ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

CLAUDE BARDOS

Problèmes aux limites pour les équations aux dérivées partielles du premier ordre à coefficients réels ; théorèmes d'approximation ; application à l'équation de transport

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 3, nº 2 (1970), p. 185-233

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1970_4_3_2_185_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 3, 1970, p. 185 à 233.

PROBLÈMES AUX LIMITES POUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE A COEFFICIENTS RÉELS; THÉORÈMES D'APPROXIMATION; APPLICATION A L'ÉQUATION DE TRANSPORT

PAR CLAUDE BARDOS.

INTRODUCTION.

Les problèmes du type

$$
(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \sum_{i=1}^{m} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \mathrm{K} u = f, \\ & u|_{\Sigma_-} = 0, \end{aligned} \right.
$$

où $\mathrm{A} = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ désigne un champ de vecteur *réel* sur Ω ouvert borné de $\mathbf{R}^m$, Σ_- l'ensemble des points de $\partial\Omega$ tels que $\sum_{i=1}^{m} a_i(x) n_i(x) < 0$ [où $(n_1, n_2, \ldots, n_m)$ est la normale extérieure à $\partial\Omega$] et où K désigne un opérateur linéaire par exemple borné dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$, ont été abordés par un grand nombre d'auteurs, en particulier au sujet de l'équation de transport, *cf.* Jorgens [10] ou Reed ([21], [22]); il n'existe cependant pas à notre connaissance des résultats aussi généraux et aussi précis que ceux que nous nous proposons d'exposer dans ce travail.

Pour aborder le problème (1) on peut soit utiliser, comme cela est fait dans Jorgens [10], les caractéristiques du champ A, soit les méthodes développées par Lax et Phillip [43] ou Friedrichs [9] au sujet des opérateurs symétriques du premier ordre.

Dans les deux cas les difficultés proviennent du fait que le champ A peut dégénérer et en particulier du fait que la forme $\sum_{i=1}^{m} a_i n_i$ peut changer de signe sur $\partial\Omega$.

Ces difficultés sont levées, d'une part du point de vue « caractéristiques » en utilisant le théorème de Sard (*cf.* de Rham [7]) pour montrer que les caractéristiques de A qui sont tangentes à $\partial\Omega$ forment dans Ω un ensemble de mesure nulle; et, d'autre part, du point de vue « opérateurs symétriques du premier ordre » en montrant que si u est solution de (1) et appartient à $L^\infty(\Omega)$ il existe une suite u_δ, telle que $u_\delta|_{\Sigma_-} = 0$, nulle dans un voisinage de la frontière de Σ_- dans $\partial\Omega$, telle que u_δ converge vers u dans $L^2(\Omega)$ tandis que Au_δ converge vers Au dans $L^2(\Omega)$ faible.

Au chapitre I on rappelle des résultats sur les semi-groupes qui seront fréquemment utilisés dans la suite.

Au chapitre II dans les paragraphes 1 et 2 on explicite le semi-groupe associé au problème (1) à l'aide des caractéristiques du champ A, on démontre que ce semi-groupe opère dans $L^p(\Omega)$; ce qui permet de résoudre des problèmes non linéaires, puis on caractérise le générateur de ce semi-groupe en utilisant le théorème de Sard.

Au paragraphe 3 on se propose de rapprocher ce point de vue de celui des opérateurs symétriques, et on montre que le générateur du semi-groupe opérant dans $L^2(\Omega)$ introduit au paragraphe 1 n'est autre que la fermeture de l'opérateur $\sum_{i=1}^{m} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i}$ défini sur l'espace des $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ tels que $u|_{\Sigma_-} = 0$. Ceci permet au paragraphe 4 de traiter des problèmes non homogènes et de préciser des théorèmes de traces.

Au paragraphe 5 on étudie les valeurs propres de l'opérateur $u \to \sum_{i=1}^{m} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i}$ de domaine

$$D(A_2) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \,\middle|\, \sum_{i=1}^{m} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega),\ u|_{\Sigma_-} = 0 \right\}.$$

Enfin au paragraphe 6 on montre comment on remplace le problème (1) et le problème d'évolution associé

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{m} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Ku = f, \\ &u|_{\Sigma_- \times]0,T[} = 0, \\ &u(x, 0) = u_0(x) \end{aligned} \right.$$

par différents problèmes dont l'approximation numérique est « standard ».

Le chapitre III est consacré à l'application de certains résultats du chapitre II à l'équation de Transport. En particulier, on considère comme dans Reed [22] le cas où l'ouvert Ω se déforme avec le temps.

Je tiens à remercier M. Lions qui, par ses encouragements et ses conseils, m'a permis de mener à bien ce travail; ma reconnaissance va également à M. Malgrange qui, à la lecture d'une première rédaction, a bien voulu me suggérer certaines améliorations.

CHAPITRE I.

Rappels sur les semi-groupes.

1. Notations et généralités. — Soit B un espace de Banach sur $\mathbf{C}$; on désigne par $|\ \ |$ la norme dans B et on note $|L|$ la norme dans l'espace de Banach $\mathcal{L}(H)$ d'un opérateur L linéaire continu dans H. Enfin on dit qu'une famille L_ε d'opérateurs linéaires continus converge fortement vers un opérateur L si pour tout $u \in B$ on a :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} |L_\varepsilon u - Lu| = 0.$$

Soit $G(t)$ un semi-groupe fortement continu dans B, on sait qu'il existe deux constantes réelles M et $\omega (M \geq 1)$ telles que pour tout $t \geq 0$, on ait

$$|G(t)| \leq M e^{\omega t}. \tag{1.1}$$

Inversement, soient M et ω deux constantes réelles $(M \geq 1)$, on désigne par $g(B; M, \omega)$, où $g(M, \omega)$ (*cf.* Kato [12]) l'ensemble des opérateurs A (bornés ou non) dans B, de domaine $D(A)$ tels que $-A$ soit générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu vérifiant (1.1).

Définition 1.1. — On dit qu'un opérateur L de domaine D (L) domine fortement un opérateur A de domaine D(A) et on note $L > A$ si :

(1.2) $D(L) \subset D(A)$;

(1.3) Pour tout $\delta > 0$ il existe $C(\delta) \geq 0$ tel que l'on ait

$$|Au| \leq \delta |Lu| + C(\delta) |u|, \quad \forall u \in D(L).$$

Du théorème 2.7 (chap. IX, § 3 de Kato [12]) on déduit alors immédiatement le :

Théorème 1.1. — *Soient* $L \in g(1, \omega)$ *et* $A \in g(1, \omega')$ *si* L *domine fortement* A, *pour tout* $\varepsilon > 0$, *l'opérateur* $\varepsilon L + A$ *de domaine* D(A) *appartient à* $g(1, \varepsilon\omega + \omega')$.

En particulier, si $L \in g(1, \omega)$ et si M est un opérateur borné, $L + M$ appartient à $g(1, \omega)$.

Soit maintenant H un espace de Hilbert, on note $(\ ,\ )$ et $|\ \ |$ le produit scalaire et la norme sur H et $g(1, \omega)$ l'ensemble des opérateurs A non bornés dans H tels que $-A$ soit générateur d'un semi-groupe fortement continu à contraction dans H. On dit qu'un opérateur A de domaine $D(A)$ est ω-positif (où plus simplement positif si $\omega = 0$) s'il existe une constante réelle ω telle que, pour tout $u \in D(A)$, on ait

$$\operatorname{Re}(Au, u) + \omega |u|^2 \geqq 0. \tag{1.4}$$

Aussi l'opérateur $A + \omega$ est-il positif et admet-il des extensions maximales qui (*cf.* Lions [14] ou Phillips [20]) appartiennent à $g(1, \omega)$.

Si A appartient à $g(M, \omega)$ il en est de même de son adjoint $A^\star$ et $-A^\star$ est générateur infinitésimal du semi-groupe $(\exp - tA)^\star$. Muni de la norme du graphe $\left(|u|^2 + |A^\star u|^2\right)^{\frac{1}{2}}$, $D(A^\star)$ est un espace de Hilbert contenu algébriquement et topologiquement dans H, dense dans H. On a donc les injections usuelles : $D(A^\star) \subset H \subset (D(A^\star))'$ et comme $A^\star$ est linéaire continu de $D(A^\star)$ dans H, son adjoint $(A^\star)^\star$ est un opérateur linéaire continu de H dans $(D(A^\star))'$, qui prolonge A, on le notera également A.

Soit $0 < T < +\infty$, pour tout couple $(u_0, f) \in H \times L^2(0, T; H)$ l'application $t \mapsto u(t)$ définie par

$$u(t) = \exp(-tA)\, u_0 + \int_0^t (\exp - (t-s)A)\, f(s)\, ds \tag{1.5}$$

est l'unique solution $u \in L^2(0, T; H)$ du problème

$$\begin{cases} \text{(i)} & \dfrac{du}{dt} + u = f \quad \text{dans } L^2(0, T; (D(A^\star))'); \\ \text{(ii)} & u(0) = u_0. \end{cases} \tag{1.6}$$

On remarque que de (1.6), (i), on peut déduire, comme dans [14] que u appartient à $\mathcal{C}(0, T; (D(A^\star))')$ et donc que (ii) a bien un sens. *A posteriori* il résulte en fait de (1.5) que u appartient à $\mathcal{C}(0, T; H)$. Enfin on sait (*cf.* [12]) que si u_0 appartient à $D(A)$ et si f appartient à $\mathcal{C}^1(0, T; H)$, on a

$$u \in \mathcal{C}(0, T; D(A)) \cap \mathcal{C}^1(0, T; H).$$

2. Approximations de semi-groupes et de solutions d'équations d'évolutions. — Soit toujours $g(M, \omega)$ l'ensemble des opérateurs A (non bornés) dans un espace de Banach B tels que $-A$ engendre un semi-groupe fortement continu vérifiant (1.1).

THÉORÈME 1.2. — *Soient* A, $A_\varepsilon \in g(M, \omega)$ *et* $\mathring{A}$ *l'opérateur de domaine* $D(\mathring{A})$ *défini par*

$$(1.7)\qquad \begin{cases} D(\mathring{A}) = \{ u \in \cap D(A_\varepsilon) / \lim\limits_{\varepsilon \to 0} A_\varepsilon u \text{ existe} \}, \\ \mathring{A} u = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} A_\varepsilon u. \end{cases}$$

On suppose que A *prolonge* $\mathring{A}$ *et vérifie*

$$(1.8)\qquad A = \overline{\mathring{A}}.$$

Alors pour tout λ, *réel* $\lambda > \omega$ *et tout* $f \in B$, $(\lambda + A_\varepsilon)^{-1} f$ *converge dans* B *vers* $(\lambda + A)^{-1} f$.

Démonstration. — Comme la famille d'opérateurs $(\lambda + A_\varepsilon)^{-1}$ est uniformément bornée, il suffit de montrer que $(\lambda + A_\varepsilon)^{-1} f$ converge vers $(\lambda + A)^{-1} f$ pour f appartenant à une partie dense de B.

D'après (1.8) on peut choisir $f = (\lambda + A) u$ avec $u \in D(\mathring{A})$. Comme $\bigcap_\varepsilon D(A_\varepsilon) \subset D(\mathring{A})$, on a

$$(1.9)\qquad \begin{aligned} (\lambda + A_\varepsilon)^{-1} f - (\lambda + A)^{-1} f &= (\lambda + A_\varepsilon)^{-1} [(\lambda + A) u - (\lambda + A_\varepsilon) u] \\ &= (\lambda + A_\varepsilon)^{-1} (A u - A_\varepsilon u); \end{aligned}$$

et ainsi

$$(1.10)\qquad |(\lambda + A_\varepsilon)^{-1} f - (\lambda + A)^{-1} f| \leq \frac{1}{\lambda - \omega} |A u - A_\varepsilon u|.$$

Ce qui démontre le théorème 1.2.

A l'aide du théorème 5.2 (p. 502 de Kato), on déduit facilement le théorème suivant qui est dû à Trotter [26].

THÉORÈME 1.3. — *Sous les hypothèses du théorème* 1.2 *le semi-groupe* $\exp - tA_\varepsilon$ *converge fortement vers* $\exp - tA$ *uniformément sur tout intervalle borné.*

Des théorèmes 1.2 et 1.3 on déduit alors à l'aide du théorème 1.1 le

COROLLAIRE 1.1. — *Soient* $L \in g(1, \omega)$ *et* $A \in g(1, \omega')$ *si* L *domine fortement* A *et si* $D(L)$ *est dense dans* $D(A)$ (¹) *alors d'une part, pour tout* $\lambda > \omega$, $(\lambda + \varepsilon L + A)^{-1}$ *converge fortement vers* $(\lambda + A)^{-1}$ *et d'autre part* $\exp - t(\varepsilon L + A)$ *converge fortement, uniformément sur tout compact vers* $\exp - tA$.

THÉORÈME 1.4. — *Soit* H *un espace de Hilbert :* A_ε, $A \in g(1, \omega)$, $0 < T < +\infty$;

$$(u_0, f) \in H \times L^2(0, T; H),$$

(¹) Bien entendu, muni de la norme du graphe.

u_ε solution du problème :

$$\text{(1.11)} \qquad \begin{cases} u'_\varepsilon + A_\varepsilon u_\varepsilon = f, \\ u_\varepsilon(0) = u_0, \end{cases}$$

alors si $\exp - tA_\varepsilon$ *converge fortement vers* $\exp - tA$, *uniformément sur tout intervalle borné,* u_ε *converge dans* $\mathcal{C}(0, T; H)$ *vers* u *solution du problème*

$$\text{(1.12)} \qquad \begin{cases} u' + Au = f, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Démonstration. — u_ε est donné par la formule

$$u_\varepsilon(t) = (\exp - tA_\varepsilon)\, u_0 + \int_0^t (\exp - (t-s) A_\varepsilon)\, f(s)\, ds.$$

Par hypothèse, $(\exp - tA_\varepsilon)\, u_0$ converge vers $(\exp - tA)\, u_0$ uniformément sur $[0, T]$. Ensuite, si f appartient à $\mathcal{C}(0, T; H)$ l'ensemble des points $\{f(t) \mid t \in [0, T]\}$ est un compact K de H. Comme $\exp - tA_\varepsilon$ converge fortement vers $\exp - tA$ uniformément sur $[0, T]$, il résulte du théorème de Banach-Steinaus que $(\exp - tA_\varepsilon)\, \xi$ converge vers $(\exp - tA)\xi$ uniformément pour $t \in [0, T]$ et $\xi \in K$, donc que $\int_0^t (\exp - (t-s) A_\varepsilon) f(s)\, ds$ converge uniformément pour $t \in [0, T]$ vers $\int_0^t (\exp - (t-s) A) f(s)\, ds$.

Comme $\mathcal{C}(0, T; H)$ est dense dans $L^2(0, T; H)$, on en déduit que pour tout $f \in L^2(0, T; H)$ $\int_0^t (\exp - (t-s) A_\varepsilon) f(s)\, ds$ converge uniformément vers $\int_0^t (\exp - (t-s) A) f(s)\, ds$.

Et ainsi du corollaire 1.1 et du théorème 1.4 on peut déduire le

Corollaire 1.2. — *Soient* H *un espace de Hilbert,* $A \in g(1, \omega)$, $L \in g(1, \omega)$. *On suppose que* L *domine fortement* A, *alors pour tout couple* $(u_0, f) \in H \times L^2(0, T; H)$, u_ε *solution du problème*

$$\text{(1.13)} \qquad \begin{cases} u'_\varepsilon + (\varepsilon L + A)\, u_\varepsilon = f, \\ u_\varepsilon(0) = u_0 \end{cases}$$

converge dans $\mathcal{C}(0, T; H)$ *vers* u *solution du problème*

$$\text{(1.14)} \qquad \begin{cases} u' + Au = f, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

CHAPITRE II.

1. Le semi-groupe engendré par un champ de vecteurs A sur un ouvert Ω de R^n. — Dans ce paragraphe on se propose de montrer qu'à tout champ de vecteur A défini sur l'ouvert Ω on peut associer un semi-groupe $\exp - tA$ opérant dans l'espace des fonctions mesurables sur Ω. Pour tout p, $1 \leqq p \leqq +\infty$, ce semi-groupe définit par restriction à $L^p(\Omega)$ un semi-groupe d'opérateurs bornés dans $\mathcal{L}(L^p(\Omega))$ et pour $p < +\infty$ ce semi-groupe est fortement continu.

Soit Ω un ouvert de R^m et $A = \sum_{i=1}^{m} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ un champ de vecteurs réels défini sur Ω, les fonctions a_i étant dérivables, bornées ainsi que leurs dérivées. On suppose [hypothèse (H. I)] que le champ A peut se prolonger en un champ $\overline{A} = \sum_{i=1}^{m} \overline{a}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ défini sur un ouvert X de R^m tel que $\overline{\Omega} \subset X$, les fonctions $\overline{a}_i$ étant de classe C^1, bornées ainsi que leurs dérivées sur X.

En introduisant une fonction réelle θ indéfiniment dérivable égale à 1 sur Ω et à zéro dans le complémentaire de X on voit que l'on peut prolonger A en un champ de classe C^1 sur $\mathbf{R}^m$, nul en dehors de X. On notera également A ce prolongement.

Pour tout point $x \in R^m$, il existe une unique application de classe C^1 de R dans $\mathbf{R}^m$, $t \mapsto \exp - tAx$ (aussi notée $e^{-tA}x$) solution de l'équation

$$\frac{d}{dt} e^{-tA} x = -A(e^{-tA} x) \tag{2.1}$$

et vérifiant en outre :

$$e^{-tA} x \,|_{t=0} = x. \tag{2.2}$$

La courbe $e^{-tA}x$ est appelée caractéristique ou trajectoire du champ A. Pour tout couple t_1, t_2 on a

$$(\exp - t_2 A)((\exp - t_1 A) x) = (\exp - (t_1 + t_2) A) x. \tag{2.3}$$

Enfin pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(R^m)$, on a

$$\varphi(e^{-tA} x) = \varphi(x) - tA\varphi(x) + \frac{t^2}{2} A^2 \varphi(e^{-\theta A} x), \tag{2.4}$$

où $\theta \in [0, t]$ dépend de φ, x et t.

On définit alors un semi-groupe d'opérateurs dans l'espace des fonctions mesurables sur Ω en posant

$$(2.5)\qquad (e^{-t\mathrm{A}}f)(x) = \begin{cases} f(e^{-t\mathrm{A}}x) & \text{si } e^{-\tau\mathrm{A}} \in \Omega, \quad \forall \tau, \quad 0 \leqq \tau \leqq t \quad (^2), \\ 0 \text{ sinon}. \end{cases}$$

Il est évident que si f appartient à $\mathrm{L}^\infty(\Omega)$, il en est de même de $e^{-t\mathrm{A}}f$ et que l'on a alors

$$(2.6)\qquad |e^{-t\mathrm{A}}f|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)} \leqq |f|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)}.$$

Remarque 2.1. — $\exp - t\mathrm{A}$ définit ainsi un semi-groupe à contraction dans $\mathrm{L}^\infty(\Omega)$, mais ce semi-groupe n'est pas fortement continu.

PROPOSITION 2.1. — *Sous l'hypothèse* (H.I), *si* $f \in \mathrm{L}^1(\Omega)$, $e^{-t\mathrm{A}}f$ *appartient à* $\mathrm{L}^1(\Omega)$ *et on a*

$$(2.7)\qquad |e^{-t\mathrm{A}}f|_{\mathrm{L}^1(\Omega)} \leqq \exp\Big(t \sup_{x\in\Omega} \mathrm{D}(x)\Big).|f|,$$

où $\mathrm{D}(x)$ *désigne la divergence du champ* A *au point* x $\left(\text{i. e. } \mathrm{D}(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial a_i}{\partial x_i}(x)\right)$.

Démonstration. — Pour t fixé, l'application $x \mapsto (\exp t\mathrm{A})x$ est un difféomorphisme de R^m sur lui-même de classe C^1.

Calculons son jacobien $\mathrm{J}_t(x)$. On pose $\varphi(t, x) = (\exp t\mathrm{A})x$; alors on a

$$\mathrm{J}_t = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} \wedge \ldots \wedge \frac{\partial\varphi}{\partial x_m}.$$

Comme

$$(2.8)\qquad \frac{d\varphi}{dt} = -\mathrm{A}(\varphi),$$

on a

$$(2.9)\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right) = \mathrm{M}(\varphi)\frac{\partial\varphi}{\partial x_k},$$

où $\mathrm{M}(\varphi)$ désigne la matrice $\left[\frac{\partial a_k}{\partial x_l}\right]$, $1 \leqq k \leqq m$, $1 \leqq l \leqq m$.

---

(2) On notera également $\exp - t\mathrm{A}$ l'opérateur $e^{-t\mathrm{A}}$.

Et ainsi

$$
\begin{aligned}
(2.10) \qquad \frac{d}{dt}\mathrm{J}_t &= \frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\wedge\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\wedge\ldots\wedge\frac{\partial\varphi}{\partial x_m} \\
&\quad +\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\wedge\frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\wedge\ldots\wedge\frac{\partial\varphi}{\partial x_m}+\ldots \\
&\quad +\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\wedge\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\wedge\ldots\wedge\frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi}{\partial x_m} \\
&= \mathrm{M}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\wedge\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\wedge\ldots\wedge\frac{\partial\varphi}{\partial x_m} \\
&\quad +\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\wedge\mathrm{M}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\wedge\ldots\wedge\frac{\partial\varphi}{\partial x_m}+\ldots \\
&\quad +\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\wedge\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\wedge\ldots\wedge\mathrm{M}\frac{\partial\varphi}{\partial x_m} \\
&= \mathrm{trace}\,(\mathrm{M})\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\wedge\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\wedge\ldots\wedge\frac{\partial\varphi}{\partial x_m}=\mathrm{D}(\varphi(x,t))\,\mathrm{J}_t.
\end{aligned}
$$

Comme $\mathrm{J}_0(x)=1$, on a

$$(2.11) \qquad \mathrm{J}_t(x)=\exp\int_0^t \mathrm{D}(\varphi(x,\tau))\,d\tau,$$

et donc

$$(2.12) \qquad \mathrm{J}_t(x)\leqq e^{t\omega_{\mathrm{X}}},$$

où

$$(2.13) \qquad \omega_{\mathrm{X}}=\sup_{x\in\mathrm{X}}\mathrm{D}(x).$$

Ainsi si f appartient à $\mathrm{L}^1(\Omega)$, en désignant par $\tilde{f}$ la fonction obtenue en prolongeant f à $\mathbf{R}^m$ par zéro, on a

$$
\begin{aligned}
(2.14) \qquad \int_\Omega |(e^{-t\mathrm{A}}f)(x)|\,dx &\leqq \int_{\mathrm{X}}|\tilde{f}(e^{-t\mathrm{A}}x)|\,dx\leqq\int_{\mathbf{R}^m}|\tilde{f}(y)|\,\mathrm{J}_t(y)\,dy \\
&\leqq \int_{\mathbf{R}^m} e^{t\omega_{\mathrm{X}}}|\tilde{f}(y)|\,dy\leqq e^{t\omega_{\mathrm{X}}}|f|_{\mathrm{L}^1(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Cette inégalité est en fait valable pour tout ouvert $\mathrm{X}\supset\overline{\Omega}$ aussi, comme la fonction $\mathrm{D}(x)$ est continue, on a $|e^{-t\mathrm{A}}f|_{\mathrm{L}^1(\Omega)}\leqq e^{\omega t}|f|_{\mathrm{L}^1(\Omega)}$, où ω désigne la borne supérieure de la fonction $\mathrm{D}(x)$ sur Ω.

Ainsi $e^{-t\mathrm{A}}$ définit un semi-groupe d'opérateurs dans $\mathrm{L}^1(\Omega)$ vérifiant (2.7).

Corollaire 2.1. — *Pour tout $p\geqq 1$ et tout $f\in\mathrm{L}^p(\Omega)$ $e^{-t\mathrm{A}}f$ appartient à $\mathrm{L}^p(\Omega)$ et vérifie*

$$(2.15) \qquad |e^{-t\mathrm{A}}f|_{\mathrm{L}^p(\Omega)}\leqq e^{\frac{t\omega}{p}}|f|_{\mathrm{L}^p(\Omega)}.$$

La démonstration de ce corollaire est immédiate, soit en procédant directement comme ci-dessus, soit en utilisant le théorème de Riesz (*cf.* M. Riesz [23]).

PROPOSITION 2.2. — *Sous l'hypothèse* (H.1) *et pour tout* p, $1 \leq p < +\infty$, *le semi-groupe* e^{-tA} *est fortement continu dans* $L^p(\Omega)$.

D'après l'inégalité (2.15) il suffit de vérifier que, si f appartient à $\mathcal{D}(\Omega)$, $e^{-tA}f$ converge vers f dans $L^p(\Omega)$ lorsque t tend vers zéro. De (2.4), il résulte qu'en tout point $x \in \Omega$ $(e^{-tA}f)(x)$ converge vers $f(x)$; comme on a $|e^{-tA}f|_{L^\infty(\Omega)} \leq |f|_{L^\infty(\Omega)}$ on déduit du théorème de Lebesgue que

$$\lim_{t \to 0} \int_\Omega |e^{-tA}f - f|^p \, dx = 0. \tag{2.16}$$

2. GÉNÉRATEUR DU SEMI-GROUPE e^{-tA} DANS $L^p(\Omega)$ $(1 \leq p < +\infty)$; APPLICATIONS. — Pour $1 \leq p < +\infty$, e^{-tA} définit un semi-groupe fortement continu dans $L^p(\Omega)$; on se propose de caractériser le domaine de son générateur infinitésimal et d'appliquer cette caractérisation à la résolution d'équations aux dérivées partielles du premier ordre, linéaires ou non.

Dans ce paragraphe ainsi que dans les suivants, on supposera [hypothèse (H.II)] que la frontière $\partial\Omega$ de l'ouvert Ω est de classe C^1 par morceaux, c'est-à-dire qu'elle est localement C^1 isomorphe à une portion de polyèdre de $\mathbf{R}^{(m)}$. Sous cette hypothèse, $n = (n_1, n_2, \ldots, n_m)$ normale extérieure à $\partial\Omega$ est définie en presque tout point de $\partial\Omega$. On note χ l'ensemble des points de $\partial\Omega$ où la normale extérieure n'est pas définie, et on désigne par Σ_+, Σ_0, Σ_- les ensembles suivants :

$$\Sigma_+ = \left\{ x \in \partial\Omega \setminus \chi \;\middle|\; \sum_{i=1}^{m} a_i n_i > 0 \right\}, \qquad \Sigma_0 = \left\{ x \in \partial\Omega \setminus \chi \;\middle|\; \sum_{i=1}^{m} a_i n_i = 0 \right\},$$
$$\Sigma_- = \left\{ x \in \partial\Omega \setminus \chi \;\middle|\; \sum_{i=1}^{m} a_i n_i < 0 \right\} \quad (3).$$

PROPOSITION 2.3. — *L'ensemble des trajectoires de* A *qui rencontrent* $\Sigma_0 \cup \chi$ *forme un ensemble négligeable* (*de mesure nulle*).

Démonstration. — Il est d'abord évident que l'ensemble des trajectoires qui rencontrent χ forme un ensemble de mesure nulle, pour démontrer que l'ensemble des trajectoires qui rencontrent Σ_0 forme un ensemble

(3) Σ_+, Σ_- et Σ_0 désignent respectivement l'ensemble des points de $\partial\Omega$ où le champ $\mathcal{A}$ est sortant, rentrant ou tangent, ces propriétés demeurent invariantes par difféomorphisme.

de mesure nulle on va utiliser le théorème de Sard (*cf.* par exemple De Rham [7], § 1, chap. 1).

On considère l'application $(x, t) \overset{\psi}{\mapsto} e^{-tA}x$ de $\partial\Omega \times \mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}^m$.

Soit, pour tout point $x \in \partial\Omega \setminus \chi$, $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{m-1})$ un système de coordonnées locales de x, on dira que $e^{-tA}x$ est un point caractéristique de l'application ψ si le jacobien de $\psi(x, t)$ par rapport à $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{m-1}, t)$ s'annule. (Bien entendu cette définition est indépendante du choix des coordonnées locales.) D'après le théorème de Sard, l'ensemble des points caractéristiques de ψ est de *mesure nulle*. Aussi pour démontrer la proposition 2.3 suffit-il de prouver que les assertions

(i) $\operatorname{Jac}\psi(x, t) = 0$ et (ii) $x \in \Sigma_0$ sont équivalentes.

Pour cela, on remarque que $\psi(x, t+s) = e^{-tA}\psi(s, x)$ et donc que $\operatorname{Jac}\psi(x, t) = J_t . \operatorname{Jac}\psi(x, s)$ (*cf.* la démonstration de la proposition 2.1) ; on sait que $J_t \neq 0$, aussi en faisant tendre s vers zéro, on voit que $\operatorname{Jac}\psi(x, t) = 0$ équivaut à $\operatorname{Jac}\psi(x, 0) = 0$. Enfin on transforme par un difféomorphisme local un voisinage U de $x \in \partial\Omega$ en un voisinage de zéro dans $\mathbf{R}^{m-1} \times \mathbf{R}$, V, manière que $U \cap \partial\Omega$ soit appliqué sur $V \cap \mathbf{R}^{m-1}$. Le champ A se transforme en le champ $\tilde{A} = (\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_m)$ et on a $\operatorname{Jac}\psi(x, 0) = \tilde{a}_m(0)$; ainsi $\operatorname{Jac}\psi(x, t) = 0$ équivaut à $\tilde{a}_m(0) = 0$ donc à $x \in \Sigma_0$. Ceci termine la démonstration de la proposition 2.3.

On introduit ensuite les notations suivantes; pour tout $x \in \Omega$, on pose

$$t(x) = \inf t > 0 \mid e^{-tA}x \in \Omega ; \quad \tau(x) = e^{-t(x)A}x \quad (4). \tag{2.17}$$

Bien entendu $\tau(x)$ appartient à $\partial\Omega$; et d'après la proposition 2.3 on a

$$\operatorname{mes} E = \operatorname{mes} \{ x \in \Omega \mid \tau(x) \in \Sigma_0 \cup \chi \} = 0. \tag{2.18}$$

Pour tout $t > 0$, on désigne par

$$\Omega_1(t) = \{ x \in \Omega \setminus E \text{ tels que } t(x) > t \} \tag{2.19}$$

et par

$$\Omega_2(t) = \{ x \in \Omega \setminus E \text{ tels que } t(x) < t \}. \tag{2.20}$$

Comme l'application $x \mapsto e^{-tA}x$ est continue, $\Omega_1(t)$ et $\Omega_2(t)$ sont des ouverts ; d'autre part, comme l'ensemble des x tels que $t(x) = t$ est de mesure nulle, on a

$$\operatorname{mes}(\Omega - (\Omega_1(t) \cap \Omega_2(t))) = 0. \tag{2.21}$$

---

(4) $t(x)$ peut être éventuellement égal à $+\infty$.

THÉORÈME 2.4. — *Soit* $\exp - tA_p$ *le semi-groupe fortement continu dans* $L^p(\Omega)$ $(1 \leq p < +\infty)$ *défini par le champ de vecteur* A *vérifiant sur l'ouvert* Ω *l'hypothèse* (H.I), $- A_p$ *son générateur infinitésimal de domaine* $D(A_p)$; *alors si* Ω *vérifie l'hypothèse* (H.II) *on a*

$$(2.22)\qquad D(A_p) = \left\{ u \in L^p(\Omega),\ \sum_{i=1}^{m} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega) \text{ vérifiant de plus } u|_{\Sigma_-} = 0 \right\}.$$

[On remarque que si u vérifie

$$(2.23)\qquad u \in L^p(\Omega), \qquad \sum_{i=1}^{m} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega),$$

on peut en localisant, et en faisant un changement de coordonnées, définir $u|_{\Sigma_-}$ dans $L^p_{\mathrm{loc}}(\Sigma)$ et ainsi l'expression

$$(2.24)\qquad u|_{\Sigma_-} = 0$$

a bien un sens.]

Démonstration du théorème 2.1. — On va établir que si u vérifie (2.23) et (2.24), on a

$$(2.25)\qquad (e^{-tA}u)(x) - u(x) = -\int_0^{\theta(x,t)} Au(e^{-\tau A}x)\, d\tau,$$

où $\theta(x, t) = \inf(t, t(x))$; il en résultera alors que

$$(2.26)\qquad (e^{-tA}u)(x) - u(x) = -\int_0^{t} A_p(\exp - (tA_p)\, u)\, d\tau$$

et donc que u appartient à $D(A_p)$. Il est d'abord évident que si u appartient à $\mathcal{D}(\mathbf{R}^m)$ on a

$$(2.27)\qquad u(e^{-tA}x) - u(x) = -\int_0^{t} Au(e^{-\tau A}x)\, d\tau.$$

On en déduit, par densité que (2.27) reste vrai pour presque tout $x \in \mathbf{R}^m$ si on suppose seulement que $u \in L^p(\mathbf{R}^m)$ et que $Au \in L^p(\mathbf{R}^m)$. D'autre part, d'après la proposition 2.3, il suffit de prouver que (2.25) est vrai pour presque tout $x \in \Omega_1(t) \cup \Omega_2(t)$.

Si $x \in \Omega_1(t)$, il existe un voisinage ouvert U de x tel que l'ouvert $V = \bigcup_{0 \leq \tau \leq t} e^{-\tau A}(U)$ soit strictement contenu dans Ω. Soit alors $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

égale à 1 sur V; pour prouver (2.25) il suffit d'établir que

$$(e^{-tA}\varphi u)(x) - (\varphi u)(x) = -\int_0^t A(\varphi u)(e^{-\tau A})x\,d\tau; \tag{2.28}$$

mais comme la fonction $\bar{u}$ obtenue en prolongeant u par zéro en dehors de Ω vérifie $\bar{u} \in L^p(\mathbf{R}^m)$ et $A\bar{u} \in L^p(\mathbf{R}^m)$, on déduit (2.28) de (2.27).

Si $x \in \Omega_2(t)$, on utilise l'inclusion $\Omega_2(t) \subset \{e^{-\tau A}\xi \mid (\xi, \tau) \in \Sigma_- \times R\}$; et en introduisant $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{m-1}$ coordonnées locales du point $\tau(x) = e^{-t(x)A}x$ et $\xi_m = e^{-\tau A}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{m-1})$ on remplace la démonstration de l'équation (2.25) par celle de l'équation

$$u(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m) = \int_0^{\xi_m} \frac{\partial}{\partial \xi^m} u(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{m-1}, \tau)\,d\tau. \tag{2.29}$$

Comme on a

$$u \in L^p(\mathbf{R}; L^p(\mathbf{R}^{m-1})), \qquad \frac{\partial}{\partial \xi_m} u \in L^p(\mathbf{R}; L^p(\mathbf{R}^{m-1})) \qquad \text{et} \qquad u(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{m-1}, 0) = 0,$$

on démontre (2.29) en utilisant la méthode du lemme 2.1 (chap. III de Lions [14]). Ceci termine la démonstration de la première partie du théorème.

Montrons maintenant que $D(A_p) \subset \{u \in L^p(\Omega),\ Au \in L^p(\Omega),\ u|_{\Sigma_-} = 0\}$; d'après le corollaire 2.1 et le théorème de Hille-Yosida, on a

$$D(A_p) = (\lambda + A_p)^{-1}(L^p(\Omega)) \qquad \left(\frac{\omega}{p} < \lambda\right). \tag{2.30}$$

Si f appartient à $\mathcal{D}(\Omega)$, on déduit de la formule

$$u = (\lambda + A_p)^{-1} f = \int_0^\infty e^{-\lambda t}(\exp - (tA_p)f)\,d \tag{2.31}$$

que

$$u(x) = \int_0^{t(x)} e^{-\lambda t} f(e^{-tA}x)\,dt \tag{2.32}$$

et donc que u vérifie :

$$A_p u = \sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \tag{2.33}$$

et

$$u|_{\Sigma_-} = 0. \tag{2.34}$$

Maintenant, pour $f \in L^p(\Omega)$ quelconque, on considère une suite $f_i \in \mathcal{D}(\Omega)$ convergeant vers f dans $L^p(\Omega)$; alors $u_i = (\lambda + A_p)^{-1} f_i$ converge dans $L^p(\Omega)$ vers $u = (\lambda + A_p)^{-1} f$ et $A_p u_i$ converge vers $A_p u$ dans $L^p(\Omega)$; en remarquant que l'application $u \to u|_{\Sigma_-}$ est continue de l'espace des $u \in L^p(\Omega)$ tels que $\sum_{i=1}^{m} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega)$ dans $L^p_{\text{loc}}(\Sigma_-)$, on en déduit que

$$
(2.35) \qquad \begin{cases} \Lambda_p u = -\sum_{i=1}^{m} a_i \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega), \\ u|_{\Sigma_-} = 0. \end{cases}
$$

Applications. — Soit $A = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ un champ de vecteurs sur un ouvert Ω de $\mathbf{R}^m$; on suppose que A vérifie l'hypothèse (H. I) et que Ω vérifie l'hypothèse (H. II). D'autre part, soient $\omega = \sup - D(x)$, K un opérateur linéaire continu dans $L^p(\Omega)$ ([5]) et λ tel que

$$
(2.36) \qquad \operatorname{Re} \lambda > \frac{\omega}{p} + |K|_{\mathcal{L}(L^p(\Omega))}.
$$

I. De la proposition 2.2 et du théorème 2.1, il résulte ([6]) alors que, pour tout $f \in L^p(\Omega)$, il existe un unique $u \in L^p(\Omega)$ vérifiant

$$
(2.37) \qquad \begin{cases} \lambda u + \sum_{i=1}^{m} a_i \dfrac{\partial u}{\partial x_i} + K u = f, \\ u|_{\Sigma_-} = 0. \end{cases}
$$

II. On déduit de même que, si f appartient à $C^1(0, T; L^p(\Omega))$, $(0 < T < +\infty)$ et si u_0 vérifie

$$
(2.38) \qquad u_0 \in L^p(\Omega), \sum_{i=1}^{m} a_i \frac{\partial u_0}{\partial x_i} \in L^p(\Omega), \qquad u_0|_{\Sigma_-} = 0.
$$

Il existe un unique $u(x, t) \in C^1(0, T; L^p(\Omega))$ vérifiant

$$
(2.39) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{m} a_i \dfrac{\partial u}{\partial x_i} + K u = f, \\ u(x, 0) = u_0(x), \\ \sum_{i=1}^{m} a_i \dfrac{\partial}{\partial x_i} u(x, t) \in L^p(\Omega), \\ u(x, t)|_{\Sigma_- \times [0, T]} = 0. \end{cases}
$$

En particulier si K appartient à $\mathcal{L}(L^2(\Omega))$, pour tout couple (u_0, f) appartenant à $L^2(\Omega) \times L^2(0, T; L^2(\Omega))$, le problème (2.39) admet une unique

---

([5]) $1 \leq p < +\infty$.

([6]) En utilisant par exemple le théorème 1.1.

solution faible. Si de plus, K appartient à $\mathcal{L}(L^p(\Omega))$ cette solution appartient à $C(0, T; L^p(\Omega))$ dès que $(u_0, f) \in L^p(\Omega) \times L^1(0, T; L^p(\Omega))$.

III. Soient p, p', $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $K \in \mathcal{L}(L^2(\Omega)) \cap \mathcal{L}(L^p(\Omega)) \cap \mathcal{L}\, L^{p'}(\Omega))$ et $-\Lambda$ le générateur du semi-groupe $\exp - t(A + K)$ dans $L^2(\Omega)$ (Λ est défini par

$$D(\Lambda) = \{ u \in L^2(\Omega),\ Au \in L^2(\Omega);\ u|_{\Sigma_-} = 0 \}, \qquad (\Lambda u = Au + Ku).$$

On désigne par Λ_V la fermeture de l'opérateur Λ restreint à $D(\Lambda) \cap (L^2(\Omega) \cap L^p(\Omega))$ et considéré comme opérateur non borné de $L^2(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ dans $L^2(\Omega) + L^{p'}(\Omega)$. Comme le semi-groupe $\exp - t(A + K)$ définit par restriction à $L^2(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ et par prolongement à $L^2(\Omega) + L^{p'}(\Omega)$ des semi-groupes fortement continus, Λ est un opérateur V-régulier (*cf.* Bardos-Brézis [4], Définition 1.1, § 1), et Λ_V est défini par

$$D(\Lambda_V) = \{ u \in L^2(\Omega) \cap L^p(\Omega) \mid Au \in L^2(\Omega) + L^{p'}(\Omega);\ u|_{\Sigma_-} = 0 \}; \tag{2.40}$$

$$\Lambda_V u = Au + Ku. \tag{2.41}$$

Donc (*cf.* Bardos-Brézis [4]) si M est une application de $L^p(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ dans $L^{p'}(\Omega) + L^2(\Omega)$ de type M, coercive et bornée (strictement monotone), pour tout $f \in L^{p'}(\Omega) + L^2(\Omega)$, il existe un (unique) $u \in D(\Lambda_V)$ vérifiant

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Ku + Mu = f. \tag{2.42}$$

Par exemple, pour tout $f \in L^{p'}(\Omega) + L^2(\Omega)$, il existe un unique $u \in D(\Lambda_V)$ vérifiant :

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Ku + |u|^{p-2} u = f \quad (7). \tag{2.43}$$

3. Relation entre le générateur du semi-groupe $e^{-t\Lambda}$ dans $L^2(\Omega)$ et les extensions ω_1 positives maximales de l'opérateur différentiel

$$A = \sum_{i=1}^{m} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Dans ce paragraphe on désignera par (;) et par | | le produit scalaire et la norme dans $L^2(\Omega)$. Au champ de vecteurs A on associe l'opérateur non borné dans $L^2(\Omega)$ A^0 défini par : $D(A^0) = \mathcal{D}(\Omega)$ et $A^0 u = Au$.

(7) *Cf.* proposition 2.2 et théorème 1.1.

On vérifie que A^0 est un opérateur ω_1 positif $\left(\omega_1 = \frac{\omega}{2} = \frac{1}{2}\sup_{x\in\Omega} D(x)\right)$; il admet donc des extensions maximales positives. On se propose de montrer que le générateur du semi-groupe e^{-tA} défini aux paragraphes 1 et 2 n'est autre que l'unique extension maximale positive « locale » de l'opérateur A^0 et qu'il est égal à la fermeture de l'opérateur A^1 défini par

$$D(A^1) = \{ u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega});\ u|_{\Sigma_-} = 0 \},$$

$$A^1 u = \sum_{i=1}^{m} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

On remarque d'abord que, pour tout couple (u, v) de fonctions de $H^1(\Omega)$ [8] on a la formule de Green :

$$(2.44)\qquad (Au, v) - (u, A^\star v) = \int_{\partial\Omega} \left(\sum_{i=1}^{m} a_i . n_i \right) u . \bar{v}\, d\sigma,$$

où $A^\star$ désigne l'adjoint formel de $A : A^\star = -\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i} a_i$. On retrouve ainsi, en faisant dans (2.44) $u = v \in \mathcal{D}(\Omega)$, le fait que l'opérateur A^0 est ω_2 positif, et on va en déduire que toute extension positive « locale » de A^0 est contenue dans A_2 générateur du semi-groupe $\exp - tA$ dans $L^2(\Omega)$, plus précisément on a la

Proposition 2.4. — *Soit dans un ouvert Ω de $\mathbf{R}^m$ vérifiant l'hypothèse* (H.II) *un champ de vecteur* A *vérifiant l'hypothèse* (H.1) *et* $\overline{A}$ *un opérateur* $\overline{\omega}$ *positif* ($\overline{\omega} < +\infty$) *de domaine* $D(\overline{A})$ *défini par* $\overline{A}u = \sum_{i=1}^{m} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i}$ [bien entendu au sens des distributions, ce qui entraîne que

$$D(A) \subset \{ u \in L^2(\Omega) \mid Au \in L^2(\Omega) \}],$$

alors, si $\overline{A}$ *est un opérateur local* [c'est-à-dire si $\varphi u \in D(A)$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ et $u \in D(\overline{A})$], *on a*

$$D(\overline{A}) \cap H^1(\Omega) = \{ u \in H^1(\Omega) \mid u|_{\Sigma_-} = 0 \}.$$

Démonstration. — Si $u \in D(\overline{A}) \cap H^1(\Omega)$ n'est pas égal à zéro sur Σ_- il existe, d'après l'hypothèse (H.II), un ouvert $\mathcal{O}$ arbitrairement petit de Σ_- tel que

$$\int_{\mathcal{O}} \sum_{i=1}^{m} a_i n_i |u|^2\, d\sigma \leq \alpha < 0.$$

---

[8] Pour la définition de l'espace $H^1(\Omega)$, *cf.* par exemple Lions [14].

A l'aide d'un changement de carte, on peut alors construire une suite φ_ε de fonctions de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ à valeurs réelles telles que

$$0 \leq \varphi_\varepsilon(x) \leq 1, \quad \forall x \in \overline{\Omega}, \qquad \partial\Omega \cap \operatorname{supp} \varphi_\varepsilon \subset \Sigma_-, \qquad \varphi_\varepsilon(x) = 1, \quad \forall x \in 0,$$
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \operatorname{mes}(\operatorname{supp} \varphi_\varepsilon) = 0.$$

On a alors, pour tout $\overline{\omega} > 0$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (\overline{A} \varphi_\varepsilon u, \varphi_\varepsilon u) + \overline{\omega} | \varphi_\varepsilon u |^2 \leq \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^{m} a_i n_i | u |^2 \, d\sigma \leq \alpha < 0.$$

Et donc pour ε assez petit :

$$(\overline{A} \varphi_\varepsilon u, \varphi_\varepsilon u) + \overline{\omega} | \varphi_\varepsilon u |^2 < 0;$$

ainsi $\overline{A}$ ne peut être à la fois $\overline{\omega}$ positif et local s'il existe $u \in D(\overline{A}) \cap H^1(\Omega)$ dont la restriction à Σ_- ne soit pas nulle.

THÉORÈME 2.2. — *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbf{R}^m$ *vérifiant l'hypothèse* (H.II) *et* $A = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ *un champ de vecteurs défini sur* Ω *vérifiant l'hypothèse* (H.I)*; on suppose, de plus, que* (hypothèse H.III) $\partial\Sigma_-$ *frontière de*

$$\Sigma_- = \left\{ x \in \partial\Omega \setminus \chi;\ \sum_{i=1}^{m} a_i(x)\, n_i(x) < 0 \right\}$$

dans $\partial\Omega$ *est assez régulière, par exemple réunion finie de sous-variétés de classe* $\mathcal{C}^1$ *et de dimension* $m - 2$, *alors le générateur du semi-groupe* $\exp - tA$ *dans* $L^2(\Omega)$ *est égal à la fermeture dans* $L^2(\Omega)$ *de l'opérateur* $- A^1$ *défini par*

$$D(A^1) = \{ u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega});\ u|_{\Sigma_-} = 0 \},$$
$$A^1 u = \sum_{i=1}^{m} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Soit $- A_2$ le générateur du semi-groupe $\exp - tA$; comme

$$D(A_2) = \{ u \in L^2(\Omega),\ A u \in L^2(\Omega);\ u|_{\Sigma_-} = 0 \},$$

A_2 prolonge l'opérateur A^1, comme A_2 est maximal positif, il est fermé et ainsi : $A_2 \supset \overline{A^1}$; pour montrer que $\overline{A^1} = A_2$, il suffit donc de montrer que A^1 est dense dans A_2; pour cela on va utiliser les méthodes de régularisation de Lax et Phillips [13] (et également Friedrichs [9]). Cependant, dans [13] on suppose que la forme $\sum_{i=1}^{m} a_i n_i$ ne s'annule pas, ce qui n'est pas le cas ici, aussi procèdera-t-on en deux étapes en commençant par montrer que l'on peut « écarter » les points de Ω situés au voisinage de la frontière de Σ_- dans $\partial\Omega$.

Démonstration du théorème 2.2. — Il suffit d'établir que si, $f \in \mathcal{D}(\Omega)$, $u = (\lambda + A_2)^{-1} f \left(\lambda > \frac{\omega}{2}\right)$ appartient à la fermeture, ou même seulement à la fermeture faible de A^1.

On remarque que si u vérifie

$$u = (\lambda + A_2)^{-1} f, \tag{2.45}$$

avec $f \in \mathcal{D}(\Omega)$, d'après (2.6) u appartient à $L^\infty(\Omega)$; plus précisément, on déduit de la relation $u = \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-tA} f \, dt$ que

$$|u|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{1}{\lambda} |f|_{L^\infty(\Omega)}. \tag{2.46}$$

D'autre part, soit φ_R une suite de fonctions de $\mathcal{D}(\mathbf{R}^m)$ à valeur réelle bornée dans $\mathcal{C}^1(\mathbf{R}^m)$ vérifiant

$$\begin{cases} 0 \leq \varphi_R(x) \leq 1, \quad \forall x \in \mathbf{R}^m, \\ \varphi_R(x) = 1 \quad \text{si } |x| < R, \qquad \varphi_R(x) = 0 \quad \text{si } |x| > 2R; \end{cases} \tag{2.47}$$

la suite $\varphi_R u$ converge vers u dans $L^2(\Omega)$ tandis que la suite $\sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial}{\partial x_i}(\varphi_R u)$ converge vers $\sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial u}{\partial x_i}$ dans $L^2(\Omega)$ et on a

$$\varphi_R u|_{\Sigma_-} = 0,$$
$$|\varphi_R u|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{1}{\lambda} |f|_{L^\infty(\Omega)}.$$

On est ainsi ramené à montrer que toute fonction u appartenant à $D(A_2) \cap L^\infty(\Omega)$, à support compact, appartient en fait à la fermeture de A^1, ce qui résultera des deux lemmes suivants :

On désigne par $d(x)$ la distance d'un point $x \in \mathbf{R}^m$ à l'ensemble $\partial\Sigma_- \cup \chi$. Comme $\partial\Sigma \cup \chi$ est contenu dans une réunion *finie* de sous-variétés de dimension $m - 2$, il est possible de construire une suite de fonctions $\varphi_\delta \in C^2(\mathbf{R}^m)$ bornées ainsi que leurs dérivées premières, possédant les propriétés suivantes :

$$\varphi_\delta(x) = 0 \quad \text{si } d(x) < \delta, \qquad \varphi_\delta(x) = 1 \quad \text{si } d(x) > 2\delta, \tag{2.48}$$

donc

$$\operatorname{Mes}(\operatorname{supp}(\operatorname{grad} \varphi_\delta(x)) \cap \{x, |x| \leq R\}) \leq C(R)\,\delta^2, \tag{2.49}$$

où $C(R)$ est une constante dépendant de R mais non de δ, ainsi que :

$$\sup_{x \in \mathbf{R}^m} |\operatorname{grad} \varphi_\delta(x)| \leq C \frac{2}{\delta} \quad (9). \tag{2.50}$$

Lemme 2.1. — *Soient $u \in D(A_2) \cap L^\infty(\Omega)$, à support compact, et φ_δ une suite de fonctions vérifiant les propriétés* (2.48), (2.49), (2.50), *alors $\varphi_\delta . u$ appartient à $D(A_2) \cap L^\infty(\Omega)$ et lorsque δ tend vers zéro $\varphi_\delta u$ converge vers u dans $L^2(\Omega)$ fort, tandis que $\sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi_\delta u$ converge vers $\sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial u}{\partial x_i}$ dans $L^2(\Omega)$ faible.*

Démonstration. — Il est d'abord évident que lorsque δ tend vers zéro $\varphi_\delta u$ converge vers u dans $L^2(\Omega)$; d'autre part,

$$\sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi_\delta u = \varphi_\delta \sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + u \sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial \varphi_\delta}{\partial x_i}. \tag{2.51}$$

Le premier terme du second membre de (2.51) converge lorsque δ tend vers zéro vers $\sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial u}{\partial x_i}$; quant au second, comme u est à support borné, il vérifie les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \left| u \sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial \varphi_\delta}{\partial x_i} \right|^2_{L^2(\Omega)} &\leq m^2 \sup_i |a_i u|^2_{L^\infty(\Omega)} . |\operatorname{grad} \varphi_\delta|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\leq m^2 \sup_i |a_i u|^2_{L^\infty(\Omega)} . |\operatorname{grad} \varphi_\delta|^2_{L^\infty(\Omega)} . \operatorname{mes}(\operatorname{supp} u \cap \operatorname{supp}(\operatorname{grad} \varphi_\delta)) \\ &\leq C\, |u|_{L^\infty(\Omega)} \frac{C}{\delta^2} C(R)\, \delta^2 \leq C(R)\, |u|_{L^\infty(\Omega)} \end{aligned} \tag{2.52}$$

d'après les inégalités (2.49) et (2.50).

Lemme 2.2. — *La fonction $u_\delta = \varphi_\delta u$ [$u \in D(A_2) \cap L^\infty(\Omega)$, à support compact, $\varphi_\delta \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}^m)$ définie ci-dessus et vérifiant en particulier les inégalités* (2.49) *et* (2.50)] *appartient à la fermeture de* A^1.

Démonstration. — Pour établir ce lemme, il suffit de montrer que, pour une partition de l'unité convenable (θ_α), les fonctions $\theta_\alpha u_\delta$ appartiennent à la fermeture de A^1. On se donne donc un recouvrement ouvert (U_α) de Ω composé d'un ouvert U_+ tel que $\overline{U_+ \cap \partial\Omega} \subset \overset{\circ}{\widehat{\Sigma_+ \cup \Sigma_0}}$ (intérieur de $\Sigma_+ \cup \Sigma_0$ dans $\partial\Omega$), de l'ouvert U_δ tel que $U_\delta = \left\{ x \in \mathbf{R}^m \mid d(x) < \frac{\delta}{2} \right\} [d(x)$

(9) Dans la suite C désignera différentes constantes.

désignant toujours la distance de x à $\partial\Sigma_- \cup \gamma$] et d'une famille d'ouverts U_α tels que :

(1) $\overline{U_\alpha \cap \partial\Omega} \subset \Sigma_-$;

(2) Par un difféomorphisme M_α on puisse transformer l'ouvert $U_\alpha \cap \Omega$ en l'ouvert $M_\alpha(U_\alpha \cap \Omega) \subset \mathbf{R}^m_+ = \{\xi \mid \xi_m > 0\}$ et vérifiant

$$M_\alpha(U_\alpha \cap \partial\Omega) \subset \mathbf{R}^{m-1} = \{\xi \mid \xi_m = 0\}.$$

Soit $(\theta_+, \theta_\delta, \theta_\alpha)$ la partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement ouvert; pour démontrer le lemme 2.2, il faut successivement établir les assertions suivantes : (i) $\theta_\delta u_\delta \in D(A^1)$; (ii) $\theta_+ u_\delta \in D(A^1)$ et (iii) $u_\alpha = \theta_\alpha u_\delta \in D(A^1)$. Comme u_δ est nulle sur le support de θ_δ, (i) est évident. Pour établir (ii), on suppose (on peut toujours se ramener à ce cas par translation) que $0 \notin \Omega$; soit alors ρ_η une suite de fonctions positives appartenant à $\mathcal{D}(\mathbf{R}^m)$ régularisantes, c'est-à-dire telle que $\int \rho_\eta(x)\,dx = 1$, $\operatorname{supp} \rho_\eta \subset \{x, \ |x| < \eta\}$ et soit w_η la restriction à $\overline{\Omega}$ de la fonction $\rho_\eta \star \overline{\theta_+ u_\delta}$ (10). Pour η assez petit le support de w_η est strictement contenu dans U_+ et comme $\overline{U_+ \cap \partial\Omega} \subset \widehat{\Sigma_+ \cup \Sigma_0}^{\circ}$, w_η appartient à $D(A^1)$. Lorsque η tend vers zéro w_η converge dans $L^2(\Omega)$ vers $\overline{\theta_+ u_\delta}$; d'autre part, d'après le théorème sur les « mollifiers » de Friedrichs [9], $\rho_\eta \star A\overline{\theta_+ u_\delta} - A\rho_\eta \star \overline{\theta_+ u_\delta}$ tend vers zéro dans $L^2(\Omega)$; enfin, d'après le choix de ρ_η, on a

$$(\rho_\eta \star A\overline{\theta_+ u_\delta})\big|_{\Omega} = (\rho_\eta \star \overline{A\theta_+ u_\delta})\big|_{\Omega}; \tag{2.53}$$

ainsi Aw_η converge dans $L^2(\Omega)$ vers $A\theta_+ u_\delta = A_2\theta_+ u_\delta$, ce qui démontre (ii). Comme $\overline{U_\alpha \cap \partial\Omega} \subset \Sigma_-$, le champ A ne s'annule pas sur $U_\alpha \cap \partial\Omega$, et comme A est de classe C^1 on peut, en supposant l'ouvert U_α assez petit, admettre que A ne s'annule pas sur U_α; aussi en composant éventuellement le difféomorphisme M_α avec un second changement de cartes [et en notant toujours M_α le difféomorphisme produit et $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$ les nouvelles variables] peut-on, comme dans le théorème 2.1, § 2, se ramener au cas où sur $M_\alpha(U_\alpha \cap \Omega)$ le champ A est donné par $\dfrac{\partial}{\partial\xi_m}$. Comme $u_\alpha \in D(A_2)$ on a

$$u_\alpha \circ M_\alpha^{-1} \in L^2(\mathbf{R}_+, L^2(\mathbf{R}^{m-1})), \qquad \frac{\partial}{\partial\xi_m}(u_\alpha \circ M_\alpha^{-1}) \in L^2(\mathbf{R}_+, L^2(\mathbf{R}^{m-1}))$$

et

$$u_\alpha \circ M^{-1}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{m-1}, 0) = 0.$$

---

(10) Pour toute fonction v définie sur Ω, on désigne par $\overline{v}$ la fonction obtenue en prolongeant v par zéro en dehors de Ω.

Il en résulte qu'il existe une suite φ_ε de fonctions appartenant $\mathcal{D}(\mathbf{R}^m_+)$ convergeant vers $u_\alpha \circ M_\alpha^{-1}$ dans $L^2(\mathbf{R}^m_+)$ tandis que $\frac{\partial}{\partial \xi_m}\varphi_\varepsilon$ converge vers $\frac{\partial}{\partial \xi_m}(u_\alpha \circ M_\alpha^{-1})$ dans $L^2(\mathbf{R}^m_+)$. On en déduit que u_α appartient à la fermeture de l'opérateur A_1, ce qui termine la démonstration du lemme 2.2 et donc en utilisant les lemmes 2.1 et 2.2 celle du théorème 2.2.

Remarque 2.2. — Il résulte de la proposition 2.4 que l'opérateur A_2 : $D(A_2) = \{ u \in L^2(\Omega), u \in L^2(\Omega), u|_{\Sigma_-} = 0 \}$, $A_2 u = Au$ est l'unique extension maximale $\overline{\omega}$ positive et locale de l'opérateur défini par $u \to Au$ sur $\mathcal{D}(\Omega)$; néanmoins, on peut donner des exemples d'extensions maximales $\overline{\omega}$ positives de cet opérateur qui ne soient pas locales; en voici un :

on désigne par Ω l'ouvert $]0, 1[$ de $\mathbf{R}$ et par A_λ l'opérateur défini par $D(A_\lambda) = \left\{ u \in L^2(0, 1); \frac{\partial u}{\partial x} \in L^2(0, 1);\ u(0) = \lambda u(1) \right\} (0 \leq \lambda \leq 1)$, $A_\lambda u = \frac{\partial u}{\partial x}$; A_λ est un prolongement maximal positif de $\frac{d}{dx}$, mais bien entendu, pour $\lambda \neq 0$ ce n'est pas un prolongement local.

4. Problèmes aux limites non homogènes. — Dans ce paragraphe on va énoncer et résoudre un problème aux limites non homogène pour l'opérateur $A = \sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$.

On désigne par $W(A)$ l'espace de Hilbert des fonctions $u \in L^2(\Omega)$ telles que $Au \in L^2(\Omega)$ muni de la norme $|||u|||^2 = |u|_{L^2(\Omega)} + |Au|_{L^2(\Omega)}$.

On a remarqué que si u appartient à $W(A)$ on peut définir la restriction de u à Σ_- et Σ_+; $u|_{\Sigma_-}$ et $u|_{\Sigma_+}$ appartiennent respectivement à $L^2_{\text{loc}}(\Sigma_-)$ et à $L^2_{\text{loc}}(\Sigma_+)$.

D'autre part, pour toute fonction $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$, on a la formule de Green :

$$(2.54) \qquad 2\,\mathrm{Re}\int_\Omega Au.\bar{u}\,dx + \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial a_i}{\partial x_i} \right).|u|^2\,dx = \int_{\partial\Omega} \left(\sum_{i=1}^m a_i.n_i \right) |u|^2\,d\sigma;$$

néanmoins, on ne peut en général déduire de (2.54), comme cela est fait dans un cas particulier par Baouendi et Grisvard [2] ([11]) que $u|_{\Sigma_-}$(resp. $u|_{\Sigma_+}$) appartient à l'espace $L^2_l(\Sigma_-)$ [resp. $L^2_l(\Sigma_+)$] des fonctions u mesurables sur Σ_-(resp. sur Σ_+) telles que

$$\int_{\Sigma_-} \left| \sum_{i=1}^m a_i.n_i \right| |u|^2\,d\sigma < +\infty\,; \left(\text{resp.} \int_{\Sigma_+} \left| \sum_{i=1}^m a_i.n_i \right| |u|^2\,d\sigma < +\infty \right).$$

([11]) Dans [2] c'est essentiellement le fait que les caractéristiques du champ A soient perpendiculaires à $\partial\Omega$ qui permet de démontrer à l'aide d'une symétrie un théorème de trace.

Voici un contre-exemple : on considère l'ouvert $\Omega =]-1, 1[\times]0, 1[$ de $\mathbf{R}^2$ et A l'opérateur $Au = x_1 \frac{\partial u}{\partial x_2} - \frac{\partial u}{\partial x_1}$.

Pour α compris entre $-1/2$ et $-3/4$ la fonction $u = \left(x_2 + \frac{x_1^2}{2}\right)^\alpha$ appartient à $L^2(\Omega)$, $Au = 0$; mais la trace de cette fonction sur $\{x_2 = 0\} \cap \Sigma_-$ et sur $\{x_2 = 0\} \cap \Sigma_+$ n'appartient pas aux espaces $L_l^2(\Sigma_-)$ et $L_l^2(\Sigma_+)$.

Les méthodes du paragraphe 3 permettent cependant de démontrer la proposition suivante :

Proposition 2.5. — *Soit* A *un champ de vecteur de classe* $\mathcal{C}_1$ *sur* Ω; *on suppose que les hypothèses* (H.I), (H.II) *et* (H.III) *sont vérifiées; soient* $v \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ *et* $u \in D(A_2)$, *alors* $u + v|_{\Sigma_+}$ *appartient à* $L_l^2(\Sigma_+)$ *et on a l'égalité*

$$(2.55) \quad 2\,\mathrm{Re}\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial(u+v)}{\partial x_i}\right)\cdot(\overline{u+v})\,dx + \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial a_i}{\partial x_i}\right)|u+v|^2\,dx$$
$$= \int_{\Sigma_- \cup \Sigma_+} \left|\sum_{i=1}^m a_i . n_i\right| |u+v|^2\,d\sigma$$

ainsi que l'inégalité

$$(2.56) \quad |A(u+v)|_{L^2(\Omega)}^2 + (1+\omega)\,|u+v|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Sigma_-} \sum_{i=1}^m a_i . n_i\,|v|^2\,d\sigma$$
$$\geq \int_{\Sigma_+} \sum_{i=1}^m a_i . n_i\,|u+v|^2\,d\sigma.$$

En effet, d'après le théorème 2.2, il existe une suite $\{u_\varepsilon\} \subset D(A_2) \cap \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ telle que u_ε converge vers u dans $L^2(\Omega)$ tandis que Au_ε converge vers Au dans $L^2(\Omega)$.

Comme $u_\varepsilon + v$ appartient à $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$, d'après la formule de Green on a

$$(2.57) \quad 2\,\mathrm{Re}\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial(u_\varepsilon+v)}{\partial x_i}\right)\cdot(\overline{u_\varepsilon+v})\,dx + \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial a_i}{\partial x_i}\right)|u_\varepsilon+v|^2\,dx$$
$$+ \int_{\Sigma_-} \sum_{i=1}^m a_i . n_i\,|v|^2\,d\sigma = \int_{\Sigma_+} \sum_{i=1}^m a_i . n_i\,|u_\varepsilon+v|^2\,d\sigma;$$

on en déduit que $u_\varepsilon + v|_{\Sigma_+}$ reste borné dans $L_l^2(\Sigma_+)$ lorsque ε tend vers zéro; comme $u_\varepsilon + v|_{\Sigma_+}$ converge dans $L_{\mathrm{loc}}^2(\Sigma_+)$ vers $u + v|_{\Sigma_+}$, il en résulte que $u_\varepsilon + v$ converge dans $L_l^2(\Sigma_+)$ faible vers $u + v$. On en déduit (2.55) en passant à la limite dans (2.57); enfin (2.56) résulte immédiatement de (2.55).

THÉORÈME 2.3. — *Sous les hypothèses* (H.I), (H.II), (H.III), *soit* K *un opérateur linéaire dans* $L^2(\Omega)$, λ *tel que* $\mathrm{Re}\,\lambda > \frac{1}{2}\omega + |K|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega))}$, *alors pour tout couple* $(\bar{u}, f) \in L^2_l(\Sigma_-) \times L^2(\Omega)$ *il existe une unique fonction* $u \in W(A)$ *telle que*

$$\left\{\begin{aligned} &\lambda u + \sum_{i=1}^{m} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + K u = f, \\ &u|_{\Sigma_-} = \bar{u}. \end{aligned}\right. \tag{2.58}$$

De plus, $u|_{\Sigma_+}$ *appartient à* $L^2_l(\Sigma_+)$ *et on a l'inégalité*

$$C\{|f|_{L^2(\Omega)} + |\bar{u}|_{L^2_l(\Sigma_-)}\} \geq |u|^2_{L^2(\Omega)} + |u|_{\Sigma_+}|^2_{L^2_l(\Sigma_+)} \tag{2.59}$$

où C *désigne une constante indépendante de* f *de* $\bar{u}$.

Il est d'abord évident que si u_1 et u_2 vérifient (2.58) $u_1 - u_2$ appartient à $D(A_2)$ et vérifie

$$\lambda(u_1 - u_2) + A_2(u_1 - u_2) + K(u_1 - u_2) = 0, \qquad \text{donc que} \quad u_1 = u_2. \tag{2.60}$$

Ensuite, d'après l'hypothèse (H.II) on peut construire une suite v_ε de fonctions de $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ telle que $v_\varepsilon|_{\Sigma_-}$ converge vers u dans $L^2_l(\Sigma_-)$.

On désigne par u_ε la solution de l'équation

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} + K u_\varepsilon + \lambda u_\varepsilon = f - \left(\sum_{i=1}^{m} a_i \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i} + \lambda v_\varepsilon + K v\right); \tag{2.61}$$

$$u_\varepsilon|_{\Sigma_-} = 0. \tag{2.62}$$

D'après la proposition 2.5, on a en posant $w_\varepsilon = u_\varepsilon + v_\varepsilon$

$$\begin{aligned} \left(\lambda - \frac{1}{2}\omega - |K|\right)|w_\varepsilon|^2_{L^2(\Omega)} + \int_{\Sigma_+} \sum_{i=1}^{m} a_i n_i |w_\varepsilon|^2 \, d\sigma \leq |f|_{L^2(\Omega)} \\ + \int_{\Sigma_-} \sum_{i=1}^{m} a_i n_i |u_\varepsilon|^2 \, d\sigma; \end{aligned} \tag{2.63}$$

il en résulte que lorsque $u_\varepsilon|_{\Sigma_-}$ converge vers u on peut de la suite w_ε extraire une sous-suite, encore notée w_ε convergeant dans W(A) faible vers un élément u vérifiant (2.58). Enfin (2.59) peut être obtenu en passant à la limite dans (2.63).

Remarque 2.3. — En utilisant des méthodes analogues, on peut montrer que si $u \in W(A)$ et vérifie $u|_{\Sigma_-} \in L^2_l(\Sigma_-)$, alors $u|_{\Sigma_+} \in L^2_l(\Sigma_+)$ et pour toute fonction $v \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ on a la formule de Green

$$\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{m} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v \right) dx + \int_\Omega \left(u \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i} a_i v \right) dx$$
$$= \int_{\Sigma_-} \left(\sum_{i=1}^{m} a_i . n_i \right) u . v \, d\sigma + \int_{\Sigma_+} \left(\sum_{i=1}^{m} a_i . n_i \right) u . v \, d\sigma.$$

5. Valeurs propres de l'opérateur $-A_2$ générateur du semi-groupe $\exp - tA$ dans $L^2(\Omega)$. — L'étude des valeurs propres pour les opérateurs différentiels du premier ordre de la forme $A + K$ a surtout été faite dans des cas particuliers, essentiellement pour l'équation du transport (*cf.* chap. III et pour les valeurs propres Albertoni et Montagnini [1], Ukai [27] et la bibliographie de ces travaux). Ici nous nous limitons au cas $K = 0$, mais pour l'opérateur A_2 :

$$D(A_2) = \left\{ u \in L^2(\Omega) ; \sum_{i=1}^{m} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \; u|_{\Sigma_-} = 0 \right\}, \qquad A_2 u = \sum a_i \frac{\partial u}{\partial x_i},$$

nous énonçons un théorème général décrivant l'ensemble des valeurs propres.

Voici d'abord quelques exemples :

Exemple 2.1. — Soit Ω l'ouvert $]0, 1[$

$$D(A_2) = \left\{ u \in L^2(0, 1), \frac{\partial u}{dx} \in L^2(0, 1) ; u(0) = 0 \right\}, \qquad A_2 u = \frac{du}{dx},$$

il est alors évident que A_2 n'a aucune valeur propre.

Exemple 2.2. — Soit Ω l'ouvert $]-1, +1[$,

$$D(A_2) = \left\{ u \in L^2(]-1, +1[) ; x \frac{du}{dx} \in L^2(]-1, +1[) \right\}, \qquad A_2 u = x \frac{du}{dx}.$$

Pour que λ soit valeur propre, il faut et il suffit qu'il existe $u \in D(A_2)$, $u \neq 0$ solution de l'équation

$$x \frac{du}{dx} + \lambda u = 0. \tag{2.64}$$

Les solutions de (2.64) sont de la forme $u = C|x|^\lambda$ et elles appartiennent à $D(A_2)$ si $\operatorname{Re}\lambda < \frac{1}{2}$.

Exemple 2.3. — Soit toujours $\Omega =]-1, +1[$

$$D(A_2) = \left\{ u \in L^2(]-1, +1[), (1 - x^2) \frac{du}{dx} \in L^2(]-1, +1[) \right\}, \qquad A_2 u = (1 - x^2) \frac{du}{dx}.$$

Pour que λ soit valeur propre, il faut et il suffit qu'il existe $u \neq 0$, $u \in D(A_2)$ solution de

$$(2.65) \qquad (1-x^2)\frac{du}{dx} + \lambda u = 0.$$

Les solutions de (2.65) sont de la forme $u = C\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{\lambda}{2}}$, elles appartiennent à $D(A_2)$ sous la condition $-1 < \operatorname{Re}\lambda < 1$.

Exemple 2.4. — Soient $0 < r < R < +\infty$ et Ω l'ouvert du plan (x_1, x_2)

$$\Omega = \{ (x_1, x_2) \mid r < x_1^2 + x_2^2 < R \};$$

$$D(A_2) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \,\middle|\, x_1 \frac{\partial u}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial u}{\partial x_1} \in L^2(\Omega) \right\};$$

$$A_2 u = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2}\left(x_1 \frac{\partial u}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial u}{\partial x_1} \right).$$

En utilisant des coordonnées polaires (ρ, θ) on voit que toute fonction propre u, pour la valeur propre λ doit être solution de

$$(2.66) \qquad \frac{\partial u}{\partial \theta} + \lambda u = 0.$$

Les solutions de (2.66) sont de la forme $u = C(\rho) e^{\lambda\theta}$ [où $C(\rho)$ est une fonction dépendant de ρ mais pas de θ] pour que u solution de (2.66) soit de période 2π on doit avoir $\lambda = in\ (n \in \mathbf{Z})$.

Remarque 2.4. — L'opérateur $-A_2$ de l'exemple 2.3 est en fait générateur infinitésimal d'un groupe unitaire, aussi d'après le théorème de Stone (Yosida [31], p. 253) iA_2 est un opérateur auto-adjoint, ce qui justifie le fait que toutes ses valeurs propres soient imaginaires. Mais, inversement, en modifiant un peu cet exemple, on peut construire un opérateur A_2 ayant les mêmes valeurs propres mais qui ne soit pas générateur d'un groupe unitaire, c'est l'exemple suivant :

Exemple 2.5. — Soit dans le plan (x_1, x_2) l'ouvert suivant :

$$\Omega = \{ (x_1, x_2) \mid r < x_1^2 + x_2^2 < R \} \cup \{ (x_1, x_2),\ R \leqq x_1^2 + x_2^2 < R',\ 0 < x_1,\ -\alpha < x_2 < +\alpha \} \quad (^{12}).$$

On pose

$$\Omega_1 = \{ (x_1, x_2) \mid r < x_1^2 + x_2^2 < R \};$$
$$\Omega_2 = \{ (x_1, x_2), \mid R < x_1^2 + x_2^2 < R' \mid x_1 > 0 \mid -\alpha < x_2 < \alpha \}$$

---

(12) $0 < r < R < R' < +\infty$; $0 < \alpha < +\infty$.

et A_2 l'opérateur défini par

$$D(A_2) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \Big/ \frac{1}{x_1^2 + x_2^2}\left(x_1 \frac{\partial u}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial u}{\partial x_1}\right) \in L^2(\Omega) \,;\; u|_{\partial\overline{\Omega} \cap \{x_2 = -\alpha\}} = 0 \right\}$$

et $A_2 u = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2}\left(x_1 \frac{\partial u}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial u}{\partial x_1}\right)$.

$L^2(\Omega) = L^2(\Omega_1) \oplus L^2(\Omega_2)$; et le semi-groupe $\exp - tA_2$ s'écrit à l'aide des coordonnées polaires (ρ, θ) :

$$[(\exp - tA_2)\, u](\rho, \theta) = \begin{cases} u(\rho, \theta - t) & \text{si } (\rho, \theta - t) \in \Omega, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

aussi $\exp - tA_2$ opère-t-il séparément dans $L^2(\Omega_1)$ et $L^2(\Omega_2)$; si u est vecteur propre de A_2 il est aussi (*cf.* Yosida [31]) vecteur propre de $\exp - tA_2$ et comme pour t assez grand, on a :

$$(\exp - tA_2)\,(L^2(\Omega_2)) = \{0\}, \tag{2.67}$$

on est ramené, pour la détermination des valeurs propres, au cas de l'exemple 2.5.

Voici un théorème généralisant les observations faites sur ces exemples.

THÉORÈME 2.4. — *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbf{R}^m$ et $A = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ un champ de vecteur de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω. On suppose que l'hypothèse* H.I *est vérifiée, et soit $-A_2$ le générateur du semi-groupe $\exp - tA_2$ dans $L^2(\Omega)$, alors si λ est valeur propre $\operatorname{Re}\lambda \neq 0$ il en est de même de tout nombre complexe vérifiant $\operatorname{Re}\lambda' = \delta \operatorname{Re}\lambda$ ($\delta \in [0, 1]$).*

Compte tenu des exemples précédents, il résulte de ce théorème que l'ensemble des valeurs propres de $-A_2$ est, soit vide, soit contenu dans l'axe imaginaire, soit formé d'une bande parallèle à l'axe imaginaire et contenant cet axe.

Démonstration. — Soit $u \in D(A_2)$ vecteur propre correspondant à la valeur propre λ, u est (*cf.* Yosida [32]) vecteur propre de l'opérateur $\exp - tA_2$; et on a

$$(\exp - tA_2)\, u = e^{-\lambda t} u. \tag{2.68}$$

D'autre part, pour tout $\xi \in \mathbf{C}$, tel que

$$0 \leq \operatorname{Re}\xi \leq 1, \tag{2.69}$$

la fonction $|u|^{\xi}$ ([13]) appartient à $L^2(\Omega)$.

Comme

$$((\exp - tA_2)\, u)(x) = \begin{cases} u(e^{-tA}x) & \text{si } e^{-\tau A}x \in \Omega, \ \forall \tau, \ 0 \leq \tau \leq t, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

on a

(2.70) $$(\exp - tA_2) \mid u \mid^{\xi} = \mid (\exp - tA_2) u \mid^{\xi} \quad (^{13})$$

et de (2.68) on déduit que

(2.71) $$(\exp - tA_2) \mid u \mid = e^{-\xi \operatorname{Re}\lambda t} \mid u \mid^{\xi}.$$

Ainsi on a

(2.72) $$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} [(\exp - tA_2) \mid u \mid^{\xi} - \mid u \mid^{\xi}] = -\xi \operatorname{Re}\lambda \mid u \mid^{\xi}.$$

Ce qui démontre que $\mid u \mid^{\xi}$ appartient à $D(A_2)$ et est vecteur propre pour la valeur propre $\xi \operatorname{Re}\lambda$.

Remarque 2.4. — Dans le cas des opérateurs de la forme $A_2 + K$ la situation se complique beaucoup et je ne connais pas de résultats généraux. Voici un exemple assez pathologique :

Exemple 2.6. — Soient Ω l'ouvert du plan (x_1, x_2),

$$\Omega = \{ (x_1, x_2) \mid r < x_1^2 + x_2^2 < R \}$$

et A_2 l'opérateur de l'exemple 2.4; soit ρ_n une suite croissante de points de l'intervalle $[r, R]$, μ_{2n} une suite de nombres réels croissante bornée, et $t \mapsto b(t)$ une fonction définie sur l'intervalle $[r, R]$ strictement croissante sur les intervalles de la forme $]\rho_{2n+1}, \rho_{2n+2}[$ et égale à μ_{2n} sur les intervalles de la forme $[\rho_{2n}, \rho_{2n+1}]$. Les valeurs propres de l'opérateur $A_2 + b(x_1^2 + x_2^2)$ sont alors les nombres complexes de la forme

$$\lambda = in - \mu_{2n} \ (n \in \mathbf{Z}).$$

6. Théorèmes d'approximation pour la solution d'équations aux dérivées partielles du premier ordre. — On se propose de montrer comment on peut ramener l'étude numérique de la solution d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre à l'approximation numérique de problèmes « standards » du type « Dirichlet » ou « mixte ». Ensuite on montrera comment par une formule de Trotter du type

$$\exp - t(A_2^1 + A_2^2) = \lim_{n \to \infty} \left(\exp - \frac{t}{n} A_2^1 . \exp - \frac{t}{n} A_2^2 \right)^n;$$

on peut simplifier le calcul direct de la solution d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre, et en particulier se ramener à des problèmes où ne figurent des dérivations que par rapport à une variable.

---

(13) Si $\operatorname{Re}\xi = 0$ on pose $\mid u(x) \mid^{\xi} = 0$ dès que $u(x) = 0$.

Soient Ω un ouvert de $\mathbf{R}^m$ et A un champ de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω, on suppose que les hypothèses (H.I), (H.II) et (H.III) sont vérifiées, et on désigne par V l'espace des $u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ tels que $u|_{\Sigma_-} = 0$. V est dense dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$ et en identifiant $\mathrm{L}^2(\Omega)$ à son dual on a les injections usuelles $\mathrm{V} \subset \mathrm{H} \subset \mathrm{V}'$. Soit L l'opérateur de V dans V′ défini par la forme sesquilinéaire continue coercive

$$(\mathrm{L}u, v) = \int_\Omega \sum_{i=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \overline{v}}{\partial x_i} dx;$$

on note également L l'opérateur non borné défini en restreignant L à $\mathrm{L}^2(\Omega)$ i.e. $\mathrm{D}(\mathrm{L}) = \{ u \in \mathrm{V}/\mathrm{L}u \in \mathrm{L}^2(\Omega) \}$; on a alors « formellement »

$$\mathrm{D}(\mathrm{L}) = \left\{ \begin{array}{c} u \in \mathrm{L}^2(\Omega), \\ u \in \mathrm{L}^2(\Omega), \\ u|_{\Sigma_-} = 0; \qquad \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega \setminus \Sigma_-} = 0, \end{array} \right.$$

$$\mathrm{L}u = -\Delta u.$$

Soit $-\mathrm{A}_2$ le générateur du semi-groupe $\exp - t\mathrm{A}$ dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$ et K un opérateur linéaire borné dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$. Il est évident que l'opérateur L domine l'opérateur $\mathrm{A}_2 + \mathrm{K}$; d'autre part, d'après le théorème 3.2, V est dense dans $\mathrm{D}(\mathrm{A}_2 + \mathrm{K}) = \mathrm{D}(\mathrm{A}_2)$, et comme D(L) est dense dans V (*cf.* Lions [14]) du corollaire 1.1 et du corollaire 1.2, on déduit la

Proposition 2.6. — *Soient* Ω *un ouvert de* $\mathbf{R}^m$, $\mathrm{A} = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ *un champ de vecteur sur* Ω, *on suppose que les hypothèses* (H.I), (H.II) *et* (H.III) *sont vérifiées, et on désigne par* K *un opérateur linéaire continu dans* $\mathrm{L}^2(\Omega)$; *soit enfin* λ *tel que* $\mathrm{Re}\lambda > \frac{\omega}{2} + |\mathrm{K}|_{\mathcal{L}(\mathrm{L}^2(\Omega))}$, *alors :*

(1) *Pour tout* $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$, u_ε *solution du problème*

$$(2.73) \qquad \left\{ \begin{array}{c} \lambda u_\varepsilon - \varepsilon \Delta u_\varepsilon + \displaystyle\sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} + \mathrm{K}u_\varepsilon = f, \\ u_\varepsilon|_{\Sigma_-} = 0, \\ \left.\dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial n}\right|_{\Sigma_+ \cup \Sigma_-} = 0 \end{array} \right.$$

converge dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$ *lorsque* ε *tend vers zéro vers* u *solution du problème*

$$(2.74) \qquad \left\{ \begin{array}{c} \lambda u + \displaystyle\sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \mathrm{K}u = f, \\ u|_{\Sigma_-} = 0. \end{array} \right.$$

(2) *Pour tout couple* $(u_0, f) \in L^2(\Omega) \times L^2(0; T; L^2(\Omega))$, u_ε *solution du problème d'évolution*

$$(2.75) \qquad \begin{cases} \dfrac{du_\varepsilon}{dt} - \varepsilon\,\Delta u_\varepsilon + \displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_i \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} + K u_\varepsilon = f, \\ u(x, 0) = u_0(x) \quad sur\ \Omega, \\ u_\varepsilon |_{\Sigma_- \times]0, T[} = 0, \\ \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial n}\Big|_{(\Sigma_- \cup \Sigma_0) \times]0, T[} = 0 \end{cases}$$

converge dans $\mathcal{C}(0, T; L^2(\Omega))$ *vers* $u(x, t)$ *solution du problème*

$$(2.76) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + K u = f \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[, \\ u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{sur } \Omega, \\ u(x, t) |_{\Sigma_- \times]0, T[} = 0. \end{cases}$$

On se propose de montrer maintenant que lorsque ε tend vers zéro u_ε solution du problème de *Dirichlet*

$$(2.77) \qquad \begin{cases} -\varepsilon\,\Delta u_\varepsilon + \lambda u_\varepsilon + \displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_i \frac{\partial u_\varepsilon}{x_i} + K u_\varepsilon = f, \\ u_\varepsilon |_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

converge dans $L^2(\Omega)$ vers u solution du problème (2.74). On remarque que l'opérateur L défini par $D(L) = \{ u \in H_0^1(\Omega)$ [14] $/ \Delta u \in L^2(\Omega) \}$, $L u = -\Delta u$ domine fortement l'opérateur $A_2 + K$ de domaine $D(A_2)$, mais comme $D(L)$ n'est pas dense dans $D(A_2)$ on ne peut utiliser le corollaire 1.1 et c'est pourquoi on va faire une démonstration directe, basée sur le principe du maximum et utilisant des méthodes dues à Oleinik [19].

On dira que l'ouvert Ω vérifie l'hypothèse (H.II)' si $\partial\Omega$ est localement isomorphe (par un difféomorphisme de classe C^1) à un polyèdre *convexe* de $\mathbf{R}^m$.

On sait que *cf.* Kaldec [11] et aussi Bony [6] que sous l'hypothèse (H.II)' u_ε solution de l'équation

$$\begin{cases} -\varepsilon\,\Delta u_\varepsilon + \lambda u_\varepsilon + \displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_i \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} = f, \\ u_\varepsilon |_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

appartient à $\mathcal{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ (espaces des fonctions deux fois continûment dérivables sur Ω uniformément bornées sur Ω ainsi que leurs dérivées pre-

---

[14] $H_0^1(\Omega)$ est l'espace des $u \in H^1(\Omega)$ vérifiant $u|_{\partial\Omega} = 0$.

mières et secondes et dont les dérivées secondes sont uniformément lipschitziennes d'ordre α sur Ω) dès que f appartient à $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ (espaces des fonctions uniformément lipschitziennes sur Ω).

Proposition 2.7. — *Soient Ω un ouvert* borné *de $\mathbf{R}^m$ et* A *un champ de vecteurs sur Ω on suppose que les hypothèses* (H.I), (H.II)' *et* (H.III) *sont satisfaites et que de plus* (hypothèse H.IV) *la frontière de Σ_+ est contenue dans une réunion finie de sous-variétés de dimension $m-2$ et de classe $\mathcal{C}^1$ de $\partial\Omega$. Soit λ tel que $\lambda > \frac{1}{2}\omega$, alors, pour tout $f \in L^2(\Omega)$, u_ε solution du problème*

$$\left\{\begin{array}{l} -\varepsilon\,\Delta u_\varepsilon + \displaystyle\sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} + \lambda u = f \\ u_\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0 \end{array}\right. \tag{2.78}$$

converge lorsque ε tend vers zéro vers u solution du problème

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda u + \displaystyle\sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = f, \\ u|_{\Sigma_-} = 0. \end{array}\right. \tag{2.79}$$

Démonstration. — Désignons, comme ci-dessus, par L l'opérateur défini par $D(L) = \{u \in H_0^1(\Omega),\ \Delta u \in L^2(\Omega)\}$, $Lu = -\Delta u$.

Comme la famille d'opérateurs $(\varepsilon L + A_2)^{-1}$ vérifie

$$|(\varepsilon L + A_2)^{-1}|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\mathrm{Re}\,\lambda - \omega},$$

il suffit de montrer que la proposition 2.7 est vraie pour f dans un sous-espace dense de $L^2(\Omega)$; on supposera pour simplifier $f \in \mathcal{D}(\Omega)$.

On remarque d'abord que la suite u_ε reste bornée dans $L^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, on peut donc en extraire une sous-suite, encore notée u_ε convergeant dans $L^2(\Omega)$ faible et dans $L^\infty(\Omega)$ faible $\star$ vers un élément u'.

Pour démontrer que u_ε converge vers u dans $L^2(\Omega)$ faible il suffit donc de prouver que, pour tout $\varphi \in D(A_2^\star)$ [$A_2^\star$ adjoint de A_2 dans $L^2(\Omega)$], on a

$$\left\{\begin{array}{l} (u', A_2^\star\varphi) + (\lambda u, \varphi) = (f, \varphi) \\ \left(A_2^\star \text{ est défini par : } D(A_2^\star) = \left\{\varphi \in L^2(\Omega),\ \displaystyle\sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial\psi}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)\ \varphi|_{\Sigma_+} = 0\right\}, \right. \\ \qquad\qquad \left. A_2^\star\varphi = -\displaystyle\sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} - \left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial a_i}{\partial x_i}\right)\varphi\right). \end{array}\right. \tag{2.80}$$

En échangeant les rôles de Σ_+ et de Σ_- dans la démonstration du théorème 2.2 et en particulier dans le lemme 2.1, grâce à l'hypothèse (H.IV), on voit que l'espace des $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \cap D(A_2^*)$ nulles dans un voisinage de $\partial\Sigma_+ \cup \chi$ dans Ω est dense dans $D(A_2^*)$ il suffit donc de montrer (2.80) pour une telle fonction φ. On multiplie donc (2.78) par $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \cap D(A_2^*)$ nulle au voisinage de $\partial\Sigma_+ \cup \chi$ et on obtient

$$(2.81) \qquad -\varepsilon(u_\varepsilon, \Delta\varphi) + \left(u_\varepsilon, -\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_i\varphi)\right) + (u_\varepsilon, \lambda\varphi) = (f, \varphi) + \int_{K_\varphi} \varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} \cdot \varphi \, d\sigma,$$

où K_φ désigne un *compact* de $\Sigma_- \cup \Sigma_0$.

Pour démontrer la convergence faible de u_ε vers u il suffit donc maintenant d'établir le lemme suivant :

LEMME 2.3 :

$$(2.82) \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{K_\varphi} \varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} \varphi \, d\sigma = 0.$$

Pour prouver (2.82) on va montrer qu'il existe une constante C telle que

$$(2.83) \qquad \sup_{x \in K_\varphi} \left| \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n}(x) \right| \leq \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Soit $x \in K_\varphi$, comme $x \notin \chi$, par un changement de carte on se ramène au cas où x est l'origine des coordonnées et Ω le demi-espace $R_+^m = \{x, x_m > 0\}$. On note $\hat{x}$ les $m-1$ premières coordonnées d'un point x de $\mathbf{R}_+^m$.

L'opérateur différentiel $-A_\varepsilon = \varepsilon\Delta - \left(\sum_{i=1}^{m} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \lambda\right)$ s'écrit alors

$$-A_\varepsilon = \varepsilon\left(\sum_{i,j} \mu_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i \nu_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) + \sum_i \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i} - \lambda;$$

$$-\varepsilon\left(\sum_{i,j} \mu_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i \nu_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right);$$

est un opérateur fortement elliptique sur $\mathbf{R}_+^m$. Comme en tout point de K_φ le champ A est, soit rentrant, soit tangent et que cette propriété se converge par difféomorphisme on a

$$(2.84) \qquad \alpha_m(\hat{x}, 0) \leq 0, \quad \forall \hat{x} \in \mathbf{R}^{m-1}.$$

On considère l'ouvert $\theta_\varepsilon = \{ |\hat{x}| < \rho, \rho > 0 \text{ fixé}; 0 < x_m < \sqrt{\varepsilon} \}$ et la fonction : $w_\varepsilon = e^{-\frac{kx_m}{\sqrt{\varepsilon}}} - 1$, $k > 0$,

$$(2.85) \qquad A_\varepsilon w_\varepsilon = e^{-\frac{kx_m}{\sqrt{\varepsilon}}} \left[\mu_{mm} k^2 - \sqrt{\varepsilon}\,\nu_m - \frac{\alpha_m k}{\sqrt{\varepsilon}} - \lambda\right] + \lambda;$$

d'après (2.89) on a sur θ_ε :

$$\alpha_m(\hat{x}, x_m) \leqq C_0\sqrt{\varepsilon} \tag{2.86}$$

(où C_0 est une constante indépendante de ε), aussi

$$\mu_{mm}k^2 - \sqrt{\varepsilon}\,\nu_m k - \frac{\alpha_m k}{\sqrt{\varepsilon}} - \lambda \geqq \mu_{mm}k^2 - \sqrt{\varepsilon}\,\nu_m k - C_0 k - \lambda \tag{2.87}$$

et comme $\mu_{mm} \geqq \beta > 0$, on peut choisir k assez grand pour que le second membre de (2.87) soit positif, alors on a

$$A_\varepsilon . w_\varepsilon \geqq \lambda. \tag{2.88}$$

Ensuite, on introduit la fonction $\psi(\hat{x}) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^{m-1})$ telle que

$$\begin{cases} \psi(\hat{x}) \leqq 0, & \forall\, \hat{x}, \\ \psi(\hat{x}) = 0 & \text{pour } |\hat{x}| < \dfrac{\rho}{2}, \\ \psi(\hat{x}) = -1 & \text{pour } |\hat{x}| = \rho. \end{cases} \tag{2.89}$$

On pose $h_\varepsilon = C_1\psi + C_2 w_\varepsilon$, où C_1 et C_2 sont constantes positives que l'on va déterminer de manière à avoir

$$h_\varepsilon \pm u_\varepsilon \leqq 0 \quad \text{dans } \theta_\varepsilon,\ \forall\, \varepsilon > 0. \tag{2.90}$$

Pour établir cela on commence par choisir C_1 et C_2 de manière à avoir $h_\varepsilon + u_\varepsilon \leqq 0$ sur $\partial\theta_\varepsilon$, frontière de θ_ε, ensuite on utilise le principe du maximum

— sur $x_m = 0$, $u_\varepsilon = 0$, $\psi \leqq 0$;

— sur $|\hat{x}| = \rho$, $\psi = -1$ et comme $|u_\varepsilon|_{L^\infty(\Omega)} \leqq \frac{1}{\lambda}|f|_{L^\infty(\Omega)}$, en choisissant $C_1 \geqq \frac{1}{\lambda}|f|_{L^\infty(\Omega)}$ on a

$$h_\varepsilon \pm u_\varepsilon \leqq -C_1 \pm u_\varepsilon \leqq -\frac{1}{\lambda}|f|_{L^\infty(\Omega)} \pm u_\varepsilon \leqq 0;$$

— sur $x_m = \sqrt{\varepsilon}$, $w_\varepsilon = e^{-k} - 1$ aussi il suffit de choisir C_2 telle que : $C_2 \geqq \frac{1}{(1-e^{-k})}\frac{1}{\lambda}|f|_{L^\infty(\Omega)}$; et alors

$$h_\varepsilon \pm u_\varepsilon = C_1\psi + C_2 w_\varepsilon \pm u_\varepsilon \leqq -\frac{1}{\lambda}|f|_{L^\infty(\Omega)} \pm u_\varepsilon \leqq 0.$$

Enfin d'après (2.88), en augmentant encore éventuellement C_2 on obtient

$$A_\varepsilon(h_\varepsilon \pm u_\varepsilon) = C_1 A_\varepsilon\psi + C_2 A_\varepsilon w_\varepsilon \pm f \geqq 0.$$

Et comme l'opérateur $-A_\varepsilon$ est fortement elliptique, d'après le principe du maximum on a $h_\varepsilon \pm u_\varepsilon \leqq 0$ en tout point de θ_ε.

Comme pour $x_m = 0$, $h_\varepsilon - u_\varepsilon = 0$, on a $|\operatorname{grad} u_\varepsilon(0)| \leq |\operatorname{grad} h_\varepsilon(0)|$ et comme au voisinage de l'origine la fonction ψ est constante, il vient

$$(2.91) \qquad |\operatorname{grad} u_\varepsilon(0)| \leq |C_2 \operatorname{grad} w_\varepsilon(0)| \leq C_2 \frac{k}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}};$$

ce qui démontre le lemme 2.3 et établit ainsi la convergence de la suite u_ε vers u dans $L^2(\Omega)$ faible.

On désigne ensuite par $\mathcal{M}$ l'espace vectoriel engendré par les fonctions $u \in D(A_2) \cap \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ vérifiant $u(x) \geq 0$, $\forall x \in \overline{\Omega}$ et on remarque que $(\lambda + A_2)(\mathcal{M})$ est dense dans $L^2(\Omega)$ ([15]), aussi pour établir la convergence forte peut-on supposer que $f = (\lambda + A_2)u$, où $u \in D(A_2) \cap \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ et est positive sur Ω.

On considère alors la fonction $u_\varepsilon - u$ qui est solution du problème de Dirichlet :

$$(2.92) \qquad \begin{cases} -\varepsilon\Delta(u - u_\varepsilon) + A(u - u_\varepsilon) + \lambda(u - u_\varepsilon) = \varepsilon\Delta u, \\ u - u_\varepsilon|_{\partial\Omega} = u \geq 0. \end{cases}$$

Posons $C = |\Delta u|_{L^\infty(\Omega)}$, d'après le principe du maximum appliqué au problème (2.92), la fonction $u - u_\varepsilon + \varepsilon C$ est positive et converge vers zéro dans $L^\infty(\Omega)$ faible $\star$. Comme Ω est borné, on a

$$(2.93) \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega |u - u_\varepsilon + \varepsilon C|\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \langle u - u_\varepsilon + \varepsilon C, 1 \rangle = 0.$$

Aussi de la suite $u - u_\varepsilon + \varepsilon C$ peut-on extraire une sous-suite encore notée $u - u_\varepsilon + \varepsilon C$ qui converge vers zéro en presque tout point de Ω (*cf.* Rudin [24], théor. 3.12, p. 67). Comme cette sous-suite est bornée dans $L^\infty(\Omega)$ et comme Ω est un ouvert borné, à l'aide du théorème de Lebesgue on déduit qu'elle converge vers zéro dans $L^p(\Omega)$ fort pour tout $p < +\infty$.

Enfin par un argument classique on montre que non seulement la suite extraite, mais également la suite $u - u_\varepsilon + \varepsilon C$ toute entière converge vers u dans $L^p(\Omega)$ fort pour tout $p < +\infty$ et en particulier pour $p = 2$. Ce qui termine la démonstration de la proposition 2.7.

Soient $K \in \mathcal{L}(L^2(\Omega))$ et λ tel que $\lambda > \frac{\omega}{2} + |K|$, les opérateurs $(\lambda + \varepsilon L + A_2)^{-1}$ et $(I + K(\lambda + \varepsilon L + A_2)^{-1})^{-1}$ sont tous deux uniformément bornés et convergent fortement respectivement vers $(\lambda + A_2)^{-1}$ et $(I + K(\lambda + A_2)^{-1})^{-1}$; aussi (*cf.* lemme 3.38 de Kato [12], p. 151)

$$(\lambda + \varepsilon L + A_2 + K)^{-1} = (\lambda + \varepsilon L + A_2)^{-1}(I + K(\lambda + \varepsilon L + A_2)^{-1})^{-1}$$

([15]) Il suffit pour cela d'utiliser le théorème 2.2.

converge fortement vers $(\lambda + A_2 + K)^{-1}$; aussi en utilisant en particulier le théorème 2.16 (chap. IX de Kato [12], p. 502) et le corollaire 1.2, on déduit de la proposition 2.7 le

Corollaire 2.1. — *Sous les hypothèses de la proposition* 2.7, *soit* $K \in \mathcal{L}(L^2(\Omega))$, *alors :*

(1) *Pour tout* $f \in L^2(\Omega)$, u_ε *solution du problème*

$$(2.94)\qquad \begin{cases} -\varepsilon\,\Delta u_\varepsilon + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} + \lambda u_\varepsilon + K u_\varepsilon = f & \left(\lambda > \dfrac{\omega}{2} + |K|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega))}\right) \\ u_\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

converge dans $L^2(\Omega)$ *fort vers* u *solution du problème*

$$(2.95)\qquad \begin{cases} u + \sum_{i=1}^{m} a_i \dfrac{\partial u}{\partial x_i} + K u = f, \\ u|_{\Sigma_-} = 0. \end{cases}$$

(2) *Pour tout couple*

$$(u_0, f) \in L^2(\Omega) \times L^2(0, T; L^2(\Omega)),$$

$u_\varepsilon(x, t)$ *solution du problème*

$$(2.96)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - \varepsilon\,\Delta u_\varepsilon + \sum_{i=1}^{m} a_i \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + K u_\varepsilon = f, \\ u_\varepsilon(x, t)|_{\partial\Omega\times]0, T[} = 0, \\ u_\varepsilon(x, 0) = u_0(x) \quad \textit{sur } \Omega \end{cases}$$

converge dans $\mathcal{C}(0, T; L^2(\Omega))$ *vers* u *solution du problème*

$$\begin{gathered} \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{m} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + K u = f, \\ u|_{\Sigma_-\times]0, T[} = 0, \\ u(x, 0) = u_0. \end{gathered}$$

Remarque 2.5. — La mise en œuvre des calculs numériques des solutions des problèmes (2.94) et (2.96) de types « Dirichlet » est beaucoup plus simple, en général, que celle des solutions des problèmes (2.73) et (2.75) de type « mixte » mais bien entendu au voisinage de Σ_+ les résultats seront moins bons.

Remarque 2.6. — La méthode de démonstration de la proposition 2.7 permet de prouver directement (sans utiliser les caractéristiques du champ A et le théorème de Sard) que si $f \in \mathcal{D}(\Omega)$, il existe $u \in L^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ vérifiant : $\lambda u + \sum a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = f\left(\lambda > \frac{1}{2}\omega\right)$, $u|_{\Sigma_-} = 0$; alors on en déduit en utilisant les lemmes 2.1 et 2.2 que u appartient à la fermeture de l'opérateur A^1 (*cf.* § 3) et donc que la fermeture de l'opérateur $u \to \sum_{i=1}^{m} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i}$ défini sur l'espace des $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ tels que $u|_{\Sigma_-} = 0$ est maximal $\frac{1}{2}\omega$ positif. On procède ainsi dans Bardos [3].

Voici enfin une troisième méthode d'approximation de la solution de l'équation

$$
(2.97) \qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_i \dfrac{\partial u}{\partial x_i} = f, \\ u|_{\Sigma_- x]0, T[} = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{array}\right.
$$

pouvant conduire à des calculs numériques.

On remarque que l'approximation numérique de l'équation (2.97) a été faite par de nombreux auteurs Yanenko [29], Yanenko et Chokin [30], Lascaux [32], en particulier le cas où $m = 1$; (2.97) s'écrit alors :

$$
(2.98) \qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t} + a \dfrac{\partial u}{\partial x} = f, \\ u|_{\Sigma \times]0, T[} = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{array}\right.
$$

L'étude de (2.98) est beaucoup plus simple que celle de (2.97) en particulier parce que dans la discrétisation de la variable d'espace, il est beaucoup plus facile de tenir compte de la condition aux limites.

Pour ramener la discrétisation de l'équation (2.97) à celle d'équations du type (2.98) on utilise la méthode des « pas fractionnaires » (*cf.* Marchouk [15], Temam [25] et Yanenko [30]).

On considère toujours un ouvert Ω et un champ de vecteurs $A = \sum_{i=1}^{m} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ défini sur Ω; on suppose que les hypothèses (H.I), (H.II) et (H.III) sont satisfaites, et on se donne $0 < T < +\infty$. On introduit un entier N destiné à tendre vers l'infini $\left(k = \frac{T}{N}\right)$ et m fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_m$ définies de proche en proche sur l'intervalle $[0, T]$ comme les solutions sur des intervalles de la forme $]rk, (r+1)k[$ (r entier, $0 \leq r \leq N-1$)

de problèmes du type

$$(2.99)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u_i}{\partial t} + a_i \dfrac{\partial u_i}{\partial x_i} = f_i, \\ u_i \,|_{\Sigma_-(i)\times]rk,\,(r+1)k[} = 0, \end{cases}$$

où $\Sigma_-(i)$ désigne l'ensemble des points de $\partial\Omega \setminus \chi$ tels que $a_i n_i < 0$ avec les conditions initiales

$$(2.100)\qquad u(rk+) = \begin{cases} u_{i-1}((r+1)k-) & \text{si } i > 1, \\ u_m(rk-) & \text{si } i = 1 \text{ et } r > 0, \\ u_0(x) & \text{si } i = 1 \text{ et } r = 0. \end{cases}$$

Enfin on suppose que les fonctions f_i appartiennent à $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ et vérifient

$$(2.101)\qquad \sum_{i=1}^{m} f_i = f,$$

où f est une fonction donnée dans $L^2(0, T; L^2(\Omega))$.

Comme les fonctions u_i sont continues sur les intervalles $]rk, (r+1)k[$, les expressions $u_i(rk+)$ et $u_i((r+1)k-)$ qui dans (2.105) désignent leurs limites à gauche et à droite aux bords de cet intervalle ont bien un sens.

PROPOSITION 2.8. — *Soient* Ω *un ouvert de* $\mathbf{R}^m$, $A = \sum_{i=1}^{m} a_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ *un champ de vecteurs sur* Ω [*on suppose que les hypothèses* (H.I), (H.II) *et* (H.III) *sont satisfaites*]. *Soit* T *réel*, $0 < T < +\infty$. *Alors, pour tout couple*

$$(u_0, f) \in L^2(\Omega) \times L^2(0, T; L^2(\Omega)),$$

les fonctions $u_i(t)$ *définies par les algorithmes* (2.99)-(2.101) *convergent lorsque* N *tend vers l'infini, uniformément sur* [0, T] *vers* u *solution de* (2.97).

On désigne par $\exp - tA_2^i$ le semi-groupe engendré par le champ $-a_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ dans $L^2(\Omega)$ et on remarque, par exemple en adaptant la démonstration du théorème 1.4, que pour montrer la proposition 2.8 il suffit d'établir que l'on a

$$\exp - tA_2 = \lim_{N \to \infty} \left(\exp - \frac{t}{N} A_2^1 . \exp - \frac{t}{N} A_2^2 \ldots \exp - \frac{t}{N} A_2^m \right)^N \quad [16],$$

où $\exp - tA_2$ désigne le semi-groupe engendré par $-\sum_{i=1}^{m} a_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ dans $L^2(\Omega)$

[16] la limite étant prise au sens de la convergence forte et étant uniforme en t pour t dans un intervalle borné de $\mathbf{R}^+$.

et $\exp - tA_2^{i]}$ le semi-groupe engendré dans $L^2(\Omega)$ par $-a_i\frac{\partial}{\partial x_i}\cdot$ Ceci va résulter d'un théorème un peu plus général.

Théorème 2.5. — *Soient Ω un ouvert de $\mathbf{R}^m$, $A_1, A_2, \ldots, A_q$, q champ de vecteurs sur Ω et A le champ défini en posant $A = \sum_{i=1}^{q} A_i$; on suppose que l'ouvert Ω et les champs A_i vérifient les hypothèses* (H.I) *et* (H.II). *On désigne par* $\exp - tA_2$ *et par* $\exp - tA_2^i$ *les semi-groupes engendrés dans* $L^2(\Omega)$ *par les champs* $-A$ *et* A_i.

Alors, pour tout $\varphi \in L^2(\Omega)$, *on a la formule*

$$(2.102)\quad \lim_{n\to\infty} \left| \exp - tA_2\varphi - \left(\exp - \frac{t}{n}A_2^1.\exp - \frac{t}{n}A_2^2\ldots\exp - \frac{t}{n}A_2^q\right)^n \varphi\right|_{L^2(\Omega)} = 0,$$

cette limite étant uniforme en t dans un intervalle borné de $\mathbf{R}_+$.

La formule (2.102) est dite formule de Trotter (*cf.* Trotter [27] et Nelson [17]); [27] et [17] donnent des conditions suffisantes de validité d'une telle formule et en particulier supposent pour démontrer la relation

$$\exp - tC = \lim_{n\to\infty}\left(\exp - \frac{t}{n}D.\exp - \frac{t}{n}E\right)^n$$

que l'opérateur C est égal à la *fermeture* de l'opérateur $D + E$ défini sur $D(D) \cap D(E)$; ce qui n'est en général pas réalisé dans les hypothèses du théorème 2.5.

Aussi va-t-on donner une démonstration directe de (2.102) en utilisant $\exp - tA$ et $\exp - tA_i$, groupes de transformation associés aux champs $-A$ et $-A_i$ (*cf.* § 1).

Démonstration du théorème 2.5. — On remarque d'abord que les opérateurs $\exp - tA_2$ et $\left(\exp - \frac{t}{n}A_2^1.\exp - \frac{t}{n}A_2^2\ldots\exp - \frac{t}{n}A_2^q\right)^n$ sont bornés dans $L^2(\Omega)$ indépendamment de n et de t (pourvu que t reste borné); il suffit donc de prouver (2.102) en supposant $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

On remarque ensuite que les fonctions

$$(\exp - tA_2)\varphi \quad \text{et} \quad \left(\exp - \frac{t}{n}A_2^1.\exp - \frac{t}{n}A_2^2\ldots\exp - \frac{t}{n}A_n^q\right)\varphi$$

sont uniformément bornées dans $L^\infty(\Omega)$ et que leurs supports sont contenus dans un compact indépendant de n.

Pour $x \in \Omega$ fixé on introduit la suite $x^{r+\frac{i}{q}}$ (r entier, $0 \leq r \leq n$) définie en posant

$$x^{r+\frac{i}{q}} = \left(\exp - \frac{t}{n}A_i\right)x^{r+\frac{i-1}{q}}$$

avec les conventions suivantes :

$$x^{\frac{r+q}{q}} = x^{r+1}; \qquad x^0 = x$$

et on note $\Gamma(\tau).x$ la courbe « brisée » passant par les points $x^{r+\frac{i}{q}}$ définie par $\Gamma_n(\tau)\,x = (\exp - q\tau\,A_i)\,x^{r+\frac{i-1}{q}}$. Si τ appartient à l'intervalle $\left]rk + \frac{i-1}{q}k,\ rk + \frac{i}{q}k\right[$.

L'introduction de la courbe $\Gamma_n(\tau).x$ permet d'expliciter l'expression

$$\left(\exp - \frac{t}{n}A_2^1.\exp - \frac{t}{n}A_2^2\ldots\exp - \frac{t}{n}A_2^q\right)\varphi.$$

On a

$$\left[\left(\exp - \frac{t}{n}A_2^1.\exp - \frac{t}{n}A_2^2\ldots\exp - \frac{t}{n}A_2^q\right)^n\varphi\right](x) \tag{2.103}$$
$$= \begin{cases} \varphi(\Gamma_n(t)\,x) & \text{si } \Gamma_n(\tau)\,x \in \Omega,\ \forall\,\tau\in[0,t], \\ 0 & \text{sinon}; \end{cases}$$

on sait (*cf.* Bony [5]) que lorsque n tend vers l'infini la courbe $\Gamma_n(\tau)\,x$ converge uniformément vers la courbe $e^{-tA}x$. Pour terminer la démonstration du théorème 2.5 il suffit maintenant d'en déduire que pour presque tout x

$$\left[\left(\exp - \frac{t}{n}A_2^1.\exp - \frac{t}{n}A_2^2\ldots\exp - \frac{t}{n}A_2^q\right)^n\varphi\right](x)$$

converge vers $(\exp - tA_2\varphi)\,(x)$ uniformément en t. On en déduira (2.102) à l'aide du théorème de Lebesgue.

On peut supposer [*cf.* § 3 (2.20) et (2.21)] que x appartient, soit à $\Omega_1(t)$, soit à $\Omega_2(t)$.

— Si x appartient à $\Omega_1(t)$ il existe un voisinage U de la courbe $e^{-\tau A}x$, $\tau\in[0, T]$ strictement contenu dans Ω et donc, pour n assez grand $\Gamma_n(\tau)\,x$ est contenue également dans U, donc dans Ω et on a :

$$\left(\exp - \frac{t}{n}A_2^1.\exp - \frac{t}{n}A_2^2\ldots\exp - \frac{t}{n}A_2^q\right)^n\varphi(x) = \varphi(\Gamma_n(t)\,x)$$

qui converge uniformément en t vers $\varphi(e^{-tA}x) = [(\exp - tA_2)\varphi]\,(x)$.

— Si x appartient à $\Omega_2(t)$, $e^{-tA}x\in R^m\setminus\overline{\Omega}$ et donc pour n assez grand on a d'après (2.109)

$$\left[\exp - \frac{t}{n}A_2^1.\exp - \frac{t}{n}A_2^2\ldots\exp - \frac{t}{n}A_2^n\varphi\right](x) = 0 = (\exp - tA_2\varphi\,(x).$$

Ce qui termine la démonstration du théorème 2.5.

CHAPITRE III.

Équation de transport.

1. Équation de transport dans un domaine fixe. — Soient Ω un ouvert de $\mathbf{R}^m$ et Y un espace localement compact plongé dans $\mathbf{R}^m$, muni d'une mesure positive $d\mu(y)$ (y étant le point générique dans Y); on étudie l'existence et l'unicité d'une solution forte du problème :

$$(3.1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \displaystyle\sum_{i=1}^{m} y_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \sigma u + \int_Y \mathrm{K}(x, y, y')\, u(x, y', t)\, d\mu(y') = f, \\ u(x, y, t) = 0 \quad \text{si } (x, y, t) \in \partial\Omega\, x\, \mathrm{Y}\, x]0, \mathrm{T}[\quad \text{et si} \quad \displaystyle\sum_{i=1}^{m} n_i y_i < 0 \quad (^{17}), \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y). \end{cases}$$

(3.1) est appelée équation de transport et est utilisée en particulier pour décrire la distribution des neutrons dans un corps Ω (Y désignant alors l'espace des vitesses) (*cf.* [29] et [10] ainsi que la bibliographie de ces travaux).

On supposera, que l'ouvert Ω est borné dans $\mathbf{R}^m$ et qu'il vérifie l'hypothèse (H.II)$'$, alors pour tout champ de vecteur constant

$$\mathrm{A} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

le couple (Ω, A) vérifie les hypothèses (H.I), (H.III) et (H.IV) (*cf.* § 2).

On désigne par H l'espace de Hilbert $\mathrm{L}^2(\mathrm{Y}; \mathrm{L}^2(\Omega)) = \mathrm{L}^2(\Omega \times \mathrm{Y})$ des fonctions réelles mesurables pour la mesure $dx\, d\mu(y)$ telles que

$$\int_{\Omega \times \mathrm{Y}} |f(x, y)|\, dx\, d\mu(y) < +\infty$$

muni de la norme et du produit scalaire naturels.

Pour tout $y \in \mathrm{Y}$ on désigne par $\mathrm{A}_2(y)$ l'opérateur non borné dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$ définie par

$$\mathrm{D}(\mathrm{A}_2(y)) = \left\{ u \in \mathrm{L}^2(\Omega), \sum_{i=1}^{m} y_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \in \mathrm{L}^2(\Omega),\ u|_{\Sigma_-(y)} = 0 \right\} \quad (^{18}),$$

$$\mathrm{A}_2(y)\, u = \sum_{i=1}^{m} y_i \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

(17) $n_1, n_2, \ldots, n_m$ coefficients de la normale extérieure à $\partial\Omega$.

(18) $\Sigma_-(y) = \left\{ x \in \partial\Omega \setminus \chi \,\middle|\, \displaystyle\sum_{i=1}^{m} y_i n_i < 0 \right\}$.

et par $A_2^\varepsilon(y)$ l'opérateur défini par

$$D(A_2^\varepsilon(y)) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \qquad A_2^\varepsilon(y) = -\varepsilon\Delta + \sum_{i=1}^m y_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (^{19}).$$

Soit Λ l'opérateur défini par

$$(3.2) \quad \begin{cases} D(\Lambda) = \{ u \in H / u(y) \in D(A_2(y)) \text{ pour presque tout } y \text{ et } A_2(y)\, u(y) \in H \}, \\ (\Lambda u)(x, y) = (A_2(y)\, u(\,.\, y))(x) \end{cases}$$

et Λ^ε l'opérateur défini par

$$(3.3) \quad \begin{cases} D(\Lambda^\varepsilon) = L^2(Y;\, H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)), \\ (\Lambda^\varepsilon u)(x, y) = (A_2^\varepsilon u(\,.\,, y))(x). \end{cases}$$

Comme $A_2^\varepsilon(y)$ est un opérateur positif et comme $d\mu(y)$ est une mesure positive, Λ^ε est positif. Soient $\lambda > 0$, $f \in H$ et $u_\varepsilon \in L^2(Y;\, L^2(\Omega))$ définie par

$$(3.4) \quad u_\varepsilon(y) = (\lambda + A_2^\varepsilon(y))^{-1} f(y).$$

Pour tout $y \in Y$, on a

$$(3.5) \quad |u_\varepsilon(y))|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\lambda} |f(y)|_{L^2(\Omega)}.$$

De plus, la fonction $u_\varepsilon(y)$ est $d\mu(y)$ mesurable ([20]); ainsi u_ε appartient à H et vérifie d'après (3.4)

$$(3.6) \quad \begin{cases} u_\varepsilon \in D(\Lambda^\varepsilon), \\ \lambda + \Lambda^\varepsilon u_\varepsilon = f. \end{cases}$$

Ainsi $-\Lambda^\varepsilon$ est générateur d'un semi-groupe fortement continu à contraction dans H.

THÉORÈME 3.1. — *Soient Ω un ouvert borné de R^m vérifiant l'hypothèse* (H.II)' *et* Y *un espace localement compact plongé dans R^m muni d'une mesure positive μ, alors :*

(1) *l'opérateur Λ* ([21]) *défini par* (3.2) *est maximal positif dans* H*;*

(2) *lorsque ε tend vers zéro, le semi-groupe* $\exp - t\Lambda^\varepsilon$ *converge fortement vers* $\exp - t\Lambda$, *uniformément sur tout intervalle compact.*

([19]) Δ désigne le laplacien en les variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

([20]) Pour le voir, il suffit de remarquer que si f est continue de Y dans $L^2(\Omega)$, il en est de même de u_ε.

([21]) $D(\Lambda)$ est bien entendu égal à l'espace des $u \in H$ tels que $\sum_{i=1}^m y_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \in H$ vérifiant

$$u(x, y)|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{dès que} \quad \sum_{i=1}^m y_i . n_i < 0.$$

Démonstration. — Il est d'abord évident que Λ est un opérateur fermé et positif il suffit donc de montrer que, pour $\lambda > 0$, $\lambda + \Lambda$ est surjectif. Pour tout $f \in L^2(Y; L^2(\Omega))$, on désigne par $u(y)$ la fonction définie pour presque tout y par

$$(3.7) \qquad \begin{cases} \lambda u + \sum_{i=1}^{m} y_i \dfrac{\partial}{\partial x_i} u(\,.\,, y) = f(y), \\ u(x, y)\,|_{\Sigma_-(y)} = 0. \end{cases}$$

Pour montrer que $u(x, y)$ appartient à $D(\Lambda)$ le seul point délicat à établir est la *mesurabilité* de u, or ceci va résulter du lemme suivant :

LEMME 3.1. — *Lorsque* ε *tend vers zéro,* $u_\varepsilon = (\lambda + \Lambda^\varepsilon)^{-1} f$ *converge dans* H *fort vers* u.

En effet, lorsque ε tend vers zéro, d'après la proposition 2.7 pour presque tout y,

$$(3.8) \qquad u_\varepsilon(y) = (\lambda + \Lambda_2^\varepsilon(y))^{-1} f(y)$$

converge vers $u(y)$ [défini par (3.7)].

On a, d'autre part :

$$(3.9) \qquad |u_\varepsilon(y)|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\lambda} |f(y)|_{L^2(\Omega)}$$

ainsi, d'après le théorème de Lebesgue, le lemme 3.1 résulte de (3.8) et de (3.9).

Enfin le point (2) du théorème 3.1 se déduit également du lemme 3.1 à l'aide du théorème 2.16 (chap. IX de Kato [12], p. 502).

Soit $K(x, y, y')$ une fonction mesurable sur $\Omega \times Y \times Y$ telle que

$$(3.10) \qquad \int_Y |K(x, y, y')|\, d\mu(y') \leq k;$$

$$(3.11) \qquad \int_Y K(x, y, y')\,|\, d\mu(y) \leq k',$$

où k et k' sont deux constantes indépendantes respectivement de (x, y) et de (x, y').

Pour tout p l'opérateur $Ku = \int_Y K(x, y, y')\, u(x, y')\, d\mu(y')$ appartient à $L^2(\Omega \times Y)$.

En effet, d'après l'inégalité de Holder (si $p < +\infty$) [22],

$$(3.12) \qquad |Ku(x, y)|^p \leq \left[\int_Y |K(x, y, y')|\, d\mu(y')\right]^{p-1} \int_Y |K(x, y, y')|\,.\,|u(x, y')|^p\, d\mu(y).$$

---

[22] Si $p = +\infty$, la démonstration est évidente d'après 3.10).

Soit, d'après (3.10),

$$(3.13)\qquad |\mathrm{K}u(x, y)|^p \leqq k^{p-1}\int_{\mathrm{Y}} |\mathrm{K}(x, y, y')|.|u(x, y')|^p \, d\mu(y)$$

et ainsi

$$(3.14)\qquad \int_{\mathrm{Y}} |\mathrm{K}u(x, y)|^p \, d\mu(y) \int_{\mathrm{Y}} |\mathrm{K}(x, y, y')|.|u(x, y')|^p \, d\mu(y') \leqq k^{p-1}k' \int_{\mathrm{Y}} |u(x, y)|^p \, d\mu(y)$$

d'après le théorème de Fubini.

D'autre part, soit σ une fonction mesurable bornée sur $\Omega \times \mathrm{Y}$, du théorème 3.1 il résulte que l'opérateur de transport défini par

$$\mathrm{D}(\mathrm{T}) = \mathrm{D}(\Lambda), \qquad \mathrm{T} = \Lambda + \sigma - \mathrm{K}$$

est maximal positif aussi pour tout couple $(u_0, f) \in \mathrm{H} \times \mathrm{L}^2(0, \mathrm{T}; \mathrm{H})$ existe-t-il une unique solution $u \in \mathrm{L}^2(0, \mathrm{T}; \mathrm{H}) \cap \mathcal{C}(0, \mathrm{T}; \mathrm{H})$ du problème :

$$(3.15)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \displaystyle\sum_{i=1}^{m} y_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \sigma u - \int_{\mathrm{Y}} \mathrm{K}(x, y, y')\, u(x, y', t)\, d\mu(y') = f(x, y, t), \\ u(x, y, t)|_{\partial\Omega \times \mathrm{Y}} = 0 \qquad \text{si} \displaystyle\sum_{i=1}^{m} y_i n_i < 0, \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y). \end{cases}$$

De plus,

Théorème 3.2 [23]. — *Sous les hypothèses du théorème* 3.1 *si* σ *est une fonction mesurable bornée sur* $\Omega \times \mathrm{Y}$ *et si l'opérateur intégral* K *est défini par une fonction* $\mathrm{K}(x, y, y')$ *vérifiant* (3.10) *et* (3.11), *alors*

(i) *pour* $2 \leqq p < +\infty$, $\exp - t(\Lambda + \sigma - \mathrm{K})$ *se restreint en un semi-groupe fortement continu dans* $\mathrm{L}^p(\Omega \times \mathrm{Y})$;

(ii) *pour* $p = +\infty$, $\exp - t(\Lambda + \sigma - \mathrm{K})$ *se restreint en un semi-groupe d'opérateurs bornés dans* $\mathrm{L}^\infty(\Omega \times \mathrm{Y})$, *mais ce semi-groupe n'est pas continu : c'est-à-dire que si*

$$(u_0, f) \in \mathrm{L}^\infty(\Omega \times \mathrm{Y}) \times \mathrm{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathrm{L}^\infty(\Omega \times \mathrm{Y})),$$

$u(t)$ *solution de* (3.15) *appartient à* $\mathrm{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathrm{L}^\infty(\Omega \times \mathrm{Y}))$ *mais pas forcément à* $\mathcal{C}(0, \mathrm{T}; \mathrm{L}^\infty(\Omega \times \mathrm{Y}))$;

(iii) *pour* $1 \leqq p < 2$, $\exp - t(\Lambda + \sigma - \mathrm{K})$ *se prolonge en un semi-groupe fortement continu dans* $\mathrm{L}^p(\Omega \times \mathrm{Y})$;

---

(23) On trouvera des résultats analogues dans le cas d'un domaine en forme de pavé dans Douglis ([8], th. 4.1 et 9.1); *cf.* aussi Nimal [18].

(iv) *dès que* $K(x, y, y')$ *est une fonction positive* $\exp - t(\Lambda + \sigma - K)$ *laisse invariant le cône des fonctions positives de* H*; et si* u_0 *et* f *sont positives il en est de même de* u *solution de* 3.15).

Démonstration. — On sait (*cf.* chap. II, § 2) que, pour presque tout $y \in Y$, on a pour $\lambda > 0$

$$|(\lambda + A_2(y))^{-1} f(y)|_{L^p(\Omega)} \leqq \frac{1}{\lambda} |f(y)|_{L^p(\Omega)} \tag{3.16}$$

dès que f appartient à $L^p(Y; L^p(\Omega))$ ($1 \leqq p \leqq +\infty$). On en déduit immédiatement que si f appartient à $L^p(Y; L^p(\Omega))$ il en est de même de $u = (\lambda + \Lambda)^{-1} f$ et que l'on a

$$|(\lambda + \Lambda)^{-1} f|_{L^p(\Omega\times Y)} \leqq \frac{1}{\lambda} |f|_{L^p(\Omega\times Y)}. \tag{3.17}$$

Comme $\sigma - K$ est un opérateur continu dans $L^p(\Omega \times Y)$ on déduit de (3.17) qu'il existe une constante λ_p (dépendant de p, σ et K) telle que pour $\lambda > \lambda_p$ l'opérateur $(\lambda + \Lambda + \sigma - K)^{-1}$ appartienne à $\mathcal{L}(L^p(\Omega \times Y))$ et vérifie

$$|(\lambda + \Lambda + \sigma - K)^{-1}|_{\mathcal{L}(L^p(\Omega\times Y))} \leqq \frac{1}{\lambda - \lambda_p}, \tag{3.18}$$

on en déduit immédiatement (i), (ii) et (iii); de même, comme le semi-groupe engendré par $-A_2(y)$, (y fixé) opère dans le cône des fonctions positives de $L^2(\Omega)$ le semi-groupe engendré par $-\Lambda$ opère dans le cône des fonctions positives de $L^2(\Omega \times Y)$. D'autre part, σ et $-K$ sont des opérateurs bornés dans $L^2(\Omega \times Y)$ on a donc, d'après la formule de Trotter [27],

$$\exp - t(\Lambda + \sigma - K) = \lim_{n \to \infty} \left(\exp - \frac{t}{n}\sigma . \exp - \frac{t}{n}\Lambda . \exp \frac{t}{n} K \right)^n;$$

il suffit donc de montrer que $\exp - t\sigma$ et $\exp tK$ opèrent dans le cône des fonctions positives; et en effet on a

$$\exp - t\sigma . u = e^{-t\sigma(x)} u(x) \qquad \text{et} \qquad \exp tK = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{q!} (t)^q . K^q.$$

Comme K opère dans le cône des fonctions positives, il en est de même de K^q et donc du semi-groupe $\exp tK$. On a ainsi prouvé (iv).

2. Équation de transport dans un domaine variable. — Au paragraphe précédent on a considéré l'équation de transport

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{m} y_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \sigma u - \int_Y K(x, y, y')\, u(x, y', t)\, d\mu(y') = f$$

dans un domaine de la forme $\Omega\times Y\times[0, T]$, ($\Omega$ étant donc indépendant du temps), aussi en particularisant le rôle de t on a pu étudier cette équation comme une équation d'évolution de la forme

$$\begin{cases} u'+\Lambda u+\sigma u-\mathrm{K}u=f, \\ u(0)=u_0; \end{cases}$$

on a montré que $-\Lambda$ était générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu dans $L^2(Y; L^2(\Omega))$. Dans ce paragraphe on va faire jouer le même rôle aux variables $(t, x_1, x_2, \ldots, x_m)$, ce qui permettra d'après le paragraphe 4 du chapitre II, d'obtenir des résultats dans le cas où l'ouvert Ω se déforme avec le temps.

Soit Q_∞ un ouvert de $\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^t$ de frontière ∂Q_∞ sous-variété de dimension $(m-1)$ et de classe $\mathcal{C}^1$ tel que pour tout $t\in\mathbf{R}$ l'intersection de Q_∞ avec l'hyperplan : $H_t=\{(x, \tau)/\tau=t\}$ soit un ouvert Ω_t non vide et borné de $\mathbf{R}^m$; on dit alors que Q_∞ vérifie l'hypothèse (H.V).

On désigne par Q_T l'ouvert $Q_T=\{(x, t)\in\Omega_t/0<t<T\}$ $(0<T<+\infty)$; Q_T vérifie l'hypothèse (H.II).

Comme au paragraphe précédent on considère un espace localement compact Y plongé dans $\mathbf{R}^m$ muni d'une mesure positive et bornée $d\mu(y)$.

Pour tout $y\in Y$, on désigne par A_t l'opérateur différentiel

$$\Lambda_t(y)=\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{i=1}^{m}y_i\frac{\partial}{\partial x_i}$$

on note H_T l'espace de Hilbert $L^2(Y; L^2(Q_T))$, et on désigne par Λ_T l'opérateur non borné dans H_T défini par

$$D(\Lambda_T)=\left\{u\in H_T;\ \frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{i=1}^{m}y_i\frac{\partial u}{\partial x_i}\in H_T;\right.$$

$u(x, t; y)=0$ en tout point de ∂Q_T ou

$$\left.\sum_{i=1}^{m}y_i.n_i+n_t<0\ (^{24})\right\}\quad \Lambda_T u=\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{i=1}^{m}y_i\frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

En appliquant à l'ouvert Q_T et à l'opérateur Λ_T les méthodes du paragraphe 1 on obtient la

---

([24]) $n_1, n_2, \ldots, n_m$ et n_t désignent les coefficients de la normale extérieure à Q_T dans $\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}_t$. Et comme sur Ω_0 on a

$$(n_1, n_2, \ldots, n_m, n_t)=(0, 0, \ldots, 0, -1), \qquad u(x, y, 0)|_{\Omega_0}=0.$$

Proposition III.1. — *Si on suppose que l'ouvert* Q_∞ *vérifie l'hypothèse* (H.V) *l'opérateur* $-\Lambda_T$ *défini ci-dessus est générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu à contraction dans* $H_T = L^2(Y, L^2(Q_T))$.

Corollaire 3.1. — *Soit* $\sigma(x, y, t)$ *une fonction mesurable bornée sur* $Y \times Q_T$ *et* $K(x, t, y, y')$ *une fonction mesurable sur* $Q_T \times Y \times Y$ *telle que l'on ait*

$$\int_Y |K(x, t, y, y')|\, d\mu(y') \leq k; \tag{3.19}$$

$$\int_Y |K(x, t, y, y')|\, d\mu(y) \leq k, \tag{3.20}$$

où k et k' sont deux constantes respectivement indépendantes de (x, t, y) et de (x, t, y') alors sous les hypothèses de la proposition 3.1, pour tout $f \in H_T$ il existe un unique $u \in H_T$ solution du problème

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i-1}^{m} y_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \sigma u - \int_Y K(x, t, y, y')\, u(x, t, y')\, d\mu(y') = f \quad \text{dans } Q_T,$$

$$u(x, t, y)|_{\partial Q_T} = 0 \qquad \text{si} \quad \sum_{i=1}^{m} y_i n_i + n_t < 0$$

avec en particulier $u(x, 0, y) = 0$ sur Ω_0.

La démonstration de ce corollaire se fait en remarquant que l'opérateur

$$u \to (\sigma - K)\, u = \sigma u - \int_Y K(x, t, y, y')\, u(x, t, y')\, d\mu(y')$$

est linéaire continue dans H_T et en posant

$$u(x, t, y) = e^{\lambda t} v(x, t, y) \qquad (\lambda > 0 \text{ assez grand})$$

de manière à se ramener à une équation de la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} v \in D(\Lambda_T), \\ \Lambda_T v + \sigma v - K v + \lambda v = f. \end{array} \right. \tag{3.21}$$

Ceci résoud le problème de l'équation de transport pour des données initiales nulles; nous allons maintenant étudier le cas des *données initiales non nulles.*

Pour $y \in Y$, on désigne par $W(y; Q_T)$ l'espace des u vérifiant

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in L^2(Q_T), \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m} y_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(Q_T) \end{array} \right. \tag{3.22}$$

et par $W(Y, Q_T)$ l'espace $L^2(Y; W(y, Q_T))$; bien entendu,

$$W(Y, Q_T) = \left\{ \begin{array}{l} u(x, y) \in L^2(Y; L^2(Q_T)), \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m} y_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(Y; L^2(Q_T)). \end{array} \right.$$

Enfin, pour $0 \leqq t \leqq T$, on désigne par $\mathcal{H}_t$ l'espace

$$\mathcal{H}_t = L^2(Y; L^2(\Omega_t)) = L^2(Y \times \Omega_t).$$

THÉORÈME 3.3. — *Sous les hypothèses de la proposition* 3.1 *et du corollaire* 3.1, *pour tout couple*

$$(u_0, f) \in L^2(Y \times \Omega_0) \times L^2(Y; L^2(Q_T)),$$

il existe une unique fonction u appartenant à $W(Y, Q_T)$ *telle que*

$$(3.23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{m} y_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \sigma u - \int_Y K(x, t, y, y')\, u(x, t, y')\, d\mu(y') = f \quad \text{dans } Q_T \quad (^{25}), \\ u(x, y, t)\,|_{\Sigma_-} = 0, \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y) \quad sur\ \Omega_0. \end{array} \right.$$

D'autre part, il existe une constante $\mathcal{C}$ *indépendante de* u_0, f *et de* $t \in [0, T]$ *telle que l'on ait*

$$(3.24) \quad \int_{Y \times \Omega_t} |u(x, t, y)|^2\, dx\, d(y) = |u(t)|^2_{\mathcal{H}_t} \leqq \mathcal{C} \left\{ |u_0|^2_{L^2(Y \times \Omega_0)} + \int_{Y \times Q_T} |f(x, t, y)|^2\, d\mu(y)\, dx\, dt \right\}.$$

L'unicité de la solution de (3.23) résulte par exemple du corollaire 3.1; pour montrer l'existence de la solution de (3.23) ainsi que l'inégalité (3.24) on utilise les méthodes du chapitre II, § 4 (propos. 2.5 et théor. 2.3).

On commence par montrer que pour y fixé, d'après le théorème 2.2, l'espace des $u \in \mathcal{D}(\overline{Q}_T)$ tels que $u|_{\partial Q_T} = 0$ dès que $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} y_i . n_i + n_t < 0$ est dense dans l'espace des $u \in W(y)$ tels que $u|_{\partial Q_T} = 0$ dès que $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} y_i . n_i + n_t < 0$.

Il en résulte que $L^2(Y; H^1(Q_T)) \cap D(\Lambda_T)$ est dense dans $D(\Lambda_T)$. Ainsi en supposant $u \in L^2(Y; H^1(Q_T)) \cap D(\Lambda_T)$ et en utilisant la formule de

---

(25) On désigne par Σ_- l'ensemble des points de $\partial Q_\infty \cap \{ (x, t)/0 \leqq t \leqq T \}$ vérifiant $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} y_i . n_i + n_t < 0$.

Green, puis en passant à la limite peut-on montrer que si u appartient à $D(\Lambda_T)$ et si $v \in L^2(Y; H^1(Q_T))$ est nulle sur Σ_- on a

$$(3.25) \quad |u(t)+v(t)|^2_{\mathcal{H}_t} \leq \mathcal{C}\left\{ |v(x, 0, y)|^2_{L^2(Y\times\Omega_0)} + \left| \sum_{i=1}^{m} y_i \frac{\partial}{\partial x_i}(u+v) + \frac{\partial}{\partial_t}(u+v) \right|^2_{L^2(Y\times Q_T)} \right\}.$$

On introduit alors une suite $v_n \in L^2(Y; H^1(Q_T))$ nulle sur Σ_- telle que $v_n|_{Y\times\Omega_0}$ converge vers u_0 dans $L^2(Y\times Q_T)$.

On désigne par u_n la solution du problème

$$(3.26) \quad \begin{cases} u_n \in D(\Lambda_T), \\ \Lambda_T u_n + \sigma u_n - K u_n = f - \left(\sigma v_n + \displaystyle\sum_{i=1}^{m} y_i \frac{\partial v_n}{\partial x_i} - K v_n \right). \end{cases}$$

On déduit de (3.25) (en modifiant éventuellement la constante $\mathcal{C}$) que $w_n = u_n + v_n$ vérifie :

$$(3.27) \quad |w_n(t)|^2_{\mathcal{H}_t} \leq \mathcal{C}\left\{ |v_n(x, 0, y)|^2_{L^2(Y\times\Omega_0)} + \int_{Y\times Q_T} |f(x, t, y)|^2 \, d\mu(y)\, dx\, dt \right\},$$

ce qui permet de conclure que w_n converge dans $W(Y, Q_T)$ vers une fonction u solution de (3.23) vérifiant (3.24).

Remarque 3.1. — Dans ce qui précède on a introduit des données aux limites non homogènes que sur la « base » de l'ouvert Q_T, ce qui correspond à des conditions initiales non nulles, mais en modifiant un peu la démonstration du théorème 3.3 on peut également considérer le cas de conditions aux limites non homogènes sur Σ_-.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] S. Albertoni et B. Montagnini, *On the spectrum of neutron transport equation in finite bodies* (*J. of Math. Anal. and applic.*, vol. 13, n° 1, 1966, p. 19-48).

[2] M. Baouendi et P. Grisvard, *Sur une équation d'évolution changeant de type* (*J. Funct. Anal.*, vol. 2, 1968, p. 352-367).

[3] C. Bardos, *Sur des problèmes aux limites homogènes dans* $L^2(\Omega)$, *pour des équations aux dérivées partielles du premier ordre à cœfficients réels* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 268, série A, 1969, p. 590-592); *Sur des problèmes aux limites non homogènes pour les équations aux dérivées partielles du premier ordre à cœfficients réels* (*Ibid.*, p. 637-639).

[4] C. Bardos et H. Brézis, *Sur une classe de problèmes d'évolution non linéaires* (*Journal of Diff. Equations*, n° 6, 1969, p. 345-394).

[5] J. M. Bony, *Principe du maximum et inégalités de Harnack pour les opérateurs elliptiques dégénérés* (*Séminaire Brelot-Choquet-Deny*, 12e année, 1967-1968, n° 10, Paris, I. H. P., 1968).

[6] J. M. BONY, *Sur la régularité des solutions du problème de Dirichlet pour les opérateur elliptiques dégénérés du second ordre* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 267, série A, 1968, p. 691-693).

[7] G. DE RHAM, *Variétés différentiables*, Hermann, Paris.

[8] A. DOUGLIS, *The solution of multidimensional generalized transport equation and their calculation by Difference Methods. Numerical Solution of Partial Differential Equations*, edited by J. H. Bramble A. P., New York, 1966.

[9] K. FRIEDRICHS, *Symmetric positive systems of Differential Equations* (*Comm. Pure App. Math.*, vol. 7, 1954, p. 345-392).

[10] K. JORGENS, *An Asymptotic expansion in the theory of Neutron Transport* (*Comm. Pure App. Math.*, vol. 11, 1958, p. 219-242).

[11] KALDEC, *The regularity of the solution of the Poisson problem in a domain whose boundary is similar to that of a convex domain* (*Czech. Math. J.*, vol. 89, 1964, p. 386-393).

[12] T. KATO, *Perturbation theory for linear operators*, Springer Verlag, t. 132.

[13] P. LAX et R. S. PHILLIPS, *Local Boundary conditions for Dissipative symmetric operators* (*Comm. Pure App. Math.*, vol. 13, 1960, p. 427-455).

[14] J. L. LIONS, *Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles*, Université de Montréal.

[15] G. I. MARCHOUK, *Méthodes numériques* (en russe), Novosibirsk, 1965; à paraître en français.

[16] C. MIRANDA, *Equazioni alle derivate parziale del typo ellitico*, Springer Verlag, 1955.

[17] E. NELSON, *Feynmann Integral and the Schrodinger Equation* (*J. Math. Phys.*, vol. 5, n° 3, 1963, p. 332-343).

[18] J. C. NIMAL, *Thèse*, à paraître, Paris, 1968.

[19] O. OLEINIK, *Linear equations of second order with non negative characteristic form* (*Math. Sb.*, vol. 69 (111), 1966; *Amer. Math. Soc. Trans.*, vol. 65, 1967, p. 167-200).

[20] R. S. PHILLIPS, *Semi-groups of contraction*, C. I. M. E. Equazioni differenziali astratte, 1963, Edizioni Cremonese, Roma.

[21] K. W. REED, *On a problem in neutron transport theory* (*J. Math. Anal. and App.*, vol. 10, 1965, p. 161-165).

[22] K. W. REED, *On weak and strong solution for the neutron transport equation* (*J. Anal. Math.*, vol. 17, 1966, p. 347-368).

[23] M. RIESZ, *Sur les maximas des formes bilinéaires et sur les fonctionnelles linéaires* (*Acta Math.*, vol. 49, 1927, p. 465-497).

[24] W. RUDIN, *Real and Complex analysis*, Mac Graw Hill, New York.

[25] R. TEMAM, *Sur la stabilité et la conv...*, *Annali di Mat. Pura ed. App.*, 79, 1968, p. 191-380.

[26] H. F. TROTTER, *Approximation of semi-groups of operators* (*Pacific J. Math.*, vol. 8, 1958).

[27] H. F. TROTTER, *On the product of semi-groups of operators* (Proc. Amer. Math. Soc., vol. 10, 1959, p. 545-551).

[28] S. UKAI, *Eigenvalues of the Neutron transport operator for a homogenous finite moderator* (*J. Math. Anal. and App.*, vol. 18, 1967, p. 297-314).

[29] G. M. WING, *An introduction to transport theory*, John Wiley and Sons Publishers, New York.

[30] N. N. YANENKO, *Méthode des pas fractionnaires pour la résolution numérique des problèmes de la physique mathématique*, Novosibirsk, 1966; en français chez Dunod, Paris, 1968.

[31] N. N. YANENKO et J. I. CHOKIN, *Méthodes d'approximation des équations du premier ordre et approximation par des schémas aux différences avec viscosité* (en russe), Novosibirsk, 1968.

[32] K. YOSIDA, *Functionnal analysis*, Springer Verlag, vol. 123.

[33] P. LASCAUX, à paraître.

(Manuscrit reçu le 21 décembre 1969.)

Claude BARDOS,
31, rue Descartes,
75-Paris, 5e.