au quotient une fonction continue sur $\mathrm{G}_{\mathbf{A}}$ constante sur les classes de conjugaison, et dont la valeur sur l'élément $\begin{bmatrix}\xi & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ est $\xi+\xi^{-1}+2$. Mais un compact de $\mathbf{A}_f$ ne peut contenir qu'un ensemble fini de nombres de la forme $\xi+\xi^{-1}$ avec $\xi\in\mathbf{Q}^\star$ (puisque toutes les normes p-adiques du numérateur comme du dénominateur de ξ sont bornées).

Ceci achève de prouver (II.5.1).

I(F) COMME DISTRIBUTION CENTRALE. — La proposition (II.5.1) permet de définir I(F) par continuité lorsque $\mathrm{F}=\mathrm{F}_f\otimes\mathrm{F}_\infty$ avec $\mathrm{F}_\infty\in\mathcal{S}(\mathrm{G}_\infty)$. Elle admet le complément suivant :

(II.5.12) *Soient* F_∞ *et* $\mathrm{F}'_\infty\in\mathcal{S}(\mathrm{G}_\infty)$. *On a*

$$\mathrm{I}[\mathrm{F}_f\otimes(\mathrm{F}_\infty\star\mathrm{F}'_\infty)]=\mathrm{I}[\mathrm{F}_f\otimes(\mathrm{F}'_\infty\star\mathrm{F}_\infty)].$$

Démonstration. — Il suffit naturellement de la prouver lorsque F_∞ et F'_∞ sont dans $\mathcal{H}(\mathrm{G}_\infty)$. Posons, d'autre part, lorsque $\mathrm{F}\in\mathcal{H}(\mathrm{G}_\infty)$, et avec les notations de (I.7),

$$\mathrm{J}(\mathrm{F}_\infty)=\mathrm{tr}\,\mathrm{T}_d(\mathrm{F})-\alpha\mathrm{F}(1)-\sum_{\gamma\in\{\mathrm{G}_{\mathrm{E}}\}}c(\gamma)\int_{\mathrm{G}_{\mathbf{A}}/\mathrm{G}_{\mathbf{Q}}(\gamma)}\mathrm{F}(\mathbf{x}\gamma\mathbf{x}^{-1})\,d\mathbf{x}.$$

Rappelons que $T_d(F)$ est traçable d'après (I.2.7) et que les sommes et intégrales ci-dessus sont convergentes d'après (I.7.2). Il est clair que J est une distribution *centrale* sur G [i. e. $J(F_\infty \star F'_\infty) = J(F'_\infty \star F_\infty)$ pour tout F_∞ et tout F'_∞ dans $\mathcal{H}(G_\infty)$]. Mais, d'après (I.7.4),

$$J(F_\infty) = I(F_0 \otimes F_\infty)$$

lorsque $F_\infty \in \mathcal{H}(G_\infty)$, ce qui prouve (II.5.12).

Les propositions (II.5.1) et (II.5.12) permettent d'appliquer la proposition (II.4.26) à la distribution $F_\infty \to I(F_\infty \otimes F_f)$. On a donc prouvé l'assertion suivante :

(II.5.13) *Il existe une distribution tempérée* $\mu(F_f, \lambda)$ *sur* Λ^u_∞ *et des constantes* $a_n(F_f)$ (*n entier positif impair*) *telles que l'on ait*

$$I(F_\infty \otimes F_f) = \int_{\Lambda^u_\infty} \hat{F}_\infty(\lambda)\, d\mu(F_0, \lambda) + \sum_{\substack{n>0 \\ n \text{ impair}}} a_n(F_f)\, \hat{F}(n)$$

pour tout $F_\infty \in \mathcal{S}(G_\infty)$.

[Pour la définition de $\hat{F}(n)$ et $\hat{F}(\lambda)$, se reporter au paragraphe 4.]

Nous n'étudierons pas ici les distributions $\mu(F_f, \lambda)$; indiquons simplement que dans le cas particulier où F_f est la fonction caractéristique de K_f, on calcule assez facilement $\mu(F_f, \lambda)$, ce qui redonne le terme complémentaire pour SL $(2, \mathbf{Z})$ donné par Selberg dans [20]. Nous allons maintenant calculer les nombres $a_n(F_f)$.

Pour cela on remarque d'abord que l'on a la proposition :

(II.5.14) *Soit* $F_\infty \in \mathcal{S}(G_\infty)$ *une fonction telle que*

$$\int_{U_\infty} F^K(\mathbf{khu})\, du = 0$$

pour tout $\mathbf{k} \in K$ *et tout* $\mathbf{h} \in H$. Le terme complémentaire *se réduit* à

$$I(F_\infty \otimes F_0) = \pi^{-1} \sum_{\xi \in \mathbf{Q}^*} g_{F_f}(\xi) \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} F^K \begin{pmatrix} \xi & (\xi - 1)u + t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\log |t|}{1 + u^2}\, du\, dt.$$

En effet, il suffit de constater que ceci implique

$$F^K(\mathfrak{S}, \lambda) = 0 \qquad \text{et} \qquad g_{F_\infty}(\xi) = 0$$

pour tout $\mathfrak{S}$, λ et ξ.

Pour calculer $a_n(F_f)$ il suffit donc d'appliquer la formule ci-dessus à un coefficient bien choisi de la représentation D_n de la série discrète.

Remarque. — Le problème se poserait en des termes identiques en une place $p \neq \infty$ pour les représentations « absolutely cupsidal » définies dans [18].

Un exemple typique de fonction vérifiant les hypothèses de (II.5.14) est la fonction

$$F_\infty(\mathbf{x}) = c_{n+1,\,n+1}(\mathbf{x},\, n\rho)$$

décrite en (II.4.27). (Ici, n est un entier positif impair.) Dans ce cas, on a

$$F_\infty^K\begin{pmatrix} \xi & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{si} \quad \xi < 0,$$

$$F_\infty^K\begin{pmatrix} \xi & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \xi^{\frac{1}{2}(n+1)}(2i)^{n+1}[i(\xi+1)+u]^{-n-1} \quad \text{si} \quad \xi > 0.$$

Nous supposons $\xi > 0$, et pour calculer les termes intervenant dans (II.5.14), nous commençons par calculer

$$\text{(II.5.15)} \qquad \int_{\mathbf{R}} (i(\xi+1)+u+t)^{-n-1}|t|^{z-1}\,dt$$

pour $u \in \mathbf{R}$ et $0 < z < n+1$.

Posons $a = (i(\xi+1)+u)^{-1}$. Alors (II.5.15) vaut

$$a^{n+1}\left\{\int_0^\infty (1+at)^{-n-1}t^{z-1}\,dt + \int_0^\infty (1-at)^{-n-1}t^{z-1}\,dt\right\}.$$

Pour un nombre complexe $x \notin]-\infty, 0]$, nous choisissons la détermination de $\arg(x)$ qui est entre $-\pi$ et $+\pi$. Par exemple, puisque $\operatorname{Im}(a) > 0$, $\arg(-a) = \arg(a) - \pi$. La formule (19) p. 310 de [2] montre que (II.5.15) est égal à

$$a^{n+1}B(z,\, n+1-z)\,(a^{-z}+(-a)^{-z}) = a^{n+1-z}B(z,\, n+1-z)\,(1+e^{-i\pi z}).$$

Le premier terme non nul du développement de (II.5.15) est donc

$$i\pi a^n B(1,\, n)\,(z-1) = i\pi n^{-1}(i(\xi+1)+u)^{-n}(z-1).$$

On obtient donc la formule suivante :

$$\text{(II.5.16)} \qquad \int_{\mathbf{R}} f_\infty^\xi(u+t)\log(|t|)\,dt = i\pi n^{-1}\xi^{\frac{1}{2}(n+1)}(2i)^{n+1}(i(\xi+1)+u)^{-n}$$

(pour $\xi > 0$ et $u \in \mathbf{R}$). On a, en particulier,

$$\text{(II.5.17)} \qquad \int_{\mathbf{R}} f_\infty^\xi(t)\log(|t|)\,dt = -\frac{2\pi}{n}.$$

Nous calculons maintenant, en supposant $\xi > 0$ et $\xi \neq 1$,

$$(\text{II}.5.18) \qquad \int_{\mathbf{R}} (1+u^2)^{-1}(i(\xi+1)+(\xi-1)u)^{-n}\,du.$$

On emploie la méthode des résidus, en distinguant deux cas suivant que $\xi > 1$ ou $\xi < 1$. Dans le premier cas, i est le seul pôle de la fonction à intégrer dans le demi-plan supérieur, et dans le second, $-i$ est le seul pôle dans le demi-plan inférieur. On trouve que (II.5.18) est égal à $(2i\xi)^{-n}$ si $\xi > 1$, et à $(2i)^{-n}$ si $0 < \xi < 1$. Il résulte alors de (II.5.16) que l'on a

$$(\text{II}.5.19) \quad \int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}} f_\infty^\xi((\xi-1)u+t)(1+u^2)^{-1}\log(|t|)\,du\,dt = -2\pi^2 n^{-1}\xi^{\frac{1}{2}}[\sup(\xi,\xi^{-1})]^{-\frac{1}{2}n}$$

pour $\xi > 0$ et $\xi \neq 1$. [Ceci est vrai d'ailleurs aussi pour $\xi = 1$ d'après (II.5.17).] D'autre part, d'après (II.4.27), $\hat{F}_\infty(n)$ est égal à $4\pi n^{-1}$, et $\hat{F}_\infty(\lambda) = 0$ pour tout $\lambda \in \Lambda_\infty^u$. Il résulte alors de (II.5.13), (II.5.14) et (II.5.19) que l'on a le résultat suivant :

(II.5.20) *Soit n un entier positif impair. Si $a_n(F_f)$ est défini comme en* (II.5.13), *on a*

$$a_n(F_f) = -\frac{1}{2}\sum_{\substack{\xi \in \mathbf{Q}^* \\ \xi > 0}} [\sup(\xi,\xi^{-1})]^{-\frac{1}{2}n}\xi^{\frac{1}{2}}\int_{\mathbf{A}_f} F_f^K\begin{pmatrix} \xi & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} du.$$

Remarque 1. — On a

$$(\text{II}.5.21) \qquad \xi^{\frac{1}{2}} g_f(\xi) = \xi^{-\frac{1}{2}} g_f(\xi^{-1}).$$

En effet, il est facile de voir que

$$(\text{II}.5.22) \qquad \int_{G_0/H_0} F_0^K\left(\mathbf{x}\begin{bmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}^{-1}\right) d\mathbf{x}$$

ne change pas quand on remplace $\mathbf{x}$ par $\mathbf{x}w$, et donc ne change pas quand on remplace ξ par ξ^{-1}. Une relation analogue à (I.1.5) prouve que (II.5.22) est égal à

$$\int_{U_f} F_f^K(\mathbf{u}\boldsymbol{\xi}\mathbf{u}^{-1})\,d\mathbf{u}.$$

Comme la multiplication par $(1-\xi)$ dans $\mathbf{A}_f$ a pour norme $|1-\xi|_\infty^{-1}$, cette dernière intégrale est égale à

$$\left|\xi^{-\frac{1}{2}} - \xi^{\frac{1}{2}}\right|_\infty \xi^{\frac{1}{2}} g_{F_f}(\xi),$$

ce qui prouve (II.5.21). On peut aussi déduire (II.5.21) de la relation $Z(F, s\rho, \xi) = Z(F, s\rho, \xi^{-1})$. Compte tenu de (II.5.21), on a

$$(\text{II.5.23}) \quad a_n(F_f) = -\frac{1}{2}\sum_{\substack{\xi\in\mathbf{Q}^*\\ \xi>0}} \xi'^{-\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}} \int_{\Lambda_f} F_f^K\begin{pmatrix}\xi' & u\\ 0 & 1\end{pmatrix} du \quad [\text{avec } \xi' = \sup(\xi, \xi^{-1})].$$

Rapprochant (II.5.13) et (II.5.20), on obtient le résultat suivant :

(II.5.44) *Soit F_f une fonction K_f-finie à droite et à gauche sur G_f, à support compact. Soit F_∞ un élément K_∞-fini à droite et à gauche de $\mathcal{D}(G_\infty)$ [ou de $\mathcal{S}(G_\infty)$] vérifiant la condition suivante :*

$$(\text{II.5.25}) \qquad \int_{U_\infty} F^K(\mathbf{hu})\, d\mathbf{u} = 0 \quad \textit{pour tout } \mathbf{h}\in H_\infty.$$

(C'est équivalent à : $\hat{F}_\infty(\lambda) = 0$ pour tout $\lambda\in\Lambda_\infty^u$.) On a

$$I(F_0\otimes F_\infty) = \sum_n \hat{F}_\infty(n)\left\{-\frac{1}{2}\sum_{\substack{\xi\in\mathbf{Q}^*\\ \xi>0}} \xi'^{\frac{1}{2}(1-n)} \int_{\mathbf{A}_0} F_f^K\begin{pmatrix}\xi' & u\\ 0 & 1\end{pmatrix} d\mathbf{u}\right\},$$

où n parcourt l'ensemble des entiers positifs impairs et où l'on a posé $\xi' = \sup(\xi, \xi^{-1})$.

Remarque 2. — La proposition ci-dessus est énoncée dans [5] avec une erreur : Dans la proposition 2 de [5], il faut lire $\inf(1, \xi)$ et non $\sup(1, \xi^{-1})$.

6. Application : la trace des opérateurs de Hecke.

Dans ce paragraphe, on montre comment obtenir des formules pour la trace des opérateurs de Hecke opérant dans des espaces de formes automorphes holomorphes paraboliques. Dans le cas des formes modulaires, on retrouve la formule d'Eichler-Selberg. La méthode (à part l'utilisation des adèles) est celle de Selberg, elle consiste à appliquer, dans un cas particulièrement simple, la formule des traces de Selberg.

Rappelons que nous notons G'_∞ la composante connexe de G_∞. Nous considérons un sous-groupe ouvert compact M de G_f; en général, l'espace $M\times G'_\infty\backslash G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}}$ est fini. Nous supposerons pour simplifier que l'on a

$$(\text{II.6.1}) \qquad G_{\mathbf{A}} = (M\times G_\infty)\, G_{\mathbf{Q}} \quad \text{et} \quad \tau\in M.$$

Nous posons $\Gamma = M\times G_\infty \cap G_{\mathbf{Q}}$, et nous notons par la même lettre les projections de Γ sur G_∞ et sur G_f. Posons $\Gamma' = G'_\infty\cap\Gamma$. Il est clair que Γ

est un sous-groupe discret de G_∞, que le volume de G_∞/Γ est fini et que $G_\infty/\Gamma = G'_\infty/\Gamma'$ puisque $G'_\infty \Gamma = G_\infty$. Nous fixons, d'autre part, un entier positif impair n. Nous considérons le sous-espace $A(n, \Gamma)$ de $L^2 = L^2(G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}})$ formé des fonctions f qui vérifient :

(i) $f(\mathbf{mx}) = f(\mathbf{x})$ pour tout $\mathbf{m} \in M$ et tout $\mathbf{x} \in G_{\mathbf{A}}$;

(ii) $f(k(\theta)\mathbf{x}) = e^{i(n+1)\theta} f(\mathbf{x})$ pour tout $\theta \in \mathbf{R}$ et tout $\mathbf{x} \in G$;

(iii) f est vecteur propre de Ω pour la valeur propre $n^2 - 1$.

D'après (II.6.1), f est déterminée par sa restriction à G'_∞. Notons H l'ensemble des points de $\mathbf{C}$ de partie imaginaire > 0. Si $z \in H$, et si $\mathbf{x}$ est l'image de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbf{R})$, on pose $\mathbf{x}z = (az + b)/(cz + d)$. La relation

$$\varphi(\mathbf{x}i) = (ci + d)^{n+1} f(\mathbf{x}^{-1})$$

permet de définir une fonction φ sur H, et il est bien connu que l'application $f \to \varphi$ est une bijection de $A(n, \Gamma)$ sur l'ensemble des formes automorphes holomorphes paraboliques de poids $n + 1$ pour le groupe Γ', c'est-à-dire l'ensemble des fonctions holomorphes sur H telles que

(i) $\varphi(\gamma z) = (cz + d)^{n+1} \varphi(z)$ pour tout $z \in H$ et tout $\gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma'$;

(ii) φ est parabolique.

Notez que, d'après (I.4.8), $A(n, \Gamma)$ est contenu dans L^2_d. En fait, la propriété (ii) ci-dessus prouve que l'on a même $A(n, \Gamma) \subset L^2_0$. On peut naturellement établir cette inclusion sans passer par l'intermédiaire des formes holomorphes.

Soit F_f une fonction M-invariante à droite et à gauche sur G_f, à support compact. L'opérateur $T(F_f)$ laisse stable $A(n, \Gamma)$ et nous noterons $Q_n(F_f)$ la restriction de $T(F_f)$ à $A(n, \Gamma)$. (C'est un opérateur de Hecke.) Nous allons calculer la trace de $Q_n(F_f)$.

Pour cela, rappelons que nous avons prouvé [*cf.* (II.4.28)] qu'il existe une fonction F_∞ dans $\mathcal{H}(G_\infty)$, qui vérifie les conditions suivantes :

(i) $D_n(F_\infty)$ induit l'identité dans le sous-espace (de dimension 1) de l'espace de D_n formé des vecteurs f tels que $D_n(k(\theta)) f = e^{-i(n+1)\theta} f$ (pour tout $\theta \in \mathbf{R}$) et 0 dans l'orthogonal. Ceci implique que $\hat{F}_\infty(n) = 1$;

(ii) $\hat{F}_\infty(\lambda) = 0$ pour tout $\lambda \in \Lambda_\infty$, et $\hat{F}_\infty(m) = 0$ pour tout entier positif impair $m \neq n$.

Rappelons que ces conditions impliquent que $\operatorname{tr} D(F_\infty) = 0$ pour toutes les représentations D de la série supplémentaire et que

$$\delta_0(F_\infty) = \delta_\varepsilon(F_\infty) = -\delta_{1,n},$$

en posant $\delta_{1,n}=0$ si $n\neq 1$, et $\delta_{1,1}=1$. Comme G_∞ est de type I, on sait que L_d^2 est la somme directe des sous-espaces $G_{\mathbf{A}}$-invariants $L_d^2(D)$, où D parcourt l'ensemble des classes de représentations unitaires irréductibles de G_∞, et où la représentation de G_∞ dans $L_d^2(D)$ est isotypique de type D. De plus, la représentation naturelle de $G_{\mathbf{A}}$ dans $L_d^2(D)$ est isomorphe au produit tensoriel d'une représentation de G_f et de la représentation D de G_∞. Il en résulte aussitôt que la trace de la restriction de $T_d(F\otimes F_\infty)$ à $L_d^2(D)$ est nulle, sauf si $D=D_n$ si $n\neq 1$, et sauf si $D=D_1$ ou δ_0 ou δ_ε si $n=1$. Remarquons maintenant que $A(n,\Gamma)$ est exactement le sous-espace de $L_d^2(D_n)$ formé des vecteurs f qui sont M-invariants et tels que $T(k(\theta))f=e^{-i(n+1)\theta}$ pour tout $\theta\in\mathbf{R}$. Il est clair, en effet, que $A(n,\Gamma)$ contient ce sous-espace. Réciproquement, si $f\in A(n,\Gamma)$, alors f est contenu dans la somme des $L_d^2(D)$ pour les D tels que $D(\Omega)=n^2-1$ et qui contiennent un vecteur se transformant suivant la représentation $k(\theta)\to e^{-i(n+1)\theta}$ de K'_∞. D'après la classification de $\hat{G}_\infty$, on voit que $D=D_n$. Il est immédiat que la restriction de $T_d(F_f\otimes F_\infty)$ à $A(n,\Gamma)$ est égale à $Q_n(F_f)$, et que la restriction de $T_d(F_f\otimes F_\infty)$ à l'orthogonal de $A(n,\Gamma)$ dans $L_d^2(D_n)$ est nulle si $n\neq 1$. Supposons maintenant $n=1$, et considérons la restriction de $T_d(F_f\otimes F_\infty)$ à $L_d^2(\delta_\varepsilon)$ (avec $\varepsilon=0$ ou 1). Elle est égale à la restriction de $-T_d(F_f)$, et en particulier est nulle dans l'orthogonal de l'espace des vecteurs M-invariants. Par restriction à G_∞, le sous-espace des vecteurs M-invariants de $L_d^2(\delta_\varepsilon)$ s'identifie à l'espace des fonctions Γ-invariantes sur G_∞ proportionnelles à δ_ε. Il est clair qu'il est nul vu les hypothèses sur Γ si $\varepsilon\neq 0$, et formé des fonctions constantes si $\varepsilon=0$. On a donc prouvé en définitive

$$\mathrm{tr}\,T_d(F_f\otimes F_\infty)=\mathrm{tr}\,Q_n(F_f)-\delta_{1,n}\int_{G_f}F_f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}. \tag{II.6.2}$$

Posons $F=F_f\otimes F_\infty$. La formule des traces donne (*cf.* I.7) :

$$\mathrm{tr}\,T_d(F)=\alpha F(1)+\int_{G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}}}\sum_{G_E}F(\mathbf{x}\gamma\mathbf{x}^{-1})\,d\mathbf{x}+I(F). \tag{II.6.3}$$

Nous calculons les termes intervenant dans le membre de droite de (II.6.3) en fonction de F_f. Tout d'abord, on a [d'après (II.4.22)] $F_\infty(1)=n/4\pi$, et [d'après (I.3.39)] $\alpha=\pi/3$, de sorte que l'on a

$$\alpha F(1)=nF_f(1)/12, \tag{II.6.4}$$

Pour calculer le second terme, on utilise la formule

$$\int_{G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}}}f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}=\mathrm{vol}(M)\int_{G_\infty/\Gamma}f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \tag{II.6.5}$$

valable pour toute fonction intégrable M-invariante intégrable sur $G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}}$. D'après (I.7.2), on voit que le second terme est égal à

$$\text{(II.6.6)} \qquad \operatorname{vol}(M)\int_{G_\infty/\Gamma}\sum_{G_E} F_0(\gamma)\, F_\infty(\mathbf{x}\gamma\mathbf{x}^{-1})\, d\mathbf{x}.$$

On note $G_\infty(\gamma)$ le centralisateur dans G_∞ d'un élément $\gamma\in\Gamma$, et on choisit une mesure de Haar sur $G_\infty(\gamma)$. On note $\Gamma(\gamma)$ le centralisateur de γ dans Γ. On note enfin $\{G_E\}_\Gamma$ l'ensemble des classes de conjugaison sous Γ d'éléments de G_E. En raisonnant comme au paragraphe (I.7), on voit que (II.6.6) est égal à :

$$\operatorname{vol}(M)\sum_{\gamma\in\{G_E\}_\Gamma}\operatorname{vol}(G_\infty(\gamma)/\Gamma(\gamma))\, F_f(\gamma)\int_{G_\infty/G_\infty(\gamma)} F_\infty(\mathbf{x}\gamma\mathbf{x}^{-1})\, d\mathbf{x}.$$

Un élément γ de G_E peut être $\mathbf{R}$-hyperbolique ou $\mathbf{R}$-elliptique. Dans le premier cas, il résulte de (II.4.8) que l'intégrale

$$\int_{G_\infty/G_\infty(\gamma)} F_\infty(\mathbf{x}\gamma\mathbf{x}^{-1})\, d\mathbf{x}$$

est nulle. Si γ est $\mathbf{R}$-elliptique, il est conjugué (sous G_∞) d'un élément de la forme $k(\theta_\gamma)$, avec $\theta_\gamma\notin\mathbf{Z}\pi$ [6]. Alors $G_\infty(\gamma)$ est conjugué de K'_∞ ou de K_∞.

Il résulte alors de (II.4.21) que l'on a

$$\int_{G_\infty} F(\mathbf{x}\gamma\mathbf{x}^{-1})\, d\mathbf{x} = -\sin(n\theta_\gamma)/\sin(\theta_\gamma).$$

En définitive, si S désigne un système de représentants de l'ensemble des classes de conjugaisons sous Γ d'éléments $\mathbf{R}$-elliptiques de $G_{\mathbf{Q}}$ [7], on voit que si on note $\wp(\gamma)$ l'ordre de $\Gamma(\gamma)$ (II.6.6) est égal à

$$-\sum_{\gamma\in S}\wp(\gamma)^{-1}(\sin(n\theta_\gamma)/\sin(\theta_\gamma))\, F_f(\gamma).$$

Remarquons qu'il n'y a qu'un nombre fini d'éléments de S dans le support de F_f.

Enfin, d'après (II.5.24), on a

$$I(F_f\otimes F_\infty) = -\frac{1}{2}\sum_{\substack{\xi\in\mathbf{Q}^*\\ \xi>0}}\xi'^{\frac{1}{2}(1-n)}\int_{\mathbf{A}_f} F_f^K\left(\begin{bmatrix}\xi' & u\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right) du \qquad [\text{avec } \xi' = \sup(\xi,\xi^{-1})].$$

---

(6) On peut choisir $\theta_\gamma\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$, en effet $k(\theta)k = (\theta+\pi)$ et $\tau k(\theta)\tau^{-1} = k(-\theta)$.

(7) Remarquons que puisque $\tau\in\Gamma$, si γ est $\mathbf{R}$-elliptique, alors γ^{-1} est conjugué de γ.

On a donc prouvé la proposition suivante :

(II.6.7) *Soit* M *un sous-groupe ouvert compact de* G_f *vérifiant la relation* (II.6.1). *Soit* n *un entier positif impair. On pose* $\Gamma = M \times G_\infty \cap G_{\mathbf{Q}}$; *on note* S *un système de représentants sous* Γ *de l'ensemble des classes de conjugaisons d'éléments* $\mathbf{R}$*-elliptiques de* $G_{\mathbf{Q}}$; *si* $\gamma \in \Gamma$, *on note* $\varpi(\gamma)$ *l'ordre de son stabilisateur dans* Γ. *On pose* $\xi' = \sup(\xi, \xi^{-1})$. *Soit* F_f *une fonction* M-*invariante à droite et à gauche, à support compact sur* G_f, *la trace de l'opérateur de convolution* $Q_n(F_f)$ *est donnée par*

$$\begin{aligned}\operatorname{tr} Q_n(F_f) = \delta_{1,n} \int_{G_f} F_f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} + n\, F_f(1)/12 \\ - \operatorname{vol}(M) \sum_{\gamma \in S} \varpi(\gamma)^{-1} F_f(\gamma) \sin(n\theta_\gamma)/\sin(\theta_\gamma) \\ - \frac{1}{2} \sum_{\substack{\xi \in \mathbf{Q}^\star \\ \xi > 0}} \xi'^{\frac{1}{2}(1-n)} \int_{K_f} \int_{\mathbf{A}_f} F_f\left(\mathbf{k}\begin{bmatrix} \xi' & u \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{k}^{-1}\right) d\mathbf{k}\, du.\end{aligned}$$

Nous allons considérer le cas où $M = K_f$. Soit m un entier > 0. On note τ_m la fonction caractéristique de l'image dans G_f de $\mathfrak{H}_m$, l'ensemble des matrices de $GL(2, \mathbf{A}_f)$ à coefficient dans $\mathbf{O}$ et à déterminant dans $m\mathbf{O}^\star$. Calculons les termes figurant dans (II.6.7). Il est clair que $\tau_m(1) = 0$, sauf s'il existe $h \in \mathbf{O}$ tel que $h^2 \in m\mathbf{O}^\star$, c'est-à-dire si m est un carré. Considérons ensuite l'intégrale

$$\int_{\mathbf{A}_f} \tau_m\left(\begin{bmatrix} \xi & u \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) du. \tag{II.6.8}$$

Elle est égale, pour tout $b \in \mathbf{A}^\star$, à

$$\int_{\mathbf{A}_f} \tau_m\left(\begin{bmatrix} b\xi & bu \\ 0 & b \end{bmatrix}\right) du = |b|_f^{-1} \int_{\mathbf{A}_f} \tau_m\left(\begin{bmatrix} b\xi & u \\ 0 & b \end{bmatrix}\right) du.$$

On voit donc que (II.6.8) est nulle, sauf s'il existe $b \in \mathbf{O}$ tel que $b\xi \in \mathbf{O}$ et $b^2\xi \in m\mathbf{O}^\star$. S'il existe un tel b, il en existe un qui est entier positif, et (II.6.8) est égale à $b = |b|_f^{-1}$. Dans le dernier terme de (II.6.7), nous regroupons les éléments correspondant à ξ et ξ^{-1}. Le dernier terme de (II.6.7) est donc égal à

$$- m^{\frac{1}{2}(1-n)} \left\{ \sum_{\substack{b \mid m \\ b^2 < m}} b^n + \frac{1}{2}\, \varepsilon\left(m^{2}\right) m^{\frac{1}{2}n} \right\},$$

où l'on a posé $\varepsilon\left(m^{\frac{1}{2}}\right) = 0$ si m n'est pas un carré et $\varepsilon\left(m^{\frac{1}{2}}\right) = 1$ sinon.

Il reste à calculer $\int_{G_f} \tau_m(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$. Puisque τ_m est K_f-invariante, cette intégrale est égale au nombre de classes modulo K_f contenues dans le support de τ_m; ou encore au cardinal de $\mathfrak{H}_m/\mathrm{GL}(2, \mathbf{O}_p)$; ou encore au nombre de sous-réseaux d'indice m de $\mathbf{Z}^2$, comme on le voit en considérant la représentation naturelle de dimension 2 de GL(2). On sait que ce nombre est $\sum_{b\mid m} b$.

Lorsqu'on identifie $A(n)$ et l'espace des formes modulaires paraboliques de poids $k = n+1$, l'opérateur $Q_n(\tau_m)$ s'identifie à $m^{\frac{1}{2}k-1}\, T_k(m)$, où $T_k(m)$ désigne l'opérateur de Hecke classique. On a donc prouvé la formule suivante :

(II.6.9) *Soient k un entier pair >0, et m un entier >0. Posons $\varepsilon\left(m^{\frac{1}{2}}\right) = 1$ si m est un carré et $\varepsilon\left(m^{\frac{1}{2}}\right) = 0$ sinon. La trace de l'opérateur de Hecke $T_k(m)$ (opérant dans l'espace des formes modulaires paraboliques de poids k) est donnée par la formule suivante :*

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr} T_k(m) = {} & \delta_{2,k} \sum_{b\mid m} b + \varepsilon\left(m^{\frac{1}{2}}\right) \frac{k-1}{12}\, m^{\frac{1}{2}k-1} \\
& - \sum_{\gamma \in S \cap \tau_m} w(\gamma)^{-1}\, m^{\frac{1}{2}k-1} \sin((k-1)\theta_\gamma)/\sin(\theta_\gamma) \\
& - \left(\sum_{\substack{b\mid m \\ b^2<m}} b^{k-1} + \frac{1}{2}\, \varepsilon\left(m^{\frac{1}{2}}\right) m^{\frac{1}{2}(k-1)} \right).
\end{aligned}$$

(On a posé $\delta_{2,k} = 0$ si $k \neq 2$ et $\delta_{2,k} = 1$ si $k = 2$.)

La formule (II.6.9) n'est rien d'autre que la formule d'Eichler-Selberg : *cf.* [9], [17] et [20].

BIBLIOGRAPHIE.

[1] V. Bargmann, *Irreducible unitary representation of the Lorentz group* [*Ann. of Math.*, (2), vol. 48, 1947, p. 568-640].

[2] M. Bateman and A. Erdélyi, *Tables of Integral Transforms*, ..., vol. I, Mac Graw-Hill Book Company, 1954.

[3] A. Blanchard, *Initiation à la théorie analytique des nombres premiers*, Dunod, Paris, 1969.

[4] A. Borel, *Ensembles fondamentaux pour les groupes arithmétiques et formes automorphes*, Secrét. Math. E. N. S., 45, rue d'Ulm, Paris, 5e, 1967.

[5] M. Duflo et J.-P. Labesse, *C. R. Acad. Sc.*, t. 270, série A, 1970, p. 1154-1157.

[6] L. EHRENPREIS and F. I. MAUTNER, *Some properties o the Fourier-transforms on semisimple Lie groups*. I [*Ann. of. Math.*, (2), vol. 61, 1955, p. 406-439].
[7] L. EHRENPREIS and F. I. MAUTNER, *Some properties of the Fourier-transforms on semisimple Lie groups*. II (*Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 84, 1957, p. 1-55).
[8] L. EHRENPREIS and F. I. MAUTNER, *Some properties of the Fourier-transforms on semisimple Lie groups*. III (*Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 90, 1959, p. 431-484).
[9] M. EICHLER, *Eine Verallgemeinerung der Abelschen Integrale* (*Math. Z.*, Bd. 67, 1957, p. 267-298).
[10] D. K. FADDEEV, *Décomposition en fonctions propres de l'opérateur de Laplace sur le domaine fondamental d'un groupe discret opérant sur le plan de Lobatchevski* (en russe) (*Trudy Mosk. Mat. o. Ba.*, vol. 17, 1967).
[11] I. M. GEL'FAND, M. I. GRAEV and I. I. PYATETSKII-SHAPIRO, *Representation Theory and Automorphic Functions*, W. B. Saunders Company, 1969.
[12] R. GODEMENT, *A Theory of Spherical Functions*. I (*Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 73, 1952, p. 496-556).
[13] R. GODEMENT, *Analyse spectrale des fonctions modulaires*, Séminaire Bourbaki, Exp. 278, vol. 1964-1965, W. A. Benjamin Inc., New York, 1966.
[14] HARISH-CHANDRA, *Spherical functions on a semisimple Lie group*. II (*Amer. J. Math.*, vol. 80, 1958, p. 241-310).
[15] HARISH-CHANDRA, *Automorphic forms on semisimple Lie groups* (*Lecture Notes in Mathematics*, n° 62, Springer-Verlag, 1968).
[16] L. HÖRMANDER, *Linear Partial Differential Operators*, Springer-Verlag, 1963.
[17] Y. IHARA, *Hecke polynomials as congruence ζ functions in elliptic modular case* (*Ann. of Math.*, vol. 85, 1967, p. 267-295).
[18] H. JACQUET and R. P. LANGLANDS, *Automorphic Forms on* GL(2) (*Lecture Notes in Mathematics*, n° 114, Springer-Verlag, 1970).
[19] R. P. LANGLANDS, *Functional Equations satisfied by Eisenstein series* (Preprint).
[20] A. SELBERG, *Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces, with applications to Dirichlet series* (*J. Indian Math. Soc.*, vol. 20, 1956, p. 47-87).
[21] A. SELBERG, *Discontinuous groups and Harmonic Analysis*, Proceedings of the International Congress of Mathematiciens, Stockholm, 1962.
[22] J. TATE, *Fourier Analysis in Number Fields and Hecke's Zeta-Functions* (*Thesis*, 1950); in *Algebraic Number Theory*, Academic Press, 1967.

Manuscrit reçu le 14 janvier 1971.)

Michel DUFLO,
20, rue Fatma El Fehria,
Tunis, Tunisie.

Jean-Pierre LABESSE,
8, impasse Truillot,
94-Ivry.