ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

DANIEL FERRAND

MICHEL RAYNAUD

Fibres formelles d'un anneau local noethérien

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 3, nº 3 (1970), p. 295-311

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1970_4_3_3_295_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 3, 1970, p. 295 à 311.

FIBRES FORMELLES D'UN ANNEAU LOCAL NOETHÉRIEN

PAR DANIEL FERRAND ET MICHEL RAYNAUD.

Soient A un anneau local noethérien intègre, $\mathfrak{m}$ son idéal maximal et A′ le complété de A pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique.

Si A est universellement japonais (*EGA*, 0_{IV}, 23.1.1), ou si A est quotient d'un anneau de Cohen-Macaulay, A′ n'a pas d'idéaux premiers associés immergés (*EGA*, IV, 7.6.4 et 6.3.8). Nous allons construire un anneau local noethérien intègre A, de dimension 2, tel que A′ possède un idéal premier associé immergé.

Si A est quotient d'un anneau régulier, l'ensemble des points de Spec (A) qui vérifient la propriété (S_n) est un ouvert (*EGA*, IV, 6.11.2) et, en désignant par K le corps des fractions de A, $A' \otimes_A K$ est un anneau de Gorenstein ([4], V, § 10, p. 299 et prop. 10.1, p.300). Nous allons construire un anneau local noethérien intègre A de dimension 3 tel que l'ensemble des points de Spec(A) où l'anneau local est de Cohen-Macaulay (resp. est normal) n'est pas ouvert, et un anneau local noethérien intègre A de dimension 1 tel que $A' \otimes_A K$ ne soit pas un anneau de Gorenstein.

Dans ces exemples la clôture intégrale B de A est un anneau local régulier, le morphisme canonique $A' \to B'$ est surjectif, son noyau I est un idéal de carré nul et l'extension A′ de B′ par le B′-module I est triviale. Aussi, nous avons dû faire précéder la construction des anneaux A-ci-dessus de quelques remarques sur la clôture intégrale d'un anneau local noethérien intègre et sur le nilradical de son complété.

La terminologie et les notations utilisées sont celles des *EGA*. Rappelons que si A est un anneau, M un A-module et U un ouvert de S = Spec(A), on note :

— $\tilde{M}$ le faisceau quasi-cohérent sur S associé à M;

— M(U) le module $\Gamma(U, \tilde{M})$ des sections du faisceau $\tilde{M}$ au-dessus de l'ouvert U;

— $\mathbf{D}_A(M)$ l'extension triviale type (*EGA*, 0_{IV}, 18.2.3) de A par M, c'est-à-dire l'anneau de groupe additif sous-jacent $A \times M$, dont la multiplication est donnée par

$$(a, x).(a', x') = (aa', ax' + a'x).$$

Si $t \in A$, l'ouvert d'inversibilité de t est noté S_t.

Enfin, si x est un point de S, $\bar{x}$ désigne l'espace topologique égal à l'adhérence de x.

1. Conservation du caractère noethérien par l'opération de clôture. — Dans ce numéro, A désigne un anneau local noethérien d'idéal maximal $\mathfrak{m}$. On note $S = \operatorname{Spec}(A)$, s le point fermé de S, A′ le complété de A pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique, $\mathfrak{m}'$ l'idéal maximal de A′, $S' = \operatorname{Spec}(A')$ et s' le point fermé de S′. Soient Z une partie fermée de S, Z′ son image réciproque dans S′, $U = S - Z$, $U' = S' - Z'$, $B = A(U)$, $B' = A'(U')$. Comme A′ est plat sur A, le morphisme canonique

$$B \otimes_A A' \to B'$$

est un isomorphisme (*EGA*, IV, 5.9.4).

Proposition 1.1. — *On suppose* Z *non vide et distinct de* S.

(1) *Pour que* B *soit entier sur* A, *il faut et il suffit que pour tout point maximal* x' *de* U′ *on ait* $\operatorname{codim}(\bar{x}' \cap Z', \bar{x}') \geq 2$.

(2) *Pour que* B *soit fini sur* A, *il faut et il suffit que pour tout* $x' \in \operatorname{Ass}(U')$, *on ait* $\operatorname{codim}(\bar{x}' \cap Z', \bar{x}') \geq 2$.

(3) *Soit* I′ *l'idéal de* A′ *formé des éléments de support contenu dans la réunion des adhérences* $\bar{x}'$ *des points* x' *de* $\operatorname{Ass}(U')$ *tels que* $\operatorname{codim}(\bar{x}' \cap Z', \bar{x}') \leq 1$. *On suppose que* $\operatorname{Supp}(I') \cap U'$ *est affine.*

Alors, $\bar{B}' = \Gamma(U', \widetilde{A'/I'})$ *est fini sur* A′ (*donc noethérien*), *c'est un complété de* B *pour la topologie* $\mathfrak{m}B$-*adique et, pour tout entier* $n \geq 0$, $B/\mathfrak{m}^n B$ *est fini sur* $A/\mathfrak{m}^n$.

(4) *Sous les hypothèses et avec les notations de* (3), *si* B *est entier sur* A, *alors* B *est noethérien si et seulement si* $\bar{B}'$ *est plat sur* B *et dans ce cas, pour tout* A-*module de type fini* M *tel que* $\operatorname{Ass}(M) \subset \operatorname{Ass}(A)$, $M(U)$ *est un* B-*module de type fini.*

Remarque 1.2. — L'exemple 3.6 ci-après montre que les hypothèses faites en (3) n'impliquent pas que B est noethérien, même si B est entier sur A.

Démonstration. — Comme A′ est fidèlement plat sur A, B est entier (resp. fini) sur A si et seulement si B′ est entier (resp. fini) sur A′. L'assertion (2) est donc conséquence de *EGA*, IV, 5.11.1 puisque A′ est quotient d'un régulier.

Prouvons l'assertion (1). Soit x' un point maximal de U′ tel que $\operatorname{codim}(\bar{x}' \cap Z', \bar{x}') = 1$ et soit z' un point de $\bar{x}' \cap Z'$ tel que $\operatorname{codim}(\bar{z}', \bar{x}') = 1$. Alors x' est un point isolé de $\operatorname{Spec}(O_{S',z'}) \cap U'$ et, par suite, $B' \otimes_{A'} O_{S',z'}$ contient un facteur direct isomorphe au localisé $O_{S',x'}$ de $O_{S',z'}$ donc n'est pas entier sur ce dernier, donc B′ n'est pas entier sur A′; cela montre que la condition énoncée est nécessaire. Réciproquement, si pour tout point maximal x' de U′ on a $\operatorname{codim}(\bar{x}' \cap Z', \bar{x}') \geq 2$, $A'_{\mathrm{red}}(U')$ est fini sur A′ d'après *EGA*, IV, 5.11.1; comme B'_{red} s'injecte dans $A'_{\mathrm{red}}(U')$, on voit que B′ est entier sur A′.

Prouvons (3). Soit V′ l'ouvert de S′ complémentaire de la réunion des adhérences $\bar{x}'$ des points x' de Ass(U′) tels que $\operatorname{codim}(\bar{x}' \cap Z', \bar{x}') \leq 1$. Par définition, I′ est le noyau de l'homomorphisme de restriction $A' \to A'(V')$; par suite $\operatorname{Ass}(A'/I')$ est contenu dans $\operatorname{Ass}(A') \cap V'$, si bien que pour tout $x' \in \operatorname{Ass}(A'/I') \cap U'$, on a $\operatorname{codim}(\bar{x}' \cap Z', \bar{x}') \geq 2$; le fait que $\bar{B}'$ soit fini sur A′ résulte donc encore de *EGA*, IV, 5.11.1. Posons $J' = I'(U')$. Comme le support de $\tilde{I}' | U'$ est affine, on a $H^1(U', \tilde{I}') = 0$, d'où une suite exacte

$$(\star) \qquad 0 \to J' \to B' \to \bar{B}' \to 0.$$

Pour tout entier $n \geq 0$, $B/\mathfrak{m}^n B$ est isomorphe à $B'/\mathfrak{m}'^n B'$. Par ailleurs, comme le support de $\tilde{I}' | U'$ est affine et que $s' \notin U'$, $J'/\mathfrak{m}'^n J' = 0$. Il résulte alors de ($\star$) que le morphisme canonique $B/\mathfrak{m}^n B \to \bar{B}'/\mathfrak{m}'^n \bar{B}'$ est un isomorphisme, d'où le fait que $B/\mathfrak{m}^n B$ soit fini sur $A/\mathfrak{m}^n$ et que $\bar{B}'$ soit le séparé-complété de B pour la topologie $\mathfrak{m}B$-adique.

Prouvons enfin (4). Si B est noethérien, son complété $\bar{B}'$ est évidemment plat sur B. Réciproquement supposons que $\bar{B}'$ soit plat sur B. Comme B est entier sur A par hypothèse, il résulte de (1) que l'ouvert V′ introduit précédemment contient les points maximaux de S′; par suite, J′ est un nilidéal de B′. Comme B′ est fidèlement plat sur B, on en déduit que $\bar{B}'$ est même fidèlement plat sur B, donc B est noethérien. Enfin, soit M un A-module de type fini tel que $\operatorname{Ass}(M) \subset \operatorname{Ass}(A)$. Posons $N = B \otimes_A M$ et identifions U à son image réciproque dans Spec(B), de sorte que $N(U) = M(U)$ et qu'il suffit de montrer que N(U) est un B-module de type fini. Comme $B \to \bar{B}'$ est fidèlement plat, il suffit de montrer que $\bar{N}'(U')$ est un B′-module de type fini, où $\bar{N}' = \bar{B}' \otimes_B N$. Or, comme $\operatorname{Ass}(M) \subset \operatorname{Ass}(A)$, on a $\operatorname{Ass}(N) \cap U \subset \operatorname{Ass}(B)$, et, par suite, $\operatorname{Ass}(\bar{N}') \cap U' \subset \operatorname{Ass}(\bar{B}')$; il suffit donc d'appliquer une fois de plus *EGA*, IV, 5.11.1.

COROLLAIRE 1.3. — *On suppose que* A *est réduit, que pour tout point maximal* x' *de* U', *on a* $\operatorname{codim}(\overline{x}' \cap Z', \overline{x}') \geq 2$ *et que pour tout* $x' \in \operatorname{Ass}(U')$ *tel que* $\operatorname{codim}(\overline{x}' \cap Z', \overline{x}') = 1$, *on a* $\dim(\overline{x}') = 1$. *Alors* B *est noethérien, de complété* $\overline{B}'$.

En effet, les hypothèses faites entraînent que $\operatorname{Supp}(I') \cap U'$ est discret, donc affine et que B est entier sur A. Il reste donc à voir que $\overline{B}'$ est plat sur B. Soit R l'anneau total des fractions de A, qui est un produit fini de corps puisque A est réduit. La suite des Tor, appliquée à la suite exacte ($\star$) conduit pour tout B-module N, au diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Tor}_1^B(\overline{B}', N) & \to & J' \otimes_B N \\ \downarrow & & \downarrow \\ \operatorname{Tor}_1^B(\overline{B}', N) \otimes_B R & \to & J' \otimes_B N \otimes_B R. \end{array}$$

Or, par localisation, on a

$$\operatorname{Tor}_1^B(\overline{B}', N) \otimes_B R \simeq \operatorname{Tor}_1^R(\overline{B}' \otimes_B R, N \otimes_B R) = 0$$

puisque R est un produit de corps. Par ailleurs, il résulte de la suite exacte ($\star$) et du fait que B' est plat sur B, que la flèche horizontale supérieure est injective. Pour voir que $\operatorname{Tor}_1^B(\overline{B}', N)$ est nul, il suffit donc de montrer que le morphisme $J' \otimes_B N \to J' \otimes_B N \otimes_B R$ est bijectif, ce qui va résulter du fait que J' est en fait un R-module. En effet, comme $T' = \operatorname{Supp}(I') \cap U'$ est discret, $J' = I'(U')$ est le produit des localisés de I' aux points de T'; pour la même raison, T' est formé de points maximaux de Supp(I'), donc $T' \subset \operatorname{Ass}(I') \subset \operatorname{Ass}(A')$; comme Ass(A') est au-dessus de Ass(A) (*EGA*, IV, 6.3.1), on voit finalement que J' est bien un R-module.

COROLLAIRE 1.4. — *Soient* A *un anneau local noethérien réduit et* B *l'anneau des sections de* $\tilde{A}$ *au-dessus du complémentaire du point fermé de* Spec(A). *Si* B *est entier sur* A, *en particulier si* A *est unibranche et si* $\dim(A) \geq 2$ (*EGA*, IV, 18.9.7.5), *alors B est noethérien.*

2. NILRADICAL DU COMPLÉTÉ D'UN ANNEAU LOCAL NOETHÉRIEN INTÈGRE. — Soient A un anneau local noethérien intègre, d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, de corps des fractions K et A' le complété de A pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique.

On pose S = Spec(A), S' = Spec(A') et on désigne par U le complémentaire du point fermé *s* de S et par U' son image réciproque dans S'.

Si A' possède un idéal premier associé immergé p', alors $\operatorname{Ann}_{A'}(p')$ est un idéal de carré nul. D'autre part, si $\dim(A) = 1$, $K \otimes_A A'$ est un anneau artinien, aussi la propriété pour $K \otimes_A A'$ d'être de Gorenstein porte essentiellement sur son radical, c'est-à-dire sur le nilradical de A'. Pour introduire les exemples du paragraphe suivant, nous allons donc d'abord étudier le nilradical de A' en faisant les hypothèses supplémentaires (i) à (iv) ci-dessous :

(i) La clôture intégrale B de A est un anneau local régulier.

En particulier, B est donc noethérien et $B/\mathfrak{m}B$ est artinien; comme le corps résiduel de B est fini sur celui de A, $B/\mathfrak{m}B$ est fini sur $A/\mathfrak{m}$; quitte à remplacer A par une A-algèbre finie contenue dans B, ce qui ne modifie pas la fibre $K \otimes_A A'$, on peut faire l'hypothèse suivante :

(ii) L'homomorphisme $A/\mathfrak{m} \to B/\mathfrak{m}B$ est un isomorphisme.

Posons $B' = A' \otimes_B B$. Comme A' est complet, $A'_{red} \to B'_{red}$ est fini (*EGA*, 0_{IV}, 23.1.5) et l'hypothèse (ii) implique que c'est un isomorphisme. En particulier, B'_{red} est noethérien et par suite régulier puisque son idéal maximal est engendré par l'image de celui de B et que B est régulier. Comme, de plus, B'_{red} est complet et que son gradué associé est isomorphe à celui de B puisqu'ils sont tous les deux réguliers et de même dimension, B'_{red} est le complété de B pour la topologie $\mathfrak{m}B$-adique. Pour simplifier, on suppose aussi que :

(iii) A contient un corps.

On déduit alors du théorème de structure de Cohen que A' contient un sous-anneau régulier $\overline{B}'$ tel que l'homomorphisme composé

$$\overline{B}' \to A' \to A'_{red}$$

soit un isomorphisme. On suppose enfin que :

(iv) Le nilradical I' de A' est de carré nul et son support est de dimension 1.

On en déduit d'abord un isomorphisme

$$\mathbf{D}_{\overline{B}'}(I') \xrightarrow{\sim} A'.$$

Montrons ensuite que sous ces hypothèses, on a un isomorphisme

$$\mathbf{D}_{\overline{B}'}(I'(U')) \xrightarrow{\sim} B'$$

rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{D}_{\overline{B}'}(I') & \longrightarrow & \mathbf{D}_{\overline{B}'}(I'(U')) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ A' & \longrightarrow & B' \end{array}$$

où la flèche supérieure est déduite de l'application de restriction $I' \to I'(U')$.

Supposons d'abord que A soit de dimension 1. Alors B' est la fermeture intégrale de A' dans $K \otimes_A A'$ (Appendice 4.3) et contient par suite le nilradical $K \otimes_A I' = I'(U')$ de $K \otimes_A A'$; c'est un idéal de carré nul et B'_{red} est isomorphe à $\overline{B}'$, d'où l'isomorphisme cherché.

Si $\dim(A) \geqq 2$, montrons d'abord que U est régulier. Soit V' l'ouvert de S' complémentaire de Supp(I'); comme V' est régulier, il suffit (*EGA*, 0_{IV}, 17.3.3) de montrer que le morphisme plat $V' \to U$ est surjectif. Il est d'abord clair que son image contient le point générique de U. D'autre part, $U' \to U$ est surjectif et si $x' \in U' - V'$, x' est un point générique de Supp(I') puisque $\dim(I') = 1$, donc $x' \in \mathrm{Ass}(I')$, d'où l'on déduit que l'image de x' dans U est le point générique de U (*EGA*, IV, 6.3.1) et, par suite, que $V' \to U$ est surjectif. Mais alors U étant régulier, est normal, et le morphisme $\mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ est un isomorphisme au-dessus de U, donc on a $A(U) = B(U)$. Mais B est régulier de dimension $\geqq 2$ donc l'homomorphisme de restriction $B \to B(U)$ est un isomorphisme et, par suite, $B = A(U)$.

Comme A' est fidèlement plat sur A, $B' = A'(U')$; enfin, comme $\overline{B}'$ est régulier de dimension $\geqq 2$, $\overline{B}' \to \overline{B}'(U')$ est un isomorphisme. Bref, on a bien un isomorphisme

$$\mathbf{D}_{\overline{B}'}(I'(U')) \xrightarrow{\sim} B'.$$

Le carré

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ A' & \longrightarrow & B' \end{array}$$

est cartésien puisque φ induit un isomorphisme $B/A \xrightarrow{\sim} B'/A'$. Les isomorphismes établis précédemment montrent que $\varphi = \overline{\varphi} \oplus D$, où $\overline{\varphi}$ est l'homomorphisme canonique de B dans son complété $\overline{B}'$ et D une dérivation de B dans $I'(U')$, de sorte que A est l'ensemble des $x \in B$ tels que $D(x) \in I'$. Enfin, $I'(U')$ est, en fait, un K-module et, en particulier un B-module plat.

Ce pénible dévissage a permis de dégager ce qu'il faut pour construire les exemples que nous avons en vue. En effet, on a la réciproque suivante :

Lemme 2.1. — *Soient* B *un anneau local noethérien d'idéal maximal* $\mathfrak{n}$, $\overline{B}'$ *son complété pour la topologie* $\mathfrak{n}$*-adique*, $\overline{\varphi} : B \to \overline{B}'$ *l'homomorphisme canonique et* U *et* U' *les complémentaires des points fermés dans* Spec(B) *et* $\mathrm{Spec}(\overline{B}')$.

Soient, d'autre part, L *un* $\overline{B}'$*-module de type fini et* $D : B \to L(U')$ *une dérivation. Posons* $A' = \mathbf{D}_{\overline{B}'}(L)$, $B' = \mathbf{D}_{\overline{B}'}(L(U'))$ *et soit* $\varphi : B \to B'$ *l'homomorphisme défini par*

$$\varphi(x) = \overline{\varphi}(x) + D(x).$$

Désignons par A *le produit fibré de* A′ *et de* B *au-dessus de* B′, *de sorte qu'on a le carré cartésien*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{j} & B \\ {\scriptstyle u}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle v} \\ A' & \xrightarrow[j']{} & B' \end{array}$$

où j' *est déduit de l'application de restriction* $L \to L(U')$.

On suppose que :

(i) *L'application* $L \to L(U')$ *est injective et* $L(U')$ *est un* B-*module plat.*

(ii) *L'idéal maximal* $\mathfrak{n}$ *de* B *est engendré par des éléments annulés par* D *et* $B = \mathrm{Ker}(D) + \mathfrak{n}$.

Alors $j : A \to B$ *est entier injectif,* A *est local et le morphisme de* Spec(B) *dans* Spec(A) *déduit de* j *est un isomorphisme au-dessus des complémentaires des points fermés.*

Supposons de plus que :

(iii) *L'application* $B/A \to B'/A'$ *déduite de* v *est surjective* (*donc bijective*).

(iv) *Le* $\overline{B}'$-*module* L *est engendré par* $L \cap D(B) = D(A)$.

(v) A *est noethérien.*

Alors l'homomorphisme $u : A \to A'$ *fait de* A′ *un complété de* A.

Démonstration. — Si, tenant compte de (i), on identifie L à son image dans L(U′), A s'identifie au sous-anneau de B formé des b tels que $D(b) \in L$ et u est alors la restriction de v à A. Comme A contient le noyau de D; pour montrer que B est entier sur A il suffit d'après (ii), de montrer que tout élément t de $\mathfrak{n}$ est entier sur A. Or, l'image de $D(t)$ par l'application de restriction

$$L(U') \to L(U'_t) = L_t$$

peut s'écrire sous la forme x/t^n avec $x \in L$; d'après (*EGA*, I, 9.3.1), il existe un entier $m \geq n$ tel que $t^m D(t) \in L$, donc tel que $t^{m+1} \in A$. Cela montre que B est entier sur A, donc, en particulier que A est local. Soit $\mathfrak{m}$ son idéal maximal.

D'après (ii), il existe une famille finie (t_i) d'éléments de $\mathfrak{n}$ annulés par D et telle que la réunion des ouverts U'_{t_i} soit égale à U′. Soit x un élément de B; invoquant encore (*EGA*, I, 9.3.1), on voit qu'il existe un entier m tel que, pour tout i, $t_i^m D(x) \in L$, donc tel que $t_i^m x \in A$; cela montre que le morphisme $\mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ est un isomorphisme au-dessus des complémentaires des points fermés. D'où la première partie de l'énoncé.

Montrons que u induit un isomorphisme $A/\mathfrak{m} \to A'/\mathfrak{m}A'$. [Il faut prendre garde que $\mathfrak{m}A'$ désigne l'idéal de A' engendré par $u(\mathfrak{m})$; il est, comme on va le voir, distinct de $\mathfrak{m}\overline{B}' + \mathfrak{m}L$]. Il est clair, en tenant compte de (ii) que les corps résiduels de A et de B sont isomorphes, donc aussi ceux de A et de A'. Il suffit donc de voir que $\mathfrak{m}A'$ est égal à l'idéal maximal $\overline{\mathfrak{n}}' + L$ de $A' = \overline{B}' + L$. D'après (ii) un élément b' de $\overline{\mathfrak{n}}'$ peut s'écrire sous la forme

$$b' = \sum_i b'_i a_i \quad \text{avec } b'_i \in \overline{B}', \quad a_i \in \mathfrak{n} \quad \text{et} \quad D(a_i) = 0.$$

Dans A', on a donc

$$(b', 0) = \sum_i u(a_i)\,(b'_i, 0) \in \mathfrak{m}A'.$$

Il reste à voir que pour tout $x \in L$, on a $(0, x) \in \mathfrak{m}A'$. Or, L est engendré par $D(\mathfrak{m})$ [hypothèse (iv)]; on peut donc écrire

$$x = \sum_j D(c_j)\, c'_j \quad \text{avec } c_j \in \mathfrak{m} \quad \text{et} \quad c'_j \in \overline{B}'.$$

On a donc

$$(0, x) = \sum_j u(c_j)\,(c'_j, 0) - \left(\sum_j c_j c'_j, 0\right).$$

Comme $\sum_j c_j c'_j \in \overline{\mathfrak{n}}'$, ce qui précède montre que $(0, x) \in \mathfrak{m}A'$.

On en déduit que l'application canonique $w' : B/A \to A' \otimes_A (B/A)$ est surjective. En effet, comme Spec (B) $\to$ Spec (A) est un isomorphisme sur les complémentaires des points fermés, B/A a pour support le point fermé de A; c'est par suite, A étant supposé noethérien, une réunion filtrante de sous-modules annulés par une puissance de $\mathfrak{m}$; d'où le résultat puisque, d'après ce qui précède, pour tout entier $n \geq 0$, $A/\mathfrak{m}^n \to A'/\mathfrak{m}^n A'$ est surjectif.

Montrons que B' est canoniquement isomorphe à $A' \otimes_A B$. Considérons le diagramme commutatif suivant où les lignes sont exactes et où $v''v' = v$:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "u"] & B \arrow[r] \arrow[d, "v'"] & B/A \arrow[r] \arrow[d, "w'"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] \arrow[d] & A' \otimes_A B \arrow[r] \arrow[d, "v''"] & A' \otimes_A B/A \arrow[r] \arrow[d, "w''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & B'/A' \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

L'hypothèse (iii) stipule que $w''w'$ est un isomorphisme. On vient de voir que w' est surjectif. On en déduit que w'', et, par suite, v'', sont des isomorphismes.

On peut enfin prouver que u fait de A′ un complété de A pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique. En effet, comme L est de type fini, A′ est fini sur $\overline{B}'$; A′ est donc un anneau local noethérien complet. Comme $A/\mathfrak{m} \to A'/\mathfrak{m}A'$ est un isomorphisme, il suffit de montrer que A′ est un A-module plat pour pouvoir conclure. Or, comme Spec (B) $\to$ Spec (A) est entier et birationnel, il suffit ([3], corollaire) de montrer que $A' \otimes_A B = B'$ est plat sur B, ce qui est clair puisque L (U′) est plat sur B par l'hypothèse (i).

3. Les exemples.

Proposition 3.1. — *Pour tout entier* $r \geqq 0$, *il existe un anneau local noethérien intègre* A *de dimension* 1 *dont le complété* A′ *possède un idéal premier minimal* p' *de carré nul tel que* p' *soit un* A/p'*-module libre de rang* r.

Remarque 3.2. — (i) Un anneau local artinien est de Gorenstein si l'intersection de deux idéaux non nuls est non nulle. En particulier, si L est un espace vectoriel de rang fini $\geqq 2$ sur un corps K, $\mathbf{D}_K(L)$ n'est pas un anneau de Gorenstein. On voit donc que dans l'exemple ci-dessus, relatif à $r = 2$, si on désigne par K le corps des fractions de A, $K \otimes_A A'$ n'est pas un anneau de Gorenstein.

(ii) On verra que l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A est engendré par $r + 1$ éléments et que, en désignant par B la clôture intégrale de A, on a un isomorphisme $A/\mathfrak{m} \xrightarrow{\sim} B/\mathfrak{m}B$. Prenant r égal à 1, cela fournit donc un exemple d'anneau d'intersection complète (*EGA*, IV, 19.3.1) qui n'est pas japonais.

D'autre part, un anneau local noethérien intègre dont l'idéal maximal est engendré par deux éléments est de Gorenstein; on voit en prenant r égal à 2, que cela n'est plus nécessairement vrai dès que l'idéal maximal est engendré par trois éléments.

Démonstration. — Soient $B = \mathbf{C}\{X\}$ l'anneau des séries convergentes à coefficients complexes, $\overline{B}' = \mathbf{C}[[X]]$ son complété et L un $\overline{B}'$-module libre de rang r, dont on choisit une base (e_i), $1 \leqq i \leqq r$. Le corps des fractions K de B est une extension de degré de transcendance infini de $\mathbf{C}$, comme on peut le vérifier en adaptant aux séries convergentes le raisonnement de la remarque 4, page 219 de [5].

Comme $\mathbf{C}$ est de caractéristique zéro, K admet une base de transcendance séparante sur $\mathbf{C}$ que l'on peut choisir formée d'éléments de XB. Soit $d : K \to \Omega^1_{K/\mathbf{C}}$ la différentielle extérieure de K relative à $\mathbf{C}$. Il existe donc une famille $(s_{i,n})$, $1 \leqq i \leqq r$, $n \geqq 1$, d'éléments de XB telle que dX et les $ds_{i,n}$ fassent partie d'une base de $\Omega^1_{K/\mathbf{C}}$. On peut donc construire une $\mathbf{C}$-dérivation

$$D : \quad B \to K \otimes_B L$$

telle que $D(X) = 0$ et telle que $D(s_{i,n}) = X^{-n} e_i$.

On prend pour A le sous-anneau de B formé des $b \in B$ tels que $D(b) \in L$.

Il faut vérifier les conditions (i) à (v) du lemme 2.1. La vérification de (i) et de (ii) est immédiate.

Vérifions (iii). Il s'agit de voir que pour tout entier $m \geq 0$, pour tout élément e_i de la base de L et pour tout $b' \in \overline{B}'$, il existe $z \in L$ et $b \in B$ tels que

$$X^{-m} b' e_i = z + D(b).$$

Or, si $b' = \sum_n c_n X^n$ avec $c_n \in \mathbf{C}$, on peut prendre

$$z = \left(\sum_{n \geq m} c_n X^{n-m}\right) e_i \qquad \text{et} \qquad b = \sum_{j=0}^{m-1} c_j s_{i,m-j}.$$

La condition (iv) est satisfaite puisque $D(X^n s_{i,n}) = e_i$.

Il reste donc à voir que A est noethérien. Or, les conditions (i) et (ii) impliquent que B est entier sur A. Comme B est intègre et de dimension 1, il suffit de montrer que l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A est de type fini. On va voir qu'il est engendré par les $r + 1$ éléments $X, Xs_{1,1}, \ldots, Xs_{r,1}$. Soit a un élément de $\mathfrak{m}$. On a

$$D(a) = \sum_i b'_i e_i \qquad \text{avec} \qquad b'_i \in \overline{B}'.$$

En posant $b'_i = c_i + X b''_i$, avec $c_i \in \mathbf{C}$ et $b''_i \in \overline{B}'$ et $z = \sum_i b''_i e_i$, on a

$$D\left(a - \sum_i c_i X s_{i,1}\right) = X z.$$

Comme $\mathfrak{m} \subset XB$, il existe $b \in B$ tel que $a - \sum_i c_i X s_{i,1} = Xb$; mais, en fait, b est dans A car $XD(b) = Xz$, donc $D(b) = z \in L$; d'où le résultat.

Proposition 3.3. — *Il existe un anneau local noethérien intègre* A *de dimension* 2 *tel que le nilradical* I′ *de son complété* A′ *soit de carré nul et soit un* A′*-module isomorphe à un quotient* $A'/\mathfrak{p}'$ *qui est un anneau de valuation discrète. L'idéal maximal* $\mathfrak{m}$ *de* A *est engendré par trois éléments*, Spec (A) *est régulier en dehors du point fermé, la clôture intégrale* B *de* A *est un anneau local régulier et* $A/\mathfrak{m} \to B/\mathfrak{m}B$ *est un isomorphisme.*

Démonstration. — Soient $B = \mathbf{C}\{X, Y\}$ l'anneau des séries convergentes à deux variables, à coefficients complexes et $\overline{B}' = \mathbf{C}[[X, Y]]$ son complété.

LEMME 3.4. — *Soient* $s \in \mathbf{C}[[Y]]$ *une série formelle n'appartenant pas à* $\mathbf{C}\{Y\}$, *et* $t = X + Y + Y^2 s$. *Alors* $\overline{B}'/t\overline{B}'$ *est un anneau de valuation discrète et* $B \cap t\overline{B}' = 0$.

La première assertion provient de ce que t n'est pas contenu dans le carré de l'idéal maximal de $\overline{B}'$. Elle implique que $t\overline{B}'$ est un idéal premier. Donc, si $B \cap t\overline{B}'$ est non nul c'est un idéal principal puisque B est factoriel et, par suite, il existe $f \in B$ et un élément inversible u de $\overline{B}'$ tels que

$$t = uf.$$

L'ordre de la série réduite modulo Y de f est 1 d'après la forme même de t. En utilisant le théorème de préparation de Weierstrass pour les séries convergentes ([5], remark, p. 141), on voit qu'il existe $v \in B$ et $g \in \mathbf{C}\{Y\}$ tels que l'on ait

$$X = fv + g.$$

Dans $\overline{B}'$, cette relation s'écrit

$$X = tu^{-1}v + g.$$

Mais, d'après la définition de t, on a aussi

$$X = t - (Y + Y^2 s).$$

Utilisant l'assertion d'unicité du théorème de Weierstrass dans $\overline{B}'$, on en conclut que $Y + Y^2 s = g \in \mathbf{C}\{Y\}$, contrairement au choix de s.

Choisissons t comme dans 3.4. Alors $R' = \overline{B}'/t\overline{B}'$ est un anneau de valuation discrète complet et l'homomorphisme composé

$$i : \quad B \to \overline{B}' \to R'$$

est injectif. Soient π une uniformisante de R′, K′ le corps des fractions de R′ et $|\ \ |$ la valuation normalisée sur R′. On a

$$|i(X)| = |i(Y)| = 1.$$

Comme le morphisme canonique $\mathbf{C}\{X\} \otimes_{\mathbf{C}} \mathbf{C}\{Y\} \to \mathbf{C}\{X, Y\}$ est injectif, le degré de transcendance du corps des fractions K de $\mathbf{C}\{X, Y\}$ sur le corps des fractions L de $\mathbf{C}\{X\}$ est au moins égal au degré de transcendance du corps des fractions de $\mathbf{C}\{Y\}$ sur $\mathbf{C}$, donc est infini. On en déduit (le corps $\mathbf{C}$ étant de caractéristique 0) que le module

$$\Omega^1_{K/L} = \Omega^1_{B/\mathbf{C}\{X\}} \otimes_B K$$

des différentielles *algébriques* de K relatives à L, est un espace vectoriel sur K de dimension infinie. Il est engendré par l'image dans $\Omega^1_{K/L}$ de $d(B)$, où $d : B \to \Omega^1_{B/\mathbf{C}\{X\}}$ est la différentielle extérieure. Comme tout élément de

B peut se mettre sous la forme $f + Yg$ où $f \in \mathbf{C}\{X\}$ et $g \in B$, on peut trouver une suite $(b_n)_{n \geq 1}$ d'élément de YB tels que les images dans $\Omega^1_{K/L}$ de $d(Y)$ et des $d(b_n)$ fassent partie d'une base de cet espace vectoriel. Enfin, comme $i : B \to R'$ est injectif, i induit un homomorphisme $K \to K'$. Il existe donc une $\mathbf{C}\{X\}$-dérivation

$$D : \quad B \to K' \quad \text{telle que } D(Y) = 0 \qquad \text{et} \qquad D(b_n) = \pi^{-n} \quad \text{pour } n \geq 1.$$

Nous allons appliquer le lemme 2.1 à la dérivation D et au $\overline{B}'$-module R', si bien que l'anneau A cherché est ici le sous-anneau de B formé des $b \in B$ tels que $D(b) \in R'$.

Il faut vérifier que les conditions (i) à (v) du lemme sont vérifiées.

Comme le quotient R' de $\overline{B}'$ joue le rôle du module L de l'énoncé 2.1, on a $L(U') = K'$ et la condition (i) est satisfaite. Comme D annule $\mathbf{C}$, X et Y, la condition (ii) l'est aussi. La condition (iii) est équivalente à la relation $K' = R' + D(B)$; or, R' est isomorphe à l'anneau des séries formelles en π, à coefficients dans $\mathbf{C}$; un élément de K', de valuation $-r (r \geq 0)$ s'écrit donc sous la forme

$$c_r \pi^{-r} + \ldots + c_1 \pi^{-1} + z, \qquad \text{avec} \quad c_i \in \mathbf{C} \quad \text{et} \quad z \in R'.$$

Comme $\pi^{-i} = D(b_i)$, la relation est bien vérifiée.

Posons $Z = Xb_1$; comme $i(X)$ est de valuation 1, $D(Z) = i(X)\pi^{-1}$ est un élément inversible de R', donc un générateur du $\overline{B}'$-module R' ; d'où (iv).

Il reste à vérifier que A est noethérien. Montrons d'abord que l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A est engendré par X, Y et Z. Soit a un élément de $\mathfrak{m}$. Comme D (Z) est inversible dans R', il existe $c \in \mathbf{C}$ tel que $D(a - cZ)$ soit de valuation ≥ 1.

On peut donc supposer que $D(a)$ est de valuation ≥ 1. Dans $B = \mathbf{C}\{X, Y\}$, on a $a = f + Yg$ où $f \in \mathbf{C}\{X\}$ et $g \in B$; comme $D(a) = i(Y) D(g)$ est un élément de valuation ≥ 1 et $i(Y)$ un élément de valuation 1, $D(g)$ est dans R', donc $g \in A$. Comme A contient $\mathbf{C}\{X\}$, cela montre bien que $\mathfrak{m}$ est engendré par X, Y et Z. D'après 2.1, les conditions (i) et (ii) impliquent déjà que B est entier sur A et que Spec (B) $\to$ Spec (A) est un isomorphisme au-dessus du complémentaire du point fermé. On en déduit d'abord que A est intègre et de dimension 2. Pour montrer que A est noethérien, il suffit de montrer que tout idéal *premier* de A est de type fini. On vient de voir que l'idéal maximal de A est de type fini. Il suffit donc d'examiner les idéaux premiers de hauteur 1. Or, ceux-ci sont les images réciproques des idéaux premiers de hauteur 1 de B, lesquels sont principaux puisque B est factoriel. Bref, il suffit de montrer que pour tout élément f de l'idéal maximal $\mathfrak{n}$ de B, $\mathfrak{a} = A \cap fB$ est un idéal de type fini. Soit N l'ensemble des $b \in B$ tels que

$fb \in A$. De la relation $D(fb) = i(b)D(f) + i(f)D(b)$, on déduit que les valeurs de $|D(b)|$ pour b dans N sont minorées. Soit $e \in N$ tel que $|D(e)|$ soit minimum. Pour tout $b \in N$, on a donc $|D(b)| = |D(e)| + r$, avec $r \geq 0$. Comme $|i(X)| = 1$, on en déduit qu'il existe un polynôme P de $\mathbf{C}\{X\}$, tel que $b - Pe \in A$. Pour voir que $\mathfrak{a}$ est de type fini, il suffit donc de montrer que l'idéal $\mathfrak{c}$ de A formé des $c \in A$ tels que $fc \in A$ est un idéal de type fini : en effet, si $\mathfrak{c}$ est engendré par la famille (c_i), $\mathfrak{a}$ est engendré par fe et les fc_i. Or, comme Spec (B) $\rightarrow$ Spec (A) est un isomorphisme au-dessus du complémentaire du point fermé, le fermé $V(\mathfrak{c})$ de Spec (A) est réduit au seul point $\mathfrak{m}$; comme $\mathfrak{m}$ est de type fini, $\mathfrak{c}$ contient une puissance $\mathfrak{m}^n$ de $\mathfrak{m}$; enfin, $A/\mathfrak{m}^n$ est artinien; d'où le résultat.

Proposition 3.5. — *Soit* A *l'anneau construit dans* 3.3. *Alors* $C = A[[T]]$ *est un anneau local noethérien, intègre, de dimension* 3, *tel que* Spec (C) *soit normal en codimension* ≤ 1 *et qui possède une infinité d'idéaux premiers* $\mathfrak{p}$ *de hauteur* 2, *tels que* $\operatorname{prof}(C_{\mathfrak{p}}) = 1$. *En particulier, l'ensemble des points de* Spec (C) *où l'anneau local est de Cohen-Macaulay* (*resp. est normal*) *n'est pas ouvert.*

Notons d'abord que C est un anneau local noethérien intègre, de dimension 3 et que son complété C' s'identifie à $A'[[T]]$. Vu le choix de A', A' possède un et un seul idéal premier associé immergé soit $\mathfrak{p}'$, donc C' possède un idéal premier associé immergé $\mathfrak{p}'C'$ et l'on a $\dim C'/\mathfrak{p}'C' = 2$. Comme C est intègre et que Ass (C') est au-dessus de Ass (C), $\mathfrak{p}'C'$ est au-dessus de l'idéal o de C.

Considérons les idéaux premiers $\mathfrak{q}'$ de C' contenant strictement $\mathfrak{p}'C'$ et ne contenant pas T. Il existe une infinité de tels idéaux puisque $\dim(C'/\mathfrak{p}'C') = 2$, et on a $\dim(C'/\mathfrak{q}') = 1$. Il est clair que $C'/\mathfrak{q}' + TC'$ est fini sur C.

Mais C est complet pour la topologie T-adique, donc $C'/\mathfrak{q}'$ est fini sur C et par suite, si $\mathfrak{q} = C \cap \mathfrak{q}'$, on a $C/\mathfrak{q} \simeq C'/\mathfrak{q}'$. En particulier $\dim C/\mathfrak{q} = 1$, et $C/\mathfrak{q}$ est complet, donc $\mathfrak{q}'$ est l'unique idéal premier de C' au-dessus de $\mathfrak{q}$ et on obtient ainsi une infinité d'idéaux premiers distincts. On a par ailleurs

$$\dim C_{\mathfrak{q}} = \dim C'_{\mathfrak{q}'} = 2 \quad \text{et} \quad \operatorname{prof} C_{\mathfrak{q}} = \operatorname{prof} C'_{\mathfrak{q}'} \quad (\textit{EGA}, \text{ IV, } 6.1.2 \text{ et } 6.3.1).$$

Or $\mathfrak{p}'C'$ est une générisation immédiate de $\mathfrak{q}'$ qui appartient à Ass (C'), donc $\operatorname{prof} C'_{\mathfrak{q}'} \leq 1$ et finalement $\operatorname{prof} C_{\mathfrak{q}} = 1$. Si maintenant $\mathfrak{r}$ est un idéal premier de C distinct de o, de l'idéal maximal et des idéaux $\mathfrak{q}$ du type précédent (par exemple si r est de hauteur 1), et si $\mathfrak{r}'$ est un idéal premier de C' au-dessus de $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{r}'$ ne contient pas $\mathfrak{p}'C'$, donc $C'_{\mathfrak{r}'}$ est régulier et *a fortiori* il en est de même de $C_{\mathfrak{r}}$. La proposition 3.1 résulte immédiatement de ces remarques.

PROPOSITION 3.6. — *Il existe un anneau local noethérien intègre hensélien* C, *de dimension* 3, *et un ouvert* U *de* Spec (C) *tel que* C (U) *soit entier sur* C *et tel que la condition* (3) *de* 1.1 *soit vérifiée mais cependant tel que* C (U) *ne soit pas noethérien.*

Reprenons l'anneau A de 3.3 et l'anneau C de 3.5. Soient $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A, S = Spec (C), Z le fermé de S défini par l'idéal $\mathfrak{m}$C, S′ = Spec (C′), Z′ l'image réciproque de Z dans S′. On sait que le normalisé B de A est un anneau local régulier et que Spec (A) est normal en dehors du point fermé. Par suite $B = \Gamma(\mathrm{Spec}(A) - \mathfrak{m}, O_{\mathrm{spec}(A)})$. Par platitude on en déduit que $B \otimes_A C = \Gamma(S-Z, O_S)$. Nous allons voir que $B \otimes_A C$ n'est pas noethérien. Notons d'abord que B est entier sur A, donc $B \otimes_A C$ est entier sur C et la condition (1) de 1.1 est vérifiée. Le support T′ de la partie immergée de S′ est sous-jacent au spectre d'un anneau régulier de dimension 2 et Z′ est de dimension 1 et contenu dans T′, donc T′ — Z′ est affine et la condition (3) de 1.1 est également satisfaite. Il résulte alors de *loc. cit.* que le séparé-complété de $B \otimes_A C$ est égal à C'_{red}, donc est régulier. Si $B \otimes_A C$ était noethérien, il serait donc régulier; or si $\mathfrak{q}$ est un idéal premier de C, de hauteur 2 et de profondeur 1, autre que $\mathfrak{m}$C (*cf.* 3.5), $\mathfrak{q} \notin Z$, donc $C_{\mathfrak{q}} \simeq (B \otimes_A C)_{\mathfrak{q}}$ n'est pas régulier.

Remarques 3.7. — (i) Tous les exemples d'anneaux que nous avons construits dans le paragraphe 3 sont des algèbres sur le corps des complexes $\mathbf{C}$ et leur « pathologie » n'est donc pas liée à des phénomènes radiciels. Les mêmes constructions valent en caractéristique $p > 0$, à condition de remplacer $\mathbf{C}\{X\}$, par l'anneau $K\{X\}$ des séries convergentes à coefficients dans un corps valué complet non discret K, de caractéristique p; il faut toutefois s'assurer que si L est le corps des fractions de $K\{X\}$ et M celui de $K\{X, Y\}$, on a $\dim_L \Omega^1_{L/K} = +\infty$ et $\dim_M \Omega^1_{M/L} = +\infty$; ces conditions sont en particulier réalisées si $K = k((T))$ avec $[k : k^p]$ non dénombrable.

(ii) La proposition 3.3 n'apporte pas une réponse complète au problème des idéaux premiers associés des fibres formelles d'un anneau local noethérien. En particulier, il est naturel de se demander si A′ peut avoir des idéaux premiers associés immergés dans le cas où A est normal, de dimension ≥ 3.

APPENDICE : UN RÉSULTAT DE DESCENTE.

4.1. Soient X = Spec (A) et X′ = Spec (A′) deux schémas affines, $f : X' \to X$ un morphisme fidèlement plat, Y un sous-schéma fermé de X, $Y' = X' \times_X Y$ son image réciproque dans X′. On suppose que :

(i) le morphisme $Y' \to Y$ déduit de f est un isomorphisme.

(ii) L'ouvert U = X — Y est quasi-compact.

On désigne par $j : \mathrm{U} \to \mathrm{X}$ et $j' : \mathrm{U}' = f^{-1}(\mathrm{U}) \to \mathrm{X}'$ les immersions canoniques et par $g : \mathrm{U}' \to \mathrm{U}$ la restriction de f à U', de sorte qu'on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{U}' \arrow[r, "j'"] \arrow[d, "g"'] & \mathrm{X}' \arrow[d, "f"] \\ \mathrm{U} \arrow[r, "j"'] & \mathrm{X}. \end{tikzcd}$$

Enfin, pour tout schéma S, on note $\mathbf{M}(\mathrm{S})$ la catégorie des O_{S}-Modules quasi-cohérents.

PROPOSITION 4.2. — *Sous les hypothèses faites, le carré de foncteurs*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{M}(\mathrm{X}) \arrow[r, "j^*"] \arrow[d, "f^*"'] & \mathbf{M}(\mathrm{U}) \arrow[d, "g^*"] \\ \mathbf{M}(\mathrm{X}') \arrow[r, "j'^*"'] & \mathbf{M}(\mathrm{U}') \end{tikzcd}$$

est cartésien.

Pour une définition en forme de ce qu'est un carré cartésien de foncteurs, *voir* [1], p. 358. De façon imagée, l'énoncé signifie qu'un $\mathrm{O}_{\mathrm{X}'}$-Module quasi-cohérent « se descend » par f dès que sa restriction à U' se descend par g. On va démontrer, en fait, l'énoncé plus précis suivant :

Soient $(\mathrm{F}', u, \mathrm{E})$ un triplet où F' est un $\mathrm{O}_{\mathrm{X}'}$-Module quasi-cohérent, E un O_{U}-Module quasi-cohérent et

$$u : \quad g^*\mathrm{E} \to \mathrm{F}' \,|\, \mathrm{U}'$$

un isomorphisme de $\mathrm{O}_{\mathrm{U}'}$-Modules. Posons $\mathrm{N}' = \mathrm{F}'(\mathrm{X}')$, de sorte que $\mathrm{F}' = \tilde{\mathrm{N}}'$, $\mathrm{M}' = \mathrm{F}'(\mathrm{U}')$ et $\mathrm{M} = \mathrm{E}(\mathrm{U})$. Considérons M, M′ et N′ comme des A-modules. On a une application A-linéaire $m : \mathrm{M} \to \mathrm{M}'$ déduite de l'application canonique $\mathrm{E} \to g_* g^* \mathrm{E}$ composée avec $g_*(u)$. Notons $r' : \mathrm{N}' \to \mathrm{M}'$ l'application de restriction. Soit N le produit fibré de M et de N′ au-dessus de M′, de sorte qu'on a le carré cartésien

$$\begin{tikzcd} \mathrm{N} \arrow[r, "r"] \arrow[d, "n"'] & \mathrm{M} \arrow[d, "m"] \\ \mathrm{N}' \arrow[r, "r'"'] & \mathrm{M}'. \end{tikzcd}$$

Alors r induit un isomorphisme $\tilde{\mathrm{N}}|\mathrm{U} \to \mathrm{E}$ et n induit un isomorphisme $f^*\tilde{\mathrm{N}} \to \mathrm{F}'$.

Posons $\mathrm{P}' = \mathrm{Ker}(r')$, $\mathrm{Q}' = \mathrm{Coker}(r')$, $\mathrm{P} = \mathrm{Ker}(r)$ et $\mathrm{Q} = \mathrm{Coker}(r)$. Notons que les supports des modules $\mathrm{P}' = \mathrm{H}^0_{\mathrm{Y}'}(\mathrm{F}')$ et $\mathrm{Q}' = \mathrm{H}^1_{\mathrm{Y}'}(\mathrm{F}')$ sont contenus dans Y′. D'autre part, comme le carré ci-dessus est cartésien n induit un isomorphisme $\mathrm{P} \xrightarrow{\sim} \mathrm{P}'$; on en déduit que le support de P est contenu dans Y, donc que l'application canonique $P \to A' \otimes_A P$ est un isomorphisme en utilisant l'hypothèse (i) et la platitude de f.

Pour la même raison, m induit une application injective $Q \to Q'$, donc le support de Q est contenu dans Y et $Q \to A' \otimes_A Q$ est un isomorphisme.

D'autre part, comme U est quasi-compact et f plat, on déduit de *EGA*, III, 1.4.15 un isomorphisme $A' \otimes_A M \to (g^* E)(U')$, d'où un isomorphisme

$$\overline{m} : \ A' \otimes_A M \to M'.$$

Considérons le diagramme commutatif suivant où la ligne supérieure est exacte puisque A′ est plat sur A et la ligne inférieure est exacte par définition de P′ et Q′ :

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & A'\otimes_A P & \longrightarrow & A'\otimes_A N & \longrightarrow & A'\otimes_A M & \longrightarrow & A'\otimes_A Q & \longrightarrow & 0 \\ & & \Big\downarrow{\scriptstyle \overline{p}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \overline{n}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \overline{m}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \overline{q}} & & \\ 0 & \longrightarrow & P' & \longrightarrow & N' & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & Q' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Pour montrer que $\overline{n}$ est un isomorphisme, il suffit de montrer que $\overline{p}$, $\overline{m}$ et $\overline{q}$ sont des isomorphismes. Cela a déjà été vu pour $\overline{p}$ et $\overline{m}$; on a vu aussi que $\overline{q}$ est injectif; or, la commutativité du carré de droite implique que $\overline{q}$ est surjectif.

Comme $\overline{n}$ est un isomorphisme et F′ un module quasi-cohérent, n induit un isomorphisme $f^* \tilde{N} \to F'$. On en déduit que l'application $\tilde{N} | U \to E$ devient un isomorphisme après le changement de base fidèlement plat $U' \to U$; c'est donc un isomorphisme; d'où le résultat.

COROLLAIRE 4.3. — *Gardons les hypothèses et les notations de* 4.1. Soit B (*resp.* B′) *la clôture intégrale de* A *dans* A(U) [*resp. de* A′ *dans* A′(U′)]. *Alors l'homomorphisme canonique* $A' \otimes_A B \to B'$ *est un isomorphisme.*

Il suffit d'appliquer le résultat précédent au $O_{X'}$-Module $\tilde{B}'$ et au O_U-Module O_U.

COROLLAIRE 4.4. — *Soient* A *un anneau noethérien,* I *un idéal de* A *et* A′ *le complété de* A *pour la topologie* I*-adique. Posons* $X = \mathrm{Spec}(A)$, $X_0 = V(I)$, $U = X - X_0$, $X' = \mathrm{Spec}(A')$, $X'_0 = V(IA')$ *et* $U' = X' - X'_0$. *Enfin, notons* $g : U' \to U$ *la restriction à* U′ *du morphisme canonique* $X' \to X$. *Supposons que le couple* (X, X_0) *soit hensélien* (*EGA*, IV, 18.5.5). *Alors l'application* $Of(U) \to Of(U')$ *qui à une partie ouverte et fermée* Z *de* U *associe* $g^{-1}(Z)$, *est bijective.*

Preuve. — Comme le couple (X, X_0) est hensélien, I est contenu dans le radical de A (*EGA*, IV, 18.5.7) donc A′ est fidèlement plat sur A et, par suite, $g : U' \to U$ est surjectif. Cela montre déjà que l'application

$$Of(U) \to Of(U')$$

est injective.

Soient B la fermeture intégrale de A dans A(U) et (B_i) le système inductif des sous-A-algèbres finies de B, de sorte que $Y = \mathrm{Spec}(B)$ est limite projective du système des $Y_i = \mathrm{Spec}(B_i)$. D'après 4.3, $A' \otimes_A B$ est la fermeture intégrale de A' dans A'(U'). Comme l'ensemble des parties ouvertes et fermées d'un schéma est en correspondance biunivoque avec l'ensemble des idempotents de son anneau des sections globales, on a une bijection

$$\mathrm{O}f(Y') \to \mathrm{O}f(U')$$

où $Y' = \mathrm{Spec}(A' \otimes_A B)$. De la même remarque, on déduit les bijections

$$\varinjlim_i \mathrm{O}f(Y_i) \xrightarrow{\sim} \mathrm{O}f(Y) \qquad \text{et} \qquad \varinjlim_i \mathrm{O}f(Y'_i) \xrightarrow{\sim} \mathrm{O}f(Y'),$$

où $Y'_i = \mathrm{Spec}(A' \otimes_A B_i)$.

Comme les couples (X, X_0) et (X', X'_0) sont henséliens, on a, compte tenu de l'isomorphisme $X'_0 \to X_0$, les bijections

$$\mathrm{O}f(Y'_i) \xrightarrow{\sim} \mathrm{O}f(Y'_i \times_{X'} X'_0) \xrightarrow{\sim} \mathrm{O}f(Y_i \times_X X_0) \xrightarrow{\sim} \mathrm{O}f(Y_i).$$

D'où le résultat.

Remarque. — (i) Le seul intérêt de ces résultats est qu'ils ne font appel à aucune hypothèse sur les fibres formelles; lorsque les anneaux sont supposés excellents et de caractéristique zéro, ou lorsqu'on peut utiliser le théorème d'approximation d'Artin, on obtient évidemment des résultats beaucoup plus profonds (cf. *EGA*, IV, 18.9).

(ii) Si A est un anneau local noethérien intègre unibranche de dimension 1, de corps des fractions K, de complété A', on déduit de ce qui précède que $A' \otimes_A K$ est local. Rappelons que Nagata a construit un exemple d'anneau local noethérien normal de dimension 2 tel que Spec $(A' \otimes_A K)$ ne soit même pas connexe.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Bass, *Algebraic K-theory*, Benjamin, 1968.
[2] J. Dieudonné et A. Grothendieck, *Éléments de géométrie algébrique* (cité *EGA*), Publications de l'I. H. E. S. n° 4, ...
[3] Ferrand, *Descente de la platitude par un homomorphisme fini* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 269, série A, 1969, p. 946-949).
[4] Hartshorne, *Residues and duality*, Springer, 1966.
[5] Samuel and Zariski, *Commutative algebra*, t. II, Van Nostrand, 1960.

(Manuscrit reçu le 1er juillet 1970.)

Daniel Ferrand,
188, avenue de Versailles,
75-Paris, 16e.
Michel Raynaud,
Département de Mathématiques,
Faculté des Sciences,
91-Orsay.