

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

YVES MEYER

Les nombres de Pisot et la synthèse harmonique

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 3, n° 2 (1970), p. 235-246

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1970_4_3_2_235_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LES NOMBRES DE PISOT ET LA SYNTHÈSE HARMONIQUE

PAR YVES MEYER,

Faculté des Sciences d'Orsay et Institut Mittag-Leffler de Stockholm.

Soient $\theta > 2$ un nombre de Pisot et E l'ensemble compact de nombres réels défini par la condition : θE est la réunion de E et de $E + 1$. Alors E est un ensemble de synthèse harmonique. Ce travail est divisé en quatre parties : les théorèmes sont énoncés et commentés en les paragraphes 1, 2 et 3; la notion fondamentale d'ensemble harmonieux (une généralisation des progressions arithmétiques) est développée et utilisée en les paragraphes 4 et 5; la preuve du théorème III (duquel découlent les autres résultats) est donnée en les paragraphes 6 à 14. Enfin l'appendice contient les preuves de quelques lemmes techniques d'intérêt indépendant.

LES RÉSULTATS.

1. LES DIVERSES FORMES DU PROBLÈME DE LA SYNTHÈSE HARMONIQUE.
— A un ensemble compact E de nombres réels on peut associer deux espaces fonctionnels; le premier est formé de toutes les fonctions continues et bornées f d'une variable réelle, à valeurs complexes, dont le spectre (c'est-à-dire le support de la transformée de Fourier \hat{f} de f au sens des distributions) est contenu dans E . Le second (contenu dans le premier) est formé de toutes les sommes trigonométriques finies $P(t) = \sum_{\lambda \in E} a_{\lambda} \exp 2\pi i\lambda t$ dont les fréquences appartiennent à E .

Le problème, posé de façon vague, est le suivant : en quel sens peut-on approcher les f par les P ?

Pour préciser cette question il faut maintenant préciser la notion d'approximation.

Soit L^1 l'espace de Banach des classes de fonctions $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ intégrables pour la mesure de Lebesgue dt sur \mathbf{R} et $\sigma(L^\infty, L^1)$ la topologie de la convergence simple définie par la dualité entre L^1 et L^∞ .

DÉFINITION 1.1. — *L'ensemble E possède la propriété de la synthèse étroite si toute fonction continue bornée f dont le spectre est contenu dans E est adhérente, pour la topologie $\sigma(L^\infty, L^1)$ à l'ensemble des sommes trigonométriques finies $P(t) = \sum_{\lambda \in E} a_\lambda \exp 2\pi i \lambda t$ dont les fréquences appartiennent à E et qui vérifient la condition*

$$\sup_{t \in \mathbf{R}} |P(t)| \leq \sup_{t \in \mathbf{R}} |f(t)|.$$

Il revient au même de dire que l'on peut associer à f une suite P_k de telles sommes trigonométriques finies telle que :

(a) $P_k(t) \rightarrow f(t)$ uniformément sur tout ensemble compact de nombres réels t ;

(b) $\|P_k\|_\infty \rightarrow \|f\|_\infty$.

(On dit alors que P_k tend étroitement vers f .)

2. LA PROPRIÉTÉ DE LA SYNTHÈSE ÉTROITE ET LES NOMBRES DE PISOT.

2.1. Soit θ un nombre réel supérieur à 2. On dit que θ est un nombre de Pisot si θ est un entier algébrique (soit n son degré) dont tous les conjugués $\theta_2, \dots, \theta_n$ (autres que θ) vérifient $|\theta_2| < 1, \dots, |\theta_n| < 1$. A ce nombre θ on associe l'ensemble E de toutes les sommes $\sum_1^\infty \varepsilon_j \theta^{-j}$, $\varepsilon_j = 0$ ou 1 ; une suite E_k de parties finies de E dont la réunion est dense dans E est définie comme suit : E_k est l'ensemble de toutes les sommes finies $\sum_1^k \varepsilon_j \theta^{-j}$, $\varepsilon_j = 0$ ou 1 .

THÉORÈME I. — *Soient θ un nombre de Pisot et $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction continue bornée dont le spectre est contenu dans E . On peut alors former une suite $f_k, k \geq 1$, de sommes trigonométriques finies telles que :*

(a) les fréquences de f_k appartiennent à E_k (donc à E);

(b) $f_k(t) \rightarrow f(t)$ uniformément sur tout compact;

(c) $\|f_k\|_\infty \rightarrow \|f\|_\infty$.

3. LA SYNTHÈSE PAR UNE SUITE D'OPÉRATEURS. — Le théorème I ne fournit pas un procédé explicite pour déterminer f_k à l'aide de f . Dans le résultat ci-dessous, f_k dépend linéairement de f mais on perd un peu vis-à-vis de (a) et (c). Les notations sont celles du théorème I.

THÉORÈME II. — Soit θ un nombre de Pisot. On peut trouver une partie finie F de E , une constante C et une suite L_k d'applications linéaires telles qu'en appelant F_k l'ensemble fini $E_k + \theta^{-k}F$, contenu dans E , on ait les propriétés suivantes :

- (a) les fréquences de $L_k(f)$ appartiennent à F_k ;
- (b) $|(L_k f)(t) - f(t)| \leq C \theta^{-k} |t| \sup_{s \in \mathbf{R}} |f(s)|$;
- (c) $\|L_k f\|_\infty \leq C \|f\|_\infty$.

Le théorème I est un corollaire du théorème II et du corollaire 1 du théorème II du chapitre 5 de [5]. Nous ne savons pas s'il existe un choix de la suite L_k , $k \geq 1$, pour lequel $F = \{0\}$ et pour lequel $L_k f$ converge étroitement vers f .

Enfin le rôle joué par les nombres de Pisot dans ces deux énoncés reste mystérieux.

La condition (c) du théorème II suggère de faire le changement de variable $\theta^{-k}t = u$. Appelons, pour tout entier rationnel k , τ_k l'isométrie de L^∞ qui transforme f en la fonction définie par $u \rightarrow f(\theta^k u)$. Si le spectre de f est contenu dans E , celui de $\tau_k f$ est contenu dans $\theta^k E = \Lambda_k + E$, où Λ_k est

l'ensemble de toutes les sommes $\sum_0^{k-1} \varepsilon_j \theta^j$, $\varepsilon_j = 0$ ou 1 .

Appelons Λ l'ensemble de toutes les sommes finies $\sum_{k \geq 0} \varepsilon_k \theta^k$, où $\varepsilon_k = 0$ ou 1 .

Si θ est un nombre de Pisot, l'ensemble Λ possède une remarquable propriété d'approximation Diophantienne que nous allons maintenant définir.

LES ENSEMBLES HARMONIEUX.

4. DÉFINITIONS. — Soit Λ un ensemble de nombres réels; appelons caractère faible sur Λ toute application χ de Λ dans le groupe \mathbf{T} des nombres complexes de module 1 possédant la propriété suivante : pour tout entier $n \geq 1$, toute suite $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ d'éléments de Λ et toute suite p_1, \dots, p_n d'entiers rationnels, toute relation $\sum_1^n p_j \lambda_j = 0$ entraîne $\prod_1^n [\chi(\lambda_j)]^{p_j} = 1$.

DÉFINITION 4.1. — L'ensemble Λ est harmonieux si à tout caractère faible $\chi : \Lambda \rightarrow \mathbf{T}$ et à tout $\varepsilon > 0$ on peut associer un nombre réel t tel que $\sup_{\lambda \in \Lambda} |\chi(\lambda) - e^{i\lambda t}| \leq \varepsilon$.

Nous dirons, suivant Besicovitch [1], qu'un ensemble M de nombres réels est *relativement dense* s'il existe un nombre réel positif A tel que tout intervalle de longueur A contienne au moins un point de M .

La propriété suivante est très utile : appelons pour tout $\varepsilon > 0$, M_ε l'ensemble des t réels tels que, pour tout λ dans Λ , $|\exp 2\pi i \lambda t - 1| \leq \varepsilon$.

PROPOSITION 4.2. — *L'ensemble Λ est harmonieux si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, M_ε est relativement dense.*

Ces résultats sont prouvés dans ([3], th. I, p. 128).

PROPOSITION 4.3. — *Soient $\theta > 1$ un nombre de Pisot, Λ l'ensemble des sommes finies $\sum_{k \geq 0} \varepsilon_k \theta^k$, $\varepsilon_k = 0$ ou 1. Alors Λ est harmonieux.*

Il suffit de choisir pour M_ε l'ensemble de toutes les sommes finies $\sum_{k \geq p} \varepsilon_k \theta^k$ où $\varepsilon_k \in \mathbf{Z}$, $|\varepsilon_k| \leq p$ et où $p = p(\varepsilon)$ est assez grand. Si θ n'est pas un nombre de Pisot, Λ n'est pas harmonieux [3].

5. LA NOUVELLE FORME DU THÉORÈME DE SYNTHÈSE.

THÉORÈME III. — *Soient Λ un ensemble harmonieux de nombres réels et E un ensemble compact de nombres réels. On peut trouver une partie finie F de E , une application linéaire L transformant les fonctions continues et bornées f à spectre dans $\Lambda + E$ en fonctions presque-périodiques g à spectre dans $\Lambda + F$ et une constante C telles que*

$$(a) \|g\|_\infty \leq C \|f\|_\infty;$$

$$(b) |g(t) - f(t)| \leq C |t| \|f\|_\infty;$$

(c) *pour tout λ dans Λ , si le spectre de f appartient à $\lambda + E$, celui de g appartient à $\lambda + F$.*

Avant de démontrer ce résultat, il est intéressant d'indiquer quelles propriétés remarquables possèdent les fonctions presque-périodiques dont le spectre est contenu dans $\Lambda' = \Lambda + F$.

En premier lieu Λ' est un ensemble harmonieux ([3], th. III, p. 130). Appelons ε -presque période d'une fonction continue bornée $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ tout nombre réel τ tel que, pour tout t réel $|g(t + \tau) - g(t)| \leq \varepsilon \|g\|_\infty$.

Dans la proposition ci-dessous, Λ désigne encore un ensemble harmonieux, M_ε l'ensemble des nombres réels t tels que, pour tout λ dans Λ on ait $|\exp 2\pi i t \lambda - 1| \leq \varepsilon$ et $\gamma > 0$ est une constante absolue.

PROPOSITION 5.1. — *Tout élément τ de M_ε est une $\varepsilon\gamma$ -presque période de toute fonction presque-périodique à spectre dans Λ .*

C'est la même démonstration que dans ([3], p. 142).

Avant de prouver le théorème III, montrons qu'il entraîne le théorème II. Soit en effet f une fonction continue de \mathbf{R} dans \mathbf{C} dont le spectre est contenu dans E . Avec les notations du paragraphe 3, le spectre de $\tau_k f$ est contenu dans $\Lambda_k + E$ lui-même contenu dans $\Lambda + E$. On définit $L_k(f) = (\tau_{-k} \circ L \circ \tau_k)(f)$. La condition (a) du théorème III assure que le spectre de $(L \circ \tau_k)(f)$ est

contenu dans $\Lambda_k + F$; celui de $(\tau_{-k} \circ L \circ \tau_k)(f)$ est donc contenu dans $\theta^{-k}\Lambda_k + \theta^{-k}F = F_k$. Les conditions (b) et (c) du théorème III donnent (b) et (c) dans le théorème II.

PREUVE DU THÉORÈME III.

6. LE CAS FACILE. — Pour prouver le théorème III en toute généralité, nous avons besoin d'un cas particulier important où l'on peut choisir pour F un seul point a de E . Le cas général s'obtiendra alors en découpant Λ en un nombre fini de morceaux pour lesquels F est réduit à un point.

Quelques définitions sont nécessaires.

Soit Λ un ensemble de nombres réels. Le pas $d(\Lambda)$ de Λ est la borne inférieure de l'ensemble des distances séparant deux points distincts de Λ . Si $0 < l < d(\Lambda)$, les intervalles $[\lambda, \lambda + l]$, $\lambda \in \Lambda$, sont deux à deux disjoints.

DÉFINITION 6.1. — L'écartement $\delta(\Lambda)$ de Λ est la borne supérieure des l tels que $0 < l < d(\Lambda)$ et que le théorème III soit vrai avec $E = [0, l]$ et $F = \{0\}$.

Nous savons minorer l'écartement d'un ensemble harmonieux.

Les notations de la proposition 6.2 sont les mêmes que celles de la proposition 5.1.

PROPOSITION 6.2. — Soit $\delta > 0$ tel que $[0, \delta] + M_\varepsilon = \mathbf{R}$; alors l'écartement de Λ dépasse $\frac{1-\varepsilon\gamma}{\delta}$.

La preuve de ce résultat est donnée dans l'appendice.

PROPOSITION 6.3. — Si le diamètre de E est inférieur à l'écartement de Λ , nous dirons que nous sommes dans le cas facile et le théorème III est vrai en prenant pour F l'ensemble réduit à un point, d'ailleurs arbitraire, de E .

7. RÉSUMÉ DE LA PREUVE DANS LE CAS DIFFICILE. — L'idée de la preuve est d'« enrouler » Λ sur le compactifié de Bohr $\tilde{\mathbf{R}}$ de \mathbf{R} et, grâce à une partition de l'unité faite sur $\tilde{\mathbf{R}}$ à l'aide de fonctions « régulières », de découper Λ en un nombre fini de morceaux dont l'écartement soit grand devant le diamètre de E . On est alors ramené au cas facile.

Rappelons que le groupe compact $\tilde{\mathbf{R}}$ est le groupe dual du groupe \mathbf{R} muni de la topologie discrète; $A(\tilde{\mathbf{R}})$ désigne l'algèbre de Banach des fonctions $\psi: \tilde{\mathbf{R}} \rightarrow \mathbf{C}$ continues sur $\tilde{\mathbf{R}}$ et dont la série de Fourier est absolument convergente. Un homomorphisme continu $h: \mathbf{R} \rightarrow \tilde{\mathbf{R}}$ d'image dense est défini par la condition: pour tout $t \in \mathbf{R}$, $h(t)$ est le caractère sur \mathbf{R} (muni de la topologie discrète) $s \rightarrow \exp 2\pi ist$. Si ψ est dans $A(\tilde{\mathbf{R}})$, $\psi \circ h$ est une fonction presque-périodique sur \mathbf{R} dont la série de Fourier est absolument convergente.

8. L'ENSEMBLE F_1 . — Soit Λ un ensemble harmonieux et, pour tout $\varepsilon > 0$, soit M_ε l'ensemble des nombres réels t tels que pour tout λ dans Λ on ait $|\exp 2\pi i \lambda t - 1| \leq \varepsilon$. Soit F_1 l'ensemble fini des nombres réels μ appartenant à $E - E$ et tels que, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout t dans M_ε on ait $|\exp 2\pi i \mu t - 1| \leq 2\varepsilon$; 0 appartient donc à F_1 . Soit enfin $\bar{\Lambda}$ l'ensemble des nombres réels μ tels que, pour tout t dans M_ε et tout $\varepsilon > 0$ on ait $|\exp 2\pi i \mu t - 1| \leq \varepsilon$; $\bar{\Lambda}$ est un ensemble harmonieux (prop. 4.2).

La définition ci-dessus de F_1 paraît artificielle; nous allons voir comment F_1 intervient lorsqu'on envoie Λ dans le compactifié de Bohr $\tilde{\mathbf{R}}$ de \mathbf{R} .

9. LE COMPACTIFIÉ DE BOHR, U, Λ^*, U^* . — Soit $h: \mathbf{R} \rightarrow \tilde{\mathbf{R}}$ l'homomorphisme canonique de \mathbf{R} dans le compactifié de Bohr de \mathbf{R} défini au paragraphe 7 et soit U la fermeture dans $\tilde{\mathbf{R}}$ de $h(\Lambda)$. L'ensemble U est une partie compacte de $\tilde{\mathbf{R}}$ et l'image réciproque de U par h est contenue dans l'ensemble harmonieux $\bar{\Lambda}$ comme le prouvent les deux lemmes suivants.

LEMME 1. — *Pour tout $\varepsilon > 0$, tout $t \in M_\varepsilon$ et tout $x \in U$, on a $|x(t) - 1| \leq \varepsilon$.*

La valeur prise par le caractère x de $\tilde{\mathbf{R}}$ en t est $x(t)$; les inégalités $|x(t) - 1| \leq \varepsilon$, où t décrit M_ε définissent une partie fermée de $\tilde{\mathbf{R}}$ contenant $h(\Lambda)$, donc contenant U . On en déduit le lemme suivant :

LEMME 2. — *L'ensemble des nombres réels t tels que $h(t)$ appartienne à U est contenu dans $\bar{\Lambda}$.*

Soit $V = h(E)$; le lemme 3 ci-dessous nous montre que le nombre de décompositions d'un élément x de $\tilde{\mathbf{R}}$ en une somme $y + z$, où $y \in U, z \in V$ est fini; l'ensemble fini qui intervient ici est précisément F_1 .

LEMME 3. — *Si x , élément de $\tilde{\mathbf{R}}$, peut être décrit $x = y + z = y' + z'$, où y et y' appartiennent à U et z et z' à V , alors $y - y'$, ainsi que $z - z'$ appartiennent à $h(F_1)$.*

En effet, $z' - z = h(s)$, où $s \in E - E$. D'autre part, le lemme 1 nous apprend que pour tout t dans M_ε on a $|(y - y')(t) - 1| \leq 2\varepsilon$. On en déduit $|\exp 2\pi i s t - 1| \leq 2\varepsilon$, ce qui entraîne que s appartient à F_1 .

Il sera important dans la suite de considérer le compact $U^* = U + h(F_1)$ de $\tilde{\mathbf{R}}$; l'ensemble des nombres réels t tels que $h(t)$ appartienne à U^* est contenu dans l'ensemble harmonieux $\Lambda^* = \bar{\Lambda} + F_1$ ([3], p. 130, th. III).

10. LE DÉCOUPAGE DE Λ . — Nous allons découper l'ensemble harmonieux Λ en un nombre fini de morceaux, les Λ_j^* , $1 \leq j \leq n$, tels que l'écartement de chaque Λ_j^* dépasse $2l$ (l est assez grand pour que $F_1 + E$ soit contenu dans $[-l, l]$).

Voici comment on procède. Soient ε et δ deux nombres positifs assez petits pour que $\frac{1-4\gamma\varepsilon}{\delta} > 2l$ (γ est défini en 6.2). Soit M_ε^* l'ensemble des nombres réels t tels que, pour tout λ dans Λ^* , on ait $|\exp 2\pi i \lambda t - 1| \leq \varepsilon$ et T un ensemble fini de nombres réels tel que $[0, \delta] + T + M_\varepsilon^* = \mathbf{R}$; ceci est possible car M_ε^* est relativement dense.

Pour tout x de $\tilde{\mathbf{R}}$, soit ω_x (resp. ω_x^*) l'ensemble des y appartenant à $\tilde{\mathbf{R}}$ tels que, pour tout t dans T , on ait $|y(t) - x(t)| < \frac{\varepsilon}{3}$ (resp. $|y(t) - x(t)| \leq \varepsilon$). Soit enfin ω l'ensemble des $y \in \tilde{\mathbf{R}}$ tels que, pour tout t dans T , on ait $|y(t) - 1| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Quand x décrit U , les ω_x forment un recouvrement ouvert de U . On peut trouver un entier n et un sous-recouvrement fini de U par $\omega_1, \dots, \omega_n$ correspondant aux points x_1, \dots, x_n de U . On appelle U_j^* l'ensemble fermé $U^* \cap \omega_j^*$ et l'on définit Λ_j^* comme l'ensemble des nombres réels λ tels que $h(\lambda)$ appartienne à U_j^* . L'ensemble Λ_j^* est contenu dans Λ^* et la réunion $\bigcup_{1 \leq j \leq n} \Lambda_j^*$ contient Λ .

LEMME 4. — *L'écartement de Λ_j^* dépasse $2l$.*

En effet, Λ_j^* étant contenu dans Λ^* , on a, pour tout λ dans Λ_j^* et tout t dans M_ε^* , $|\exp 2\pi i \lambda t - 1| \leq \varepsilon$. D'autre part, soit a_j un point arbitraire de Λ_j^* mais qui reste fixe dans la suite. Pour tous les y et y' de ω_j^* et tout t dans T , on a

$$|y(t) - x_j(t)| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad |y'(t) - x_j(t)| \leq \varepsilon$$

et donc $|y(t) - y'(t)| \leq 2\varepsilon$. En particulier, $|\exp 2\pi i(\lambda - a_j)t - 1| \leq 2\varepsilon$ pour tout λ dans Λ_j^* et tout t dans T . Finalement, pour tout t dans $T + M_\varepsilon^*$ et tout λ dans Λ_j^* , on a $|\exp 2\pi i(\lambda - a_j)t - 1| \leq 4\varepsilon$. La proposition 6.2 montre alors que l'écartement de $\Lambda_j^* - a_j$ (qui est celui de Λ_j^*) dépasse $2l$.

11. LES FONCTIONS φ_j , $1 \leq j \leq n$. — Soient $V = h(E)$, U_j la fermeture dans $\tilde{\mathbf{R}}$ de $U \cap \omega_j$; alors U_j est contenu dans U et tout x de U_j vérifie les inégalités $|x(t) - x_j(t)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ ($t \in T$). Soit Ω_j une partie ouverte de $\tilde{\mathbf{R}}$ contenant l'ensemble fermé $U_j + V$ et assez petite pour que, pour tout k entre 1 et n , si $U_j + V$ ne rencontre pas $U_k + V$, alors Ω_j ne rencontre pas Ω_k . Les Ω_j forment un recouvrement ouvert de $U + V$.

Soit ψ_1, \dots, ψ_n une suite de fonctions continues sur $\tilde{\mathbf{R}}$, dont la série de Fourier est absolument convergente et telles que :

- (1) le support de ψ_j est contenu dans Ω_j ;
- (2) $\psi_1 + \dots + \psi_n = 1$ au voisinage de $U + V$.

Posons $\varphi_j = \psi_j \circ h$ ($1 \leq j \leq n$). Les φ_j sont des fonctions presque-périodiques à série de Fourier absolument convergente; ce sont donc des transformées de Fourier de mesures atomiques bornées σ_j . On a $\varphi_1 + \dots + \varphi_n = 1$ au voisinage de $\Lambda + E$ et donc, grâce à la théorie de Wiener, pour toute fonction continue bornée f dont le spectre est contenu dans $\Lambda + E$, on a $f = f \star \sigma_1 + \dots + f \star \sigma_n$.

LEMME 5. — *Dans ces conditions, le spectre de $f \star \sigma_j$ est contenu dans $\Lambda_j^* + [-l, l]$.*

Soit en effet t un nombre réel dans $\Lambda + E$ appartenant au support de φ_j . Si nous montrons que t appartient à $\Lambda_j^* + [-l, l]$, le lemme 5 sera prouvé grâce à la théorie de Wiener.

Dans ces conditions $h(t) = x$ peut être écrit $x = u + v$, où $u \in U_k$ et $v \in V$. Mais, d'autre part, x appartient à Ω_j qui contient $U_j + V$.

Si $U_j + V$ et $U_k + V$ ne se rencontreraient pas, Ω_j ne rencontrerait pas $U_k + V$ et x n'existerait pas. Donc $U_j + V$ rencontre $U_k + V$. Le lemme 3 montre que l'on peut trouver un $y \in U_j, y' \in U_k$ tels que $y - y' \in h(F_1)$. Posons $u^* = u + y - y'$ et montrons que u^* appartient à U_j^* . Comme u^* appartient visiblement à $U^* = U + h(F_1)$, il suffit de montrer que u^* appartient à l'ensemble fermé ω_j^* . Mais $u - y'$ appartient à $\bar{\omega} - \bar{\omega}$ ($\bar{\omega}$ est la fermeture de ω) et y à $\bar{\omega}_j$; u^* appartient donc à ω_j^* . Enfin u appartient à $h(\mathbf{R})$; il en est de même pour $y - y'$ et cela prouve que $u^* = h(\lambda^*)$, où λ^* appartient à Λ_j^* . On a alors $x = u^* + y' - y + v$ et donc t appartient à $\Lambda_j^* + F_1 + E$ contenu dans $\Lambda_j^* + [-l, l]$.

12. L'ENSEMBLE F. — L'introduction de F et une partition de $[-l, l]$ permettront de préciser ce qui arrive si, pour un λ^* dans Λ^* et un λ dans Λ , l'intervalle $[\lambda^* - l, \lambda^* + l]$ rencontre $\lambda + E$. Tout d'abord $\lambda - \lambda^*$ appartient à $\Lambda^* - \Lambda^*$, autre ensemble harmonieux, et à $[-l, l] - E$; donc $\lambda - \lambda^*$ appartient à un ensemble fini A. Considérons les translatés E_α de E par tous les éléments α de A. Pour tout s dans $[-l, l]$ on peut trouver un intervalle ouvert J_s , de centre s , assez petit pour que, si J_s rencontre $E_\alpha, \alpha \in A$, alors s appartienne à E_α . On recouvre $[-l, l]$ à l'aide d'un nombre fini J_1, \dots, J_q de ces intervalles ouverts de centres s_1, \dots, s_q et l'on appelle F l'ensemble fini des différences $s_k - \alpha, 1 \leq k \leq q, \alpha \in A$, qui appartiennent à E. On peut alors énoncer le lemme

LEMME 6. — *Soient $\lambda^* \in \Lambda^*, 1 \leq k \leq q$ et $\lambda \in \Lambda$; si $\lambda^* + J_k$ rencontre $\lambda + E$, alors $\lambda^* + s_k$ appartient à $\lambda + F$.*

Appelons ζ_1, \dots, ζ_q des fonctions indéfiniment dérivables telles que $\zeta_1 + \dots + \zeta_q = 1$ sur $[-l, l]$ et telles que le support de chaque ζ_k soit contenu dans J_k .

13. LES FONCTIONS $Z_{j,k}$. — Définissons sur $\Lambda_j^* + [-l, l]$, la fonction continue $Z_{j,k}$, à valeurs complexes, par $Z_{j,k}(t) = \zeta_k(s)$ si $t = \lambda^* + s$, $\lambda^* \in \Lambda_j^*$ et $|s| \leq l$. Le lemme suivant est prouvé dans l'appendice (lemme 3 de l'appendice).

LEMME 7. — *Il existe une mesure de Radon bornée $\mu_{j,k}$ dont la transformée de Fourier restreinte à $\Lambda_j^* + [-l, l]$ est $Z_{j,k}$.*

14. L'OPÉRATEUR L. — L'écartement de Λ_j^* dépasse $2l$. Il existe donc (proposition 6.3), pour tout j et tout k , $1 \leq j \leq n$, $1 \leq k \leq q$, une application $L_{j,k}$ linéaire continue transformant les fonctions continues bornées à spectre dans $\Lambda_j^* + J'_k$ ($J'_k = J_k \cap [-l, l]$) en fonctions presque-périodiques à spectre dans $\Lambda_j^* + s_k$ et ayant les propriétés suivantes :

$$(1) \sup_{t \in \mathbf{R}} |L_{j,k}(f)(t)| \leq C \|f\|_\infty;$$

$$(2) |(L_{j,k}f)(t) - f(t)| \leq C |t| \|f\|_\infty;$$

(3) si le spectre de f est contenu dans $[\lambda^* - l, \lambda^* + l]$, $\lambda^* \in \Lambda_j^*$, celui de $L_{j,k}(f)$ est $\lambda^* + s_k$.

Partons de f dont le spectre est contenu dans $\Lambda + E$. On définit f_j par $f_j = f \star \sigma_j$ le spectre de f_j est contenu dans $\Lambda_j^* + [-l, l]$. On définit alors $f_{j,k}$ par $f_j \star \mu_{j,k}$. On a $f_j = \sum_{1 \leq k \leq q} f_{j,k}$ et donc $f = \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq q}} f_{j,k}$.

On transforme la fonction continue bornée $f_{j,k}$ en $g_{j,k}$ par l'application $L_{j,k}$. Enfin g est, par définition, la somme des $g_{j,k}$, $1 \leq j \leq n$, $1 \leq k \leq q$. On pose $g = L(f)$. Il est immédiat que L est linéaire, continue et que g est presque-périodique.

Quel est le spectre de g ? Si le spectre de f est contenu dans $\Lambda + E$, il en est de même pour celui de $f_{j,k}$ (déduite de f par convolution). Mais le spectre de $f_{j,k}$ est aussi contenu dans le support de $\hat{\sigma}_j \hat{\mu}_{j,k}$ c'est-à-dire dans $\Lambda_j^* + \bar{J}_k$. Le spectre de $f_{j,k}$ est donc contenu dans la réunion des intervalles $\lambda^* + \bar{J}_k$, $\lambda^* \in \Lambda_j^*$, rencontrant $\Lambda + E$; notons que, dans ce cas, $\lambda^* + s_k$ appartient à $\Lambda + F$ et le spectre de $g_{j,k}$ est donc contenu dans $\Lambda + F$. De la même façon on montre que si le spectre de f est contenu dans $\lambda + E$, $\lambda \in \Lambda$, celui de g est contenu dans $\lambda + F$.

L'inégalité (b) du théorème III s'obtient en additionnant les inégalités (ii) appliquées à $f_{j,k}$ et $g_{j,k}$.

Le théorème III est donc démontré.

APPENDICE.

15. CALCUL DE L'ÉCARTEMENT D'UN ENSEMBLE HARMONIEUX.

PROPOSITION 15.1. — Dans l'énoncé ci-dessous γ désigne une constante absolue, ε un nombre réel positif inférieur à $\frac{1}{\gamma}$, Λ un ensemble harmonieux, M_ε l'ensemble des nombres réels t tels que, pour tout λ dans Λ , on ait $|\exp 2\pi i \lambda t - 1| \leq \varepsilon$. Enfin $\delta > 0$ est tel que $[0, \delta] + M_\varepsilon = \mathbf{R}$.

Si $0 < l < \frac{1 - \varepsilon\gamma}{\delta}$, il existe une application linéaire L transformant les fonctions continues bornées $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$, à spectre dans $\Lambda + [0, l]$ en fonctions presque-périodiques g à spectre dans Λ . On a, de plus,

$$(a) \sup_{t \in \mathbf{R}} |g(t)| \leq C \sup_{t \in \mathbf{R}} |f(t)|;$$

$$(b) |g(t) - f(t)| \leq t \|C\| \|f\|_\infty;$$

(c) si le spectre de f est contenu dans $\lambda + [0, l]$, $\lambda \in \Lambda$, celui de g est $\{\lambda\}$;

(d) si une suite f_k tend vers f au sens de la convergence étroite (§ 1), g_k tend vers g uniformément sur \mathbf{R} .

Pour prouver ce résultat nous avons besoin d'une série de lemmes dont les hypothèses sont les mêmes que ci-dessus.

LEMME 1. — Soit P une somme trigonométrique finie dont les fréquences appartiennent à Λ . On a $\sup_{0 \leq t \leq \delta} |P(t)| \geq (1 - \varepsilon\gamma) \|P\|_\infty$.

En effet, tout élément τ de M_ε est une $\gamma\varepsilon$ presque période de P (propos. 5.1). Soit $\tau_1 > 0$, s tel que $|P(s)| \geq \|P\|_\infty - \tau_1$, t tel que $0 \leq t \leq \delta$ et $s = t + \tau$, $\tau \in M_\varepsilon$. On a

$$|P(s + \tau) - P(s)| \leq \gamma\varepsilon \|P\|_\infty; \quad \text{d'où} \quad |P(t)| \geq (1 - \gamma\varepsilon) \|P\|_\infty - \tau_1.$$

En faisant tendre τ_1 vers zéro on obtient le lemme 1.

LEMME 2. — Soit $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une suite finie mais arbitrairement longue de fonctions continues et bornées de \mathbf{R} dans \mathbf{C} dont le spectre est contenu dans $[0, l]$. Alors

$$\sup_{(s, t) \in \mathbf{R}^2} \left| \sum_{\lambda \in \Lambda} \exp 2\pi i \lambda s f_\lambda(t) \right| \leq (1 - \varepsilon\gamma - l\delta)^{-1} \sup_{t \in \mathbf{R}} \left| \sum_{\lambda \in \Lambda} \exp 2\pi i \lambda t f_\lambda(t) \right|.$$

Le lemme 2 est un corollaire du lemme 1 et du « principe des soucoupes » ([2], propos. 1.2.3, p. 75).

LEMME 3. — Soit $\zeta : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction continue bornée qui est la transformée de Fourier d'une mesure de Radon bornée μ sur \mathbf{R} . Appelons Z la

fonction définie sur $\Lambda + [0, l]$ par $Z(t) = \zeta(s)$ si $t = \lambda + s, \lambda \in \Lambda, 0 \leq s \leq l$. On peut trouver une mesure de Radon complexe bornée ν sur \mathbf{R} telle que

$$\|\nu\| \leq (1 - \varepsilon\gamma - l\delta)^{-1} \|\mu\|$$

et $\hat{\mu} = Z$ sur $\Lambda + [0, l]$.

Le lemme 3 est une conséquence du lemme 2 ([2], th. 1, p. 76).

Il reste à prouver la proposition 15.1. Les conditions (b) et (c) permettent d'expliciter L si, avec les notations du lemme 2, f peut être écrite

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} f_{\lambda}(t) \exp 2\pi i \lambda t. \text{ Alors } L(f) \text{ est } \sum_{\lambda \in \Lambda} f_{\lambda}(0) \exp 2\pi i \lambda t. \text{ La continuité de } L$$

est prouvée par le lemme 2. Soit, pour montrer (b), t_0 un nombre réel, ξ la fonction définie sur $\Lambda + [0, l]$ par $\xi(\lambda + s) = \exp 2\pi i \lambda t_0$ ($\lambda \in \Lambda, 0 \leq s \leq l$), χ le caractère $t \rightarrow \exp 2\pi i t t_0$ et Z la fonction définie sur $\Lambda + [0, l]$ par $Z(\lambda + s) = \exp(-2\pi i s t_0) - 1$ ($\lambda \in \Lambda, 0 \leq s \leq l$). La fonction Z est bien de la forme intervenant au lemme 3. On a même, en vertu de l'inégalité de S. Bernstein ([8], chap. III, lemma 13.16) $\|\mu\| \leq 2\pi |t_0| l$. La fonction $\xi - \chi$ s'écrit $(Z - 1)\chi$ et, pour cette raison est la transformée de Fourier d'une mesure ν de norme inférieure à $|t_0| C(l)$. Enfin le produit scalaire entre $\xi - \chi$ et \hat{f} vaut $g(t_0) - f(t_0)$; on a donc

$$g(t_0) - f(t_0) = \int_{\mathbf{R}} f(-t) d\nu(t) \quad \text{et} \quad |g(t_0) - f(t_0)| \leq \|f\|_{\infty} \|\nu\| \leq |t_0| C(l) \|f\|_{\infty}.$$

Pour étendre la définition et les propriétés de L à toute fonction continue et bornée sur \mathbf{R} dont le spectre est contenu dans $\Lambda + [0, l]$, il suffira de prouver (d). Soit $0 < l < l' < \frac{1 - \varepsilon\gamma}{\delta}$ et soit φ une fonction indéfiniment dérivable à décroissance rapide dont la transformée de Fourier $\hat{\varphi}$ est nulle hors de $\left[\frac{l-l'}{2}, \frac{l'+l}{2}\right]$ et vérifie $\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}(t) dt = 1$.

Soit L' l'opérateur associé à l'intervalle $I = \left[\frac{l-l'}{2}, \frac{l'+l}{2}\right]$, c'est-à-dire transformant les fonctions continues bornées à spectre dans $\Lambda + I$ en fonctions presque-périodiques à spectre dans Λ et vérifiant (a), (b), (c).

Soit $f_{\lambda}, \lambda \in \Lambda$, une suite finie de fonctions continues et bornées dont le spectre est contenu dans $[0, l]$; $f(t) = \sum_{\lambda \in \Lambda} f_{\lambda}(t) \exp 2\pi i \lambda t$. On a

alors $L(f) = L'(f\varphi)$, car le spectre de $f\varphi$ est contenu dans la somme de celui de f et celui de φ donc dans $\Lambda + I$ et sur tout intervalle $\lambda + I, \lambda \in \Lambda$, l'intégrale de la distribution \hat{f}_{λ} est égale à celle de $\hat{f}_{\lambda} \star \hat{\varphi}$ (car l'intégrale de $\hat{\varphi}$ vaut 1).

Si f_k tend étroitement vers f, les $f_k \varphi$ tendent uniformément sur tout \mathbf{R} vers $f\varphi$ et la continuité de L' fournit la preuve de (d).

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] A. S. BESICOVITCH, *Almost periodic functions*, Cambridge University Press.
- [2] Y. MEYER, *Isomorphismes entre certaines algèbres de restrictions* (*Ann. Inst. Fourier*, t. 18, n° 2, 1968, p. 73-86).
- [3] Y. MEYER, *Les nombres de Pisot et l'analyse harmonique* (*Studia Math.*, vol. 34, 1970, p. 127-147).
- [4] Y. MEYER, *Nombres de Pisot, nombres de Salem et analyse harmonique*, Lecture Notes in Mathematics, Springer Verlag, 117.
- [5] Y. MEYER, *Nombres algébriques et analyse harmonique* (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, t. 3, 1970, fasc. 1, p. 75-110).
- [6] R. SALEM, *Algebraic numbers and Fourier analysis*, Heath Math. Monographs, 1961.
- [7] N. WIENER, *The Fourier Integral and certain of its applications*, Cambridge University Press, 1933.
- [8] A. ZYGMUND, *Trigonometric series*, vol. I et II, Cambridge University, Press, 1968.

(Manuscrit reçu le 20 mai 1970.)

Yves MEYER,
Département de Mathématiques,
Faculté des Sciences,
91-Orsay.

C. N. R. S. — CENTRE DE DOCUMENTATION

BULLETIN SIGNALÉTIQUE

Bibliothèques - Recherches bibliographiques
Archivages - Reproductions - Traductions

NOUVEAU. — A partir de janvier 1970.

Une nouvelle section du BULLETIN SIGNALÉTIQUE :

INFORMATION SCIENTIFIQUE ET TECHNIQUE

S'ajoute aux vingt-six autres sections mensuelles concernant les sciences exactes, biologiques et médicales et la technologie.

En même temps, un nouveau service de bibliographie rapide est mis en route :

TOXICOLOGIE CLINIQUE

ACCIDENTS DES TRAITEMENTS MÉDICAUX

Ayant la même forme que le service *Transplantation d'Organes* (fiches expédiées chaque semaine, délai moyen dix jours après réception du périodique).

Le service de traduction est maintenant en mesure de donner des **traductions orales**, sur consultation (ou même éventuellement sur bandes magnétiques).

Pour tous renseignements :

Centre de Documentation du C. N. R. S. — Bulletin signalétique (relations)
15, quai Anatole-France, 75-Paris-7^e Téléphone : 555-26-70 Poste 387