ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ARTIBANO MICALI
ORLANDO E. VILLAMAYOR

Sur les algèbres de Clifford

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 1, n° 2 (1968), p. 271-304
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1968_4_1_2_271_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 1, 1968, p. 271 à 304.

SUR LES ALGÈBRES DE CLIFFORD (*)

PAR ARTIBANO MICALI,
Faculté des Sciences, Université de Montpellier

ET ORLANDO E. VILLAMAYOR,
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales,
Universidad de Buenos Aires.

SOMMAIRE.

0. INTRODUCTION. — Soient F un corps, V un F-espace vectoriel de dimension finie n et $Q : V \rightarrow F$ une forme quadratique négative définie. Si C_n désigne l'algèbre de Clifford de l'espace vectoriel quadratique (V, Q), on donne, dans [1], une démonstration du théorème de périodicité de Bott

(*) Trabalho realizado com auxilio da FAPESP (*Proc. Matematica*, 66/038) e do Instituto de Pesquisas Matematicas da Universidade de São Paulo.

en démontrant que le groupe de Grothendieck de C_n est isomorphe au groupe de Grothendieck de C_{n+8}, i. e. $K(C_n) \simeq K(C_{n+8})$ si F est le corps des nombres réels, et que $K(C_n) \simeq K(C_{n+2})$ si F est le corps des complexes. C'est là que réside une des sources du présent travail (*cf.* § 10).

L'autre source d'inspiration est le Mémoire de C. T. C. Wall (*cf.* [6]). Les résultats de Wall concernent des espaces vectoriels quadratiques de dimension finie où l'on fait une nette distinction entre le cas de caractéristique 2 de celui de caractéristique $\neq 2$.

Le but de ce Mémoire est donc de généraliser un certain nombre de résultats, concernant les algèbres de Clifford. Tout anneau est commutatif à élément unité et tout module est unitaire. De plus, le mot algèbre veut dire algèbre associative à élément unité non nécessairement commutative. Tout homomorphisme d'anneaux (resp. algèbres) transforme élément unité en élément unité. On supposera toujours pour simplifier la rédaction, en parlant du rang d'un module, qu'il soit constant. Mais la théorie peut s'étendre au cas d'un module de rang non constant.

Tout d'abord, on démontre, dans le cas local, l'existence d'une décomposition orthogonale pour un module (*cf.* § 2 et 3). Ensuite (*cf.* § 4) on étudie le centre d'une algèbre de Clifford et l'on démontre (*cf.* § 5), sous certaines conditions, le théorème d'isomorphisme entre les produits tensoriels gradué et non gradué d'algèbres de Clifford. Au paragraphe 6 on démontre essentiellement que tout algèbre de Clifford est séparable. Après quelques préliminaires (*cf.* § 7 et 8), on donne (*cf.* § 9) une classification des algèbres de Clifford de rang pair. Finalement, il s'agit du groupe de Grothendieck (*cf.* § 10).

Soit A un anneau et considérons le groupe de Witt $\mathcal{W}(A)$ (*cf.* [4], § 8, n° 2, défin. 1) et le groupe $\mathcal{H}(A)$ (*cf.* § 8) des classes d'équivalence d'algèbres de Clifford. Il existe un homomorphisme évident,

$$\mathcal{W}(A) \to \mathcal{H}(A)$$

qui fait correspondre à toute forme quadratique, son algèbre de Clifford. On remarque que deux formes équivalentes donnent le même élément de $\mathcal{H}(A)$. De plus, cet homomorphisme est surjectif de telle sorte qu'il est naturel de se poser la question de savoir quel est son noyau. En général, le calcul de $\operatorname{Ker}(\mathcal{W}(A) \to \mathcal{H}(A))$ est un problème ouvert. Néanmoins on sait que, en général, $\operatorname{Ker}(\mathcal{W}(A) \to \mathcal{H}(A)) \neq 0$, comme nous le montre le cas des nombres réels : $\mathcal{W}(\mathbf{R}) = \mathbf{Z}$ et $\mathcal{H}(\mathbf{R}) = \mathbf{Z}/(8)$. Dans le cas des nombres complexes, on a un isomorphisme de groupes $\mathcal{W}(\mathbf{C}) \cong \mathcal{H}(\mathbf{C})$. Ceci nous donne une idée du rapport existant entre les groupes $\mathcal{W}(A)$ et $\mathcal{H}(A)$.

1. Rappels sur les algèbres de Clifford. — Soient A un anneau, M un A-module, $Q : M \to A$ une forme quadratique sur M et $\Phi : M \times M \to A$

la forme bilinéaire associée, c'est-à-dire, quels que soient x et y dans M,

$$\Phi(x, y) = Q(x+y) - Q(x) - Q(y).$$

Puisque $\Phi(x, x) = 2\,Q(x)$ pour tout $x \in M$, il nous faudra toujours distinguer le cas où 2 est inversible dans A de celui où 2 n'est pas inversible dans A. Par exemple, le plus souvent A est un anneau local d'idéal maximal $\underline{m}$ et il nous faut toujours regarder si $2 \notin \underline{m}$ ou si $2 \in m$. Un A-module M muni d'une forme quadratique Q sera appelé un *module quadratique* et on le désignera par (M, Q).

Soit (M, Q) un module quadratique. On appelle *algèbre de Clifford* de (M, Q) ou encore, de M, à un objet (C, α) formé d'une A-algèbre C et d'une application A-linéaire $\alpha : M \to C$ telle que $\alpha(x)^2 = Q(x).1_C$, où 1_C désigne l'unité dans C, pour tout $x \in M$. De plus, pour toute A-algèbre D et pour toute application A-linéaire $\beta : M \to D$ telle que $\beta(x)^2 = Q(x).1_D$, pour tout $x \in M$, il existe un et un seul homomorphisme de A-algèbres $\overline{\beta}$: $C \to D$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"'] & D \\ C \arrow[ur, "\overline{\beta}"'] & \end{tikzcd}$$

soit commutatif. Il en résulte l'unicité, à moins d'un isomorphisme, d'une telle A-algèbre C. Pour la construire, on procède comme suit. On désigne par I(Q) l'idéal bilatère de l'algèbre tensorielle T(M) engendré par les éléments $x \otimes x - Q(x).1$, x parcourant M. Pour la graduation canonique de T(M), c'est-à-dire en tant que A-algèbre graduée, I(Q) n'est pas un idéal homogène. Mais si l'on se restreint à la graduation sur $\mathbf{Z}/(2)$, I(Q) est un idéal homogène et le quotient $C(M, Q) = T(M)/I(Q)$ est une A-algèbre graduée sur $\mathbf{Z}/(2)$, dont les éléments homogènes de degrés 0 et 1 sont faciles à décrire. Désignons par $C_0(M, Q)$ ou, plus simplement, C_0 [resp. $C_1(M, Q)$, C_1] le sous-A-module de C(M, Q) des éléments homogènes de degré 0 (resp. 1). Il est évident encore que C_0 est une sous-A-algèbre de C(M, Q). On va désigner par $\alpha : M \to T(M) \to C(M, Q)$ l'application A-linéaire composée (évidente). On voit facilement que $\alpha(x)^2 = Q(x).1_{C(M,Q)}$, pour tout $x \in M$. Il s'ensuit que $(C(M, Q), \alpha)$ est l'algèbre de Clifford du module (M, Q). Par la suite, on dira simplement que C(M, Q) est l'algèbre de Clifford de M, l'application A-linéaire canonique α étant sous-entendue.

On rappelle que si (M_1, Q_1) et (M_2, Q_2) sont deux A-modules quadratiques, on peut définir sur $M_1 \oplus M_2$ une forme quadratique, notée $Q_1 \oplus Q_2$, en posant

$$(Q_1 \oplus Q_2)\,(x_1 + x_2) = Q_1(x_1) + Q_2(x_2),$$

pour tout élément $(x_1, x_2) \in M_1 \oplus M_2$. Donc, l'algèbre de Clifford $C(M_1 \oplus M_2, Q_1 \oplus Q_2)$. L'application A-linéaire évidente

$$M_1 \oplus M_2 \to C(M_1, Q_1) \hat{\otimes} C(M_2, Q_2),$$

où $\hat{\otimes}$ désigne le produit tensoriel gradué d'algèbres de Clifford, se prolonge en un unique homomorphisme d'algèbres de Clifford

$$C(M_1 \oplus M_2, Q_1 \oplus Q_2) \to C(M_1, Q_1) \hat{\otimes} C(M_2, Q_2)$$

tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} M_1 \oplus M_2 \arrow[r] \arrow[d] & C(M_1, Q_1) \hat{\otimes} C(M_2 Q_2) \\ C(M_1 \oplus M_2, Q_1 \oplus Q_2) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

soit commutatif, où la flèche verticale est l'application A-linéaire canonique. On montre alors que $C(M_1 \oplus M_2, Q_1 \oplus Q_2) \xrightarrow{\sim} C(M_1, Q_1) \hat{\otimes} C(M_2, Q_2)$ est un isomorphisme d'algèbres de Clifford.

Pour d'autres résultats concernant les algèbres de Clifford, comme par exemple, la description de l'algèbre de Clifford d'un module libre, etc., on renvoie à la bibliographie (*cf.* [4]).

Il s'agira toujours, dans ce papier, d'algèbres de Clifford de modules projectifs de type fini.

Étant donné un A-module quadratique (M, Q), désignons par M^* le dual de M et considérons l'application A-linéaire $\varphi : M \to M^*$ définie par $\varphi(x)(y) = \Phi(x, y)$, quels que soient x et y dans M. *Dans tout ce qui suit, on supposera toujours que* $\varphi : M \xrightarrow{\sim} M^*$ *soit un isomorphisme de* A-*modules.* Ceci entraîne que la matrice de φ ou encore, la matrice de la forme bilinéaire Φ est inversible. On dira aussi que Φ (resp. Q) est *non dégénérée.*

2. Existence d'une base orthogonale [1]. — Supposons que l'anneau A soit local d'idéal maximal $\underline{m}$ et corps de restes $k = A/\underline{m}$. De plus, soit (M, Q) un A-module quadratique, où M est projectif de type fini, donc libre de type fini.

Lemme 1. — *Si* $2 \notin \underline{m}$, *il existe une base orthogonale de* M *sur* A.

En effet, considérons le k-espace vectoriel $V = M \otimes_A k$ et soit $\overline{\varphi} : V \to V^*$ l'application k-linéaire induite par φ sur V. Désignons encore par $\overline{Q} : V \to k$ la forme quadratique obtenue par extension des scalaires et par $\overline{\Phi}$ la forme bilinéaire associée. Puisque

$$\overline{\Phi}(x, y) = \frac{1}{2}\left(\overline{\Phi}(x+y, x+y) - \overline{\Phi}(x, x) - \overline{\Phi}(y, y)\right) \qquad \text{pour} \quad (x, y) \in V \times V,$$

[1] Des résultats analogues à ceux de nos paragraphes 2 et 3 ont été obtenus par M. M. Flamant (*cf.*, par exemple, *C. R. Acad. Sc.*, t. 261, 1965, p. 3513-3515).

il s'ensuit que si $\overline{\Phi}(x, x) = 0$ pour tout $x \in V$, alors $\overline{\Phi} = 0$. Il existe alors $x_1 \in V$ tel que $\overline{\Phi}(x_1, x_1) \neq 0$ et complétons $\{x_1\}$ en une base $\{x_1, \ldots, x_n\}$ de V sur k. Si e_i désigne l'image réciproque de x_i par l'épimorphisme canonique $M \to V$, le lemme de Nakayama nous montre que $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est une base du A-module libre M.

Désignons encore par $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ la base duale de $\{e_1, \ldots, e_n\}$. On peut écrire $\varphi(e_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e'_j \, (i = i, \ldots, n)$ avec les a_{ij} dans A. On remarque que, puisque $\varphi : M \to M^\star$ est un isomorphisme, alors la matrice $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est inversible. On voit maintenant que $\overline{\Phi}(x_i, x_j) = \overline{\varphi}(x_i)(x_j) = \overline{a}_{ij}$, donc $\overline{a}_{11} = \overline{\Phi}(x_1, x_1) \neq 0$. Ceci équivaut encore à dire que $a_{11} = \Phi(e_1, e_1) \notin \underline{m}$.

Considérons maintenant les vecteurs

$$f_1 = e_1,$$
$$f_i = e_i - \frac{\Phi(e_1, e_i)}{\Phi(e_1, e_1)} e_1 \qquad (i = 2, \ldots, n).$$

C'est évident que $\{f_1, \ldots, f_n\}$ est une base de M sur A et, de plus, $\Phi(f_1, f_i) = 0$ $(i = 2, \ldots, n)$. On considère alors le sous-A-module libre N de M ayant $\{f_2, \ldots, f_n\}$ comme base sur A. Il est clair que $\varphi : M \to M^\star$ induit un isomorphisme $\psi : N \to N^\star$. En effet, $M = Af_1 \oplus N$, donc $M^\star = Af'_1 \oplus N^\star$. D'autre part, $\varphi(f_1) = \sum_{j=1}^{n} b_{1j} f'_j$ avec les $b_{1j} \in A$, donc

$$0 = \Phi(J_1, f_i) = \varphi(f_1)(f_i) = \sum_{j=1}^{n} b_{1j} f'_j(f_i) = \sum_{j=1}^{n} b_{1j} \delta_{ji} \qquad \text{pour} \quad i \geq 2.$$

Ceci nous montre que $b_{1j} = 0$ $(j = 2, \ldots, n)$.

On a ainsi démontré que $\varphi(Af_1) \subset Af'_1$ et le lemme du passage aux quotients nous donne le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\varphi} & M^\star \\ \downarrow & & \downarrow \\ N & \xrightarrow{\psi} & N^\star \end{array}$$

où les flèches verticales sont les épimorphismes canoniques. La démonstration s'achève maintenant par récurrence sur n.

3. Existence d'une décomposition orthogonale. — Soient A un anneau local d'idéal maximal $\underline{m}$ et (M, Q) un A-module quadratique où M est libre de type fini.

LEMME 2. — *Si le rang de* M *est* $\geqq 2$ *et si* $2 \in \underline{m}$, *il existe une décomposition orthogonale* $M = M_1 \oplus M_2$, *où* M_1 *est libre de rang* 2.

En effet, on remarque tout d'abord que

$$a_{ii} = \Phi(e_i, e_i) = 2\,Q(e_i) \in \underline{m} \qquad \text{pour} \quad i = 1, \ldots, n.$$

Étant donné la matrice $(a_{ij})_{1 \leqq i, j \leqq n}$ est inversible, chaque ligne contient au moins un élément inversible et en ordonnant convenablement les lignes, on pourra supposer que la matrice $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ soit inversible, c'est-à-dire, que $a_{12} \notin \underline{m}$ et $a_{21} \notin \underline{m}$. Il existe alors des éléments $f_i \in M$ ($i = 3, \ldots, n$) tels que

$$\Phi(e_1, f_i) = 0, \qquad \Phi(e_2, f_i) = 0 \qquad (i = 3, \ldots, n).$$

En effet, soit $f_i = e_i - a_i e_1 - b_i e_2$ ($i = 3, \ldots, n$), où les a_i et b_i sont dans A. On a le système d'équations

$$0 = \Phi(e_1, f_i) = \Phi(e_1, e_i) - a_i \Phi(e_1, e_1) - b_i \Phi(e_1, e_2),$$
$$0 = \Phi(e_2, f_i) = \Phi(e_2, e_i) - a_i \Phi(e_2, e_1) - b_i \Phi(e_2, e_2),$$

donc

$$\left.\begin{aligned} a_{11} a_i + a_{12} b_i &= a_{1i} \\ a_{21} a_i + a_{22} b_i &= a_{2i} \end{aligned}\right. \qquad (i = 3, \ldots, n).$$

On en déduit

$$a_i = \frac{a_{1i}\, a_{22} - a_{2i}\, a_{12}}{a_{11}\, a_{22} - a_{21}\, a_{12}} \qquad \text{et} \qquad b_i = \frac{a_{11}\, a_{2i} - a_{21}\, a_{1i}}{a_{11}\, a_{22} - a_{21}\, a_{12}}.$$

D'autre part, il est évident que $\{e_1, e_2, f_3, \ldots, f_n\}$ est une base de M sur A.

LEMME 3. — *Si* $2 \in \underline{m}$, *il n'y a pas de forme quadratique non dégénérée sur des modules libres de rang* 1.

En effet, si M est un A-module projectif de rang 1 et si $\{e\}$ est une base de M sur A, la matrice de $\varphi : M \to M^*$ est formée d'un seul élément, à savoir, $\Phi(e, e) = 2\,Q(e) \in \underline{m}$ qui n'est pas inversible.

COROLLAIRE. — *Si* $2 \in \underline{m}$, *toute algèbre de Clifford est de rang pair.*

C'est une conséquence des lemmes 2 et 3.

Remarque. — Il est intéressant d'observer que, dans toute algèbre de Clifford C(M, Q), il existe toujours un élément $x \in M$ tel que x^2 soit inversible dans A.

En effet, si $2 \notin \underline{m}$, M admet une décomposition orthogonale dont $\{e_1, \ldots, e_n\}$ en est une base. Puisque $\text{dét}(\Phi) = 2^n \prod_{i=1}^{n} e_i^2$, chaque e_i^2 est inversible dans A. Si $2 \in \underline{m}$, il existe une décomposition orthogonale en facteurs de rang 2. Soit $\{e_1, e_2\}$ une base de l'un de ces facteurs. Puisque $4e_1^2 e_2^2 - \Phi(e_1, e_2)^2$

est inversible, alors il en est de même de $\Phi(e_1, e_2) = (e_1 + e_2)^2 - e_1^2 - e_2^2$. Donc, l'un au moins de ces carrés est inversible.

4. Sur le centre. — Soient A un anneau commutatif à élément unité, M un A-module projectif de type fini, Q une forme quadratique sur M et C(M, Q) l'algèbre de Clifford de M muni de la forme Q. Désignons par Z(C(M, Q)) le centre de C(M, Q).

Supposons maintenant que A soit local et soit $\{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de M sur A.

Lemme 4. — *Si* $2 \notin \underline{m}$ *et si* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *est une base orthogonale de* M *sur* A, *le sous-*A*-module* $\Gamma_n(M)$ *de* C(M, Q) *engendré par l'élément* $e_1 \ldots e_n$, *est indépendant de la base choisie.*

1° En effet, on choisit une base orthogonale $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de M sur A et soit $\{f_1, \ldots, f_m\}$ un système orthogonal d'éléments de M. On peut écrire

$$f_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

avec les $a_{ij} \in A$ et considérons la matrice $(a_{ij})_{1 \leqq i \leqq m,\, 1 \leqq j \leqq n}$. On va désigner par $\Delta^{1,\ldots,r}_{i_1,\ldots,i_r}$ le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} a_{1,i_1} & \ldots & a_{1,i_r} \\ a_{r,i_1} & \ldots & a_{r,i_r} \end{pmatrix},$$

avec $i_1 < \ldots < i_r$ et $1 \leqq r \leqq m$. Montrons que

$$(\star) \qquad f_1 \ldots f_m = \sum_{i_1 < \ldots < i_m} \Delta^{1,\ldots,m}_{i_1,\ldots,i_m} e_{i_1} \ldots e_{i_m}.$$

C'est évident, pour $n = 1$, que $f_1 = \sum_{i=1}^{n} \Delta^1_i e_i$ car, pour tout i, $\Delta^1_i = a_{1,i}$ et supposons la formule vraie pour r. Démontrons-la pour $r + 1$.

On a

$$f_1 \ldots f_r f_{r+1} = \sum_{i_1 < \ldots < i_r} \sum_{j=1}^{n} a_{r+1,j} \Delta^{1,\ldots,r}_{i_1,\ldots,i_r} e_{i_1} \ldots e_{i_r} e_j.$$

Si $j \in \{i_1, \ldots, i_r\}$, on a

$$\begin{aligned} &\sum_{i_1 < \ldots < i_r} \sum_{j=i_1}^{i_r} a_{r+1,j} \Delta^{1,\ldots,r}_{i_1,\ldots,i_r} e_{i_1} \ldots e_{i_r} e_j \\ &= \sum_{i_1 < \ldots < i_r} \sum_{j=i_1}^{i_r} a_{r+1,j} \Delta^{1,\ldots,r}_{i_1,\ldots,i_r} Q(e_j) e_{i_1} \ldots \hat{e}_j \ldots e_{i_r} \\ &= \sum_{i_1 < \ldots < i_r} \sum_{j=i_1}^{i_r} \sum_{l=1}^{r} a_{r+1,j} a_{l,j} \Delta^{1,\ldots,\hat{l},\ldots,r}_{i_1,\ldots,\hat{i_l},\ldots,i_r} Q(e_j) e_{i_1} \ldots \hat{e}_j \ldots e_{i_r} \end{aligned}$$

En effectuant les calculs, on montre que cette somme est égale à :

$$\sum_{l=1}^{r}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{r+1,j}\, a_{l,j}\, Q(e_j)\right)\Delta^{1,\ldots,\hat{l},\ldots,r}_{i_1,\ldots,\hat{i}_l,\ldots,i_r}\, e_{i_1}\ldots\hat{e}_j\ldots e_{i_r}=0,$$

car

$$\Delta^{1,\ldots,r}_{i_1,\ldots,i_r}=\sum_{l=1}^{r} a_{l,j}\,\Delta^{1,\ldots,\hat{l},\ldots,r}_{i_1,\ldots,\hat{i}_l,\ldots,i_r} \qquad \text{et} \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{r+1,j}\, a_{l,j}\, Q(e_j)=0.$$

Par contre, si $j\in\{1, \ldots, n\}-\{i_1, \ldots, i_r\}$,

$$\sum_{i_1<\ldots<i_r}\ \sum_{j} a_{r+1,j}\,\Delta^{1,\ldots,r}_{i_1,\ldots,i_r}\, e_{i_1}\ldots e_{i_r}\, e_j=\sum_{i_1<\ldots<i_{r+1}}\Delta^{1,\ldots,r+1}_{i_1,\ldots,i_{r+1}}\, e_{i_1}\ldots e_{i_{r+1}}.$$

On a donc établi, pour tout r, $1\leq r\leq m$, la formule (★).

On remarque finalement que l'orthogonalité de $\{f_1, \ldots, f_m\}$ et de $\{e_1, \ldots, e_n\}$ nous donne

$$0=\Phi(f_i, f_j)=\sum_{p=1}^{n}\ \sum_{q=1}^{n} a_{ip}\, a_{jq}\,\Phi(e_p, e_q)=2\sum_{p=1}^{n} a_{ip}\, a_{jp}\, Q(e_p)$$

et puisque $2\notin \underline{m}$, il s'ensuit que

$$\sum_{p=1}^{n} a_{ip}\, a_{jp}\, Q(e_p)=0 \qquad \text{pour} \quad i\neq j;$$

on peut se limiter à $i<j$.

2° Supposons maintenant que $m=n$ et que $\{f_1, \ldots, f_n\}$ soit une autre base orthogonale de M sur A. La matrice carrée (a_{ij}) est alors inversible et $f_1\ldots f_n=\text{dét}(a_{ij})\, e_1\ldots e_n$, ce qui montre l'assertion du lemme.

Théorème 1. — *Soient* A *un anneau local,* M *un* A-*module libre de rang fini et supposons que* $2\notin\underline{m}$. *Alors :* (1) *si le rang de* M *est pair, égal à* n, *on a*

$$Z(C(M, Q))=A \qquad \textit{et} \qquad Z(C_0)=A\oplus\Gamma_n(M);$$

(2) *si le rang de* M *est impair, égal à* n, *on a*

$$Z(C(M, Q))=A\oplus\Gamma_n(M) \qquad \textit{et} \qquad Z(C_0)=A.$$

En effet, c'est évident que $A\subset Z(C(M, Q))$ et $A\subset Z(C_0)$. Soit $\{e_1, \ldots, e_n\}$ une base orthogonale de M sur A. Puisque

$$e_i(e_1\ldots e_n)=(-1)^{i-1}\, Q(e_i)\,(e_1\ldots\hat{e}_i\ldots e_n)$$

et

$$(e_1\ldots e_n)\, e_i=(-1)^{n-i}\, Q(e_i)\,(e_1\ldots\hat{e}_i\ldots e_n),$$

alors $e_i(e_1 \dots e_n) = (e_1 \dots e_n)e_i$ pour tout i si et seulement si $n - i = i - 1$, c'est-à-dire, $n = 2i - 1$, ce qui veut dire que n est impair. Ceci nous montre que $\Gamma_n(M) \subset Z(C(M, Q))$, si et seulement si n est impair. On a donc montré que si n est impair, $A \oplus \Gamma_n(M) \subset Z(M, Q)$ et que si n est pair on a seulement $A \subset Z(C(M, Q))$, car ici $\Gamma_n(M) \not\subset Z(C(M, Q))$. Pour C_0, si n est pair, $\Gamma_n(M) \subset Z(C_0)$ et si n est impair, $\Gamma_n(M) \not\subset Z(C_0)$ car $\Gamma_n(M)$ est homogène de degré 1. Ceci nous montre que, pour n pair, $A \oplus \Gamma_n(M) \subset Z(C_0)$ *et* pour n impair, on a seulement $A \subset Z(C_0)$.

Pour démontrer les inclusions opposées, on procède comme suit. On remarque que $u \in Z(C(M, Q))$ si et seulement si $ue_i = e_i u$ pour $i = 1, \dots, n$. D'autre part, si $e_{i_1} \dots e_{i_p}$ et $e_{j_1} \dots e_{j_q}$ sont deux produits distincts, alors, pour tout i, les produits par e_i sont aussi distincts. Étant donné que tout élément $u \in C(M, Q)$ s'écrit d'une seule façon sous la forme

$$u = \sum_{i_1, \dots, i_q} a_{i_1, \dots, i_q} e_{i_1} \dots e_{i_q}$$

avec les $a_{i_1, \dots, i_q}$ dans A, il suffira de démontrer la commutativité pour des produits de la forme $e_{i_1} \dots e_{i_q}$. Si q est impair, $q < n$ et si $j \notin \{i_1, \dots, i_q\}$, alors

$$e_j (e_{i_1} \dots e_{i_q}) = -(e_{i_1} \dots e_{i_q}) e_j$$

et si q est pair et $j \in \{i_1, \dots, i_q\}$, on a aussi

$$e_j (e_{i_1} \dots e_{i_q}) = -(e_{i_1} \dots e_{i_q}) e_j.$$

On voit ainsi que si $q < n$, il y a toujours des produits qui anticommutent. Pour $q = n$, le seul produit qui nous reste c'est $e_1 \dots e_n$. Si n est pair, $e_1 \dots e_n$ anticommute avec e_i pour tout i et si n est impair, $e_1 \dots e_n$ commute avec e_i pour tout i. Donc, si n est pair, $Z(C(M, Q)) \subset A$ et si n est impair, $Z(C(M, Q)) \subset A \oplus \Gamma_n(M)$. Pour ce qui est de C_0, il suffit de vérifier la commutativité des produits $e_{i_1} \dots e_{i_q}$, q pair, avec les produits $e_i e_j$. Il est clair que si $q < n$, $i \in \{i_1, \dots, i_q\}$ et $j \notin \{i_1, \dots, i_q\}$, on a

$$(e_{i_1} \dots e_{i_q}) e_i e_j = e_i e_j (e_{i_1} \dots e_{i_q}).$$

Donc, on ne peut avoir que $q = n$ et, dans ce cas,

$$(e_1 \dots e_n) e_i e_j = e_i e_j (e_1 \dots e_n)$$

pour tout i et tout j (ceci étant vrai pour n pair ou impair). Donc, si n est pair, $A \oplus \Gamma_n(M) \supset Z(C_0)$. Ceci achève la démonstration du théorème.

THÉORÈME 2. — *Soient* A *un anneau local d'idéal maximal* $\underline{m}$ *tel que* $2 \in \underline{m}$ *et* M *un* A-*module libre de rang pair. Alors* $Z(C(M, Q)) = A$.

(1) *Supposons d'abord que* M *soit de rang* 2. — Soit alors $\{e_1, e_2\}$ une base de M sur A. Une base de C(M, Q) sur A est formée par les vecteurs $\{1, e_1, e_2, e_1 e_2\}$, car

$$\Phi(e_1, e_2) = Q(e_1 + e_2) - Q(e_1) - Q(e_2) = (e_1 + e_2)^2 - e_1^2 - e_2^2 = e_1 e_2 + e_2 e_1,$$

donc

$$e_2 e_1 = \Phi(e_1, e_2) - e_1 e_2.$$

Si $u \in C(M, Q)$, on peut l'écrire et d'une façon unique sous la forme

$$u = a_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_1 e_2,$$

avec $a_i \in A$ ($i = 0, 1, 2, 3$). On a

$$0 = ue_1 - e_1 u = a_2 \Phi(e_1, e_2) + a_3 \Phi(e_1, e_2) e_1 - 2 a_3 Q(e_1) e_2 - 2 a_2 e_1 e_2,$$

d'où $a_2 = a_3 = 0$. D'autre part,

$$0 = ue_2 - e_2 u = - a_1 \Phi(e_1, e_2) + 2 a_1 e_1 e_2,$$

donc $a_1 = 0$. Ceci nous montre que $Z(C(M, Q)) \subset A$, c'est-à-dire $Z(C(M, Q)) = A$.

(2) *Si le rang de* M *est* $\neq 2$, d'après le paragraphe 3, M se décompose en une somme orthogonale de modules projectifs M_i de rang 2, $M = \bigoplus_i M_i$. Donc $C(M, Q) = \hat{\bigotimes_i} C(M_i, Q_i)$, Q_i étant la restriction de Q à M_i, pour tout i. D'après le paragraphe 5, C(M, Q) est un produit tensoriel ordinaire d'algèbres de Clifford de modules projectifs de rang 2. Comme ces algèbres sont centrales (i. e. leurs centres est l'anneau A), il en est de même de C(M, Q).

THÉORÈME 3. — *Soient* A *un anneau local d'idéal maximal* $\underline{m}$ *tel que* $2 \in \underline{m}$ *et* M *un* A-*module libre de rang pair. Alors* $Z(C_0(M, Q))$ *est un module libre de rang* 2.

On peut écrire $C(M, Q) = \hat{\bigotimes}_{i=1}^{n} C(M_i, Q_i)$ où chaque M_i est projectif de rang 2. Pour chaque i, soit $\{e_{i1}, e_{i2}\}$ une base de M_i sur A; on sait que $t_i = \Phi_i(e_{i1}, e_{i2})$ est inversible dans A et soit $z_i = \frac{1}{t_i} e_{i1} e_{i2}$.

Alors

$$z_i e_{ij} + e_{ij} z_i = e_{ij} \qquad \text{donc} \quad z_i (e_{i1} e_{i2}) = (e_{i1} e_{i2}) z_i,$$

c'est-à-dire $z_i \in Z(C_0(M_i, Q_i))$. Considérons la fonction

$$f_r = \sum_{l=1}^{r} (-1)^{l-1} s_l$$

où s_l est la fonction symétrique élémentaire de degré l en r lettres. On va montrer que $f_n(z_1, \ldots, z_n) \in Z(C_0(M, Q))$. Pour cela, on procède par récurrence sur n, le cas $n = 1$ étant évident, car $f_1(z_1) = z_1$. Soit

$$C(M', Q') = \hat{\bigotimes}_{i=1}^{n-1} C(M_i, Q_i)$$

et supposons que $h = f_{n-1}(z_1, \ldots, z_{n-1})$ vérifie $hv + vh = v$ pour tout $v \in \bigoplus_{i=1}^{n-1} M_i = M'$. On a

$$f_n(z_1, \ldots, z_n) = h + z_n - 2hz_n (= g)$$

et puisqu'on a une décomposition orthogonale et

$$h \in C_0(M', Q'), \qquad z_n \in C_0(M_n, Q_n),$$

alors h commute avec le vecteur de M_n et z_n avec ceux de M'. Donc, pour tout $v \in M'$,

$$gv + vg = hv + vh + 2z_n v - 2(hv + vh) z_n = v$$

et pour tout $v \in M_n$,

$$gv + vg = 2hv + z_n v + vz_n - 2h(vz_n + z_n v) = v.$$

Ceci nous montre que g commute avec les produits uv, u et v parcourant M, et $g \in C_0(M, Q))$ entraîne $g \in Z(C_0(M, Q))$. Donc, $A + Ag \subset Z(C_0(M, Q))$. Puisque $A \cap Ag = 0$, la somme $A + Ag$ est directe et $\{1, g\}$ définit un sous-A-module libre de $C_0(M, Q)$. Pour montrer que $Z(C_0(M, Q)) \subset A \oplus Ag$, on remarque que ceci est évidemment vrai si le rang de M est égal à 2, car dans ce cas, $A \oplus Ag = C_0(M, Q)$. Supposons que ceci soit vrai si le rang de M est $2(n-1)$. Donc, par l'hypothèse de récurrence,

$$Z(C_0(M', Q')) = A \oplus Ah.$$

Étant donné que

$$C_0(M, Q) = C_0(M', Q') \otimes C_0(M_n, Q_n) \oplus C_1(M', Q') \otimes C_1(M_n, Q_n),$$

alors

$$Z(C_0(M, Q)) \subset Z(C_0(M', Q') \otimes C_0(M_n, Q_n)) = Z(C_0(M', Q')) \otimes Z(C_0(M_n, Q_n)).$$

En effet, le centre $Z(C_0(M, Q))$ est gradué, c'est-à-dire tout élément de $Z(C_0(M, Q))$ s'écrit d'une seule manière sous la forme $x + y$ avec $x, y \in Z(C_0(M, Q))$. Démontrons que si

$$y \in (C_1(M', Q') \otimes C_1(M_n, Q_n)) \cap Z(C_0(M, Q)),$$

alors $y = 0$. En effet, on peut écrire $y = y_1 \otimes e_{n,1} + y_2 \otimes e_{n,2}$ avec $y_1, y_2 \in C_1(M', Q')$ et, puisque y commute avec $x \otimes e_{n,1}$ pour tout $x \in M_n$, alors

$$\begin{aligned} 0 &= (x \otimes e_{n,1}) y - y (x \otimes e_{n,1}) \\ &= -(e_{n,1}^2 (y_1 x - x y_1) + y_2 x t) \otimes 1 + (x y_2 + y_2 x) \otimes e_{n,1} e_{n,2}, \end{aligned}$$

où $t = \Phi_n(e_{n,1}, e_{n,2})$ entraîne

$$e_{n,1}^2(y_1x - xy_1) + y_2xt = 0,$$
$$xy_2 + y_2x = 0,$$

pour tout $x \in M_n$. De même, y commute avec $x \otimes e_{n,2}$, donc

$$e_{n,2}^2(y_2x - xy_2) + y_1xt = 0,$$
$$xy_1 + y_1x = 0$$

pour tout $x \in M_n$. Les conditions ci-dessus entraînent les suivantes :

$$2e_{n,1}^2y_1x + ty_2x = 0,$$
$$2e_{n,2}^2y_2x + ty_1x = 0.$$

Puisqu'il existe toujours un $x \in M_n$ inversible, il en résulte que

$$2e_{n,1}^2y_1 + ty_2 = 0,$$
$$ty_1 + 2e_{n,2}^2y_2 = 0$$

et ceci entraîne que $y_1 = y_2 = 0$.

Le produit $Z(C_0(M', Q')) \otimes Z(C_0(M_n, Q_n))$ est le sous-module de $C_0(M, Q)$ engendré par 1, h, z_n et hz_n. Si l'on écrit

$$x = a + bh + cz_n + dhz_n$$

avec $a, b, c, d \in A$, alors $x \in Z(C_0(M, Q))$ entraîne, pour tout $v \in M'$ et $w \in M_n$,

$$0 = xvw - vwx = (-b - c - d + (2b + d)h + (2c + d)z_n)vw$$

et, puisqu'il existe $v \in M'$ et $w \in M_n$ inversibles, ceci entraîne que

$$2b + d = 0,$$
$$2c + d = 0,$$
$$-b - c - d = 0,$$

donc, $d = -2b$ et $c = b$, c'est-à-dire

$$x = a + b(h + z_n - 2hz_n) = a + bg \in A \oplus Ag.$$

Remarque. — Le centre dans le cas global : Si A est un anneau quelconque (non nécessairement local) et si $C = C(M, Q)$ est l'algèbre de Clifford d'un module projectif M, de type fini, alors :

(i) si le rang de M est pair, $Z(C) = A$ et $Z(C_0)$ est un module projectif de rang 2;

(ii) si le rang de M est impair, $Z(C)$ est un module projectif de rang 2 et $Z(C_0) = A$.

En effet, pour tout idéal maximal $\underline{m}$ de A, on a $Z(C)_{\underline{m}} = Z(C_{\underline{m}})$.

5. Le théorème $\otimes = \hat{\otimes}$. — Soient A un anneau local, P_1 un A-module projectif de rang 2, $\{u_1, u_2\}$ une base de P_1 sur A, Q_1 une forme quadratique sur P_1 et Φ_1 la forme bilinéaire associée. Posons

$$\theta = -\Phi_1(u_1, u_2) + 2u_1 u_2.$$

Si $\{u'_1, u'_2\}$ est une autre base de P_1 sur A, alors $\theta' = \Delta\theta$, où Δ est le déterminant de changement de base. Ainsi θ est déterminé à moins d'un élément inversible. De plus, θ est inversible, car $\theta^2 = -\operatorname{dét}(\Phi)$.

Soient maintenant P_2 un A-module projectif de type fini, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ une base de P_2 sur A, Q_2 une forme quadratique sur P_2 et Φ_2 la forme bilinéaire associée. On considère maintenant un A-module projectif $\overline{P}_2$ ayant une base $\{\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_n\}$ à n éléments et l'on définit sur $\overline{P}_2$ une forme quadratique $\overline{Q}_2$ en posant

$$\overline{Q}_2(\overline{v}_i) = \frac{1}{\theta^2} Q_2(v_i) \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

L'application A-linéaire $P_2 \to C(P_1 \oplus \overline{P}_2, Q_1 \oplus \overline{Q}_2)$ définie par $v_i \mapsto \theta(0, \overline{v}_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ induit un homomorphisme de A-algèbres de Clifford

$$C(P_2, Q_2) \to C(P_1 \oplus \overline{P}_2, Q_1 \oplus \overline{Q}_2).$$

Puisque $u_j(\theta\overline{v}_i) = (\theta\overline{v}_i)u_j$ $(i = 1, \ldots, n;\ j = 1, 2)$, ceci induit un homomorphisme de A-algèbres

$$C(P_1, Q_1) \otimes C(P_2, Q_2) \to C(P_1 \oplus \overline{P}_2, Q_1 \oplus \overline{Q}_2) = C(P_1, Q_1) \hat{\otimes} C(\overline{P}_2, \overline{Q}_2).$$

Il est facile de vérifier maintenant qu'il s'agit d'un isomorphisme de A-algèbres, c'est-à-dire

$$C(P_1, Q_1) \otimes C(P_2, Q_2) \xrightarrow{\sim} C(P_1, Q_1) \hat{\otimes} C(\overline{P}_2, \overline{Q}_2).$$

On a ainsi démontré le théorème suivant :

Théorème 4. — *Si* A *est un anneau local,* (P_1, Q_1) *et* (P_2, Q_2) *deux* A-*modules quadratiques, où* P_1 *est projectif de rang* 2 *et* P_2 *projectif de rang n, il existe un* A-*module quadratique* $(\overline{P}_2, \overline{Q}_2)$, *où* $\overline{P}_2$ *est projectif de rang n et un homomorphisme*

$$C(P_1, Q_1) \otimes C(P_2, Q_2) \to C(P_1, Q_1) \hat{\otimes} C(\overline{P}_2, \overline{Q}_2)$$

qui est un isomorphisme de A-*algèbres.*

Théorème 4' (Cas global). — *Soient* A *un anneau,* (P_1, Q_1) *et* (P_2, Q_2) *deux modules quadratiques où* P_1 *et* P_2 *sont projectifs de type fini et* P_1 *est de rang pair. Il existe alors un module quadratique* (P'_2, Q'_2), *où* P'_2 *est projectif de type fini, tel que*

$$C(P_1, Q_1) \hat{\otimes} C(P_2, Q_2) \simeq C(P_1, Q_1) \otimes C(P'_2, Q'_2).$$

En effet, on sait (*cf.* § 9, nº 1) que si P_1 est de rang pair, l'ensemble $X(C(P_1, Q_1))$ est un module projectif de rang 1 contenu dans $C_0(P_1, Q_1)$, car localement, $X(C(P_1, Q_1))$ est libre de rang 1.

Dans $C(P_1, Q_1)\hat{\otimes} C(P_2, Q_2)$, $X(C(P_1, Q_1))$ commute avec P_2, car $X(C(P_1, Q_1))\subset C_0(P_1, Q_1)$. Étant donné que P_2 est projectif, donc plat, la suite exacte $0\to X(C(P_1, Q_1))\to C(P_1, Q_1)$ nous donne la suite exacte

$$0\to X(C(P_1, Q_1))\otimes_A P_2\to C(P_1, Q_1)\otimes_A P_2.$$

D'autre part, $C(P_1, Q_1)$ projectif et la suite exacte $0\to P_2\to C(P_2, Q_2)$ entraînent que la suite

$$0\to C(P_1, Q_1)\otimes_A P_2\to C(P_1, Q_1)\otimes C(P_2, Q_2)$$

est aussi exacte. Étant donné que, comme modules, $\otimes = \hat{\otimes}$, on a

$$X(C(P_1, Q_1))\otimes_A P_2\subset C(P_1, Q_1)\hat{\otimes} C(P_2, Q_2).$$

Soit $P'_2 = X(C(P_1, Q_1))\otimes_A P_2$. Si $z\in P'_2$, on va montrer que $z^2\in A$. Localement, on peut écrire $z = x\otimes y$, avec $x\in X(C(P_1, Q_1))$ et $y\in P_2$. On a $z^2 = x^2y^2$ une fois que $X(C(P_1, Q_1))$ commute avec P_2 et $x^2\in A$, $y^2 = Q_2(y)$. Alors $z\in P'_2\mapsto z^2\in A$ définit une forme quadratique Q'_2 sur P'_2 et l'injection de P'_2 dans $C(P_1, Q_1)\hat{\otimes} C(P_2, Q_2)$ définit un homomorphisme

$$C(P'_2, Q'_2)\to C(P_1, Q_1)\hat{\otimes} C(P_2, Q_2).$$

Si $x\in P_1$, $y\in P'_2$,

$$y = \sum_i x_i\otimes y_i\left(=\sum_i x_i y_i\right) \quad\text{et}\quad \sum_i x_i y_i x = -\sum_i x_i x y_i = \sum_i x x_i y_i,$$

c'est-à-dire, P_1 commute avec P'_2. Donc, $C(P_1, Q_1)$ commute avec $C(P'_2, Q'_2)$ et ceci induit un homomorphisme

$$C(P_1, Q_1)\otimes C(P'_2, Q'_2)\to C(P_1, Q_1)\hat{\otimes} C(P_2, Q_2).$$

Pour voir qu'il s'agit d'un isomorphisme, il suffit de le vérifier localement.

6. Algèbres de Clifford séparables. — Soient A un anneau commutatif à élément unité, B une A-algèbre et B^0 la A-algèbre opposée. Si $B^e = B\otimes_A B^0$ désigne l'algèbre enveloppante de B, on peut établir sur B une structure de B^e-module d'une façon naturelle en posant $(x\otimes y)b = xby$, quels que soient $x\in B$, $y\in B^0$ et $b\in B$. On dira que B est une A-*algèbre séparable* si B est un B^e-module projectif. Si $\mu : B^e\to B$ désigne la multiplication dans B, ceci équivaut encore à dire que $\mathrm{Ker}(\mu)$ est un facteur direct de la A-algèbre B^e. De plus, B séparable équivaut à dire qu'il existe un idempotent $e\in B^e$ tel que $\mu(e) = 1$ et $\mathrm{Ker}(\mu)e = 0$.

Théorème 5. — *Toute algèbre de Clifford d'un* A-*module projectif de type fini* P *est séparable.*

En effet, soient Q la forme quadratique sur P et Φ la forme bilinéaire associée à Q. De plus, désignons par $\mu : C(P, Q)^e \to C(P, Q)$ la multiplication dans $C(P, Q)$.

Cas local. — Supposons que A soit local d'idéal maximal $\underline{m}$, donc P est libre et soit $\{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de P sur A.

(1) Si le rang de P est égal à 1, $C(P, Q)$ est une A-algèbre commutative et $e_1^2 = Q(e_1)$ est inversible dans A. D'autre part, d'après le lemme 3, $2 \notin \underline{m}$. En prenant

$$e = \frac{1}{2}\left(1 \otimes 1 + \frac{1}{Q(e_1)} e_1 \otimes e_1\right) \in C(P, Q) \otimes C(P, Q),$$

on voit que $e^2 = e$ et $\mu(e) = 1$.

(2) Supposons que le rang de P soit égal à 2. Le déterminant de Φ, $\det(\Phi) = 4\,Q(e_1)\,Q(e_2) - \Phi(e_1, e_2)^2$ est inversible dans A et en prenant

$$\begin{aligned} e = -\frac{1}{\det(\Phi)} (e_1 e_2 \otimes e_1 e_2 &+ \Phi(e_1, e_2)\, e_2 \otimes e_1 \\ &- Q(e_1)\, e_2 \otimes e_2 - Q(e_2)\, e_1 \otimes e_1 - Q(e_1)\, Q(e_2)\, 1 \otimes 1) \in C(P, Q)^e, \end{aligned}$$

on vérifie que $e^2 = e$ et $\mu(e) = 1$.

(3) Si le rang de P est n, on procède par récurrence sur n. On sait (*cf.* § 3) que P admet une décomposition orthogonale $P = P_1 \oplus P_2$ tel que P_1 soit de rang 2 et P_2 de rang $n - 2$. Donc,

$$C(P, Q) = C(P_1, Q_1) \mathbin{\hat{\otimes}} C(P_2, Q_2),$$

où $Q_i = Q|_{P_i}$ $(i = 1, 2)$. Le théorème $\otimes = \hat{\otimes}$ nous montre qu'il existe une forme quadratique Q'_2 sur P_2 telle que $C(P, Q) = C(P_1, Q_1) \otimes C(P_2, Q'_2)$ et, puisque $C(P_1, Q_1)$ est séparable, d'après le cas (2), alors $C(P, Q)$ est aussi séparable, car $C(P_2, Q'_2)$ est séparable par l'hypothèse de récurrence.

Le cas global. — Nous allons supposer maintenant que A soit un anneau non nécessairement local. Le passage du local au global résulte des deux lemmes suivants :

LEMME 5. — *Soient* B *un anneau,* A *un sous-anneau de* $B (A \subset B)$ *ayant la même unité que* B *et contenu dans le centre de* $B (A \subset Z(B))$ *et* M *un* B-*module de présentation finie. Alors,* M *est* B-*projectif si et seulement si* $M_{\underline{m}}$ *est* $B_{\underline{m}}$-*projectif pour tout idéal maximal* $\underline{m}$ *de* A.

En effet, on remarque tout d'abord que, puisque M est de présentation finie, projectif équivaut à plat.

Supposons que $M_{\underline{m}}$ soit $B_{\underline{m}}$-projectif pour tout idéal maximal $\underline{m}$ de A. Pour tout B-module N de présentation finie, on a

$$(\mathrm{Tor}_1^B(M, N)) \otimes_A A_{\underline{m}} = \mathrm{Tor}_1^{B_{\underline{m}}}(M_{\underline{m}}, N_{\underline{m}}) = 0,$$

où

$$B_{\underline{m}} = B \otimes_A A_{\underline{m}} \quad \text{et} \quad M_{\underline{m}} = M \otimes_A A_{\underline{m}}.$$

Ceci étant vrai pour tout idéal maximal $\underline{m}$ de A, le lemme de globalisation nous dit que $\mathrm{Tor}_1^B(M, N) = 0$ et ceci encore étant vrai pour tout B-module de présentation finie N, on en conclut que M est plat.

Dans l'autre sens, le lemme est trivial.

Lemme 6. — *Soient* A *un anneau commutatif à élément unité et* C *une* A-*algèbre de type fini. Si, pour tout idéal maximal* $\underline{m}$ *de* A, $C_{\underline{m}}$ *est une* $A_{\underline{m}}$-*algèbre séparable, alors* C *est une* A-*algèbre séparable.*

En effet, désignons par C^0 la A-algèbre opposée de C et par $C^e = C \otimes_A C^0$ la A-algèbre enveloppante de C. Or, C est séparable si et seulement si C est un C^e-module projectif. D'autre part, $A \subset Z(C^e)$ et C est un C^e-module de présentation finie. Le lemme 5 nous dit alors que C est une A-algèbre séparable.

Ceci achève la démonstration du théorème 5.

7. Le groupe G(A). — Soient A un anneau, U(A) le groupe multiplicatif des éléments inversibles de A et posons

$$A^0 = \{ x \mid x \in A,\ 1 - 4x \in U(A) \}.$$

Si $a, b \in A^0$, on pose $a \circ b = a + b - 4ab$ et, puisque

$$1 - 4(a \circ b) = (1 - 4a)(1 - 4b) \in U(A),$$

l'application

$$\begin{gathered} A^0 \times A^0 \to A^0, \\ (a, b) \mapsto a \circ b \end{gathered}$$

définit sur A^0 une structure de groupe abélien.

On va définir sur A^0 une relation d'équivalence en posant $a \sim b$, pour $a, b \in A^0$, si et seulement si, il existe un élément $x \in A$ tel que $b = a - (x^2 - x)(1 - 4a)$. Il s'agit bien d'une relation d'équivalence sur A^0 et désignons par G(A) le quotient de A^0 par cette relation d'équivalence. Par passage au quotient, on définit sur G(A) une structure de groupe abélien.

Considérons maintenant l'application composée

$$\alpha : \quad A^0 \to U(A) \to U(A)/U^2(A)$$

définie par $x \mapsto 1 - 4x \mapsto \overline{1 - 4x}$, où $\overline{1 - 4x}$ désigne la classe de $1 - 4x$ modulo $U^2(A)$. Si $x \sim y$, il existe un élément $c \in A$ tel que $1 - 2c \in U(A)$ et $y = a - (c^2 - c)(1 - 4a)$. Donc,

$$1 - 4y = (1 - 2c)^2 (1 - 4x)$$

et ceci nous montre que $\alpha(x) = \alpha(y)$, c'est-à-dire que α est constante sur chaque classe d'équivalence. Par passage au quotient, on définit un homomorphisme de groupes abéliens, noté encore α,

$$\alpha : \quad G(A) \to U(A)/U^2(A)$$

tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} A^0 \arrow[r] \arrow[d] & U(A) \arrow[d] \\ G(A) \arrow[r, "\alpha"] & U(A)/U^2(A) \end{tikzcd}$$

soit commutatif. La relation $1 - 4(a \circ b) = (1 - 4a)(1 - 4b)$ nous montre, évidemment, que α est un homomorphisme de groupes.

Lemme 7. — *Si* 2 *est inversible dans l'anneau* A, *l'homomorphisme* $\alpha : G(A) \to U(A)/U^2(A)$ *est un isomorphisme de groupes abéliens.*

En effet, si $\alpha(\overline{x}) = \alpha(\overline{y})$, avec $\overline{x}, \overline{y} \in G(A)$, ceci équivaut à l'existence d'un élément $c \in U(A)$ tel que $1 - 4x = c^2(1 - 4y)$. Si l'on prend $z = \frac{1}{2}(1 - c)$, on a

$$x = y - (z^2 - z)(1 - 4y),$$

c'est-à-dire, $x \sim y$, ou encore $\overline{x} = \overline{y}$. Ceci nous montre que α est injectif. Prenons maintenant $\overline{x} \in U(A)/U^2(A)$ et soit $y = \frac{1}{4}(1 - x)$. Il s'ensuit immédiatement que $y \in A^0$ et que $\alpha(\overline{y}) = \overline{x}$. Donc α est surjectif.

Lemme 8. — *Si* $2 = 0$, $A^0 = A^+$ *et* $G(A) = A^+/\{x^2 - x\}$, *où* $\{x^2 - x\}$ *désigne le sous-groupe de* A^+ *engendré par le* $x^2 - x$, x *parcourant* A^+, *et où* A^+ *est le groupe additif de* A.

En effet, pour tout $a \in A$, $1 - 4a = 1 \in U(A)$, donc $A^0 = A^+$. De plus, $a \circ b = a + b$, a et b parcourant A. Donc, $G(A) = A^+/\{x^2 - x\}$.

Remarque. — Les lemmes 7 et 8 sont étudiés par Wall (*cf.* [6]) et correspondent respectivement aux cas où A est un corps de caractéristique $\neq 2$ et $= 2$, respectivement.

Lemme 9. — G *est un foncteur covariant défini dans la catégorie des anneaux commutatifs à élément unité à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens.*

Trivial.

On remarque finalement que, dans le groupe G(A), tout élément est d'ordre 2. En effet, $a \circ a = 2a - (2a)^2$, donc $a \circ a \sim 0$.

8. Le groupe des classes d'algèbres de Clifford. — Soient A un anneau local, (P, Q) un module quadratique où P est un A-module projectif

et supposons qu'il existe deux modules projectifs P_1 et P_2 tels que $C(P, Q) \underset{\gamma}{\approx} \mathrm{End}_A(P_1 \oplus P_2)$ soit un isomorphisme de A-algèbres graduées, la graduation sur $\mathrm{End}_A(P_1 \oplus P_2)$ étant donnée par $\gamma(C_0)(P_i) = P_i$ $(i = 1, 2)$ et $\gamma(C_1)(P_i) = P_j$ $(i \neq j,\ i, j = 1, 2)$. Il en résulte que P_1 et P_2 sont isomorphes.

En effet, il existe un $\alpha \in P$ tel que $\alpha^2 \in A$ soit inversible dans A. Les applications linéaires $\alpha : P_1 \to P_2$ et $\frac{1}{\alpha^2}\alpha : P_2 \to P_1$ sont des isomorphismes réciproques.

De plus, on voit que $C(P, Q)$ est nécessairement de rang pair. *On va désigner par $\mathcal{S}$ l'ensemble de telles algèbres de Clifford.*

Lemme 10. — *Si* $C(P, Q) \in \mathcal{S}$, *alors* $C(P, Q)$ *admet une décomposition* $C(P, Q) = \hat{\bigotimes}_i C(P_i, Q_i)$, *où chaque* P_i *est projectif de rang* 2 *et* $C(P_i, Q_i) \in \mathcal{S}$ *pour tout* i.

En effet, il existe deux modules projectifs isomorphes $V_1 \simeq V_2$ tels que $C(P, Q) \approx \mathrm{End}_A(V_1 \oplus V_2)$ (isomorphisme de A-algèbres graduées). Soient $\{u_1, \ldots, u_n\}$ une base de V_1 sur A et $\{v_1, \ldots, v_n\}$ une base de V_2 sur A. Si l'on pose

$$P_i = \{\alpha \mid \alpha \in P,\ \alpha(u_i) = \lambda v_i,\ \alpha(v_i) = \mu u_i,$$
$$\alpha(u_j) = \alpha(v_j) = 0 \text{ si } j \neq i\ (i, j = 1, \ldots, n),\ \lambda, \mu \in A\},$$

alors P_i est projectif de rang 2 engendré par α_0 $(\lambda = 1, \mu = 0)$ et α_1 $(\lambda = 0, \mu = 1)$. De plus, $\alpha_0^2 = \alpha_1^2 = 0$ et $\alpha_0\alpha_1 + \alpha_1\alpha_0 = 1$.

Soient $Q_i = Q|_{P_i}$ et Φ_i la forme bilinéaire associée à Q_i. La matrice de Φ_i dans la base $\{\alpha_0, \alpha_1\}$ est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. D'autre part, P admet une décomposition orthogonale $P = \bigoplus_i P_i$. Donc,

$$C(P, Q) = \hat{\bigotimes}_i C(P_i, Q_i).$$

Lemme 11. — *Soient* (P, Q) *un module quadratique, où* P *est projectif et* $C(P', Q') \in \mathcal{S}$. *Alors*

$$C(P, Q) \hat{\otimes} C(P', Q') = C(P, Q) \otimes C(P', Q').$$

En effet, d'après le lemme 10, il suffit de faire la démonstration dans le cas où le rang de P' est égal à 2. Si Φ' est la forme bilinéaire associée à la forme quadratique sur P', on sait que la matrice de Φ' est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, donc $\det(\Phi') = -1$. D'après le théorème $\otimes = \hat{\otimes}$, on a

$$C(P, Q) \hat{\otimes} C(P', Q') = C(P, -\det(\Phi')Q) \otimes C(P', Q') = C(P, Q) \otimes C(P', Q').$$

Lemme 12. — *L'ensemble $\mathcal{S}$ est fermé par l'opération de produit tensoriel gradué.*

Démontrons que si $C, C' \in \mathfrak{S}$, alors $C \hat{\otimes} C' \in \mathfrak{S}$. On peut écrire

$$C = \mathrm{End}_A(V_1 \oplus V_2) \qquad \text{et} \qquad C' = \mathrm{End}_A(V'_1 \oplus V'_2)$$

et, d'après le lemme 10, on peut supposer que V_1 et V_2 soient de rang 1. Si l'on pose

$$P_1 = V_1 \otimes V'_1 \otimes V'_2 \qquad \text{et} \qquad P_2 = V_2 \otimes V'_2 \otimes V'_1,$$

on a $C \otimes C' = \mathrm{End}_A(P_1 \oplus P_2)$. Soient, d'autre part, $C = C(P, Q)$ et $C' = C(P', Q')$, où P est projectif de rang 2. Si l'on désigne par Φ la forme bilinéaire associée à la forme quadratique Q, on a

$$C \otimes C' \cong C(P \oplus P', Q \oplus Q') = C(P, Q) \otimes C(P', -\mathrm{dét}(\Phi) Q') = C(P, Q) \otimes C(P', Q'),$$

car $\mathrm{dét}(\Phi) = -1$. L'application $P \oplus P' \to C(P, Q) \otimes C(P', -\mathrm{dét}(\Phi) Q')$ définie par $(x, 0) \mapsto x \otimes 1$ échange V_1 et V_2 et conserve les V'_i $(i = 1, 2)$. Donc, elle échange P_1 et P_2. Donc, si C_0 (resp. C_1) désigne le module des éléments homogènes de degré 0 (resp. 1) de C, $C_0 \hat{\otimes} 1$ conserve P_1 et P_2 et $C_1 \hat{\otimes} 1$ échange P_1 et P_2. Puisque $\theta \in C_0 \hat{\otimes} 1$ $[\theta^2 = -\mathrm{dét}(\Phi)$; *cf.* théor. $\otimes = \hat{\otimes}]$, θ conserve P_1 et P_2. D'autre part, considérons l'application $P \oplus P' \to C(P, Q) \otimes C(P', -\mathrm{dét}(\Phi) Q')$ définie par $(0, y) \mapsto \theta(1 \otimes y)$. Cette application conserve les V_i $(i = 1, 2)$ et échange V'_1 et V'_2. Donc, $1 \hat{\otimes} C'_0$ échange P_1 et P_2 et $1 \hat{\otimes} C'_1$ conserve P_1 et P_2. Conclusion,

$$(C \hat{\otimes} C')_0 = C_0 \otimes C'_0 \oplus C_1 \otimes C'_1$$

conserve P_1 et P_2 et

$$(C \hat{\otimes} C')_1 = C_0 \otimes C'_1 \oplus C_1 \otimes C'_0$$

échange P_1 et P_2. Le lemme est démontré.

On définit maintenant sur l'ensemble $\mathcal{C}$ des classes d'isomorphismes (gradués) d'algèbres de Clifford une relation d'équivalence, à savoir : si C_1 et C_2 sont deux algèbres de Clifford, on dira que C_1 est *équivalente* à $C_2 (C_1 \sim C_2)$, s'il existe des éléments $C'_1, C'_2 \in \mathfrak{S}$ tels que $C_1 \hat{\otimes} C'_1 \cong C_2 \hat{\otimes} C'_2$ (isomorphisme d'algèbres graduées). Il s'agit bien d'une relation d'équivalence sur $\mathcal{C}$ et soit $\mathcal{H}(A)$ l'ensemble des classes d'équivalence. On va montrer que $\mathcal{H}(A)$ est muni d'une structure naturelle de groupe abélien, l'opération de groupe étant induite par le produit tensoriel gradué.

Toutes les propriétés de groupes sont évidentes, sauf l'existence de l'inverse.

Cela résulte du lemme suivant :

Lemme 13. — *Pour tout module quadratique* (P, Q), *où* P *est un* A-*module projectif, il existe un module quadratique* (P', Q') *avec* P' *projectif tel que* $C(P, Q) \hat{\otimes} C(P', Q') \in \mathfrak{S}$.

Il suffit d'envisager les cas où le rang de P est égal à 1 si $\frac{1}{2}\in A$, et celui où il est égal à 2 si $\frac{1}{2}\notin A$.

(i) *Le rang de* P *est égal à* 1. En particulier, $\frac{1}{2}\in A$ et considérons l'algèbre de Clifford

$$C = C(P, Q)\mathbin{\hat{\otimes}} C(P, -Q) = C(P\oplus P, Q\oplus -Q).$$

On va montrer que $C\in\mathcal{S}$. Puisque $P\oplus P$ est libre de rang 2, désignons par $\{e_1, e_2\}$ une base de celui-ci sur A. On a

$$e_1^2 = a\in A,\qquad e_2^2 = -a\in A\qquad \text{et}\qquad e_1e_2+e_2e_1 = 0.$$

Donc, $(e_1e_2)^2 = a^2$. Considérons dans C les idempotents orthogonaux

$$e_{11} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{a}e_1e_2\right)\qquad \text{et}\qquad e_{22} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{a}e_1e_2\right),$$

avec $e_{11}+e_{22} = 1$. On voit que e_{11} est un élément homogène de degré 0 de C et que $V = Ce_{11}$ est un A-module projectif, donc libre. C'est un idéal homogène de C et, par suite, $V = V_0\oplus V_1$ avec $V_0 = V\cap C_0 = C_0e_{11}$ et $V_1 = V\cap C_1 = C_1e_{11}$. Montrons que $V_0 = Ae_{11}$. En effet, C_0 est engendré par 1 et e_1e_2 et $(e_1e_2)e_{11} = ae_{11}$. Donc, $V_0 = Ae_{11}$. Puisque C_1 est engendré par e_1 et e_2 et $e_1e_{11} = e_2e_{11}$, on a $V_1 = Ae_1e_{11}$. On définit maintenant une application $\gamma : C\to \mathrm{Hom}_A(V, V)$ en posant $\gamma(c)(x) = cx$, pour tout $(c, x)\in C\times V$ (on remarque que si $x\in V$, alors $x = xe_{11}$, donc $cx = cxe_{11}\in V$). Il est clair que γ est un A-homomorphisme, car $Z(C) = A$. Montrons que γ est un épimorphisme. Soit $\alpha : V\to V$ un endomorphisme de V et soient $\alpha(e_{11}) = \lambda e_{11}$ et $\alpha(e_1e_{11}) = \mu e_{11}$, avec $\lambda, \mu\in A$. On vérifie immédiatement que

$$\alpha = \gamma\left(\lambda e_{11}+\frac{1}{a}\mu e_1e_{22}\right).$$

Ceci nous montre que γ est un épimorphisme. Puisque C et $\mathrm{Hom}_A(V, V)$ sont des A-modules projectifs de rang 4, γ est un isomorphisme.

D'autre part, étant donné que $V = V_0\oplus V_1$, alors

$$\gamma(C_0)|_{V_0} : V_0\to V_0,\qquad \gamma(C_0)|_{V_1} : V_1\to V_1,$$
$$\gamma(C_1)|_{V_0} : V_0\to V_1\qquad \text{et}\qquad \gamma(C_1)|_{V_1} : V_1\to V_0.$$

Avant de passer au cas où $\frac{1}{2}\notin A$, on va démontrer le lemme suivant :

Lemme 14. — *Le produit tensoriel non gradué* $C(P, Q)\otimes C(P, Q)$, *où* P *est un* A-*module projectif de rang pair, est l'algèbre d'endomorphismes d'un module projectif, à savoir,* $C(P, Q)$ *lui-même.*

En effet, on sait que si B est une A-algèbre (A non nécessairement local) centrale et séparable et si B^0 est l'algèbre opposée de B, alors $B \otimes_A B^0 = \mathrm{Hom}_A(B, B)$. L'application $T(P) \to T(P)$, donnée par

$$x_1 \otimes \ldots \otimes x_n \mapsto x_n \otimes \ldots \otimes x_1,$$

définit un anti-automorphisme homogène de l'algèbre tensorielle T(P), lequel induit sur C(P, Q) un anti-automorphisme. Donc, un isomorphisme $C(P, Q) \rightleftarrows C(P, Q)^0$. On a ainsi

$$C(P, Q) \otimes C(P, Q) = C(P, Q) \otimes C(P, Q)^0 = \mathrm{Hom}_A(C(P, Q), C(P, Q)).$$

(ii) $\frac{1}{2} \notin A$, *donc le rang de* P *peut être supposé égal à* 2. Soit $\{e_1, e_2\}$ une base de P sur A, $e_1^2 = a$, $e_2^2 = b$, $\Phi(e_1, e_2) = t$ et $\Delta = \det(\Phi)$, donc t est inversible dans A. Soit

$$C(\overline{P}, \overline{Q}) = C(P, Q) \hat{\otimes} C(P, -\Delta Q) \hat{\otimes} C(P, -Q) \hat{\otimes} C(P, \Delta Q).$$

On a

$$\begin{aligned} C(\overline{P}, \overline{Q}) &= C(P, Q) \otimes \left(C(P, Q) \hat{\otimes} C\left(P, \frac{1}{\Delta} Q\right) \hat{\otimes} C(P, -Q)\right) \\ &= C(P, Q) \otimes C(P, Q) \otimes \left(C\left(P, -\frac{1}{\Delta^2} Q\right) \hat{\otimes} C\left(P, \frac{1}{\Delta} Q\right)\right) \\ &= C(P, Q) \otimes C(P, Q) \otimes (C(P, -Q) \hat{\otimes} C(P, \Delta Q)), \end{aligned}$$

car, pour tout $c \in A$ inversible, $C(P, Q) \rightleftarrows C(P, c^2 Q)$ par l'application $x \mapsto cx$, pour tout $x \in P$. Donc,

$$C(\overline{P}, \overline{Q}) = (C(P, Q) \otimes C(P, Q)) \otimes (C(P, -Q) \otimes C(P, -Q)).$$

Ceci nous montre que $C(\overline{P}, \overline{Q})$ est un produit tensoriel non gradué d'algèbres de matrices, donc une algèbre de matrices. On peut donc écrire

$$C(\overline{P}, \overline{Q}) = \mathrm{Hom}_A(V, V),$$

où V est projectif.

D'autre part, si l'on prend

$$u_1 \in C(P, Q) \hat{\otimes} C(P, -Q) \qquad \text{et} \qquad u_2 \in C(P, \Delta Q) \hat{\otimes} C(P, -\Delta Q)$$

vérifiant

$$\begin{aligned} &u_i(x \otimes 1) + (x \otimes 1) u_i = x \otimes 1, \\ &u_i(1 \otimes x) + (1 \otimes x) u_i = 1 \otimes x \qquad (i = 1, 2), \end{aligned}$$

pour tout $x \in P$, alors $e = u_1 + u_2 - 2u_1 u_2$ vérifie aussi $xe + ex = x$ pour tout $x \in \overline{P}$. De plus, $u_i^2 = u_i$ $(i = 1, 2)$ entraîne $e^2 = e$. si l'on choisit

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{2ab}{t^2} - \frac{\Delta}{t^3}\left(e_1 e_2 \otimes 1 - 1 \otimes e_1 e_2 + \frac{2}{t}\,(e_1 e_2 \otimes e_1 e_2)\right), \\ u_2 &= \frac{2ab}{t^2} - \frac{1}{t^3}\left(e_1 e_2 \otimes 1 - 1 \otimes e_1 e_2 + \frac{2}{\Delta t}\,(e_1 e_2 \otimes e_1 e_2)\right), \end{aligned}$$

les propriétés ci-dessus sont vérifiées.

Soient $V_1 = e(V)$ et $V_2 = (1-e)V$. Alors, pour tout $x \in \overline{P}$,

$$x(V_1) \subset V_2, \qquad x(V_2) \subset V_1,$$

donc

$$C_1(\overline{P}, \overline{Q}) : \quad V_i \to V_j \qquad (i \neq j;\ i, j = 1, 2)$$

et $C_0(\overline{P}, \overline{Q}) : V_i \to V_i$ $(i = 1, 2)$. Ceci nous montre que $C(\overline{P}, \overline{Q}) \in \mathfrak{S}$.

9. Classification des algèbres de Clifford de rang pair. — 1° *Cas local. Les ensembles* X *et* Y. — (i) *Les ensembles* X *et* Y. — Soient A un anneau local et P un A-module libre de rang fini et $C(P, Q)$ son algèbre de Clifford, où $Q : P \to A$ est une forme quadratique sur P.

Posons :

$$X(C(P, Q)) = \{x \mid y \in C(P, Q),\ xz + zx = 0,\ \forall z \in P\},$$
$$Y(C(P, Q)) = \{x \mid y \in C(P, Q),\ yz + zy = z,\ \forall z \in P\}.$$

Les résultats suivants sont triviaux :

(i) si $x \in X$, $x^2 \in A$;

(ii) si $y \in Y$, $y - y^2 \in A$;

(iii) si $y_1, y_2 \in Y$, $y_1 - y_2 \in X$;

(iv) si $y \in Y$, $2y - 1 \in X$;

(v) si $x, y \in X$, $xy \in A$;

(vi) si $x \in X$ et $x^2 \in U(A)$, alors x engendre X en tant que A-module.

En effet, si $x^2 \in U(A)$, il existe un élément $t \in A$ tel que $tx^2 = 1$. Donc, si $y \in X$, on a $y = tyx^2 = t(yx)x$ et comme $yx \in A$, alors $t(yx) \in A$.

(ii) *Les ensembles* X *et* Y *dans le cas de rang* 2. — Soit P un A-module libre de rang 2, $C_1 = P$, soient $\{e_1, e_2\}$ une base de P sur A et Φ la forme bilinéaire associée à Q. Si $y \in Y$, posons $y = y_0 + y_1$ avec $y_0 \in C_0$ et $y_1 \in C_1 (= P)$. Pour tout $z \in P$, on doit avoir

$$z = yz + zy = (y_0 z + z y_0) + (y_1 z + z y_1).$$

Donc

$$y_0 z + z y_0 = z \qquad \text{et} \qquad y_1 z + z y_1 = 0.$$

D'autre part, $\Phi(z, y_1) = y_1 z + z y_1 = 0$ pour tout $z \in P$ et comme Φ est non dégénérée, il s'ensuit que $y_1 = 0$. Ceci nous montre que $Y \subset C_0$; une base de C_0 sur A est formée par $\{1, e_1 e_2\}$. Donc, tout élément $y \in Y$ s'écrit sous la forme $y = a_0 + a_1 e_1 e_2$, avec $a_0, a_1 \in A$. On voit que

$$e_1 = ye_1 + e_1 y = (2a_0 + a_1 \Phi(e_1, e_2))\, e_1$$

et

$$e_2 = ye_2 + e_2 y = (2a_0 + a_1 \Phi(e_1, e_2))\, e_2.$$

Donc, dans l'un ou l'autre cas, on a

$$(\star) \qquad 2a_0 + a_1\Phi(e_1, e_2) = 1.$$

Réciproquement, cette condition entraîne, pour tout $y = a_0 + a_1 e_1 e_2$ avec $a_0, a_1 \in A$, que $y \in Y$.

La condition $(\star)$ est vérifiée dans les cas suivants :

(i) si $\frac{1}{2} \in A$, en prenant $a_0 = \frac{1}{2}(1 - a_1 \Phi(e_1, e_2))$;

(ii) si $\frac{1}{2} \notin A$, c'est-à-dire, si 2 est dans l'idéal maximal de A, alors $\Phi(e_1, e_2)$ doit être inversible. En effet, ceci est une condition nécessaire et suffisante pour que $\text{dét}(\Phi) = 4e_1^2 e_2^2 - \Phi(e_1, e_2)^2$ soit inversible. Dans ce cas, on prend alors

$$a_1 = \frac{1}{\Phi(e_1, e_2)}(1 - 2a_0).$$

On remarque encore qu'il existe un élément $y \in Y$, $y = a_0 + a_1 e_1 e_2$ avec a_1 inversible. Posons alors $x = 2y - 1\ (x \in X)$; on a ainsi

$$x^2 = 1 + 4(y^2 - y) = 1 + 4(a_0^2 - a_0 - a_1^2 e_1^2 e_2^2),$$

une fois que $(\star)$ est vérifiée. Si l'on désigne par $\text{dét}(\Phi) = 4e_1^2 e_2^2 - \Phi(e_1, e_2)^2$ le déterminant de Φ, d'après $(\star)$ on a encore

$$x^2 = -a_1^2 \,\text{dét}(\Phi).$$

Étant donné qu'on a pris a_1 inversible dans A, x^2 est aussi inversible et $x = 2y - 1$ est donc un générateur de X; X est ainsi un A-module libre.

(iii) *Les ensembles* X *et* Y *dans le cas de rang* > 2. — Soit maintenant P un A-module libre de rang pair égal à $2n$, $n \geq 1$. Il existe alors une décomposition orthogonale $P = \bigoplus_{i=1}^{n} P_i$ où chaque P_i est projectif de rang 2. Il s'ensuit que $C(P, Q) = \bigotimes_i C(P_i, Q_i)$. Montrons qu'il existe toujours un élément $y \in Y$ tel que $(2y - 1)^2$ soit inversible, donc que $2y - 1$ engendre X comme A-module. Pour cela, on procède par récurrence sur n et il suffira donc de supposer $n = 2$. Soient alors $y_i \in C(P_i, Q_i)\ (i = 1, 2)$ tels que $y_i z + z y_i = z$ pour tout $z \in P_i\ (i = 1, 2)$. Si l'on prend

$$y = y_1 \otimes 1 + 1 \otimes y_2 - 2y_1 \otimes y_2,$$

il s'ensuit que

$$y(z \otimes 1) + (z \otimes 1)y = z \otimes 1, \quad \forall z \in P_1,$$
$$y(1 \otimes t) + (1 \otimes t)y = 1 \otimes t, \quad \forall t \in P_2.$$

Ceci nous montre ainsi que $y \in Y$. D'autre part, étant donné que

$$1 - 2y = (1 - 2y_1) \otimes (1 - 2y_2),$$

il en résulte que

$$(1 - 2y)^2 = (1 - 2y_1)^2 (1 - 2y_2)^2$$

est inversible. On remarque que y_1 (resp. y_2) est de degré 0 dans $C(P_1, Q_1)$ [resp. $C(P_2, Q_2)$].

(iv) *L'homomorphisme* $\Theta : \mathcal{H}_0(A) \to G(A)$. — Puisque $\mathcal{S}$ ne contient que des algèbres de Clifford de modules projectifs de rang pair, les classes d'équivalence de $\mathcal{H}(A)$ peuvent être classifiées par le rang modulo 2 autrement dit, il existe un homomorphisme de groupes $\mathcal{H}(A) \to \mathbf{Z}/(2)$. L'ensemble $\mathcal{H}_0(A)$ des classes de rang pair est ainsi un sous-groupe de $\mathcal{H}(A)$; $\mathcal{H}_0(A)$ est le noyau de $\mathcal{H}(A) \to \mathbf{Z}/(2)$.

Soient $C = C(P, Q)$ une algèbre de Clifford de rang pair et $u \in Y$ tel que $(1 - 2u)^2$ soit inversible. Posons $z = u - u^2$. On sait déjà que $z \in A$ et, puisque $1 - 4z = (1 - 2u)^2 \in U(A)$, alors $z \in A^0$. Désignons alors par $\Theta_0(C)$ la classe de z dans $G(A)$. Montrons que l'élément $\Theta_0(C)$ est bien défini. En effet, si $v \in Y$ est tel que $(1 - 2v)^2$ soit inversible, il existe un élément $c \in A$ tel que $v - u = c(1 - 2u)$, car $1 - 2u$ engendre le A-module X. On en déduit que

$$v - v^2 = (u - u^2) + (c^2 - c)(1 - 4(u - u^2)) \qquad \text{et} \qquad 1 - 2v = (1 - 2c)(1 - 2u).$$

Donc, $1 - 2c$ est inversible, ce qui entraîne que $v - v^2 \sim u - u^2$. Ceci nous montre que $\Theta_0(C)$ est bien défini. Si $C = C_1 \hat{\otimes} C_2$, en prenant

$$u = u_1 \otimes 1 + 1 \otimes u_2 - 2u_1 \otimes u_2, \qquad \text{avec} \quad u_i \in C_i \quad (i = 1, 2),$$

on a

$$u - u^2 = (u_1 - u_1^2) + (u_2 - u_2^2) - 4(u_1 - u_1^2)(u_2 - u_2^2) = (u_1 - u_1^2) \circ (u_2 - u_2^2),$$

c'est-à-dire

$$\Theta_0(C_1 \hat{\otimes} C_2) = \Theta_0(C_1) + \Theta_0(C_2).$$

Pour voir que Θ_0 induit un homomorphisme $\Theta : \mathcal{H}_0(A) \to G(A)$, il suffit de voir que si $C(P, Q)$ est un zéro dans $\mathcal{H}(A)$, alors $\Theta_0(C(P, Q) = 0$. En effet, si $C(P, Q)$ est un zéro dans $\mathcal{H}$, alors il existe un A-module projectif V tel que

$$C(P, Q) \cong \mathrm{Hom}_A(V \oplus V, V \oplus V).$$

Si l'on écrit comme matrices, on a

$$C(P, Q) \cong \begin{pmatrix} B & B \\ B & B \end{pmatrix}, \qquad \text{avec} \quad B = \mathrm{Hom}_A(V, V).$$

Les éléments de degré 0 (resp. 1) de $C(P, Q)$ sont de la forme $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ $\left[\text{resp. } \begin{pmatrix} 0 & B \\ B & 0 \end{pmatrix}\right]$.

Soit $u \in C(P, Q)$ un élément correspondant à la projection de $V \oplus V$ dans son premier facteur. Pour tout $\alpha \in P$, on a

$$\alpha(v, 0) = (0, \alpha(v)) \quad \text{et} \quad \alpha(0, v) = (\alpha(v), 0).$$

Donc,

$$\alpha u(v, 0) = \alpha(v), \qquad u\alpha(v, 0) = 0, \qquad \alpha u(0, v) = 0$$

et $u\alpha(0, v) = \alpha(v)$. Ceci nous montre que

$$(\alpha u + u\alpha)(v, 0) = \alpha(v, 0) \quad \text{et} \quad (\alpha u + u\alpha)(0, v) = \alpha(0, v).$$

Donc,

$$(\alpha u + u\alpha)(v_1, v_2) = \alpha(v_1, v_2) \quad \text{quel que soit } (v_1, v_2) \in V \oplus V,$$

c'est-à-dire, $\alpha u + u\alpha = \alpha$ pour tout $\alpha \in P$. D'autre part, étant donné que u est une projection, $u = u^2$ et $(1 - 2u)^2 = 1$. Donc, $\Theta_0(C(P, Q)) = u - u^2 = 0$.

On considère maintenant l'application composée

$$W : \mathcal{H}_0(A) \to G(A) \to U(A)/U^2(A)$$

définie par $C \mapsto z \mapsto \overline{1 - 4z}$, où la barre désigne la classe de $1 - 4z$ modulo $U^2(A)$ et $z = u - u^2$. C'est évident que W est un homomorphisme de groupes, car

$$C_1 \hat{\otimes} C_2 \mapsto z_1 \circ z_2 \mapsto \overline{(1 - 2u_1)^2 (1 - 2u_2)^2},$$

une fois que $1 - 4z = (1 - 2u)^2 \in U(A)$. Donc

$$W(C_1 \hat{\otimes} C_2) = W(C_1)\, W(C_2).$$

Si le rang de P est égal à 2, soient $\{e_1, e_2\}$ une base de P sur A et $u = a_0 + a_1 e_1 e_2$ avec $a_0, a_1 \in A$, a_1 inversible dans A et $1 - 2a_0 = a_1 \Phi(e_1, e_2)$. Si l'on pose $z = u - u^2$, on a

$$1 - 4z = a_1^2 (\Phi(e_1, e_2)^2 - 4e_1^2 e_2^2) = -a_1^2 \Delta.$$

Donc, $\overline{1 - 4z} = -\overline{\Delta}$. On voit ainsi que $W(C) = -\overline{\Delta}$. Étant donné que W est un homomorphisme de groupes et que le déterminant de la forme quadratique correspondant à une somme orthogonale de modules quadratiques est le produit des déterminants des formes quadratiques de chaque facteur, il en résulte que pour toute algèbre de Clifford C, d'un module projectif de rang n, $W(C) = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \overline{\Delta}$, où Δ est le déterminant de la forme bilinéaire symétrique associée à C.

Lemme 15. — *Soit* A *un anneau local. Alors, l'homomorphisme* $\Theta : \mathcal{H}_0(A) \to G(A)$ *est surjectif.*

En effet, soit $z \in A^0$, c'est-à-dire $z \in A$ et $1 - 4z \in U(A)$. On définit une forme quadratique Q sur un module libre L de rang 2 ayant $\{u_1, u_2\}$

comme base, par $Q(u_1) = z$, $Q(u_2) = 1$ et $\Phi(u_1, u_2) = 1$. La matrice de Φ est $\begin{pmatrix} 2z & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, donc $\det(\Phi) = -(1-4z)$. Ceci nous montre que $\det(\Phi) \in U(A)$. Si l'on prend $t = u_1 u_2 \in C(L, Q)$, on vérifie immédiatement que

$$u_i t + t u_i = u_i \ (i = 1, 2),$$

donc $t \in Y(C)$. De plus, $(1-2t)^2 = (1 - 2u_1 u_2)^2 = 1 - 4z$ est inversible dans A et $t - t^2 = z$. Ceci nous montre que $\Theta_0(C(L, Q)) = \bar{z}$.

Lemme 16. — *Soient* A *un anneau local et* C *une* A-*algèbre de Clifford. Alors,* $\Theta(\overline{C}) = 0$ *si et seulement si, il existe un idempotent* $e \in Y(C)$ *et, dans ce cas, les seuls idempotents dans* $Y(C)$ *sont* e *et* $1 - e$.

Soit, en effet, $y \in Y(C)$ tel que $(1-2y)^2 \in U(A)$. La condition $\Theta(\overline{C}) = 0$, où $\overline{C}$ est la classe de C dans $\mathcal{H}_0(A)$, entraîne $y - y^2 \sim 0$. Ceci nous montre qu'il existe un élément $c \in A$ tel que

$$(y - y^2) + (c - c^2)(1 - 4(y - y^2)) = 0.$$

Soit $e = y + c(1-2y)$. Comme $1 - 2y \in X(C)$, alors $e \in Y(C)$ et $e - e^2 = 0$. La réciproque est évidente.

Démontrons maintenant que les seuls idempotents dans $Y(C)$ sont e et $1 - e$. Si $y = x + c(1 - 2x)$, alors

$$y^2 = x^2 + c^2(1-2x)^2 + 2cx(1-2x),$$

donc

$$y - y^2 = (x - x^2) + (c - c^2)(1 - 2x)^2.$$

Si $x = x^2$ et $y = y^2$, il en résulte $c = c^2$, donc, puisque A est local, $c = 0$ ou $c = 1$. Ceci nous montre que $y = x$ ou $y = 1 - x$.

2° *Cas global. Le groupe* $\Gamma(A)$. — Soient A un anneau (non nécessairement local), Spec(A) son spectre premier, $\mathcal{G}(A)$ le faisceau défini localement par les $G(A_{\underline{p}})$, $\underline{p} \in \mathrm{Spec}(A)$, et $\Gamma(A)$ le groupe des sections globales de $\mathcal{G}(A)$.

Si C est une A-algèbre de Clifford, pour tout élément $\underline{p} \in \mathrm{Spec}(A)$, on fait correspondre, moyennement $C_{\underline{p}}$, un élément de $G(A_{\underline{p}})$ de façon continue. Ceci veut dire que cette application est définie dans un voisinage de $\underline{p}$, donc qu'elle définit une section globale, c'est-à-dire un élément de $\Gamma(A)$.

L'application $\mathcal{H}_0(A) \xrightarrow{\Theta} \Gamma(A)$ est un homomorphisme de groupes, car il l'est dans chaque localisation et à cause des propriétés fonctorielles de $\mathcal{H}$ et Γ.

Lemme 17. — *L'homomorphisme* $\Theta : \mathcal{H}_0(A) \to \Gamma(A)$ *est surjectif.*

Soit $\gamma \in \Gamma(A)$. Il existe un recouvrement $\{U_i\}$ de Spec(A), et l'on peut même supposer que les U_i soient des ouverts affines isomorphes à $\mathrm{Spec}(A_i)$,

A_i désignant l'anneau des coordonnées de U_i, et des éléments $\bar{z}_i \in G(A_i)$ tels que $\gamma|_{U_i} = \bar{z}_i$ pour tout i. Soit $z_i \in A^0$ un représentant de $\bar{z}_i$. Sur chaque ouvert U_i on définit un module quadratique comme dans le cas local, c'est-à-dire un module libre de rang 2 ayant $\{u_{i1}, u_{i2}\}$ comme base et tel que

$$Q_i(u_{i1}) = z_i, \qquad Q_i(u_{i2}) = 1, \qquad \Phi_i(u_{i1}, u_{i2}) = 1.$$

Dans $U_i \cap U_j$ on a $z_i \sim z_j$, donc il existe des éléments $c_{ij} \in A$ tels que

$$z_j = z_i + (c_{ij} - c_{ij}^2)(1 - 4z_i).$$

L'application

$$u_{j1} \mapsto (1 - 2c_{ij})u_{i1} + c_{ij}u_{i2},$$
$$u_{j2} \mapsto u_{i2}$$

définit un isomorphisme de modules quadratiques et, de plus,

$$z_l = z_j + (c_{jl} - c_{jl}^2)(1 - 4z_j).$$

On peut donc prendre

$$c_{il} = c_{ij} + c_{jl} - 2c_{ij}c_{jl}$$

et les matrices de changement de base vérifient

$$\begin{pmatrix} 1 - 2c_{jl} & 0 \\ c_{jl} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 - 2c_{ij} & 0 \\ c_{ij} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2c_{il} & 0 \\ c_{il} & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans le but de définir un module quadratique sur Spec(A) (donc, sur A), on doit choisir les c_{ij} convenablement. En effet, de l'équation

$$z_j = z_i + (c_{ij} - c_{ij}^2)(1 - 4z_i)$$

on déduit qu'il existe deux solutions possibles $c_{ij}^{(1)}$ et $c_{ij}^{(2)}$ telles que $c_{ij}^{(1)} + c_{ij}^{(2)} = 1$. Si l'on écrit les intersections *non vides* $U_i \cap U_j$ $(i < j)$ dans l'ordre lexicographique, on choisit arbitrairement les c_{ij}, sauf dans le cas où il existe un indice l tel que c_{il} et c_{lj} sont déjà définis et dans ce cas, on prend

$$c_{ij} = c_{il} + c_{lj} - 2c_{il}c_{lj}.$$

Dans tous les cas, $c_{ji} = c_{ij}(1 - 2c_{ij})^{-1}$. On définit ainsi un module quadratique (P, Q) tel que $\Theta_0(C(P, Q)) = \gamma$, une fois que, localement, $\Theta_0(C(P_i, Q_i)) = \bar{z}_i$ (*cf.* lemme 15).

Soit maintenant $N_0 = \operatorname{Ker}(\Theta)$. D'après le lemme 16, $C \in N_0$ si et seulement si pour chaque idéal maximal $\underline{p}$ de A, il existe un idempotent $e_{\underline{p}}$ dans $Y(C_{\underline{p}})$. Un tel élément est caractérisé par les conditions $e_{\underline{p}}z + ze_{\underline{p}} = z$ pour tout $z \in P_{\underline{p}}$ et $e_{\underline{p}}^2 = e_{\underline{p}}$. Si l'on prend une base locale de P, les conditions ci-dessus se réduisent à un nombre fini d'entre elles, donc l'élément $e_{\underline{p}}$ caractérise $C_{\underline{q}}$ pour tout $\underline{q}$ dans un voisinage de $\underline{p}$, qu'on appelle $V_{\underline{p}}$.

D'après la deuxième partie du lemme 16, si e_p est l'idempotent défini dans V_p et e_q celui défini dans V_q, alors dans $V_p \cap V_q$ on a nécessairement $e_p = e_q$ ou $e_p = 1 - e_q$. Si l'on fait correspondre la valeur 1 dans le cas où $e_p = 1 - e_q$ et 0 dans le cas où $e_p = e_q$, on obtient un 1-cocycle de Spec(A) à coefficients dans $\mathbf{Z}/(2)$, donné par le recouvrement $\{V_p\}$. Deux cocycles équivalents représentent deux choix différents d'idempotents. On a donc une application $\Psi : N_0 \to H^1(\mathrm{Spec}(A), \mathbf{Z}/(2))$. Montrons que Ψ est un homomorphisme de groupes. En effet, si e_1 et e_2 sont deux idempotents, l'idempotent correspondant au produit dans N_0 est

$$e_1 \otimes 1 + 1 \otimes e_2 - 2e_1 \otimes e_2.$$

Si l'on change maintenant e_2 en $1 - e_2$, l'idempotent devient

$$1 \otimes 1 - (e_1 \otimes 1 + 1 \otimes e_2 - 2e_1 \otimes e_2)$$

et si l'on change e_1 en $1 - e_1$ et e_2 en $1 - e_2$, l'idempotent produit est encore

$$e_1 \otimes 1 + 1 \otimes e_2 - 2e_1 \otimes e_2.$$

Donc, le cocycle correspondant à un produit dans N_0 est le produit des cocycles.

Remarque. — On voit encore que $C \in \mathrm{Ker}(\Psi) = N$ si et seulement si il existe un idempotent global en $Y(C)$.

LEMME 18. — *L'homomorphisme*

$$\Psi : \quad N_0 \to H^1(\mathrm{Spec}(A), \mathbf{Z}/(2))$$

est surjectif.

Soit $\bar{\sigma} \in H^1(\mathrm{Spec}(A), \mathbf{Z}/(2))$ et σ un cocycle qui représente $\bar{\sigma}$. On sait que σ est défini par un recouvrement $\{U_i\}$ d'ouverts affines et par des éléments $\sigma_{ij} \in \mathbf{Z}/(2)$ dans chaque intersection non vide $U_i \cap U_j$ de telle façon que $\sigma_{ij} + \sigma_{jl} = \sigma_{il}$. On définit, sur chaque U_i, un module libre M_i de rang 2 et ayant une base $\{u_{i1}, u_{i2}\}$ et un isomorphisme $\rho_{ij} : M_i \to M_j$ donné par

$$\rho_{ij}(u_{i1}) = u_{j1}, \qquad \rho_{ij}(u_{i2}) = u_{j2} \quad \text{si } \sigma_{ij} = 0$$

et

$$\rho_{ij}(u_{i1}) = u_{j2}, \qquad \rho_{ij}(u_{i2}) = u_{j1} \quad \text{si } \sigma_{ij} = 1.$$

Ceci définit, par recollement, un faisceau de modules sur Spec(A), donc un module projectif M sur A. Soit $C = \mathrm{End}_A(M)$.

Si l'on désigne par C_0 le sous-ensemble de C des éléments $x \in C$ qui, localement, vérifient

$$x(u_{i1}) = c_i u_{i1}, \qquad x(u_{i2}) = d_i u_{i2}$$

et par C_1 le sous-ensemble de C formé des éléments $x \in C$ tels que, localement, on ait

$$x(u_{i1}) = h_i u_{i2}, \qquad x(u_{i2}) = l_i u_{i1},$$

alors il est évident que C_0 et C_1 sont des sous-modules de C tels que $C_0 \cap C_1 = \{0\}$ et $C_0 + C_1 = C$, une fois que ceci est vrai localement.

Si l'on prend $P = C_1$, pour tout élément $x \in P$, on a

$$x^2(u_{i1}) = x(h_i u_{i2}) = h_i l_i u_{i1},$$
$$x^2(u_{i2}) = x(l_i u_{i1}) = h_i l_i u_{i2},$$

donc $x^2 \in A$. De même, quels que soient $x, y \in P$, on a

$$(xy + yx)(u_{i1}) = (h_i l'_i + h'_i l_i) u_{i1},$$
$$(xy + yx)(u_{i2}) = (h_i l'_i + h'_i l_i) u_{i2},$$

donc $xy + yx \in A$. On a défini ainsi une forme quadratique Q sur P telle que $C(P, Q) = C$. Il est trivial de vérifier que $\Psi(C) = \overline{\sigma}$.

3° *Le théorème de structure.* — Soient A un anneau commutatif à élément unité et considérons dans l'ensemble des A-algèbres centrales et séparables la relation d'équivalence suivante : si B_1 et B_2 sont deux telles A-algèbres, on dira que B_1 est *équivalente* à B_2, $B_1 \sim B_2$, s'il existe deux A-modules projectifs P_1, P_2 tels que

$$B_1 \otimes_A \mathrm{End}_A(P_1) = B_2 \otimes_A \mathrm{End}_A(P_2).$$

On a bien une relation d'équivalence et désignons par $\mathcal{B}(A)$ l'ensemble des classes d'équivalence. On a sur $\mathcal{B}(A)$ une structure naturelle de groupe abélien qu'on appelle *le groupe de Brauer de* A.

Étant donné un élément de $\mathcal{H}_0(A)$, on choisit un représentant $C(P, Q)$ et l'on sait déjà que $C(P, Q)$ est une algèbre de Clifford centrale et séparable. Donc, il lui correspond un élément dans le groupe de Brauer; cet élément sera désigné par $\mathcal{B}(C(P, Q))$. On définit ainsi une application $\mathcal{B}$: $\mathcal{H}_0(A) \to \mathcal{B}(A)$ et l'on va montrer qu'elle est bien définie.

Pour cela, on va montrer que si $C(P, Q) \sim C(P', Q')$, alors

$$\mathcal{B}(C(P, Q)) = \mathcal{B}(C(P', Q')).$$

En effet, il suffit de supposer que

$$C(P', Q') = C(P, Q) \hat{\otimes} C(P'', Q''), \qquad \text{avec} \quad C(P'', Q'') \in \mathfrak{S}.$$

Puisque $C(P', Q') = C(P, Q) \otimes C(P'', Q'')$, alors

$$\mathcal{B}(C(P', Q')) = \mathcal{B}(C(P, Q)) + \mathcal{B}(C(P'', Q''))$$

et comme $C(P'', Q'') \in \mathfrak{S}$, alors $\mathcal{B}(C(P'', Q'')) = 0$.

L'application $\mathcal{B} : \mathcal{H}_0(A) \to \mathcal{B}(A)$ n'est pas un homomorphisme de groupes car, en général, étant données deux algèbres de Clifford C et C', $C \hat{\otimes} C' \not\cong C \otimes C'$. On sait, toutefois, que si $W(C) = 1$, alors $C \hat{\otimes} C' \cong C \otimes C'$. En particulier (*cf.* lemme 18), la restriction de $\mathcal{B}$ à $\mathrm{Ker}(\Theta)$ est un homomorphisme.

LEMME 19. — *L'application* $\mathcal{B}|_{N_0} : N_0 \to \mathcal{B}(A)$ *est un homomorphisme de groupes.*

D'après le théorème $\otimes = \hat{\otimes}$ (cas global),

$$C(P_1, Q_1) \hat{\otimes} C(P_2, Q_2) \simeq C(P_1, Q_1) \otimes C(P'_2, Q'_2),$$

où

$$P'_2 = P_2 \otimes_A X(C(P_1, Q_1)) \qquad \text{et} \qquad Q'_2(y \otimes x) = x^2 Q_2(y)$$

pour tout $y \in P_2$, pour tout $x \in X(C(P_1, Q_1))$. Si $C(P_1, Q_1) \in N$, il existe un idempotent $e \in Y(C(P_1, Q_1))$, et, puisque $(1 - 2e)^2 = 1$, alors $X(C(P_1, Q_1))$ est un A-module libre de rang 1 engendré par $x = 1 - 2e$. Donc $P'_2 = P_2$. De plus, $x^2 = 1$ entraîne $Q'_2 = Q_2$ de telle sorte que pour $C(P_1, Q_1) \in N_0$ on ait

$$C(P_1, Q_1) \hat{\otimes} C(P_2, Q_2) = C(P_1, Q_1) \otimes C(P_2, Q_2).$$

Ceci nous montre que $\mathcal{B}|_{N_0} : N_0 \to \mathcal{B}(A)$ est un homomorphisme de groupes.

THÉORÈME 6. — *Si* $C \in N = \mathrm{Ker}(\Psi)$ *et si* $\mathcal{B}(C) = 0$, *alors* $C \in \mathcal{S}$.

En effet, si $\mathcal{B}(C) = 0$, il existe un A-module projectif P tel que, en tant qu'algèbres graduées, on a l'isomorphisme $C \cong \mathrm{Hom}_A(P, P)$.

D'après la remarque de la page 298, on peut alors choisir $u \in Y(C)$ tel que $u = u^2$. Posons $P_1 = u(P)$ et $P_2 = (1 - u)(P)$. On en déduit que $P = P_1 \oplus P_2$ et, pour tout $z \in P$, $zu + uz = z$ entraîne $zu = (1 - u)z$. Ainsi, tout élément de degré 1 de C, échange P_1 et P_2, c'est-à-dire $z : P_1 \to P_2$ et $z : P_2 \to P_1$ et les éléments de degré 0, appliquent P_i dans P_i $(i = 1, 2)$. De plus, il existe un $z \in P$ avec $\Phi(z, z)$ inversible, Φ étant la forme bilinéaire associée à C. Cet élément z induit un isomorphisme $z : P_1 \to P_2$. Ceci nous montre que C est un zéro dans $\mathcal{H}(A)$.

COROLLAIRE. — $C \sim 0 \Leftrightarrow C \in \mathcal{S}$.

En effet, si $C \sim 0$, alors $\Theta(C) = 0$ et $\mathcal{B}(C) = 0$ et d'après le théorème, $C \in \mathcal{S}$. Dans l'autre sens, c'est vrai par définition.

LEMME 20. — *Pour tout algèbre de Clifford* $C = C(P, Q)$, $\Theta_0(C \hat{\otimes} C) \in N$.

On remarque, tout d'abord, que si A est local et si $t \in Y(C)$, en prenant $y = t \otimes 1 + 1 \otimes t - 2t \otimes t$ dans $C \hat{\otimes} C$, alors

$$y \in Y(C \hat{\otimes} C), \qquad \text{avec} \quad y - y^2 = 2h - (2h)^2.$$

De plus, si l'on fait $x = \frac{y - 2h}{1 - 4h}$, on obtient $x \in Y(C \hat{\otimes} C)$ et $x = x^2$. Soit t' un autre élément de $Y(C)$. Alors $t' = t + c(1 - 2t)$, avec $c \in A$ et si l'on pose

$$h' = t' - t'^2 = h + (c - c^2)(1 - 4h), \qquad y' = t' \otimes 1 + 1 \otimes t' - 2t' \otimes t'$$

$$x' = \frac{y' - 2h'}{1 - 4h'},$$

il en résulte que

$$y' - 2h' = (1 - 2c)^2 (y - 2h) \qquad \text{et} \qquad 1 - 4h' = (1 - 2c)^2 (1 - 4h).$$

Donc $x = x'$. Ceci nous montre que l'idempotent $x \in Y(C \hat{\otimes} C)$ est indépendant de l'élément t choisi dans $Y(C \hat{\otimes} C)$.

Supposons maintenant que A soit un anneau quelconque et pour chaque idéal maximal $\underline{p}$ de A, on choisit un élément

$$t_{\underline{p}} \in Y(C_{\underline{p}}), \qquad h_{\underline{p}} = t_{\underline{p}} - t_{\underline{p}}^2 \qquad \text{et} \qquad x_{\underline{p}} = x_{\underline{p}}^2.$$

Il existe alors un ouvert affine $U_{\underline{p}}$ contenant $\underline{p}$ où ces éléments sont définis et l'on obtient ainsi un recouvrement de Spec(A). Si l'on considère $U_{\underline{p}} \cap U_{\underline{q}}$, $\underline{p}$, $\underline{q} \in \mathrm{Spec}(A)$, d'après le cas local, dans cette intersection, on a $x_{\underline{p}} = x_{\underline{q}}$. Ceci nous définit, sur tout Spec(A), un élément $x \in Y(C \hat{\otimes} C)$, unique, tel que $x = x^2$. D'après la remarque de la page 298, $\Theta_0(C \hat{\otimes} C) \in N$.

Soient A un anneau, (P, Q) un A-module quadratique et $n \geq 1$ un entier. On pose, par définition,

$$n\,C(P, Q) = \hat{\otimes}^n C(P, Q) \qquad (n \text{ facteurs}).$$

On voit que

$$n\,C(P, Q) = C\left(\overset{n}{\oplus} P, \overset{n}{\oplus} Q\right).$$

Théorème 7.

(i) *Tout élément de* $\mathcal{H}_0(A)$ *a un ordre diviseur de* 4.

(ii) *Tout élément de* $\mathcal{H}(A)$ *a un ordre diviseur de* 8.

En effet, pour tout $\overline{C} \in \mathcal{H}_0(A)$, $2\overline{C} \in N$ et étant donné que N est un sub-groupe de $\mathcal{B}(A)$ dont tous les éléments sont d'ordre 2, alors $4\overline{C} = 0$, c'est-à-dire $4C \sim 0$. De plus, si $\overline{C} \in \mathcal{H}(A)$, il s'ensuit que $2\overline{C} \in \mathcal{H}_0(A)$, donc, d'après le cas précédent, $8C \sim 0$.

10. Le groupe de Grothendieck. — Soient (P, Q) un A-module quadratique et $\Gamma(C(P, Q))$ le groupe libre engendré par les classes [M] d'isomorphismes homogènes de degré 0 de C(P, Q)-modules projectifs gradués M. Si $\Gamma_0(C(P, Q))$ désigne le sous-groupe de $\Gamma(C(P, Q))$ engendré par les éléments $[M] - [M'] - [M'']$, pour toute suite exacte $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$

d'homomorphismes homogènes de degré o de $C(P, Q)$-modules projectifs gradués, alors le *groupe de Grothendieck* $K(C(P, Q))$ des $C(P, Q)$-modules projectifs gradués est défini par

$$K(C(P, Q)) = \Gamma(C(P, Q))/\Gamma_0(C(P, Q)).$$

Soit $K_0(C_0(P, Q))$ le *groupe de Grothendieck ordinaire* de l'algèbre (non graduée) $C_0(P, Q)$. Il existe un isomorphisme naturel

$$K(C(P, Q)) \rightarrow K_0(C_0(P, Q))$$

défini par

$$M \mapsto M_0$$

dont l'isomorphisme réciproque est

$$M \otimes_{C_0} C \leftarrow\!\shortmid M,$$

où l'on pose $C = C(P, Q)$ et $C_0 = C_0(P, Q)$. Soit, de plus, $C_1 = C_1(P, Q)$ et considérons sur C_1 sa structure de C_0-module à droite. Alors $\mathrm{Hom}_{C_0}(C_1, C_0)$ a une structure naturelle de C_0-module à gauche. Étant donné que C_1 a aussi une structure de C_0-module à gauche, l'application

$$\rho: \quad C_1 \rightarrow \mathrm{Hom}_{C_0}(C_1, C_0)$$

définie par $\rho(x)(y) = xy$ pour tout $(x, y) \in C_1 \times C_1$ est un homomorphisme de C_0-module à gauche. Montrons que $\rho : C_1 \rightarrow \mathrm{Hom}_{C_0}(C_1, C_0)$ est un isomorphisme. Pour cela, il suffira de le démontrer localement. Mais, dans ce cas, si $u \in P$ est tel que u^2 soit inversible, alors $C_1 = uC_0$. Pour tout $\alpha \in \mathrm{Hom}_{C_0}(C_1, C_0)$, si l'on pose $t = \alpha(u)$, on a $\alpha(u) = \frac{t}{u^2} u.u$ et étant donné que pour tout $x \in C_1$, $x = uy$ avec $y \in C_0$, alors

$$\alpha(x) = \alpha(u).y = \frac{t}{u^2} u.uy = \frac{t}{u^2} u.x.$$

Ceci nous montre que $\alpha \in \mathrm{Im}(\rho)$, c'est-à-dire ρ est surjectif. Montrons que ρ est injectif. Si $x \in C_1$ est tel que $xC_1 = 0$, en particulier $xu = 0$ et u^2 étant inversible, il s'ensuit que $x = 0$.

LEMME 21. — *Si* $C' \in \mathfrak{S}$, *donc* $C' \simeq \mathrm{End}_A(M_0 \oplus M_1)$, *pour toute algèbre de Clifford* C *on a*

$$(C \hat{\otimes} C')_0 \simeq \mathrm{End}_{C_0}(C_0 \otimes_A M_0 \oplus C_1 \otimes_A M_1).$$

En effet, $(C \hat{\otimes} C')_0 = C_0 \otimes_A C'_0 \oplus C_1 \otimes_A C'_1$, en tant que A-modules, donc aussi comme C_0-modules. D'autre part,

$$C'_0 = \mathrm{End}_A(M_0) \oplus \mathrm{End}_A(M_1)$$

et $C'_1 = \mathrm{Hom}_A(M_0, M_1) \oplus \mathrm{Hom}_A(M_1, M_0)$. Donc,

$$C_0 \otimes_A C'_0 \simeq \mathrm{End}_{C_0}(C_0 \otimes_A M_0) \oplus \mathrm{End}_{C_0}(C_1 \otimes_A M_1),$$

car C_1 est C_0-projectif et $\mathrm{End}_{C_0}(C_1) = C_0$. Ceci nous montre que tout élément de $(C \hat{\otimes} C')_0$ s'écrit, de façon unique, sous la forme

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3,$$

avec

$$\alpha_0 \in \mathrm{End}_{C_0}(C_0 \otimes_A M_0), \qquad \alpha_1 \in \mathrm{End}_{C_0}(C_1 \otimes_A M_1),$$
$$\alpha_2 \in \mathrm{Hom}_{C_0}(C_0 \otimes_A M_0,\ C_1 \otimes_A M_1) \quad \text{et} \quad \alpha_3 \in \mathrm{Hom}_{C_0}(C_1 \otimes_A M_1,\ C_0 \otimes_A M_0).$$

Si l'on écrit $\mathrm{End}_{C_0}(C_0 \otimes_A M_0 \oplus C_1 \otimes_A M_1)$ sous forme de matrices

$$\begin{pmatrix} \mathrm{End}_{C_0}(C_0 \otimes_A M_0) & \mathrm{Hom}_{C_0}(C_1 \otimes_A M_1,\ C_0 \otimes_A M_0) \\ \mathrm{Hom}_{C_0}(C_0 \otimes_A M_0,\ C_1 \otimes_A M_1) & \mathrm{End}_{C_0}(C_1 \otimes_A M_1) \end{pmatrix},$$

L'application

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \mapsto \begin{pmatrix} \alpha_0 & -\alpha_3 \\ \alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix},$$

qui est de toute évidence un isomorphisme de C_0-modules, est un isomorphisme de A-algèbres.

THÉORÈME 8. — *Soient* C' *et* C'' *deux algèbres de Clifford. Si* $C' \sim C''$, *alors* $K(C') \simeq K(C'')$.

On voit que, si $C' \sim C''$, il existe deux algèbres de Clifford triviales $S', S'' \in \mathcal{S}$ telles que $C' \hat{\otimes} S' \simeq C'' \hat{\otimes} S''$. Cet isomorphisme induit un isomorphisme $K(C' \hat{\otimes} S') \xrightarrow{\sim} K(C'' \hat{\otimes} S'')$. D'après le lemme 21, on peut écrire $(C' \hat{\otimes} S')_0 \simeq \mathrm{End}_{C'_0}(R)$, où R est un C'_0-module projectif. L'application

$$K_0(C'_0) \to K_0((C' \hat{\otimes} S')_0)$$

définie par $P \mapsto P \otimes_{C'_0} R$ est donc un isomorphisme, dont l'isomorphisme réciproque est $R \otimes_{(C' \hat{\otimes} S')_0} M \leftarrow M$. Les diagrammes commutatifs ci-dessous, achèvent la démonstration du théorème :

$$\begin{tikzcd}
K(C' \hat{\otimes} S') \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\wr"] & K(C'' \hat{\otimes} S'') \arrow[d, "\wr"] \\
K_0((C' \hat{\otimes} S')_0) \arrow[r, "\sim"] & K_0((C'' \hat{\otimes} S'')_0) \\
K_0(C'_0) \arrow[r, "\sim"] \arrow[u, "\wr"] & K_0(C''_0) \arrow[u, "\wr"] \\
K(C') \arrow[r, "\sim"] \arrow[u, "\wr"] & K(C'') \arrow[u, "\wr"]
\end{tikzcd}$$

BIBLIOGRAPHIE.

[1] M. F. Atiyah, R. Bott et L. Singer, *Topology Seminar*, Harvard University, Department of Mathematics, Fall, 1962.

[2] M. F. Atiyah, R. Bott et A. Shapiro, *Clifford Modules*, *Topology*, vol. 3, Supplément 1, 1964, p. 3-38.

[3] M. Auslander et O. Goldmann, *The Brauer group of a commutative ring*, *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 97, 1960, p. 367-409.

[4] N. Bourbaki, *Algèbre*, chap. 9, Hermann, Paris, 1959.

[5] H. Cartan et S. Eilenberg, *Homological Algebra*, Princeton University Press, Princeton Mathematical Series n° 19, Princeton, 1956.

[6] C. T. C. Wall, *Graded Brauer groups*, *J. r. und. a Math.*, Bd. 213, 1964, p. 187-199.

(Manuscrit reçu le 3 Novembre 1967).