

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

LAURENT GRUSON

Fibrés vectoriels sur un polydisque ultramétrique

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 1, n° 1 (1968), p. 45-89

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1968_4_1_1_45_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

FIBRÉS VECTORIELS SUR UN POLYDISQUE ULTRAMÉTRIQUE

PAR LAURENT GRUSON.



INTRODUCTION.

En géométrie analytique complexe, H. Cartan a démontré le résultat suivant :

Soit U un ouvert de l'espace \mathbf{C}^n ; tout fibré vectoriel analytique sur U est trivial au-dessus de tout polydisque fermé contenu dans U .

On ignore si le résultat analogue vaut en géométrie algébrique, i. e. si tout fibré vectoriel sur un espace affine est nécessairement trivial. Par contre, on peut démontrer un résultat un peu plus faible : le « groupe de Grothendieck » d'un espace affine est isomorphe à \mathbf{Z} , ou encore : tout fibré vectoriel sur un espace affine devient trivial après addition d'un fibré trivial.

Dans ce travail, on démontre un analogue de ce dernier résultat en géométrie analytique p -adique (dans le cadre de la théorie de Tate [20]).

Soit K un corps complet pour une valuation réelle; désignons par T_n l'algèbre des séries restreintes en n indéterminées, à coefficients dans K ; c'est l'algèbre des fonctions « strictement holomorphes » sur le polydisque unité « fermé » de dimension n . On sait [20] que T_n est un anneau noethérien régulier de dimension n .

D'après les « théorèmes A et B » de [14], la catégorie des fibrés vectoriels analytiques sur le polydisque unité « fermé » équivaut à la catégorie des modules projectifs de type fini sur T_n . Le résultat qu'on a en vue est alors le suivant : tout T_n -module de type fini M possède une résolution finie formée de modules libres de type fini.

Pour prouver ce résultat, on introduit une catégorie auxiliaire : l'algèbre T_n étant munie de sa structure naturelle d'algèbre de Banach, on définit les T_n -modules filtrés « admissibles » (ce sont les quotients de modules filtrés-libres de type fini, cf. § II). On démontre, en passant au

gradué associé, que tout module filtré admissible possède une résolution finie formée de modules filtrés-libres de type fini; enfin, on résout le problème initial en munissant M d'une structure de module filtré admissible.

La même méthode s'applique aux espaces analytiques affines qui sont produits de « disques fermés » et de « couronnes ».

On étudie également les fibrés vectoriels sur un polydisque « ouvert ». Un polydisque ouvert est la limite inductive, dans la catégorie des espaces analytiques rigides sur K [20], d'une suite strictement croissante de polydisques fermés. Pour passer à la limite inductive, on a besoin de calculer, outre les groupes de Grothendieck, les déterminants universels des polydisques fermés (il s'agit du foncteur \mathbf{K}' de Bass, cf. [1]); ce calcul se fait par la méthode de Bass-Heller-Swan [2]. On démontre alors que le groupe de Grothendieck d'un polydisque ouvert est isomorphe à \mathbf{Z} pourvu que le corps de base soit maximale­ment complet (i. e. que son anneau de valuation soit linéairement compact); ceci généralise un résultat de Lazard [16].

Au paragraphe I, après quelques rappels sur les foncteurs \mathbf{K} , on étend aux anneaux de polynômes gradués le théorème de Grothendieck [2]. Le paragraphe II est consacré à des généralités sur les anneaux filtrés; on introduit notamment une condition noethérienne sur les algèbres de Banach, permettant de définir la catégorie des modules filtrés admissibles. Au paragraphe III, on montre que l'algèbre de Banach T_n vérifie cette condition noethérienne, et l'on établit quelques résultats sur les algèbres topologiquement de type fini. Au paragraphe IV, on détermine les foncteurs \mathbf{K} pour les polydisques fermés; au paragraphe V, on étudie les polydisques ouverts.

Je tiens à remercier ici M. H. Cartan de m'avoir encouragé et guidé dans mes débuts de recherche.

Je dois remercier tout particulièrement M. J.-P. Serre, qui, par son enseignement et son exigence de communication, a constamment stimulé mon travail — sans oublier les conseils qu'il n'a cessé de me prodiguer dans les domaines les plus variés (jusqu'à la typographie...).

Je remercie Christian Houzel qui, après m'avoir initié aux mathématiques, se trouve, par sa réflexion sur la théorie de Tate, à l'origine de ce travail, i. e. d'une « promotion sociale » importante !

I. — Le théorème de Grothendieck pour les anneaux gradués.

1. RAPPELS SUR LES FONCTEURS \mathbf{K} . — Les résultats qui suivent sont démontrés dans [2].

Soit C une catégorie additive, munie d'une classe de suites exactes courtes vérifiant les axiomes de Heller [12]; soit G un groupe abélien.

On dit qu'une application $\gamma : \text{Ob}(C) \rightarrow G$ est additive lorsqu'elle vérifie l'axiome suivant :

(a) quelle que soit la suite exacte courte de C :

$$0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0,$$

on a

$$\gamma(M) = \gamma(M') + \gamma(M'').$$

Il existe une application additive universelle $\gamma_C : \text{Ob}(C) \rightarrow \mathbf{K}^0(C)$. On dit que $\mathbf{K}^0(C)$ est le *groupe de Grothendieck* de C . Si $F : C \rightarrow C'$ est un foncteur exact, il définit un homomorphisme $\mathbf{K}^0(F) : \mathbf{K}^0(C) \rightarrow \mathbf{K}^0(C')$.

On forme une nouvelle catégorie $C[t, t^{-1}]$; un objet est un couple (M, u) tel que M soit un objet de C et que u soit un automorphisme de M ; un morphisme de (M, u) dans (M', u') est un morphisme de $C : \nu : M \rightarrow M'$, tel que $\nu \circ u = u' \circ \nu$. La catégorie $C[t, t^{-1}]$ est additive; on la munit de la classe de suites exactes courtes induite par celle de C . Les axiomes de Heller sont vérifiés.

Soit G un groupe abélien; on dit qu'une application $W : \text{Ob}(C[t, t^{-1}]) \rightarrow G$ est multiplicative lorsqu'elle vérifie l'axiome suivant :

(m) pour tout objet M de C , l'application W induit un homomorphisme du groupe des automorphismes de M dans G .

Il existe une application additive et multiplicative universelle

$$W_C : \text{Ob}(C[t, t^{-1}]) \rightarrow \mathbf{K}^1(C);$$

on dit que $\mathbf{K}^1(C)$ est le déterminant universel de C . Un foncteur exact $F : C \rightarrow C'$ détermine un homomorphisme

$$\mathbf{K}^1(F) : \mathbf{K}^1(C) \rightarrow \mathbf{K}^1(C').$$

PROPOSITION 1 (Heller [13]). — Soient C une catégorie abélienne, de dimension homologique finie, D une sous-catégorie épaisse de C ([7], p. 365), C/D la catégorie quotient; il existe une suite exacte :

$$\mathbf{K}^1(D) \rightarrow \mathbf{K}^1(C) \rightarrow \mathbf{K}^1(C/D) \rightarrow \mathbf{K}^0(D) \rightarrow \mathbf{K}^0(C) \rightarrow \mathbf{K}^0(C/D) \rightarrow 0.$$

Ce résultat exprime que \mathbf{K}^1 est un « satellite » de \mathbf{K}^0 ; on souhaiterait définir \mathbf{K}^n pour n quelconque, de façon à prolonger la suite précédente en une suite exacte illimitée.

On fera dans ce travail un usage constant du résultat suivant, dû essentiellement à Grothendieck. Soient C une catégorie additive munie d'une classe de suites exactes courtes, C' la sous-catégorie pleine de C formée des objets projectifs.

PROPOSITION 2 ([2], th. 4 et 5). — On suppose que tout objet de C possède une résolution finie dans C' . L'inclusion de C' dans C définit un isomorphisme de $\mathbf{K}^i(C')$ sur $\mathbf{K}^i(C)$ ($i = 0, 1$).

Exemple. — Soit A un anneau; prenons pour C la catégorie des A -modules à gauche projectifs de type fini (munie de la classe des suites courtes scindées). On désigne par $\mathbf{K}^0(A)$ le groupe de Grothendieck de C et par $\mathbf{K}^1(A)$ le déterminant universel de C ; ce sont des foncteurs de la catégorie des anneaux dans la catégorie des groupes abéliens.

La classe de A dans $\mathbf{K}^0(A)$ définit un homomorphisme de \mathbf{Z} dans $\mathbf{K}^0(A)$; on désigne par $\mathbf{SK}^0(A)$ son conoyau. Ce groupe est nul lorsque A est local (en effet, tout A -module projectif de type fini est alors libre).

Donnons une description simple du groupe $\mathbf{K}^1(A)$. Pour un entier p , notons $M(p, A)$ l'anneau des matrices $p \times p$ à coefficients dans A , $GL(p, A)$ le groupe des unités de $M(p, A)$, $E(p, A)$ le sous-groupe de $GL(p, A)$ engendré par la famille

$$(1 + aE_{ij})_{a \in A, 1 \leq i, j \leq p, i \neq j}$$

[pour tout couple (i, j) , on a désigné par E_{ij} la matrice de $M(p, A)$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui d'ordre (i, j) qui est égal à 1].

Identifions $GL(p, A)$ à un sous-groupe de $GL(p+1, A)$ [on convient d'identifier les matrices u et $\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$]. Soit $GL(A)$ [resp. $E(A)$] la réunion des $GL(p, A)$ [resp. $E(p, A)$] lorsque p varie; on démontre le résultat suivant ([1], chap. I, lemme 1.7) :

LEMME 1. — $E(A)$ est le groupe des commutateurs de $GL(A)$.

Ceci admis, on remarque que lorsque p varie, les restrictions de W_c à $GL(p, A)$ se prolongent mutuellement, définissant un homomorphisme de $GL(A)$ dans $\mathbf{K}^1(A)$; on montre facilement, à l'aide du lemme 1, que cet homomorphisme identifie les groupes $GL(A)/E(A)$ et $\mathbf{K}^1(A)$.

On désigne par $GE(p, A)$ le sous-groupe de $GL(p, A)$ engendré par $E(p, A)$ et les matrices diagonales inversibles, et par $GE(A)$ la réunion des $GE(p, A)$ lorsque p varie. Posons

$$\mathbf{SK}^1(A) = GL(A)/GE(A).$$

Ce groupe est nul lorsque A est local (on montre en effet qu'alors $GL(p, A) = GE(p, A)$, cf. [4], chap. II, § 10, lemme 1).

Lorsque A est commutatif, on a une suite exacte :

$$1 \rightarrow A^* \rightarrow \mathbf{K}^1(A) \rightarrow \mathbf{SK}^1(A) \rightarrow 1.$$

Cette suite est scindée (le déterminant usuel définit un inverse à gauche de la première flèche).

2. LE THÉORÈME. — Soient G un groupe abélien, A un anneau gradué de type G , $Gr(A)$ la catégorie des A -modules à gauche gradués de type G

(les morphismes sont les applications linéaires de degré 0). On dit que A est *gradué-noethérien* lorsque tous les idéaux à gauche gradués de A sont de type fini; la catégorie abélienne $\text{Gr}(A)$ est alors localement noethérienne ([7], p. 356) et réciproquement.

Soit r un élément de G et soit B l'anneau de polynômes $A[X]$ gradué de sorte que X soit homogène de degré r ; si $g \in G$, la composante homogène de degré g de B est donc le sous-groupe additif de B engendré par les monômes aX^n ($n \in \mathbf{N}$, $a \in A_{(g-nr)}$).

PROPOSITION 3. — *Si A est gradué-noethérien, il en est de même de B .*

Démonstration. — On recopie le raisonnement classique. Soit I un idéal gradué de B ; si P est un élément homogène non nul de I , soit \bar{P} son terme de plus haut degré en X . Si g (resp. n) est le degré (resp. le degré en X) de P , il est clair que \bar{P} est un élément homogène de A , de degré $(g - nr)$.

Lorsque P parcourt l'ensemble des éléments homogènes non nuls de I , \bar{P} engendre un idéal gradué J de A , qui est de type fini par hypothèse; il existe donc des éléments (P_1, \dots, P_n) de I tels que $(\bar{P}_1, \dots, \bar{P}_n)$ engendrent J . Soit N la borne supérieure des degrés en X des P_i et soit L le sous- A -module gradué de B formé des éléments de degré $\leq N$ en X . On vérifie, comme dans le cas classique, que I est engendré sur B par $I \cap L$.

Comme L est un A -module gradué-libre de type fini, et comme $I \cap L$ est un sous- A -module gradué de L , il est clair que $I \cap L$ est un A -module de type fini, d'où la proposition.

On suppose à partir de maintenant que A est gradué-noethérien; on désigne par C (resp. D) la sous-catégorie pleine de $\text{Gr}(A)$ [resp. $\text{Gr}(B)$] formée des objets noethériens.

PROPOSITION 4. — *Si $dh(C) \leq n$, alors $dh(D) \leq n + 1$. (On désigne par dh la dimension homologique.)*

Notons d'abord deux lemmes :

LEMME 2. — *Soit P un objet de C ; pour qu'il soit projectif, il faut et il suffit que son A -module sous-jacent soit projectif.*

La condition est évidemment nécessaire; inversement, supposons-la vérifiée. Pour tout objet M de C , notons $\text{Hom.gr}(P, M)$ le A -module gradué des homomorphismes gradués de P dans M (cf. [4], chap. II, § 11, n° 6). Comme P est de type fini sur A , le A -module sous-jacent à $\text{Hom.gr}(P, M)$ est le module des applications A -linéaires de P dans M (*loc. cit.*, remarque). Le foncteur $\text{Hom.gr}(P, \cdot)$ est donc exact, et il en est de même de $\text{Hom}_C(P, \cdot)$ (qui s'en déduit par passage à la composante homogène de degré 0).

LEMME 3 ([18], p. IV-43, lemme). — Soient R un anneau commutatif, M un $R[X]$ -module. Si le R -module sous-jacent à M est de dimension homologique $\leq n$, le $R[X]$ -module M est de dimension homologique $\leq n + 1$.

Pour démontrer la proposition 4, on note que $dh(C) = dh(\text{Gr}(A))$ et $dh(D) = dh(\text{Gr}(B))$ (« la dimension homologique d'une catégorie localement noethérienne est égale à la dimension homologique de la catégorie de ses objets noethériens »). Si $M \in \text{Ob}(D)$, sa dimension homologique dans D est égale à sa dimension homologique dans la catégorie des B -modules (lemme 2); elle est donc majorée par $dh(C) + 1 = dh(\text{Gr}(A)) + 1$ (lemme 3), d'où la proposition.

THÉORÈME 1. — Lorsque $dh(C) < +\infty$, le foncteur « extension des scalaires » de C dans D définit un isomorphisme de $\mathbf{K}^0(C)$ sur $\mathbf{K}^0(D)$.

(Lorsque $G = 0$, on retrouve le théorème de Grothendieck, cf. [2].)

Démonstration. — Introduisons un anneau gradué auxiliaire B' : ce sera l'anneau de polynômes $A[X, Y]$, gradué de type $G \oplus \mathbf{Z}$ en sorte que X soit homogène de degré $(r, 1)$ et Y soit homogène de degré $(0, 1)$. L'anneau gradué B' est gradué-noethérien (prop. 3); la catégorie D' des B' -modules de type fini, gradués de type $G \oplus \mathbf{Z}$, est abélienne et de dimension homologique finie (prop. 4).

Soit C' la catégorie des A -modules de type fini, gradués de type $G \oplus \mathbf{Z}$, et soit $S : C' \rightarrow C$ le foncteur obtenu en oubliant la \mathbf{Z} -gradation.

On désigne par C_0 (resp. D_0, D'_0) la sous-catégorie pleine de C (resp. D, D') formée des objets projectifs. D'après la proposition 2, l'inclusion de C_0 dans C définit un isomorphisme de $\mathbf{K}^0(C_0)$ sur $\mathbf{K}^0(C)$ (resp. ...).

Considérons le diagramme de foncteurs :

$$\begin{array}{ccc} C' & \xrightarrow{F} & D' \\ \downarrow S & & \downarrow H \\ C & \xrightarrow{G} & D \end{array}$$

où F (resp. G) provient par extension des scalaires de la structure de A -algèbre graduée de B' (resp. B) et H provient par extension des scalaires de l'augmentation de B' vers B de noyau $(1 - Y)$.

Il est clair que le diagramme est commutatif à isomorphisme près et que les foncteurs F et G sont exacts. Le foncteur H est exact; on vérifie en effet que si $M \in \text{Ob}(D')$, l'élément $(1 - Y)$ de B' est « M -régulier » (i. e. non diviseur de 0 dans l'anneau des homothéties de M); il est en particulier B' -régulier et, par suite,

$$\text{Tor}_i^{B'}(M, B) = 0 \quad (i > 0),$$

d'où notre assertion. On obtient ainsi un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{K}^0(C') & \longrightarrow & \mathbf{K}^0(D') \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{K}^0(C) & \longrightarrow & \mathbf{K}^0(D) \end{array}$$

LEMME 4. — $\mathbf{K}^0(F)$ est un isomorphisme.

Soit F' le foncteur de D'_0 dans C_0 déduit par extension des scalaires de l'augmentation de B' vers A de noyau (X, Y) . Si l'on identifie $\mathbf{K}^0(C_0)$ à $\mathbf{K}^0(C)$ et $\mathbf{K}^0(D'_0)$ à $\mathbf{K}^0(D')$, il est clair que $\mathbf{K}^0(F')$ est un inverse à gauche de $\mathbf{K}^0(F)$; il suffit donc de prouver que $\mathbf{K}^0(F')$ est injectif. Comme F' est « quasi-surjectif » (i. e. tout objet projectif de C est facteur direct de l'image par F' d'un objet projectif de D') il suffit de voir que pour tout triplet (P, Q, φ) , où P et Q sont des objets projectifs de D' et $\varphi : F'P \rightarrow F'Q$ est un isomorphisme, il existe un isomorphisme $u : P \rightarrow Q$ tel que $\varphi = F'u$.

Comme P est projectif, il existe en tout cas un morphisme $u : P \rightarrow Q$ relevant φ . Pour vérifier que u est un isomorphisme, il suffit d'appliquer la variante « graduée » du lemme de Nakayama ([4], chap, II, § 11, cor. 1 de la prop. 6) à l'anneau gradué de type \mathbf{Z} sous-jacent à B' ; le lemme en résulte.

LEMME 5. — *Le foncteur H est essentiellement surjectif.*

On va résoudre un problème « matriciel » plus précis :

Soient $(g_\lambda)_{1 \leq \lambda \leq l}$ et $(h_\mu)_{1 \leq \mu \leq m}$ deux familles finies d'éléments de G , $(u_{\mu\lambda})_{1 \leq \lambda \leq l, 1 \leq \mu \leq m}$ une famille d'éléments homogènes de B , telle que $u_{\mu\lambda}$ soit de degré $(h_\mu - g_\lambda)$. On cherche deux familles finies $(p_\lambda)_{1 \leq \lambda \leq l}$ et $(q_\mu)_{1 \leq \mu \leq m}$ de \mathbf{N} et une famille $(U_{\mu\lambda})_{1 \leq \lambda \leq l, 1 \leq \mu \leq m}$ d'éléments homogènes de B' , relevant $(u_{\mu\lambda})$ et telle que $U_{\mu\lambda}$ soit de degré $(h_\mu - g_\lambda, q_\mu - p_\lambda)$.

Comme tout objet de D s'écrit comme conoyau d'une matrice telle que $(u_{\mu\lambda})$, il est clair que pour prouver le lemme, il suffit de savoir résoudre le problème matriciel.

Posons

$$u_{\mu\lambda} = \sum_{\nu \in \mathbf{N}} u_{\nu\mu\lambda} \cdot X^\nu$$

et choisissons les familles (p_λ) et (q_μ) de façon que

$$q_\mu - p_\lambda \geq \nu$$

pour tout ν tel que $u_{\nu\mu\lambda}$ ne soit pas nul; c'est évidemment possible. Pour tout triplet (λ, μ, ν) , désignons par $s_{\nu\mu\lambda}$ l'entier égal à $q_\mu - p_\lambda - \nu$ si $u_{\nu\mu\lambda} \neq 0$, à 0 si $u_{\nu\mu\lambda} = 0$; posons enfin

$$U_{\mu\lambda} = \sum_{\nu \in \mathbf{N}} u_{\nu\mu\lambda} \cdot X^\nu Y^{s_{\nu\mu\lambda}}$$

Les conditions demandées sont réalisées, d'où le lemme.

Les lemmes 4 et 5 montrent que $\mathbf{K}^0(\mathbf{G})$ est un épimorphisme. Comme $\mathbf{K}^0(\mathbf{G})$ est inversible à gauche (cf. début de la démonstration du lemme 4), le théorème est démontré.

II. — Préliminaires d'analyse ultramétrique.

Ce paragraphe rassemble quelques définitions et quelques résultats simples d'analyse ultramétrique, pour lesquels il n'existe pas de référence commode. On suit l'exposé de Lazard ([17], chap. I); néanmoins, on s'intéresse aux filtrations réelles quelconques, tandis que seules les filtrations à valeurs positives sont étudiées dans [17].

1. ANNEAUX ET MODULES FILTRÉS. — *Groupes abéliens filtrés.* — Soit \mathbf{G} un groupe abélien; une filtration réelle sur \mathbf{G} est une application $\nu : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ qui vérifie les axiomes suivants :

$$\begin{aligned} \nu(x-y) &\geq \inf(\nu(x), \nu(y)) & [(x, y) \in \mathbf{G} \times \mathbf{G}], \\ \nu(0) &= +\infty. \end{aligned}$$

Le couple (\mathbf{G}, ν) est appelé groupe abélien filtré. Un morphisme du groupe abélien filtré (\mathbf{G}, ν) dans le groupe abélien filtré (\mathbf{G}', ν') est un homomorphisme $u : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}'$ tel que

$$\nu'(u(x)) \geq \nu(x) \quad (x \in \mathbf{G})$$

(on dit que u augmente la filtration).

Anneaux filtrés. — Un anneau filtré est un anneau de la catégorie des groupes abéliens filtrés. Autrement dit, c'est un couple (\mathbf{A}, ν) tel que \mathbf{A} soit un anneau et que ν soit une filtration du groupe additif de \mathbf{A} qui vérifie les axiomes suivants :

$$\begin{aligned} \nu(xy) &\geq \nu(x) + \nu(y) & [(x, y) \in \mathbf{A} \times \mathbf{A}], \\ \nu(1) &= 0. \end{aligned}$$

Modules filtrés. — Soit (\mathbf{A}, ν) un anneau filtré. Un \mathbf{A} -module à gauche filtré est un couple (\mathbf{M}, ω) tel que \mathbf{M} soit un \mathbf{A} -module à gauche et que ω soit une filtration du groupe abélien sous-jacent à \mathbf{M} , vérifiant l'axiome suivant :

$$\omega(ax) \geq \nu(a) + \omega(x) \quad [(a, x) \in \mathbf{A} \times \mathbf{M}].$$

Un morphisme de \mathbf{A} -modules à gauche filtrés est une application \mathbf{A} -linéaire qui augmente la filtration.

On définit de même les \mathbf{A} -modules à droite filtrés.

Constructions dans la catégorie des A-modules filtrés. — Soient (A, ν) un anneau filtré, C la catégorie des A-modules à gauche filtrés. La catégorie C possède un objet nul. Si $u : (M, \omega) \rightarrow (M', \omega')$ est un morphisme de C , son noyau $\text{Ker } u$ est le sous-module $u^{-1}(0)$ de M , muni de la filtration induite par ω ; son conoyau $\text{Coker } u$ est le module quotient $M'/u(M)$, muni de la filtration

$$x \mapsto \sup(\omega'(y))$$

le sup étant pris sur l'ensemble des $y \in M'$ d'image x .

Soit (M_i, ω_i) une famille d'objets de C ; le produit direct de cette famille est le sous-module de $\prod M_i$ formé des familles (x_i) telles que $\inf(\omega_i(x_i)) > -\infty$, muni de la filtration

$$(x_i) \mapsto \inf(\omega_i(x_i)).$$

La somme directe de cette famille est le module $\bigoplus M_i$ muni de la filtration induite par la précédente.

La catégorie C est donc additive et possède des limites projectives et inductives quelconques; ce n'est pas une catégorie abélienne.

Une suite exacte courte de la catégorie C est une séquence

$$0 \rightarrow (M', \omega') \rightarrow (M, \omega) \rightarrow (M'', \omega'') \rightarrow 0$$

de morphismes de C , telle que u' soit un noyau de u'' et que u'' soit un conoyau de u' . La classe des suites exactes courtes de C vérifie les axiomes de Heller [12].

Soient (M, ω) et (M', ω') deux A-modules à gauche filtrés. Par abus de notation, on désigne par $L(M, M')$ le groupe abélien des applications A-linéaires $u : M \rightarrow M'$ telles que

$$\inf_{x \in M} (\omega'(u(x)) - \omega(x)) > -\infty$$

muni de la filtration

$$u \mapsto \inf_{x \in M} (\omega'(u(x)) - \omega(x)).$$

On définit ainsi un foncteur L de $C^0 \times C$ dans la catégorie des groupes abéliens filtrés, qui commute aux limites projectives.

Soient enfin (M, ω) un A-module à gauche filtré, (M', ω') un A-module à droite filtré. On munit le produit tensoriel $M \otimes_A M'$ de la filtration suivante :

$$z \mapsto \sup \left(\inf_i (\omega(x_i) + \omega'(x'_i)) \right)$$

[le sup étant pris sur l'ensemble des familles finies (x_i, x'_i) de $M \times M'$ telles que $z = \sum_i x_i \otimes x'_i$].

Toutes ces constructions sont identiques à celles de [17] (chap. I) et peuvent donner lieu aux mêmes commentaires.

Topologie associée. — Soient (M, ϖ) un A -module à gauche filtré, a un nombre réel < 1 ; posons

$$d(x, y) = a^{\nu(y-x)} \quad [(x, y) \in M \times M].$$

C'est un écart sur M ; la topologie induite par cet écart (qui est indépendante du choix de a) est appelée topologie sous-jacente à la filtration ν . La topologie de A est compatible avec sa structure d'anneau; la topologie de M est compatible avec sa structure de A -module.

Complétion. — On dit que le A -module filtré (M, ϖ) est complet lorsque son groupe topologique sous-jacent est séparé et complet.

Le foncteur d'inclusion de la catégorie des A -modules filtrés complets dans la catégorie des A -modules filtrés, possède un adjoint à droite bien connu $(M, \varpi) \mapsto (\hat{M}, \varpi)$.

Modules filtrés-libres. — Soit A un anneau muni d'une filtration ν . Pour tout $r \in \mathbf{R}$, on désigne par $A(r)$ le A -module à gauche sous-jacent à A , muni de la filtration réelle

$$x \mapsto \nu(x) + r \quad (x \in A).$$

On dit qu'un A -module filtré est filtré-libre lorsqu'il est isomorphe, dans la catégorie \mathbf{C} , à une somme directe de modules filtrés de la forme $A(r)$. On dit qu'un A -module filtré complet est complet-libre s'il est isomorphe au complété d'un A -module filtré-libre.

On fera attention qu'en général, les modules filtrés-libres ne sont pas des objets projectifs de \mathbf{C} .

Gradué associé. — Soit (G, ν) un groupe abélien filtré; pour tout $r \in \mathbf{R}$, posons

$$\begin{aligned} G_r &= \{x \in G \mid \nu(x) \geq r\}, \\ G_{r,+} &= \{x \in G \mid \nu(x) > r\}. \end{aligned}$$

Ce sont des sous-groupes additifs de G . On désigne par $\text{gr}(G)$ (gradué associé à G) le groupe abélien gradué de type \mathbf{R} dont la composante homogène de degré r est $G_r/G_{r,+}$.

Soit $u : (G, \nu) \rightarrow (G', \nu')$ un morphisme de groupes abéliens filtrés. On a $u(G_r) \subset G'_r$ et $u(G_{r,+}) \subset G'_{r,+}$; par passage au quotient, on trouve un morphisme de groupes abéliens gradués $\text{gr}(u) : \text{gr}(G) \rightarrow \text{gr}(G')$. On a ainsi défini le foncteur « gradué associé » de la catégorie des groupes abéliens filtrés dans la catégorie des groupes abéliens gradués de type \mathbf{R} .

Soient (A, ν) un anneau filtré, (M, ϖ) un A -module à gauche filtré. Alors $\text{gr}(A)$ est muni naturellement d'une structure d'anneau gradué

de type \mathbf{R} et $\text{gr}(\mathbf{M})$ est muni naturellement d'une structure de $(\text{gr}(\mathbf{A}))$ -module à gauche gradué de type \mathbf{R} . On a ainsi défini le foncteur « gradué associé » de la catégorie \mathbf{C} dans la catégorie des $(\text{gr}(\mathbf{A}))$ -modules à gauche gradués de type \mathbf{R} . Ce foncteur est exact à gauche [12]; il confond un module filtré avec son complété.

Filtrations multiplicatives et valuations. — On se propose de traduire les notions d'anneau réduit et d'anneau intègre.

Soit (\mathbf{A}, ν) un anneau filtré séparé. On dit que la filtration ν est multiplicative lorsqu'elle vérifie l'axiome suivant :

$$\nu(x^n) = n \cdot \nu(x) \quad [(x, n) \in \mathbf{A} \times \mathbf{N}].$$

On dit que la filtration ν est une valuation lorsqu'elle vérifie l'axiome suivant :

$$\nu(xy) = \nu(x) + \nu(y) \quad [(x, y) \in \mathbf{A} \times \mathbf{A}].$$

Soit (\mathbf{A}, ν) un anneau valué (i. e. un anneau muni d'une valuation). On dit qu'un \mathbf{A} -module filtré (\mathbf{M}, ω) est valué (ou que ω est une valuation) lorsque la filtration ω est séparée et vérifie l'axiome suivant :

$$\omega(ax) = \nu(a) + \omega(x) \quad [(a, x) \in \mathbf{A} \times \mathbf{M}].$$

Convention : Pour alléger l'écriture, on ne fera pas mention de la filtration pour noter un anneau ou un module filtré; on utilisera en général la lettre ν pour désigner la filtration.

2. MODULES VALUÉS SUR UN CORPS VALUÉ. — Soient \mathbf{K} un corps commutatif muni d'une valuation réelle, $\hat{\mathbf{K}}$ son complété.

LEMME 1. — Soit \mathbf{E} un \mathbf{K} -module valué de rang fini n ; les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) Il existe un isomorphisme du \mathbf{K} -module topologique sous-jacent à \mathbf{E} sur \mathbf{K}^n ;
- (ii) Toute application linéaire de \mathbf{E} dans un \mathbf{K} -module topologique est continue;
- (iii) Tout sous- \mathbf{K} -module de \mathbf{E} est fermé;
- (iv) Le rang de $\hat{\mathbf{E}}$ sur $\hat{\mathbf{K}}$ est égal à n .

C'est une variante triviale du lemme bien connu sur la structure des espaces vectoriels topologiques de rang fini sur un corps valué complet.

Si \mathbf{E} est un \mathbf{K} -module de rang fini, on appellera topologie canonique sur \mathbf{E} la plus fine de ses topologies de \mathbf{K} -module; elle existe d'après le lemme précédent.

Si \mathbf{E} est un \mathbf{K} -module valué, on dira qu'il est spécial si tous ses sous-modules de rang fini sont munis de la topologie canonique; cette condition

est automatiquement vérifiée lorsque K est complet. Dans le cas général, elle signifie d'après le lemme 1 que l'application linéaire canonique de $E \otimes_K \hat{K}$ dans \hat{E} est injective.

LEMME 2. — Soit E un K -module valué de rang fini; les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) E est filtré-libre ;

(ii) Tout sous-module de rang 1 de E est facteur direct de E (dans la catégorie des K -modules filtrés);

(iii) Tout sous-module de E est filtré-libre et facteur direct dans E .

La démonstration consiste essentiellement à remarquer que si F et F' sont deux K -modules valués et si D est un sous-module de rang 1 de $F \oplus F'$, l'un des projecteurs canoniques au moins induit sur D une isométrie.

Étant donné un K -module valué E , introduisons la condition suivante :

(IL) Tout sous-module valué de rang fini de E est filtré-libre.

LEMME 3. — (i) Dans la catégorie des K -modules valués, la condition (IL) est stable par sous-objet et somme directe.

(ii) Pour que E vérifie (IL), il faut et il suffit qu'il soit spécial et qu'il contienne un sous-module dense vérifiant (IL).

Par acquit de conscience, on va vérifier que si E est spécial et s'il existe un sous-module dense F de E vérifiant (IL), alors E vérifie (IL). Soient V un sous-module de rang fini de E , $(e_i)_{1 \leq i \leq p}$ une base (algébrique) de E ; comme E est spécial, il existe un nombre réel a qui possède la propriété suivante :

Pour tout $(x_i)_{1 \leq i \leq p} \in K^p$, on a

$$v\left(\sum_{1 \leq i \leq p} x_i e_i\right) \leq a + \inf(v(x_i)).$$

Pour tout i , soit f_i un élément de F tel que $v(e_i - f_i) > a$; soit W le sous-module de E engendré par $(f_i)_{1 \leq i \leq p}$; on a

$$v\left(\sum_{1 \leq i \leq p} x_i (e_i - f_i)\right) > a + \inf(v(x_i))$$

en sorte que l'application linéaire de V dans W qui transforme e_i en f_i est une isométrie. Comme $W \subset F$, il est filtré-libre par hypothèse, d'où notre assertion.

Exemple. — Soit L une extension finie du corps K ; on va définir sur L une filtration multiplicative (la « filtration spectrale »). Pour tout polynôme

unitaire $P = X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_n$ sur K , posons

$$h(P) = \inf(v(a_i)/i).$$

Une variante simple du lemme de Gauss montre que, pour tout couple (P, Q) de polynômes unitaires sur K , on a $h(PQ) = \inf(h(P), h(Q))$. Si maintenant x est un élément de L , de polynôme minimal P sur K , on pose $\omega(x) = h(P)$. La fonction ω est une filtration multiplicative de L prolongeant v ; elle est préservée par tout K -isomorphisme. Lorsque K est complet, on retrouve le « prolongement canonique » de v . Dans le cas général, désignons par M le quotient de $L \otimes_K \hat{K}$ par son radical, qui est un composé direct d'extensions finies de \hat{K} ; munissons M de la filtration produit; l'application canonique de L dans M est alors une isométrie.

DÉFINITION. — On dit que le corps valué K est *excellent* lorsque le complété \hat{K} de K est une extension séparable de K . Il revient au même de dire que pour toute extension finie L de K , la filtration spectrale de L induit la topologie canonique de L .

On dit que le corps valué K est *stable* lorsque toute extension finie de K munie de sa filtration spectrale, est un K -module filtré-libre. Un corps valué stable est excellent.

Remarques. — 1° Lorsque la valuation de K est discrète, la condition « K est excellent » revient à dire que l'anneau de valuation de K est un anneau excellent au sens de Grothendieck ([10], chap. IV, § 7.8), d'où la terminologie.

2° Un corps valué de caractéristique nulle est excellent.

3° Pour qu'un corps valué K soit stable, il faut et il suffit que K soit excellent et que le complété \hat{K} soit stable.

4° Un corps algébriquement clos, un corps maximalelement complet, un corps de caractéristique résiduelle nulle sont stables.

3. UNE CONDITION NOETHÉRIENNE. — Soit K un corps complet pour une valuation réelle; on appelle algèbre de Banach sur K une K -algèbre filtrée complète.

Tate a démontré le résultat suivant ([20], th. 3.3) :

PROPOSITION 1. — *Soit A une K -algèbre de Banach commutative et noethérienne; soit M un A -module de type fini. Il existe sur M une topologie unique qui soit sous-jacente à une structure de A -module filtré complet.*

COROLLAIRE. — *La topologie définie dans la proposition 1 est la plus fine des topologies de A -module sur M .*

Soit $u : M \rightarrow N$ une application A -linéaire (N désigne un A -module topologique) et soit $\nu : A^n \rightarrow M$ une application A -linéaire surjective; alors ν et $u \circ \nu$ sont continues. D'après le théorème de Banach, ν est un épimorphisme strict, donc u est continue; le corollaire en résulte.

Soit M un A -module de type fini; on appelle topologie canonique de M la plus fine de ses topologies de A -module.

DÉFINITION. — Soient A une K -algèbre de Banach commutative, M un A -module filtré. On dit que M est *admissible* s'il existe un A -module filtré-libre de type fini L et un morphisme $u : L \rightarrow M$ tel que tout élément de M soit image par u d'un élément de L de même filtration.

LEMME 4 (analogue du lemme de Nakayama). — Soient A une K -algèbre de Banach commutative, M un A -module filtré admissible, $u : N \rightarrow M$ un morphisme de A -modules filtrés. Si $\text{gr}(u)$ est un épimorphisme, u est un épimorphisme strict.

Par « pull-back », on se ramène au cas où M est filtré-libre de type fini; il existe alors un morphisme $u' : M \rightarrow N$ tel que $\text{gr}(uu') = 1$. Comme M est filtré-libre de type fini, cela implique que $(1 - uu')$ soit contractant, donc que uu' soit un isomorphisme; on en conclut bien que u est un épimorphisme strict.

DÉFINITION. — Soit A une K -algèbre de Banach commutative. On dit que A est *filtrée-noethérienne* si les conditions suivantes sont vérifiées :

- (i) L'anneau gradué $\text{gr}(A)$ est gradué-noethérien;
- (ii) Quels que soient le A -module filtré-libre de type fini L , le sous- A -module M de L et l'élément x de L , la distance de x à M est atteinte [i. e. il existe un élément y de M tel que $\nu(x-z) \leq \nu(x-y)$ quel que soit $z \in M$] et M est un A -module filtré admissible.

PROPOSITION 2. — Soit

$$0 \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow P \rightarrow 0$$

une suite exacte courte de A -modules filtrés; on suppose que A est filtrée-noethérienne et que M est admissible. Alors N et P sont admissibles et la suite

$$0 \rightarrow \text{gr}(N) \rightarrow \text{gr}(M) \rightarrow \text{gr}(P) \rightarrow 0$$

est une suite exacte courte de $(\text{gr}(A))$ -modules gradués de type fini.

C'est une conséquence immédiate de la condition (ii).

Remarques. — 1° Le corps valué complet K est filtré-noethérien. En effet, le lemme 2 montre qu'un K -module filtré est admissible si et seulement s'il est filtré-libre de type fini; la condition (ii) est donc vérifiée. Pour vérifier

la condition (i), on va exhiber $\text{gr}(K)$. Soit l'élément de $\text{Ext}_{\mathbf{Z}}^1(G, k^*)$ défini par le groupe multiplicatif des éléments homogènes non nuls de $\text{gr}(K)$ (considéré comme une extension du groupe de valuation G de K par le groupe multiplicatif k^* du corps résiduel k de K). Cet élément provient d'un « système de facteurs abélien » $f: G \times G \rightarrow k^*$. Formons la k -algèbre A ayant même espace vectoriel sous-jacent que $k[G]$, la table de multiplication étant

$$(g_1, g_2) \mapsto (f(g_1, g_2)) \cdot g_1 g_2 \quad ((g_1, g_2) \in G \times G).$$

Cette algèbre est naturellement graduée de type G ; on voit tout de suite qu'il existe un isomorphisme gradué de A sur $\text{gr}(K)$. En outre, la catégorie $\text{Gr}(A)$ des A -modules gradués de type \mathbf{R} est semi-simple ([7], p. 337) parce que les A -modules gradués de rang 1 forment un système de générateurs simples de $\text{Gr}(A)$; d'où notre assertion.

2° Lorsque la filtration de A est discrète [i. e. lorsque l'image de $A_{(0)}$ par la filtration est une partie discrète de \mathbf{R}] la condition (i) de la définition ci-dessus entraîne la condition (ii); cela résulte par exemple de [5] (chap. III, § 2, th. 1).

3° Soit $u: A \rightarrow B$ un morphisme de K -algèbres de Banach; si A est filtrée-noethérienne et si B est un A -module filtré admissible, alors B est filtrée-noethérienne (c'est immédiat).

4° Soient A une K -algèbre filtrée-noethérienne, M un A -module filtré admissible; alors A est noethérienne, le A -module sous-jacent à M est de type fini et la topologie induite par la filtration de M est la topologie canonique.

III. — Propriétés des algèbres topologiquement de type fini.

Soit K un corps complet pour une valuation réelle ν . On note A l'anneau de valuation de K , m l'idéal maximal de A , k le corps résiduel de A , G le groupe de valuation de K [i. e. le sous-groupe $\nu(K^*)$ de \mathbf{R}] et D le divisé de G (i. e. le sous-groupe $\mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} G$ de \mathbf{R}).

Soit n un entier. On désigne par T_n l'algèbre des séries formelles en n variables, à coefficients dans K

$$f = \sum_{i=(i_1, \dots, i_n) \in \mathbf{N}^n} a_i \cdot X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}$$

telles que $\nu(a_i)$ tende vers $+\infty$ avec i . L'algèbre T_n est complète pour la valuation réelle

$$f \mapsto \inf_{i=(i_1, \dots, i_n) \in \mathbf{N}^n} \nu(a_i).$$

Les éléments de T_n s'interprètent comme les fonctions strictement holomorphes sur le polydisque unité fermé de K^n .

On dit qu'une K -algèbre de Banach A est topologiquement de type fini [20] s'il existe un entier n et un épimorphisme continu de l'algèbre T_n sur l'algèbre A .

1. LE THÉORÈME DE PRÉPARATION DE SALMON.

THÉORÈME 1 (Salmon). — Soit n un entier et soit f un élément non nul de T_n . Identifions T_{n-1} à une sous-algèbre valuée de T_n .

Il existe un automorphisme φ de la K -algèbre valuée T_n et un entier $d \geq 0$ tels que la condition suivante soit réalisée : le T_{n-1} -module valué sous-jacent à T_n est somme directe de $\varphi(f) \cdot T_n$ et des $X_n^i \cdot T_{n-1}$ pour $0 \leq i < d$.

Démonstration. — On commence par choisir φ parmi les automorphismes de T_n qui sont de la forme suivante : soit $(r_i)_{1 \leq i \leq n-1}$ une suite d'entiers; on envoie X_i sur $X_i + X_n^{r_i}$ ($1 \leq i \leq n-1$) et on laisse fixe X_n .

On peut supposer sans inconvénient que $\nu(f) = 0$. Soit $P \in k[X_1, \dots, X_n]$ le polynôme réduit de f ; d'après le lemme de normalisation, on peut choisir φ de façon que l'automorphisme correspondant ψ de $k[X_1, \dots, X_n]$ possède la propriété suivante : le terme de plus haut degré en X_n de $\psi(P)$ sur $k[X_1, \dots, X_{n-1}]$ est de la forme $a \cdot X_n^d$, où a est un élément non nul de k .

Cette remarque permet de se borner au cas où P est un polynôme unitaire de degré d en X_n , à coefficients dans $k[X_1, \dots, X_{n-1}]$. Soit Q un polynôme unitaire de degré d en X_n , à coefficients dans T_{n-1} , relevant P ; on a $\nu(Q - f) > 0$.

Soit M le sous- T_{n-1} -module valué de T_n engendré par $(X_n^i)_{0 \leq i < d}$. Soit u (resp. u') le morphisme de $M \oplus T_n$ dans T_n qui coïncide avec l'inclusion sur M et avec la multiplication par Q (resp. f) sur T_n . Du fait que Q est unitaire et de valuation nulle, on tire tout de suite que u est un isomorphisme de T_{n-1} -modules valués. D'autre part, $u - u'$ est contractant ⁽¹⁾ et T_n est complet; donc u' est un isomorphisme, d'où le théorème.

PROPOSITION 1. — Soient L un T_n -module filtré-libre de type fini, M un sous- T_n -module filtré de L . L'inclusion de M dans L est un monomorphisme direct dans la catégorie des K -modules filtrés.

(En langage moins pédant : il existe un projecteur K -linéaire de L sur M qui augmente la filtration.)

⁽¹⁾ Conformément aux notations des espaces métriques, un homomorphisme $u : (G, v) \rightarrow (G', v')$ de groupes abéliens filtrés est dit contractant s'il existe un nombre $k > 0$ tel que $v'(u(x)) \geq v(x) + k$ quel que soit $x \in G$. C'est le cas ici, puisque $\nu(Q - f) > 0$.

Raisonnons par récurrence sur n , le cas $n = 0$ se réduisant au lemme 2 du paragraphe II.

Montrons qu'on peut se ramener au cas où L et M ont même rang. Soit K_n le corps de fractions valué de T_n ; posons $E = L \otimes_{T_n} K_n$ et $F = M \otimes_{T_n} K_n$ (produits tensoriels filtrés). Comme E est un K_n -module filtré-libre de type fini, il existe (§ II, lemme 2) une base filtrée $(e_i)_{1 \leq i \leq p}$ de E et un entier $q \leq p$ tels que $(e_i)_{1 \leq i \leq q}$ soit une base filtrée de F . En multipliant chaque e_i par un scalaire convenable, on peut supposer que

$$L' = \sum_{1 \leq i \leq p} T_n \cdot e_i \text{ contient } L; \text{ posons } L'' = \sum_{1 \leq i \leq q} T_n \cdot e_i : \text{ c'est un } T_n\text{-module}$$

filtré-libre de type fini, contenant M et de même rang que M . Si M est K -facteur direct dans L'' , il est K -facteur direct dans L' , donc dans L (puisque $L \subset L'$), d'où l'assertion.

Si M et L ont même rang, il existe un élément non nul f de T_n tel que $fL \subset M$; le théorème 1 montre que fL est K -facteur direct dans L ; reste à voir que M/fL est K -facteur direct dans L/fL . Le théorème 1 fournit un monomorphisme métrique strict de T_{n-1} dans T_n munissant T_n/fT_n d'une structure de T_{n-1} -module filtré-libre de type fini; alors L/fL est un T_{n-1} -module filtré-libre de type fini; l'assertion résulte donc de l'hypothèse de récurrence.

COROLLAIRE (1). — *La K -algèbre de Banach T_n est filtrée-noethérienne (cf. § II, n° 3).*

Notons d'abord que $\text{gr}(T_n)$ est l'anneau de polynômes $\text{gr}(K)[X_1, \dots, X_n]$ gradué en sorte que X_i soit homogène de degré 0; c'est un anneau gradué-noethérien (cf. § I, prop. 3 et § II, n° 3, remarque 1).

Compte tenu de la proposition 1, il reste donc à vérifier que tout sous-module filtré d'un T_n -module filtré-libre de type fini est admissible. Raisonnons par récurrence sur n , le cas $n = 0$ étant trivial.

Soit M un sous-module filtré d'un T_n -module filtré-libre de type fini; d'après la proposition 1, pour vérifier que M est admissible, il suffit de trouver un T_n -module filtré-libre de type fini L et un épimorphisme strict $u : L \rightarrow M$. Le raisonnement de la proposition 1 montre d'abord qu'il existe un sous-module filtré-libre de type fini L' de M et un élément non nul f de T_n tel que $fM \subset L'$. D'après le théorème 1, il existe un homomorphisme métrique $\varphi : T_{n-1} \rightarrow T_n$ tel que T_n/fT_n soit un T_{n-1} -module filtré-libre de type fini; l'hypothèse de récurrence montre que M/L' est un T_{n-1} -module filtré admissible.

(1) Un résultat semblable a été publié récemment par L. Gerritzen et U. Guntzer [Inv. Math., t. 2 (1967)].

Soit $u'' : L'' \rightarrow M$ un morphisme de T_n -modules filtrés tel que L'' soit filtré-libre de type fini et que $\text{gr}(u'')$ soit surjectif [un tel morphisme existe parce que $\text{gr}(M)$ est de type fini sur $\text{gr}(T_n)$]. Comme M/L' est un T_{n-1} -module filtré admissible, il résulte du lemme 4 du paragraphe II que u'' induit un épimorphisme strict de L'' sur M/L' .

Désignons par L la somme directe $L' \oplus L''$ et par u le morphisme de L dans M qui coïncide avec l'inclusion sur L' et avec u'' sur L'' ; il est clair que u est un épimorphisme strict, d'où le corollaire.

2. LE THÉORÈME DE GERRITZEN.

PROPOSITION 2. — *Soit L un T_n -module complet-libre; pour tout sous-module M de type fini de L , la topologie induite sur M par la filtration de L est la topologie canonique de M .*

Démonstration. — Comme L est complet-libre, il existe une famille $(D_i)_{i \in I}$ de sous-modules filtrés de L telle que L soit isomorphe au complété de la somme directe des D_i et que chaque D_i devienne isomorphe à T_n après décalage de la filtration.

Pour toute partie finie J de I , soit L_J la somme directe de $(D_i)_{i \in J}$ et soit p_J le projecteur évident de L sur L_J .

Soit M un sous-module de type fini de L ; il existe une partie finie J de I telle que $M \cap \text{Ker}(p_J) = M_J$ soit nul. En effet, la famille (M_J) est filtrante décroissante d'intersection nulle et, si $J \subset J'$, $M_J/M_{J'}$ est sans torsion; le rang de M_J est donc une fonction strictement décroissante de M_J , ce qui prouve que la suite s'arrête.

Si $M_J = 0$, la restriction de p_J à M est un monomorphisme; mais la topologie induite par L sur $p_J(M)$ est la topologie canonique, puisque la topologie de L_J est canonique; donc la restriction de p_J à M est même un monomorphisme strict de modules topologiques (§ II, corollaire de la proposition 1), d'où la proposition.

COROLLAIRE. — *Soit E un K -espace de Banach; posons $T_n(E) = T_n \hat{\otimes} E$ (espace des fonctions strictement holomorphes du polydisque unité fermé dans E). Tout sous- T_n -module de type fini de $T_n(E)$ est fermé.*

Soit M un sous-module de type fini de $T_n(E)$; il existe un sous-espace fermé F de E , admettant une suite totale, tel que M soit contenu dans l'image de $T_n(F)$. On est donc ramené au cas où E lui-même admet une suite totale. D'après [11] (§ I, prop. 3), E a une topologie de K -module complet-libre; il suffit maintenant d'appliquer la proposition 2.

THÉORÈME 2 (Gerritzen). — *Le corps de fractions valué K_n de T_n est excellent.*

Démonstration. — On veut prouver que le complété \hat{K}_n de K_n est une extension séparable de K_n ; on peut se borner au cas où la caractéristique p de K_n n'est pas nulle, et il faut voir que les extensions \hat{K}_n et $K_n^{p^{-1}}$ de K_n sont linéairement disjointes. D'après le paragraphe II (remarques suivant le lemme 1), il suffit de voir que le K_n -module valué $K_n^{p^{-1}}$ est spécial.

Pour cela, on vérifie que tout sous- T_n -module de type fini de $T_n^{p^{-1}}$ est fermé; cela résulte du corollaire de la proposition 3, puisque $T_n^{p^{-1}}$ est somme directe finie de T_n -modules valués isomorphes à $T_n(K^{p^{-1}})$; d'où le théorème.

COROLLAIRE 1 [8]. — *Soit A une K-algèbre topologiquement de type fini et réduite. Il existe sur A une filtration multiplicative unique (la « filtration spectrale » de A) qui soit compatible avec la topologie de A.*

Soit $u : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'algèbres topologiquement de type fini et réduites; alors u augmente la filtration spectrale.

L'unicité a été démontrée par Tate ([20], th. 5.1) : on remarque que si la filtration de A est multiplicative, les éléments de filtration > 0 sont exactement les éléments topologiquement nilpotents. Le même argument prouve la dernière assertion du corollaire.

Pour prouver l'existence, on se ramène immédiatement au cas où A est intègre. Soit $\varphi : T_n \rightarrow A$ un monomorphisme topologique strict munissant A d'une structure de T_n -module de type fini (l'existence de A résulte du lemme de normalisation, cf. [20], th. 4.4); soit L le corps de fractions de A; il est muni d'une structure d'extension finie de K_n et, comme tel, d'une filtration spectrale (cf. § II, n° 2). Comme le corps K_n est excellent, cette filtration définit la topologie canonique du K_n -module L, donc sa restriction à A définit la topologie canonique du T_n -module A; celle-ci coïncide évidemment avec la topologie initiale de A, puisque A est complet; d'où le corollaire.

COROLLAIRE 2 (principe du maximum). — *Soient A une algèbre topologiquement de type fini et réduite, ω la filtration spectrale de A, f un élément non nul de A; il existe un idéal maximal x de A tel que $\omega(f) = \nu(f(x))$.*

(On rappelle ([20], th. 4.5) que tout idéal maximal de A est fermé et de codimension finie dans A; pour un tel idéal maximal x , on désigne par $f(x)$ l'image de f dans A/x et par ν la valuation canonique de A/x ; d'après le corollaire 1, on a toujours $\omega(f) \leq \nu(f(x))$, d'où le nom de « principe du maximum ».)

Dans le cas où $A = T_n$, la filtration spectrale coïncide avec la valuation définie au début de ce paragraphe et le corollaire résulte immédiatement du théorème 6.4 de [20]. Passons au cas général; on se ramène tout de suite au cas où A est intègre; on choisit alors, comme dans le corollaire 1,

un monomorphisme topologique strict fini $\varphi : T_n \rightarrow A$ et l'on désigne par L le corps de fractions de A . Soient L' une extension finie quasigaloisienne de K_n contenant L et soit B la sous- K -algèbre de L' engendrée par les conjugués de A dans L' (qui est une A -algèbre finie, donc une K -algèbre topologiquement de type fini); il suffit évidemment de prouver le corollaire pour B .

Soit $P = X^q + a_1 X^{q-1} + \dots + a_q$ le polynôme minimal de f sur K_n ; comme T_n est intégralement clos (c'est bien connu et facile) les a_i appartiennent à T_n ; en outre, la démonstration du corollaire 1 montre que

$$w(f) = \inf_i (v(a_i)/i).$$

Choisissons i tel que $v(a_i) = i \cdot v(f)$; soit y un idéal maximal de T_n tel que $v(a_i) = v(a_i(y))$. Si x est un idéal maximal de B au-dessus de y , un calcul simple montre qu'il existe un conjugué g de f tel que $w(g) = v(g(x))$; le corollaire en résulte immédiatement.

3. EXTENSION D'UN THÉORÈME DE GRAUERT-REMMERT. — On s'intéresse au problème suivant : soit A une K -algèbre topologiquement de type fini et réduite, munie de sa filtration spectrale; A est-elle filtré-noethérienne ? Je ne connais pas la réponse dans le cas général. Dans le cas où le corps de base est algébriquement clos, Grauert et Remmert [9] ont démontré un théorème de finitude qui implique une réponse affirmative. En utilisant la même méthode, on va prouver un théorème analogue dans le cas où le corps de base est *stable* (§ II, n° 2).

PROPOSITION 3. — Soit Q le corps de fractions rationnelles $K(X_1, \dots, X_n)$ muni de la valuation induite par K_n ; soit L une extension finie de Q , munie de sa filtration spectrale. Pour que L soit un Q -module filtré-libre, il faut et il suffit que tout sous- K -module filtré de rang fini de L soit filtré-libre [i. e. que le K -module filtré L vérifie la condition (IL), cf. § II].

Démonstration. — La condition est nécessaire, puisque Q vérifie (IL). Pour prouver qu'elle est suffisante, on va utiliser une variante du « passage au gradué associé ».

Soit \bar{K} le corps de fractions de $\text{gr}(K)$; on désigne par $E \mapsto \bar{E}$, $u \mapsto \bar{u}$, le foncteur de la catégorie des K -modules filtrés dans la catégorie des \bar{K} -espaces vectoriels obtenu en composant le foncteur gr et le produit tensoriel par \bar{K} sur $\text{gr}(K)$.

LEMME 1. — Soit E un K -module filtré de rang fini; pour que E soit filtré-libre, il faut et il suffit que $\text{rg}(E : K) = \text{rg}(\bar{E} : \bar{K})$.

En effet, il existe une base graduée de $\text{gr}(E)$ sur $\text{gr}(K)$ de cardinal $\text{rg}(\bar{E} : \bar{K})$; comme une telle base se remonte en une famille « filtrée-libre » de E , le lemme est trivial. (Noter qu'il est inutile de supposer K complet.)

On aura besoin de petits préliminaires de géométrie algébrique. Oublions provisoirement la valuation de K . Soit R l'anneau de polynômes $K[X_1, \dots, X_n]$; on munit Q de l'unique valuation discrète d qui associe, à un élément de R , l'opposé de son degré total. On désigne encore par d la filtration spectrale correspondante de L .

Soit A un sous-anneau de L , de corps de fractions L , contenant R et entier sur R ; posons, pour tout $r \in \mathbf{R}_+$:

$$A_r = \{f \in A \mid d(f) \geq -r\}.$$

C'est un sous- K -espace vectoriel de L .

LEMME 2. — Soit p le rang de L sur Q ; il existe un nombre réel $a \geq 0$ tel qu'on ait, pour tout $r \in \mathbf{R}_+$:

$$p \cdot ([r - a])^n \leq \text{rg}(A_r : K) \leq p \cdot ([r + 1])^n.$$

Pour prouver l'inégalité de gauche, choisissons une base $(e_i)_{1 \leq i \leq p}$ de L sur Q , contenue dans B ; posons

$$a = -\inf(d(e_i)).$$

Soit P un monôme de R de degré $\leq ([r - a])$: il est clair que Pe_i appartient à A_r . Lorsque P parcourt l'ensemble des monômes de R de degré $\leq ([r - a])$ et i parcourt $[1, p]$, (Pe_i) parcourt une famille de B_r libre sur K et de cardinal $p \cdot ([r - a])^n$, d'où l'inégalité.

Pour prouver l'inégalité de droite, posons

$$L_r = \{f \in L \mid d(f) \geq -r\}$$

et remarquons que, pour $r \in \mathbf{N}$, on a l'égalité

$$\text{rg}(L_r/L_0 : K) = p' \cdot r^n,$$

où p' désigne le rang de $\text{gr}(L)$ sur $\text{gr}(Q)$; on a évidemment $p' \leq p$.

Comme A_r est nul pour $r < 0$ (parce que A est entier sur R), on a évidemment

$$\text{rg}(A_r : K) \leq \text{rg}(L_r/L_0 : K) \leq p' \cdot ([r + 1])^n.$$

Ceci n'est possible que si $p' = p$; le lemme en résulte.

On utilisera le lemme 2 sous la forme

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} (\text{rg}(A_r : K) / r^n) = p.$$

Faisons maintenant intervenir la valuation de K . Notons que

$$\begin{aligned}\bar{R} &= \bar{K}[X_1, \dots, X_n], \\ \bar{Q} &= \bar{K}(X_1, \dots, X_n),\end{aligned}$$

\bar{L} est une Q -algèbre commutative finie et semi-simple.

Pour prouver la proposition 3, il suffit de vérifier l'inégalité

$$\text{rg}(L : Q) \leq \text{rg}(\bar{L} : \bar{Q}).$$

Soit A la fermeture intégrale de R dans L ; avec les notations du lemme 2, on a

$$\text{rg}(A_r : K) = \text{rg}(\bar{A}_r : \bar{K})$$

puisque, d'après l'hypothèse sur L , A_r est un K -module filtré-libre. Moyennant le lemme 2, la proposition 3 résulte donc du lemme suivant :

LEMME 3. — \bar{A} est entier sur \bar{R} et \bar{A}_r est contenu dans $(\bar{A})_r$.

(Pour rendre correct cet énoncé, il faut dire que le lemme 2 reste vrai lorsque L est une Q -algèbre semi-simple, ce qui est trivial puisqu'une algèbre commutative semi-simple est composée directe d'un nombre fini de corps.)

Soient f un élément non nul de A , g l'élément de degré $\nu(f)$ de $\text{gr}(A)$ correspondant à f , $P = X^q + a_1 X^{q-1} + \dots + a_q$ le polynôme minimal de f sur Q ; comme R est intégralement clos, les a_i appartiennent à R . Par définition, on a

$$\nu(f) = \inf(\nu(a_i)/i).$$

Soit a'_i l'élément de degré $i \cdot \nu(f)$ de $\text{gr}(R)$ correspondant à a_i ; posons $P' = X^q + a'_1 X^{q-1} + \dots + a'_q \in \bar{R}[X]$; par construction, $P'(g) = 0$. On en conclut que g est entier sur \bar{R} , d'où la première assertion du lemme. D'autre part,

$$d(g) \geq \inf(d(a'_i)/i) \geq \inf(d(a_i)/i) = d(f)$$

en sorte que la relation $d(f) \geq -r$ implique $d(g) \geq -r$, d'où la seconde assertion du lemme.

THÉORÈME 3. — Si le corps valué K est stable, il en est de même des corps valués K_n .

Démonstration. — Puisque le corps valué K_n est excellent, il suffit de vérifier que \hat{K}_n est stable, i. e. que la clôture algébrique de \hat{K}_n (munie de sa valuation canonique) vérifie la condition (IL). Comme la clôture séparable de \hat{K}_n est dense dans sa clôture algébrique (lemme de continuité des racines) il suffit de vérifier que toute extension finie séparable de \hat{K}_n

est un \hat{K}_n -module filtré-libre. D'après le lemme de Krasner, toute extension finie séparable de \hat{K}_n s'obtient en complétant une extension séparable de \mathbb{Q} linéairement disjointe de \hat{K}_n , munie de sa filtration spectrale. Moyennant la proposition 3, le théorème 3 est donc conséquence du lemme suivant :

LEMME 4. — *On suppose que le corps valué K est stable. Soit A une algèbre topologiquement de type fini et réduite sur K , munie de sa filtration spectrale. Le K -module filtré sous-jacent à A vérifie (IL).*

Soit X l'ensemble des idéaux maximaux de A ; pour tout $x \in X$, munissons l'extension finie A/x de K de sa valuation canonique. La filtration spectrale de A est induite par l'injection canonique de A dans $\prod_{x \in X} A/x$.

Pour prouver le lemme, il suffit de vérifier que tout sous-espace vectoriel de rang 1 de A est facteur direct en tant que sous- K -module filtré. Soit $D = Kf$ un tel sous-espace. D'après le corollaire 2 du théorème 2, il existe $x \in X$ tel que $\nu(f(x)) = \nu(f)$; le morphisme canonique de D dans A/x est donc un monomorphisme strict (de K -modules filtrés) et il suffit de voir que c'est un monomorphisme direct, ce qui résulte du fait que A/x est un K -module filtré-libre.

COROLLAIRE. — *On suppose que le corps valué K est stable.*

1° *Toute K -algèbre topologiquement de type fini et réduite est filtrée-noethérienne pour sa filtration spectrale.*

2° *Soit $u : A \rightarrow B$ un morphisme fini de K -algèbres topologiquement de type fini et réduites. Munissons A et B de leurs filtrations spectrales; alors B est un A -module filtré admissible.*

On sait déjà que T_n est filtrée-noethérienne, et l'on se ramène sans difficulté à prouver 2° dans le cas où $A = T_n$, où u est injectif et où B est intègre.

Soit L le corps de fractions de B , considéré comme une extension finie de K_n ; la filtration spectrale de B est induite par la filtration spectrale de L . Comme L est un K_n -module filtré-libre d'après le théorème 3, B est un T_n -module admissible, d'où le corollaire.

Remarque. — L'assertion 2° du corollaire précédent est fautive si le corps K n'est pas stable, puisqu'un K -module filtré est admissible si et seulement s'il est filtré libre de type fini.

Il existe des corps valués complets non stables, par exemple le corps construit dans [5] (chap. VI, § 8, ex. 2).

IV. — Fibrés vectoriels sur un polydisque fermé.

1. LA SUITE EXACTE DES \mathbf{K} ASSOCIÉE AU FONCTEUR gr . — Soit A un anneau commutatif complet pour une filtration réelle.

On désigne par C la sous-catégorie pleine de la catégorie des A -modules à gauche filtrés, dont les objets sont les facteurs directs de modules filtrés-libres de type fini. On désigne de même par C' la sous-catégorie pleine de la catégorie des $(\text{gr}(A))$ -modules à gauche gradués de type \mathbf{R} , formée des objets projectifs de type fini.

On peut associer au foncteur $\text{gr} : C \rightarrow C'$ une « suite exacte des \mathbf{K} » ; en effet, les assertions suivantes sont immédiates :

— pour tout couple (P, Q) d'objets de C , le foncteur gr induit un épimorphisme de $\text{Hom}(P, Q)$ sur $\text{Hom}(\text{gr}(P), \text{gr}(Q))$;

— tout objet de C' est isomorphe à un facteur direct de l'image par gr d'un objet de C .

On obtient alors un résultat simple, analogue au résultat énoncé dans [1] (p. 37, exemple 2) :

PROPOSITION 1. — (i) *L'homomorphisme canonique*

$$\mathbf{K}^0(\text{gr}) : \mathbf{K}^0(C) \rightarrow \mathbf{K}^0(C')$$

est bijectif.

(ii) *Il existe une suite exacte*

$$0 \rightarrow U(A) \rightarrow \mathbf{K}^1(C) \rightarrow \mathbf{K}^1(C') \rightarrow 0,$$

où $U(A)$ désigne le groupe multiplicatif des éléments f de A tels que $v(f-1) > 0$.

Démonstration. — Pour prouver que $\mathbf{K}^0(\text{gr})$ est surjectif, il suffit de vérifier que tout objet de C' est isomorphe à l'image par gr d'un objet de C , ce qui résulte du lemme suivant :

LEMME 1. — *Soient L un A -module filtré-libre de type fini, q un projecteur de $\text{gr}(L)$ (homogène de degré 0) ; il existe un projecteur p de L (augmentant la filtration) tel que $q = \text{gr}(p)$.*

Soit g un endomorphisme du A -module filtré-libre L tel que $q = \text{gr}(p)$; soit B le plus petit sous-anneau fermé de $\text{End}(L)$ contenant g . L'anneau B est commutatif ; sa filtration est à valeurs positives ; elle définit donc sur B une structure d'anneau linéairement topologisé, séparé et complet. L'idéal m de B , formé des éléments de filtration > 0 , est fermé et ses éléments sont topologiquement nilpotents ; en outre, m contient $g^2 - g$.

Appliquons [5] (chap. III, § 4, lemme 2) : on trouve un idempotent p de B tel que $p - g \in m$; il répond à la question.

Pour montrer que $\mathbf{K}^0(\text{gr})$ est injectif et que $\mathbf{K}^1(\text{gr})$ est surjectif, il suffit de vérifier que, pour tout couple (P, Q) d'objets de C , tout isomorphisme de $\text{gr}(P)$ sur $\text{gr}(Q)$ est image par gr d'un isomorphisme de P sur Q .

Soient $j : \text{gr}(P) \rightarrow \text{gr}(Q)$ et $j' : \text{gr}(Q) \rightarrow \text{gr}(P)$ deux isomorphismes inverses l'un de l'autre, $g : P \rightarrow Q$ et $g' : Q \rightarrow P$ des morphismes relevant respectivement j et j' ; alors $\text{gr}(1 - gg') = 0 = \text{gr}(1 - g'g)$; par suite, $(1 - gg')$ et $(1 - g'g)$ sont contractants ⁽¹⁾, donc g et g' sont des isomorphismes.

Pour calculer le noyau de $\mathbf{K}^1(\text{gr})$, on utilise le lemme suivant :

LEMME 2. — Soient L un A -module filtré-libre de type fini, $(e_i)_{1 \leq i \leq p}$ une base filtrée de L , G le groupe des automorphismes u de L tels que $(1 - u)$ soit contractant. Alors G est engendré par les éléments $(1 + aE_{ij})$ ($1 \leq i, j \leq p$, $\nu(a) > \nu(e_i) - \nu(e_j)$).

Raisonnons par récurrence sur p , le cas $p = 1$ étant trivial. Pour qu'un élément u de $\text{Aut}(L)$ appartienne à G , il faut et il suffit que sa matrice (u_{ij}) vérifie les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \nu(u_{ij}) &> \nu(e_i) - \nu(e_j) \quad (i \neq j), \\ \nu(1 - u_{ii}) &> 0. \end{aligned}$$

Soit G' le sous-groupe de G engendré par les éléments ci-dessus; modulo G' , on transforme u selon le schéma suivant :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n1} & u_{n2} & \dots & u_{nn} \end{pmatrix} &\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & u'_{12} & \dots & u'_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n1} & u_{n2} & \dots & u_{nn} \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ u_{21} & u'_{22} & \dots & u'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n1} & u'_{n2} & \dots & u'_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u'_{22} & \dots & u'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & u'_{n2} & \dots & u'_{nn} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} u'_{1j} &= u_{1j}^{-1} \cdot u_{1j} \quad (j \neq 1), \\ u'_{ij} &= u_{ij} - u_{i1} \cdot u_{1j} \quad (i \neq 1, j \neq 1). \end{aligned}$$

L'hypothèse de récurrence permet de conclure.

Ceci étant, le lemme 1.2 de ([1], chap. I) montre que tout élément de $\text{Ker}(\mathbf{K}^1(\text{gr}))$ provient d'un élément f de A tel que $\nu(f - 1) > 0$; la considération du déterminant usuel montre que le noyau est exactement $U(A)$. La proposition en résulte.

⁽¹⁾ Cf. p. 60, note ⁽¹⁾.

2. PASSAGE DES A-MODULES FILTRÉS AUX A-MODULES. — Dans ce numéro, on désigne par A une K -algèbre de Banach filtrée-noethérienne commutative, par $\text{Adm}(A)$ la catégorie des A -modules filtrés admissibles (munie de la classe des suites exactes courtes de modules filtrés) et par $\text{Gr}(A)$ la catégorie des $(\text{gr}(A))$ -modules de type fini, gradués de type \mathbf{R} .

On suppose vérifiée la condition de régularité suivante :

(R) La catégorie abélienne $\text{Gr}(A)$ est de dimension homologique finie.

PROPOSITION 2. — *Sous les hypothèses précédentes :*

(i) La catégorie $\text{Adm}(A)$ est de dimension homologique finie (pour sa classe de suites exactes courtes);

(ii) L'anneau noethérien A est régulier;

(iii) L'homomorphisme canonique de $\mathbf{K}^0(C)$ dans $\mathbf{K}^0(A)$ est surjectif.

[Comme au n° 1, on a désigné par C la sous-catégorie pleine de $\text{Adm}(A)$ formée des objets projectifs.]

Démonstration. — Un A -module filtré admissible M possède une résolution filtrée-libre dans la catégorie $\text{Adm}(A)$:

$$\dots \rightarrow L_{i+1} \rightarrow L_i \rightarrow \dots \rightarrow L_0 \rightarrow M \rightarrow 0.$$

Comme le foncteur $\text{gr} : \text{Adm}(A) \rightarrow \text{Gr}(A)$ est exact (§ II, prop. 2) il transforme cette résolution en une résolution graduée-libre de $\text{gr}(M)$. Il existe par hypothèse un i tel que $\text{Ker}(\text{gr}(d_i)) = \text{gr}(\text{Ker}d_i)$ soit projectif; le lemme 1 et la proposition 2 du paragraphe II montrent alors que $\text{Ker}d_i$ est projectif, d'où (i).

(ii) résulte de (i) puisque tout A -module de type fini est sous-jacent à un module filtré admissible.

(iii) résulte de la même remarque et de la proposition 2 du paragraphe I.

DÉFINITION. — Soit G un groupe abélien filtré. On dit qu'un endomorphisme u du groupe sous-jacent à G est topologiquement nilpotent lorsque c'est un élément topologiquement nilpotent de l'anneau filtré $L(G, G)$ (cf. § II, n° 1, p. 52). On dit qu'un endomorphisme u' du groupe sous-jacent à G est topologiquement unipotent lorsque $(1 - u')$ est topologiquement nilpotent.

(On vérifie tout de suite que, lorsque G est un espace normé sur K , cette définition ne fait intervenir que la topologie de G .)

PROPOSITION 3. — *Soit A une K -algèbre de Banach valuée vérifiant les hypothèses de la proposition 2; supposons que le corps de fractions valué H de A soit excellent (§ II, n° 2).*

Soient L un A -module libre de type fini, u un endomorphisme topologiquement unipotent de L (muni de sa topologie canonique); alors u est un automorphisme de L d'image nulle dans $\mathbf{SK}^1(A)$.

Démonstration. — Comme A est un anneau noethérien régulier, on peut identifier $\mathbf{K}^1(A)$ au déterminant universel de la catégorie des A -modules de type fini (§ I, prop. 2). Cette identification faite, on va prouver un résultat un peu plus général :

Soient M un A -module sans torsion de type fini, u un endomorphisme topologiquement unipotent de M (muni de sa topologie canonique); alors u est un automorphisme de M d'image nulle dans $\mathbf{SK}^1(A)$.

Il est clair que u est un automorphisme de M ; pour montrer que son image dans $\mathbf{SK}^1(A)$ est nulle, on raisonne par récurrence sur le rang p de M (le cas $p=0$ étant trivial). Posons $E = H \otimes_A M$; soit f l'endomorphisme de E déduit de u ; distinguons deux cas :

a. Il existe un sous-espace vectoriel non nul F de E , distinct de E et stable par f . Posons alors $N = F \cap M$; les restrictions de u à N et M/N sont des endomorphismes topologiquement unipotents, et N et M/N sont des A -modules sans torsion de rang $< p$; l'assertion résulte de l'hypothèse de récurrence et de l'additivité du déterminant universel.

b. Le seul sous-espace vectoriel non nul de E stable par u est E . Soit alors H' la sous- H -algèbre de $\text{End}(E)$ engendrée par u ; c'est un corps commutatif, extension finie de H , et E est un H' -espace vectoriel de rang 1. La filtration spectrale de H' est > 0 en $(1-f)$ et elle définit la topologie canonique de H' (puisque le corps évalué H est excellent). D'après [11] (§ I, prop. 3), on peut approcher la filtration spectrale de H' par des filtrations libres de H -espace vectoriel. Il existe donc sur M une structure de A -module filtré admissible pour laquelle $(1-u)$ soit un endomorphisme contractant.

Soit

$$0 \rightarrow P_r \rightarrow P_{r-1} \rightarrow \dots \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

une résolution projective finie de M dans $\text{Adm}(A)$ et soit $v = (v_i)$ un endomorphisme contractant du complexe $P = (P_i)$ induisant $(1-u)$ sur M ; posons $u_i = 1 - v_i$. D'après l'additivité du déterminant universel, l'image de u dans $\mathbf{SK}^1(A)$ est contenue dans le sous-groupe engendré par les images des u_i ; ce sous-groupe est nul d'après le lemme 2, d'où la proposition.

Remarque. — On peut raffiner la conclusion de la proposition 3 si l'on suppose en outre que le corps valué H est stable. De façon précise, sup-

posons que u soit un automorphisme de L dont le polynôme caractéristique $P = X^p + a_1 X^{p-1} + \dots + a_p$ vérifie la condition suivante :

$$v(a_i)/i \geq v(a_p)/p \quad (1 \leq i \leq p)$$

(c'est toujours le cas lorsque u est topologiquement unipotent). On montre alors que l'image de u dans $\mathbf{K}^1(A)$ appartient à l'image du morphisme canonique de $\mathbf{K}^1(\text{Adm}(A))$ dans $\mathbf{K}^1(A)$; la démonstration est semblable à celle de la proposition 3.

Par contre, j'ignore si le morphisme canonique de $\mathbf{K}^1(\text{Adm}(A))$ dans $\mathbf{K}^1(A)$ est surjectif.

3. EFFET DU PRODUIT PAR UN DISQUE. — Soit A un anneau commutatif complet pour une filtration réelle et soit $r \in \mathbf{R}$. On désigne par B la A -algèbre des séries formelles à coefficients dans A :

$$f = \sum_{i \in \mathbf{N}} a_i X^i$$

telles que $(v(a_i) + ir)$ tende vers $+\infty$ avec i ; cette algèbre est complète pour la filtration réelle

$$f \mapsto \inf_{i \in \mathbf{N}} (v(a_i) + ir).$$

On munit la A -algèbre B de l'augmentation vers A qui transforme f en son terme constant. Appliquant les foncteurs \mathbf{SK} , on trouve des monomorphismes directs

$$k_i: \mathbf{SK}^i(A) \rightarrow \mathbf{SK}^i(B) \quad (i = 0, 1).$$

PROPOSITION 4. — *Tout élément du conoyau de k_1 est l'image d'un élément topologiquement unipotent de $\text{GL}(B)$.*

[On dit qu'un élément de $\text{GL}(B)$ est topologiquement unipotent s'il provient d'un élément de $\text{GL}(p, B)$ qui est un endomorphisme topologiquement unipotent du B -module filtré B^p .]

Démonstration. — On suit la démonstration du théorème 2 de [6]. Soit $u \in \text{GL}(p, B)$; on dit que u est polynômial (resp. affine) lorsque ses coefficients sont des polynômes (resp. des polynômes de degré ≤ 1).

a. Réduction au cas polynômial. — L'ensemble des éléments polynômiaux de $\text{GL}(p, B)$ est dense dans $\text{GL}(p, B)$ [en effet, l'ensemble des matrices à coefficients polynômiaux est dense dans $M(p, B)$ et $\text{GL}(p, B)$ est ouvert dans $M(p, B)$]. D'après le lemme 2, le sous-groupe $\text{GE}(p, B)$ de $\text{GL}(p, B)$ est ouvert, donc tout élément de $\mathbf{SK}^1(B)$ provient d'un élément polynômial.

b. Réduction au cas affine. — Soit $u = a_0 + a_1 X + \dots + a_d X^d$ un élément polynômial de $GL(p, B)$; considérons l'élément suivant de $GL(p(d+1), B)$:

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{d-1} & a_d \\ -X & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & -X & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 & u_1 & \dots & u_{d-1} & u_d \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -X & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & -X & 1 \end{pmatrix},$$

où l'on a posé $u_i = a_i + a_{i+1} X + \dots + a_d X^{d-i}$. C'est un élément affine, et sa classe dans $\mathbf{K}^1(B)$ est égale à celle de u . En particulier, tout élément de $\mathbf{SK}^1(B)$ provient d'un élément affine.

c. Fin de la preuve. — Tout élément de $\text{Coker} k_1$ est l'image d'un élément affine $u = a_0 + a_1 X$ de $GL(p, B)$. L'image de u par l'augmentation de B vers A est a_0 qui appartient donc à $GL(p, A)$. Posons $b = a_0^{-1} \cdot a_1$; l'élément $1 + bX$ de $GL(p, B)$ a même image que u dans $\text{Coker} k_1$.

Puisque $1 + bX$ est inversible, la série formelle inverse

$$1 - bX + \dots + (-1)^n b^n X^n + \dots$$

converge dans $M(p, B)$ vers l'inverse de $1 + bX$; ceci implique que bX soit topologiquement nilpotent, d'où la proposition.

4. EFFET DU PRODUIT PAR UNE CIRCONFÉRENCE. — Soit A un anneau commutatif complet pour une filtration réelle; on désigne par C l'algèbre des séries de Laurent à coefficients dans A :

$$f = \sum_{i \in \mathbf{Z}} a_i \cdot X^i$$

telles que $\nu(a_i)$ tende vers $+\infty$ avec $|i|$; l'algèbre C est complète pour la filtration réelle

$$f \mapsto \inf_{i \in \mathbf{Z}} (\nu(a_i)).$$

On désigne par B la sous-algèbre de C formée des séries $\sum_{i \in \mathbf{N}} a_i \cdot X^i$.

a. L'homomorphisme $h : \mathbf{K}^1(C) \rightarrow \mathbf{K}^0(A)$. — Soient p un entier et L le C -module filtré C^p ; on désigne par L_+ (resp. L_-) le sous- A -module filtré de L dont les éléments s'écrivent $\sum_{i \geq 0} a_i \cdot X^i$ (resp. $\sum_{i < 0} a_i \cdot X^i$); le A -module filtré L est somme directe de L_+ et L_- .

Soit u un automorphisme du C -module L ; on lui associe un complexe C_u de A -modules. Les composantes de C_u sont nulles, sauf en degrés 0 et 1

où elles sont égales à L . La différentielle $d_u : L \rightarrow L$ coïncide avec u sur L_+ et avec l'inclusion sur L_- ; c'est une application A -linéaire continue.

(Interprétation : la droite projective de A étant définie par recollement de deux « disques » le long d'une « circonférence », l'automorphisme u définit un fibré vectoriel sur la droite projective : on recolle par u , le long de la circonférence, les fibrés triviaux de rang p sur les disques. Le complexe $C_{(X,u)}$ est le complexe de cochaînes associé au recouvrement précédent et au faisceau localement libre associé à ce fibré vectoriel.)

PROPOSITION 5. — Soit u un automorphisme de L . Il existe un entier q tel qu'on ait, pour tout entier $n < q$:

(A) $H^0(C_{(X^n, u)})$ est un A -module projectif de type fini dont la projection sur L_+ engendre L_+ comme B -module;

(B) $H^1(C_{(X^n, u)}) = 0$.

Démonstration. — On va s'appuyer sur un lemme dû à C. Houzel (non publié). Soit G le sous-groupe de $GL(p, C)$ formé des éléments u tels que $(1 - u)$ soit contractant; soit G_+ (resp. G_-) le sous-groupe de G formé des éléments qui s'écrivent $\sum_{i \geq 0} a_i \cdot X^i$ (resp. $1 + \sum_{i < 0} a_i \cdot X^i$).

LEMME 3 (Houzel). — L'application $(u, v) \mapsto vu$ est une bijection de $G_+ \times G_-$ sur G .

(En particulier, tout élément de G définit un fibré trivial.)

Pour ne pas compliquer les notations, on va raisonner dans le cas où $p = 1$; comme le raisonnement n'utilise pas l'hypothèse que A est commutatif, il vaut tel quel dans le cas général.

Soit $f \in G$; on va construire par récurrence une suite de Cauchy (g_n, h_n) de $G_+ \times G_-$ telle que $h_n g_n$ tende vers f . Posons $g_0 = 1 = h_0$. Supposons construits h_n et g_n ; soit (r_n, s_n) l'unique couple de $C_+ \times C_-$ qui vérifie la condition suivante :

$$f - h_n g_n = h_n r_n + s_n g_n$$

(l'existence et l'unicité de ce couple résultent du fait que, puisque $g_n \in G_+$ et $h_n \in G_-$, l'application $(r, s) \mapsto h_n r + s g_n$ est une isométrie de $C_+ \times C_-$ sur C). On a l'égalité :

$$(1) \quad v(f - h_n g_n) = \inf(v(r_n), v(s_n)).$$

Posons alors $g_{n+1} = g_n + r_n$ et $h_{n+1} = h_n + s_n$; d'après (1), le couple (g_{n+1}, h_{n+1}) appartient à $G_+ \times G_-$; on a, par construction,

$$f - h_{n+1} g_{n+1} = s_n r_n,$$

d'où l'inégalité

$$(2) \quad v(f - h_{n+1} g_{n+1}) \geq 2v(f - h_n g_n).$$

La construction est donc possible et (1) et (2) entraînent, par récurrence sur n , les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} v(g_{n+1} - g_n) &\geq 2^n \cdot v(1 - f), \\ v(h_{n+1} - h_n) &\geq 2^n \cdot v(1 - f), \\ v(f - h_n g_n) &\geq 2^n \cdot v(1 - f), \end{aligned}$$

ce qui prouve que (g_n, h_n) est une suite de Cauchy de $G_+ \times G_-$ et que sa limite (g, h) vérifie $hg = f$; d'où le lemme.

Dans la suite de cette démonstration, on dira que deux automorphismes u et u' de L sont équivalents s'il existe deux automorphismes g et h de L vérifiant les conditions suivantes :

- $u' = hug$;
- g laisse stable L_+ et induit un automorphisme de L_+ ;
- h laisse stable L_- et induit un automorphisme de L_- .

(Interprétation : u et u' définissent deux fibrés vectoriels isomorphes.) On vérifie tout de suite que si u et u' sont équivalents, les complexes C_u et $C_{u'}$ sont isomorphes.

LEMME 4. — *Il existe un entier q et un automorphisme u' de L tels que u' soit équivalent à $X^q u$ et que $L_+ \subset u'(L_+)$.*

La famille $(X^q t)$ (où q parcourt \mathbf{Z} et t parcourt l'ensemble des automorphismes de L à coefficients dans B) est dense dans $GL(L)$; il existe donc un couple (q, t) tel que $1 - X^q ut$ soit contractant. D'après le lemme 4, on peut écrire

$$X^q ut = hg,$$

où $(1 - g)$ et $(1 - h)$ sont contractants, $g(L_+) = L_+$ et $h(L_-) = L_-$. Il suffit de poser $u' = gt^{-1}$.

On peut maintenant prouver la proposition 5 pour u et pour l'entier q défini dans le lemme 4.

1° Prouvons d'abord (B); on va prouver en fait un résultat plus fort, qui sera utile plus loin. Désignons par T la catégorie des A -modules filtrés complets [on convient que $\text{Hom}_T(M, M')$ est le groupe sous-jacent au module filtré $L(M, M')$, cf. § II, n° 1, p. 52]. On va prouver que $d_{(X^q u)}$ est un épimorphisme direct de T . Il est clair que c'est un morphisme de T ; avec les notations du lemme 4, il suffit de prouver que d_u est un épimorphisme direct de T ; mais, puisque $L_+ \subset u'(L_+)$, $d_{(u^{-1})}$ est un inverse à droite de d_u , comme il résulte du lemme trivial suivant :

LEMME 5. — *Soient ω et ω' deux automorphismes de L ; si $\omega(L_+) \subset L_+$ alors $d_{(\omega'\omega)} = d_{\omega'} \circ d_{\omega}$.*

2° Prouvons que $H^0(C_{(X^n u)})$ est un A -module projectif de type fini. Il suffit de prouver que $H^0(C_u)$ est un A -module projectif de type fini. D'après 1°, il existe un entier $m \geq 0$ tel que $d_{(X^m u)^{-1}}$ soit un épimorphisme direct de T ; d'après le lemme 5, on a

$$d_{(u'^{-1})} = d_{(X^m u)^{-1}} \circ d_{(X^m)},$$

où $d_{(u'^{-1})}$ et $d_{(X^m)}$ sont des monomorphismes directs de T ; il en résulte une suite exacte scindée de T :

$$0 \rightarrow H^0(C_{(X^m u)^{-1}}) \rightarrow H^1(C_{(X^m)}) \rightarrow H^1(C_{(u'^{-1})}) \rightarrow 0.$$

On vérifie tout de suite que $H^1(C_{(X^m)})$ est un A -module libre de rang mp ; il en résulte que $H^1(C_{(u'^{-1})})$ est un A -module projectif de type fini, donc aussi $H^0(C_u)$ qui lui est isomorphe.

3° Pour tout automorphisme φ de L , notons $M(\varphi)$ la projection de $H^0(C_u)$ sur L_+ ; c'est le sous- A -module $L_+ \cap \varphi^{-1}(L_-)$ de L_+ . Pour achever la preuve de la proposition 5, il suffit de vérifier qu'avec les notations du lemme 4, $M(X^{-1}u')$ engendre le B -module L_+ . Comme $L_+ \subset u'(L_+)$, les assertions suivantes sont évidentes :

- le A -module L_+ est somme directe de $M(u')$ et de $u'^{-1}(L_+)$;
- $M(X^{-1}u')$ contient $M(u')$ et $u'^{-1}(M(X^{-1}))$.

Il suffit donc de vérifier que $u'^{-1}(M(X^{-1}))$ engendre $u'^{-1}(L_+)$ comme B -module, i. e. que $M(X^{-1})$ engendre L_+ comme B -module, ce qui est évident.

C. Q. F. D.

Remarque. — Lorsqu'on interprète le résultat précédent en termes de fibrés vectoriels sur la « droite projective », il apparaît comme un cas particulier du « théorème fondamental des morphismes projectifs ».

Dans le cas où A est une algèbre topologiquement de type fini, la proposition 5 se déduit des résultats généraux de [15]; d'autre part, Kiehl utilise dans [14] une variante de la proposition 5 pour prouver ses théorèmes A et B.

On va se servir de la proposition 5 pour construire un homomorphisme $h : \mathbf{K}^1(C) \rightarrow \mathbf{K}^0(A)$. On définit d'abord une application h_p de $GL(p, C)$ dans $\mathbf{K}^0(A)$, en associant à un élément u de $GL(p, C)$ la « caractéristique d'Euler-Poincaré » du complexe $C(u)$: si n est un entier vérifiant les conditions (A) et (B) de la proposition 5 relativement à u , on pose

$$h_p(u) = \gamma(H^0(C_{(X^n u)})) + n \cdot \gamma(A).$$

Il est clair que cette définition est indépendante du choix de n .

Montrons que l'application h_p est *continue* [lorsqu'on munit $\mathbf{K}^0(A)$ de la topologie discrète]. Pour voir qu'elle est continue en $u \in GL(p, C)$,

on peut se borner au cas où d_u est un épimorphisme direct de la catégorie \mathbf{T} (quitte à multiplier u par une puissance de X); pour v assez voisin de u , d_v est un épimorphisme direct de \mathbf{T} et $\text{Ker } d_v \simeq \text{Ker } d_u$, d'où notre assertion.

Montrons ensuite que h_p est un *homomorphisme de groupes* : pour prouver l'égalité $h_p(vu) = h_p(v) + h_p(u)$, on peut se borner au cas où les coefficients de u sont dans B (en effet, on pourra ensuite prolonger en multipliant par des puissances de X et en utilisant la continuité). Comme dans ce cas $d_{vu} = d_v \circ d_u$ (lemme 5), l'égalité est triviale.

Enfin, il est clair que lorsque p varie, les homomorphismes h_p se prolongent mutuellement, définissant un homomorphisme $h_\infty : \text{GL}(C) \rightarrow \mathbf{K}^0(A)$. Comme $\mathbf{K}^0(A)$ est abélien, cet homomorphisme se factorise par

$$h : \mathbf{K}^1(C) \rightarrow \mathbf{K}^0(A),$$

ce qu'on cherchait.

b. L'homomorphisme $k : \mathbf{K}^0(A) \oplus \mathbf{K}^1(A) \rightarrow \mathbf{K}^1(C)$. — On le définit comme suit : sa restriction à $\mathbf{K}^1(A)$ est déduite de la structure de A -algèbre de C ; pour définir sa restriction à $\mathbf{K}^0(A)$, on associe au A -module projectif de type fini P la classe dans $\mathbf{K}^1(C)$ de l'homothétie de $P \otimes_A C$ de rapport X ; on trouve une application additive de l'ensemble des classes de A -modules projectifs de type fini dans $\mathbf{K}^1(C)$, qu'on favorise par $\mathbf{K}^0(A)$.

L'homomorphisme k est un monomorphisme direct; en effet, soit ε l'augmentation de C vers A de noyau $(1 - X)$; il est clair que le morphisme $\begin{pmatrix} h \\ \mathbf{K}^1(\varepsilon) \end{pmatrix}$ de $\mathbf{K}^1(C)$ dans $\mathbf{K}^0(A) \oplus \mathbf{K}^1(A)$ est un inverse à gauche.

L'homomorphisme k se factorise par un monomorphisme direct

$$\tilde{k} : \mathbf{SK}^0(A) \oplus \mathbf{SK}^1(A) \rightarrow \mathbf{SK}^1(C).$$

PROPOSITION 6. — *Tout élément du conoyau de \tilde{k} est l'image d'un élément topologiquement unipotent de $\text{GL}(C)$.*

Démonstration. — Soit $u \in \text{GL}(p, C)$; on dit que u est *laurentien* (resp. *polynômial*, *affine*) s'il s'écrit $\sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n X^n$ avec $a_n = 0$ pour $|n|$ assez grand (resp. $n < 0$ ou assez grand, $n \neq 0, 1$).

a. Réduction au cas laurentien. — L'ensemble des éléments laurentiens de $\text{GL}(p, C)$ est dense dans $\text{GL}(p, C)$; d'après le lemme 2, le sous-groupe $\text{GE}(p, C)$ de $\text{GL}(p, C)$ est ouvert, donc tout élément de $\mathbf{SK}^1(C)$ provient d'un élément laurentien.

b. Réduction au cas polynômial. — Tout élément laurentien est produit d'un élément polynômial par une puissance de X , donc tout élément de $\mathbf{SK}^1(C)$ provient d'un élément polynômial.

c. Réduction au cas affine. — En raisonnant comme dans la proposition 4, *b*, on vérifie que tout élément polynômial de $GL(C)$ est congru modulo $E(C)$ à un élément affine.

d. Fin de la preuve. — Soit $u = a_0 + a_1 X$ un élément affine de $GL(p, C)$; l'image de u par l'augmentation ε de C vers A est $a_0 + a_1$, qui appartient donc à $GL(A)$. Posons $b_i = (a_0 + a_1)^{-1} \cdot a_i$ ($i = 0, 1$) et $\varpi = b_0 + b_1 X$; alors u et ϖ ont même image dans $\text{Coker } \tilde{k}$.

On va étudier ϖ (noter que $b_0 + b_1 = 1$). Posons $L = C^p$ et $L_0 = A^p$ (on considère L_0 comme plongé dans L).

LEMME 6. — *Il existe une décomposition unique du A-module L_0 :*

$$L_0 = P_0 \oplus Q_0$$

stable par b_0 et b_1 , telle que la restriction de b_0 (resp. b_1) à P_0 (resp. Q_0) soit topologiquement unipotente.

Reprenons les notations de la proposition 5 et posons

$$\begin{aligned} P_0 &= L_0 \cap \varpi(L_+), \\ Q_0 &= L_0 \cap \varpi(L_-). \end{aligned}$$

Comme ϖ est affine, $\varpi(L_+)$ est contenu dans L_+ et $\varpi(L_-)$ est contenu dans $L_- + L_0$; on a donc les décompositions suivantes (dans la catégorie T , par exemple) :

$$\begin{aligned} L &= \varpi(L_+) \oplus \varpi(L_-), \\ L_+ &= Q_0 \oplus \varpi(L_+), \\ L_0 &= Q_0 \oplus P_0. \end{aligned}$$

Comme ϖ commute avec l'extension de b_i à L , la décomposition $L_0 = P_0 \oplus Q_0$ est stable par b_i ($i = 0, 1$).

Soit P le sous- C -module de L engendré par P_0 ; posons

$$P_+ = P \cap L_+ \quad \text{et} \quad P_- = P \cap L_-.$$

On a

$$P_+ = \varpi(P_+) + (P_0 \cap \varpi(P_-))$$

par le même argument que ci-dessus; mais $P_0 \cap \varpi(P_-) = 0$ puisque $P_0 \cap \varpi(L_-) = 0$, donc ϖ induit un automorphisme du B -module P_+ . Un argument identique à celui de la proposition 4, *c*, montre alors que la restriction de b_0 à P_0 est topologiquement unipotente.

Vérifions maintenant que la restriction de b_1 à Q_0 est topologiquement unipotente. Désignons par ϖ' l'endomorphisme $b_1 + b_0 X$ de L et par s l'involution de l'anneau C qui transforme X en X^{-1} ; dans l'anneau des applications A -linéaires de L dans lui-même, on a

$$\varpi' = s(\varpi X^{-1})s,$$

ce qui prouve que ω' est un automorphisme de L ; on lui associe une décomposition $L_0 = P'_0 \oplus Q'_0$.

Il est clair que $\omega'(L_+) = s(\omega(L_-))$ et que $\omega'(L_-) = s(\omega(L_+))$; comme L_0 est invariant par s , on en déduit que $P'_0 = Q_0$ et que $Q'_0 = P_0$. Comme la restriction de b_1 à P'_0 est topologiquement unipotente, le lemme est démontré.

Soient maintenant P le sous-C-module de L engendré par P_0 , Q le sous-C-module de L engendré par Q_0 ; il est clair que la décomposition $L = P \oplus Q$ est stable par ω . Soit ω'' l'automorphisme de L qui coïncide avec ω sur P et avec $X^{-1}\omega$ sur Q ; il est topologiquement unipotent, et sa classe dans $\text{Coker } \tilde{k}$ coïncide avec celle de ω . On en déduit la proposition.

Remarque. — Les propositions 4 et 6 sont des analogues (relatifs à la catégorie des anneaux filtrés complets) des théorèmes 1 et 2 de [2].

5. FIBRÉS VECTORIELS SUR UN PRODUIT DE DISQUES ET DE CIRCONFÉRENCES. — On reprend les notations du début du paragraphe III. Introduisons les définitions suivantes :

a. Algèbre des fonctions holomorphes sur un disque. — Soit r un élément de D (divisé du groupe de valuation G du corps valué K). On désigne par $T_{1,r}$ l'algèbre des séries formelles à coefficients dans K :

$$f = \sum_{i \in \mathbf{N}} a_i \cdot X^i$$

telles que $v(a_i) + ir$ tende vers $+\infty$ avec i ; cette algèbre est complète pour la valuation réelle

$$f \mapsto \inf(v(a_i) + ir).$$

Soit p un entier non nul tel que $pr \in G$ et soit a un élément de K de valuation $(-pr)$; l'élément aX^p de $T_{1,r}$ définit un morphisme de T_1 dans $T_{1,r}$, qui fait de $T_{1,r}$ un T_1 -module valué-libre de type fini. En particulier, $T_{1,r}$ est une algèbre topologiquement de type fini (ce serait faux si r n'appartenait pas à D).

b. Algèbre des fonctions holomorphes sur une circonférence. — On désigne par C l'algèbre des séries de Laurent à coefficients dans K

$$f = \sum_{i \in \mathbf{Z}} a_i \cdot X^i$$

telles que $v(a_i)$ tende vers $+\infty$ avec $|i|$; cette algèbre est complète pour la valuation réelle

$$f \mapsto \inf_{i \in \mathbf{Z}} (v(a_i)).$$

C'est le quotient de T_2 par l'idéal $(1 - X_1 X_2)$; en particulier, c'est une algèbre topologiquement de type fini.

On désigne par H une algèbre de Banach isomorphe au produit tensoriel complété (sur K) d'une famille d'algèbres de Banach égales à C ou à $T_{1,r}$; géométriquement, H est isomorphe à l'algèbre des fonctions holomorphes sur un produit de disques et de circonférences.

THÉORÈME 1. — *L'algèbre H est topologiquement de type fini, filtrée-noethérienne; elle vérifie la condition (R) du n° 2. On a*

$$\mathbf{SK}^0(H) = 0 = \mathbf{SK}^1(H).$$

Démonstration. — Il existe un entier n et un homomorphisme de T_n dans H qui munisse H d'une structure de T_n -module filtré admissible (on l'a vu pour C et pour $T_{1,r}$; le cas général s'en déduit par produit tensoriel complété sur K). On en conclut que H est topologiquement de type fini et filtrée-noethérienne. Le gradué associé à H s'écrit

$$\text{gr}(H) = \text{gr}(K) [X_1, \dots, X_p, Y_1, Y_1^{-1}, \dots, Y_q, Y_q^{-1}]$$

pour un couple convenable (p, q) d'entiers, les X_i étant homogènes et les Y_j étant homogènes de degré 0 (cela se voit par produit tensoriel). Ce gradué associé se déduit par localisation (relativement à l'élément homogène de degré nul $Y_1 \dots Y_q$) de l'anneau gradué

$$S = (\text{gr}(K)) [X_1, \dots, X_p, Y_1, \dots, Y_q].$$

On a vu au paragraphe III (corollaire de la proposition 1) que la catégorie des $(\text{gr}(K))$ -modules gradués de type \mathbf{R} est semi-simple; il en résulte que la catégorie des S -modules gradués de type \mathbf{R} est de dimension homologique finie (§ I, prop. 4) et que tout objet projectif de type fini de cette catégorie est stablement gradué-libre (§ I, th. 1). Ces deux propriétés se conservent par localisation pour un élément homogène (§ I, prop. 1); on en déduit aussitôt que H vérifie la condition (R) et que $\mathbf{SK}^0(H) = 0$ (prop. 1 et 2).

Pour prouver que $\mathbf{SK}^1(H) = 0$, raisonnons par récurrence sur la dimension de H ; lorsque cette dimension est nulle, $H = K$ et le résultat est alors bien connu (cf. § I, n° 1). Reste à vérifier que si $\mathbf{SK}^1(H) = 0$, il en est de même de $\mathbf{SK}^1(H \hat{\otimes} C)$ et de $\mathbf{SK}^1(H \hat{\otimes} T_{1,r})$. D'après les propositions 6 et 4, on sait en tout cas que tout élément de $\mathbf{SK}^1(H \hat{\otimes} C)$ ou de $\mathbf{SK}^1(H \hat{\otimes} T_{1,r})$ provient d'un élément topologiquement unipotent de $GL(\dots)$. Il suffit maintenant d'appliquer la proposition 3, en notant que le corps de fractions valué de H est excellent d'après le théorème

de Gerritzen (et le fait que toute extension finie d'un corps excellent, linéairement disjointe du complété et munie de sa valuation canonique, est un corps excellent).

C. Q. F. D.

V. — Fibrés vectoriels sur un polydisque ouvert.

1. FAISCEAUX ANALYTIQUES COHÉRENTS SUR UN POLYDISQUE OUVERT. — Pour définir les polydisques ouverts, on va d'abord se placer dans le cadre des *espaces analytiques rigides* sur le corps valué complet K [20].

Soit n un entier (fixé une fois pour toutes) et soit D le divisé du groupe de valuation G de K ; pour tout $r = (r_1, \dots, r_n) \in D^n$, soit T_r l'algèbre des fonctions holomorphes sur le polydisque fermé de rayon r et soit X_r le « spectre analytique » de T_r (i.e. l'ensemble des idéaux maximaux de T_r muni de sa structure d'espace analytique rigide, cf. [20], § 10.3).

Soit $m = (m_1, \dots, m_n) \in (\mathbf{R} \cup \{-\infty\})^n$; on désigne par I_m l'ensemble des $r = (r_1, \dots, r_n) \in D^n$ tels que $r_i > m_i$ ($i = 1, \dots, n$). Lorsque r parcourt I_m , les espaces X_r forment un système inductif qui admet une limite Y_m dans la catégorie des espaces analytiques rigides (« construction d'un espace rigide par recollement d'espaces affines », cf. [20], prop. 10.16); on dit que Y_m est le polydisque ouvert de rayon m .

Si l'on considère l'espace Y_m comme un site annelé, on peut définir la catégorie des faisceaux analytiques cohérents sur Y_m ; en revenant au point de vue naïf [la donnée de Y_m étant considérée comme équivalente à la donnée du système projectif $(T_r)_{r \in I_m}$ de K -algèbres topologiquement de type fini] on obtient, moyennant le dictionnaire fourni par [14], la définition suivante :

DÉFINITION. — La catégorie C des faisceaux cohérents sur l'espace analytique rigide Y_m est définie par les données suivantes :

— un objet de C est un système projectif (M_r, u_{rs}) , indexé par I_m , tel que M_r soit un T_r -module de type fini et que u_{rs} soit une application T_s -linéaire induisant un isomorphisme de $M_s \otimes_{T_s} T_r$ sur M_r ;

— un morphisme de C est un morphisme de systèmes projectifs qui est T_r -linéaire en chaque cran r .

On dit que le faisceau analytique cohérent (M_r, u_{rs}) est localement libre si M_r est un T_r -module projectif en chaque cran r .

LEMME 1. — *La catégorie C est abélienne et le foncteur « restriction des scalaires » (de C dans la catégorie des systèmes projectifs de groupes abéliens indexés par I_m) est exact.*

On sait en effet que si $r \geq s$, l'inclusion de T_s dans T_r munit T_r d'une structure de T_s -module plat (cf. [20], lemme 8.6; on remarque qu'en chaque idéal maximal de T_r , les complétés de T_r et de T_s sont isomorphes); par suite, le noyau et le conoyau d'un morphisme de C dans la catégorie des systèmes projectifs de groupes abéliens sont des objets de C ; le lemme en résulte.

PROPOSITION 1 (« théorèmes A et B » pour l'espace Y_m). — Soit (M_r, u_{rs}) un objet de C et soit (M, u_r) sa limite projective.

(A) Le T_r -module M_r est engendré par $u_r(M)$;

(B) $\lim_{\leftarrow}^{(i)}(M_r) = 0$.

(On a désigné par $\lim_{\leftarrow}^{(i)}$ le foncteur dérivé droit d'ordre i du foncteur limite projective; on sait que $\lim_{\leftarrow}^{(i)} = 0$ pour $i \geq 2$ lorsque le système d'indices est dénombrable.)

Démonstration. — Pour tout $r \in I_m$, munissons le T_r -module de type fini M_r de sa topologie canonique.

LEMME 2. — L'application $u_{rs} : M_s \rightarrow M_r$ est continue d'image dense.

Il est clair que l'inclusion de T_s dans T_r est continue d'image dense. Soit $L' \rightarrow L \rightarrow M_s \rightarrow 0$ une présentation de M_s par des T_s -modules libres de type fini; on a un diagramme commutatif et exact

$$\begin{array}{ccccccc} L' & \longrightarrow & L & \longrightarrow & M_s & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ L' \otimes_{T_s} T_r & \longrightarrow & L \otimes_{T_s} T_r & \longrightarrow & M_r & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Ce diagramme reste exact lorsqu'on munit chacun de ses termes de sa topologie canonique; comme ses deux premières colonnes sont continues d'image dense, il en est de même de la troisième, d'où le lemme.

Le lemme 2 montre que le système projectif (M_r, u_{rs}) vérifie les hypothèses du théorème de Mittag-Leffler; il est donc acyclique — d'où (B) — et $u_r(M)$ est dense dans M_r , donc l'engendre sur T_r — d'où (A).

Soit A_m la K -algèbre topologique limite projective des algèbres de Banach T_r ($r \in I_m$).

COROLLAIRE 1. — 1° Le A_m -module T_r est plat.

2° Soient (M_r, u_{rs}) un objet de C , (M, u_r) sa limite projective; l'application A_m -linéaire u_r induit un isomorphisme de $M \otimes_{A_m} T_r$ sur M_r .

Prouvons d'abord 2°. Soient L un A_m -module libre de type fini, $h : L \rightarrow M$ une application A_m -linéaire de noyau N et d'image P . Pour tout $r \in I_m$,

soient $L_r = L \otimes_{A_m} T_r$, h_r l'application T_r -linéaire de L_r dans M_r définie par h , $N_r = \text{Ker } h_r$, $P_r = \text{Im } h_r$; les systèmes projectifs (N_r) et (P_r) appartiennent à C et N est la limite projective de (N_r) .

Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} N \otimes_{A_m} T_r & \longrightarrow & L_r & \longrightarrow & P \otimes_{A_m} T_r & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & N_r & \longrightarrow & L_r & \longrightarrow & P_r & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Les lignes sont exactes; la première colonne est surjective d'après la proposition 1 (A); la dernière colonne est donc un isomorphisme (lemme du serpent); en faisant varier h et en passant à la limite inductive, on obtient 2°.

Pour prouver 1°, on vérifie que si I est un idéal de type fini de A_m , l'application T_r -linéaire canonique de $I \otimes_{A_m} T_r$ dans T_r est injective. Soit h une forme linéaire d'image I sur un A_m -module libre de type fini L ; soit $h_r : L \otimes_{A_m} T_r \rightarrow T_r$ la forme linéaire déduite de h par produit tensoriel par T_r . D'après la proposition 1 (B), $I = \varprojlim (\text{Im}(h_r))$; notre assertion résulte donc de 2°.

COROLLAIRE 2. — Soient (M_r, u_{rs}) et (M'_r, u'_{rs}) deux objets de C . L'application A_m -linéaire canonique

$$\text{Hom}_{A_m}(\varprojlim (M_r), \varprojlim (M'_r)) \rightarrow \varprojlim (\text{Hom}_{T_r}(M_r, M'_r))$$

est bijective et le système projectif $(\text{Hom}_{T_r}(M_r, M'_r))$ est un objet de C . Le foncteur \varprojlim , de la catégorie C dans la catégorie des A_m -modules, est exact et pleinement fidèle.

Comme le T_r -module M_r est de présentation finie, l'homomorphisme canonique de $(\text{Hom}_{T_r}(M_r, M'_r)) \otimes_{T_r} T_r$ dans $\text{Hom}_{T_r}(M_r, M'_r)$ est bijectif, donc le système projectif $(\text{Hom}_{T_r}(M_r, M'_r))$ est un objet de C ; il est immédiat que sa limite projective est $\text{Hom}_{A_m}(\varprojlim (M_r), \varprojlim (M'_r))$. L'exactitude du foncteur \varprojlim sur C résulte de la proposition 1 (B).

Intéressons-nous maintenant aux faisceaux cohérents localement libres.

THÉORÈME 1. — Le foncteur \varprojlim définit une équivalence de la catégorie des faisceaux cohérents localement libres sur Y_m avec la catégorie des A_m -modules projectifs de type fini.

Démontrons d'abord un lemme. Soient A une K -algèbre de Banach topologiquement de type fini, de dimension d (au sens de Krull), P un A -module projectif de rang p , L le A -module libre $A^{(d+1)p}$.

LEMME 2. — *L'ensemble des épimorphismes de L sur P est un ouvert dense du A-module topologique $\text{Hom}(L, P)$.*

Raisonnons par récurrence sur d ; lorsque $d = 0$, la K-algèbre A est finie; le lemme signifie que $\text{GL}(P)$ est un ouvert dense de $\text{End}(P)$, et il se vérifie aisément par réduction au cas où A est un corps.

Dans le cas général, notons (e_i) la base canonique de L, L' (resp. L'') le sous-module de L engendré par $(e_i)_{1 \leq i \leq dp}$ [resp. $(e_i)_{dp < i \leq (d+1)p}$].

Soient X le spectre maximal de A (muni de la topologie de Zariski), $(X_j)_{1 \leq j \leq q}$ les composantes irréductibles de X; pour tout j ($1 \leq j \leq q$) soit x_j un élément de X_j n'appartenant pas à $\bigcup_{j' \neq j} X_{j'}$.

L'ensemble E des épimorphismes de L sur P est évidemment ouvert dans $\text{Hom}(L, P)$. Pour vérifier qu'il est dense, choisissons un élément $u = (u', u'')$ de $\text{Hom}(L, P) = \text{Hom}(L', P) \times \text{Hom}(L'', P)$ et un voisinage $U = U' \times U''$ de u dans $\text{Hom}(L, P)$; cherchons un élément de $U \cap E$. Posons $x = \bigcap x_j$. Comme $\dim(A/x) = 0$, il existe $\varphi'' \in U''$ tel que $\text{Ann}(\text{Coker } \varphi'')$ ne soit contenu dans aucun des x_j . Soit t un élément de A, annulant $\text{Coker } \varphi''$ et n'appartenant pas à $\bigcup x_j$. Le support du A-module A/tA ne contient aucun des x_j , et par suite, $\dim(A/tA) < d$. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe un élément φ' de U' tel que $(\text{Coker } \varphi') \otimes_A (A/tA) = 0$.

Posons $\varphi = (\varphi', \varphi'') \in U$ et considérons la suite exacte

$$0 \rightarrow t \text{Coker } \varphi \rightarrow \text{Coker } \varphi \rightarrow (\text{Coker } \varphi) \otimes_A (A/tA) \rightarrow 0.$$

Puisque $\text{Coker } \varphi$ est un quotient de $\text{Coker } \varphi''$, $t \text{Coker } \varphi = 0$; de même, puisque $\text{Coker } \varphi$ est un quotient de $\text{Coker } \varphi'$, $(\text{Coker } \varphi) \otimes_A (A/tA) = 0$; donc $\text{Coker } \varphi = 0$, d'où le lemme.

Démonstration du théorème 1. — D'après le corollaire 2 de la proposition 1, il suffit de vérifier que pour tout faisceau cohérent localement libre (P_r, u_{rs}) , le A_m -module $P = \varprojlim P_r$ est projectif de type fini. On sait déjà que (P_r, u_{rs}) est un objet projectif de C (cela résulte de la proposition 1 et de son corollaire 2); reste à vérifier que P est de type fini.

Soient p le rang de P_r sur T_r (qui est évidemment indépendant de r), L le A_m -module libre de type fini $A_m^{p(n+1)}$; on va vérifier que l'ensemble E des épimorphismes de L sur P est dense dans le A_m -module topologique $\text{Hom}(L, P)$; cela entraînera notre assertion.

Pour tout $r \in I_m$, posons $L_r = L \otimes_{A_m} T_r$; le système projectif $(\text{Hom}(L_r, P_r))$ a pour limite $\text{Hom}(L, P)$. Soit E_r l'ensemble des épimorphismes de L_r sur P_r ; le système projectif (E_r) a pour limite E

[prop. 1, (B)]. Puisque la dimension de Krull de T_r est égale à n , E_r est un ouvert dense de $\text{Hom}(L_r, P_r)$; le théorème de Mittag-Leffler montre alors que E est dense dans $\text{Hom}(L, P)$.

Remarque. — Le théorème 1 est en réalité inutile pour la suite (on le redémontrera au n° 2 en utilisant les « théorèmes de stabilité » de Bass). On l'a exposé à cause de sa démonstration, très élémentaire et qui s'applique telle quelle aux « variétés de Stein » définies par Kiehl [14].

2. DÉTERMINATION DU GROUPE $\mathbf{K}^0(A_m)$. — Commençons par rappeler les « théorèmes de stabilité » de Bass ([1], [3]).

Soit A un anneau commutatif à élément unité. On dit qu'un entier d définit un *domaine stable* pour A si l'axiome suivant est vérifié :

Quels que soient l'entier $r > d$ et la famille $(a_i)_{1 \leq i \leq r}$ de A^r , engendrant le A -module A , il existe une famille $(b_i)_{1 \leq i \leq r-1}$ de A^{r-1} telle que $(a_i + b_i a_r)_{1 \leq i \leq r-1}$ engendre le A -module A .

Lorsque le spectre maximal de A est un espace noethérien de dimension de Krull $\leq (d-1)$, l'entier d définit un domaine stable pour A (cf. [1], th. 11.1).

Lorsque d définit un domaine stable pour A , on a les résultats suivants (« théorèmes de stabilité ») :

1. Quel que soit l'entier $r \geq d$, le groupe $E(r+1, A)$ opère transitivement sur l'ensemble des épimorphismes de A^{r+1} sur A ([1], th. 4.2).

2. Quel que soit l'entier $r \geq d+1$, l'homomorphisme canonique de $\text{GL}(r+1, A)/E(r+1, A)$ dans $\mathbf{K}^1(A)$ est un isomorphisme ([3], th. 11.2). (Il est probable qu'il suffise de supposer $r \geq d$.)

Appliquons ces théorèmes à l'anneau noethérien T_r , dont la dimension de Krull est égale à n ; on obtient les résultats suivants :

LEMME 3. — *Tout T_r -module projectif de rang $> n$ est libre.*

En effet, le théorème 1 du paragraphe IV montre que $\mathbf{SK}^0(T_r) = 0$, donc que tout T_r -module projectif de type fini est stablement libre; le lemme résulte de 1.

LEMME 4. — *Pour tout entier $p \geq n+3$, on a $E(p, T_r) = \text{SL}(p, T_r)$.*

En effet, le théorème 1 du paragraphe IV montre que $\mathbf{SK}^1(T_r) = 0$, donc que $E(T_r) = \text{SL}(T_r)$; le lemme résulte de 2.

THÉORÈME 2. — *Soit P un A_m -module projectif de type fini et de rang p ; alors P possède un système de générateurs de cardinal $\leq \sup(p+1, n+3)$.*

Notons un lemme simple, sans doute bien connu :

LEMME 5. — Soient A un anneau commutatif, q un entier; le groupe $SL(q+1, A)$ opère transitivement sur l'ensemble des épimorphismes de A^{q+1} sur A^q .

Considérons les matrices $q \times (q+1)$ suivantes (à coefficients dans A) :

$$u = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1q} & v_{1(q+1)} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2q} & v_{2(q+1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{q1} & v_{q2} & \dots & v_{qq} & v_{q(q+1)} \end{pmatrix}.$$

Il s'agit de voir que si φ définit un épimorphisme de A^{q+1} sur A^q , il existe un élément s de $SL(q+1, A)$ tel que $\varphi = us$.

Soit $(D_i)_{1 \leq i \leq q+1}$ la matrice de $A^q \varphi$; comme $A^q \varphi$ est un épimorphisme, il existe une famille $(v_{(q+1)i})_{1 \leq i \leq q+1}$ telle que

$$\sum_{1 \leq i \leq q+1} v_{(q+1)i} D_i = (-1)^q$$

et il suffit de poser

$$s = (v_{ij})_{1 \leq i \leq q+1, 1 \leq j \leq q+1}.$$

Démonstration du théorème 2. — On peut évidemment supposer $p \geq n+2$. Soit (P_r) l'objet de C défini par P ; on a $P_r = P \otimes_{\Lambda_m} T_r$. Soit E_r l'ensemble des épimorphismes de $L_r = (T_r)^{p+1}$ sur P_r [identifié à une partie ouverte de $\text{Hom}(L_r, P_r)$].

Le lemme 3 et l'hypothèse sur p montrent que P_r est libre de rang p sur T_r ; les lemmes 4 et 5 et l'hypothèse sur p montrent que le groupe $E(p+1, T_r)$ opère transitivement sur E_r .

Faisons varier r . Lorsque $s \leq r$, l'inclusion de T_s dans T_r est continue d'image dense, donc l'inclusion de $E(p+1, T_s)$ dans $E(p+1, T_r)$ est continue d'image dense; il en résulte que l'application canonique de E_s dans E_r est continue d'image dense.

Soit $E = \varprojlim (E_r)$; il résulte de la proposition 1 que E s'identifie à l'ensemble des épimorphismes de Λ_m^{p+1} sur P . D'après le théorème de Mittag-Leffler, E n'est pas vide, d'où le théorème.

Interprétons le théorème 2 en termes de fibrés vectoriels sur l'espace rigide Y_m . Rappelons d'abord une définition :

Soit A un anneau commutatif à élément unité. On désigne par $\text{Pic}(A)$ le groupe des classes de A -modules inversibles (i. e. projectifs de rang 1, cf. [5], chap. II, § 5, n° 7).

Lorsque le spectre maximal de A est connexe (i. e. lorsque A ne contient pas d'idempotent $\neq 0, 1$) on définit un homomorphisme

$$\det : \mathbf{SK}^0(A) \rightarrow \text{Pic}(A)$$

de la façon suivante : soit P un A -module projectif de type fini; le rang p de P est défini et le A -module $\Lambda^p P$ est projectif de rang 1; soit $\det(P)$ la classe de $\Lambda^p P$ dans $\text{Pic}(A)$. On vérifie tout de suite que $\det(P)$ dépend additivement de P et s'annule lorsque P est libre; par passage au quotient, on obtient l'homomorphisme demandé.

Rappelons un lemme facile :

LEMME 6. — *Les conditions suivantes sur A sont équivalentes :*

- (i) *Tout A -module projectif de type fini est stablement isomorphe à la somme directe d'un module libre et d'un module inversible ;*
- (ii) *Pour tout A -module projectif de type fini P , il existe un module inversible I tel que $P \oplus I$ soit stablement libre;*
- (iii) *L'homomorphisme $\det : \mathbf{SK}^0(A) \rightarrow \text{Pic}(A)$ est bijectif.*

D'après le théorème 2, l'anneau A_m vérifie la condition (ii) du lemme 6; donc l'homomorphisme $\det : \mathbf{SK}^0(A_m) \rightarrow \text{Pic}(A_m)$ est un isomorphisme. En termes géométriques, cela signifie que tout fibré vectoriel sur le polydisque ouvert Y_m est stablement isomorphe à la somme directe d'un fibré trivial et d'un fibré de rang 1.

Remarques. — 1° En suivant la méthode décrite dans [10] (chap. 0, 5.4.7) on peut définir un isomorphisme canonique de $\text{Pic}(A_m)$ sur $\varprojlim^{(1)}(T_r)$ [compte tenu du fait que $\text{Pic}(T_r) = 0$].

2° Le groupe $\text{Pic}(A_m)$ est canoniquement isomorphe au groupe des classes de diviseurs de l'anneau (complètement intégralement clos) A_m . Pour le voir, on note d'abord que les anneaux T_r sont factoriels (ce sont des anneaux noethériens réguliers de groupe de Grothendieck trivial; on peut donc appliquer ([5], chap. VII, §4, corollaire 2 de la proposition 16), et il est facile de déduire de là que tout idéal divisoriel de A_m est inversible.

3° Lorsque $n = 1$, les anneaux T_r sont principaux; on en déduit facilement que l'anneau A_m est *prüferien* ([5], chap. VII, §2, ex. 12), d'où le théorème 2 dans ce cas (on montre même qu'alors tout module projectif de type fini est somme directe d'un module libre et d'un module inversible).

3. CAS D'UN CORPS MAXIMALEMENT COMPLET.

PROPOSITION 2. — *Le groupe $\mathbf{SK}^0(A_m)$ est nul dans les deux cas suivants :*

- (i) *Le corps de base K est maximalement complet (i. e. son anneau de valuation est linéairement compact) et m est quelconque;*
- (ii) *Le corps de base K est quelconque et $m = (-\infty, \dots, -\infty)$.*

Démonstration. — Soit P un A_m -module inversible; commençons par reformuler la condition « P est principal ».

Posons $P_r = P \otimes_{A_m} T_r$ pour tout $r \in I_m$; le T_r -module P_r est principal [parce que $\text{Pic}(T_r) = 0$]. On va considérer $(P_r)_{r \in I_m}$ comme une famille de modules topologiques emboîtés, d'intersection P .

Pour tout $r \in I_m$, soit U_r le sous-groupe multiplicatif de T_r^* formé des éléments de terme constant égal à 1 [pour que $f \in T_r$ appartienne à U_r , il est donc nécessaire et suffisant que $f(0) = 1$ et que $v(f-1) > 0$]. Il existe une famille $(x_r)_{r \in I_m}$ telle que x_r soit un générateur de P_r sur T_r et que $x_s \in U_r \cdot x_r$ lorsque $s \leq r$; posons $V_r = U_r \cdot x_r$. La famille $(V_r)_{r \in I_m}$ est emboîtée, et chaque V_r est une variété A -linéaire de P_r (en désignant par A l'anneau de valuation de K).

LEMME 7. — *Pour que P soit principal, il faut et il suffit que $\bigcap V_r \neq \emptyset$. C'est immédiat.*

Pour prouver la proposition 2, il suffit d'après le théorème 2 de vérifier la condition du lemme 7 dans les cas (i) et (ii).

Dans le cas (i), cette condition est vérifiée parce que l'adhérence de V_s dans V_r est *linéairement compacte* (pour la topologie induite par V_r considérée comme variété linéaire sur l'anneau de valuation A), du moins lorsque $s_i < r_i$ ($1 \leq i \leq n$). En effet, l'inclusion de T_s dans T_r est alors complètement continue (« critère de normalité de Montel »); comme le corps K est maximalelement complet, notre assertion résulte donc d'un lemme facile d'analyse ultramétrique (cf. [11], § 5, prop. 3).

Dans le cas (ii), il suffit de voir que lorsqu'on fixe s , la famille $(V_r)_{r \leq s}$ est une base de filtre de Cauchy dans V_s ; cela résulte du fait évident que le diamètre de U_r dans U_s est minoré par $\inf(s_i - r_i)$.

C. Q. F. D.

Remarque. — La proposition 2 est bien connue lorsque $n = 1$; le cas (i) est dû à Lazard ([16], th. 2); le cas (ii) est dû à Šnirelman (cf. [16], prop. 7). Un contre-exemple de Lazard ([16], prop. 6) montre que $\text{Pic}(A_m)$ n'est pas nul en général; rappelons ce contre-exemple :

Soit $(a_i)_{i \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de K telle que $v(a_i)$ tende vers $-m$ en croissant strictement; pour tout i , soit D_i la boule de K de centre $(a_0 + \dots + a_i)$ et de rayon $v(a_{i+1})$; supposons $\bigcap D_i = \emptyset$. Il est clair que, dans n'importe quel corps non maximalelement complet, on peut trouver une telle suite pour un m convenable $\neq -\infty$.

Formons l'idéal de A_m dont les éléments s'annulent aux points de la suite $(a_i^{-1})_{i \in \mathbf{N}}$; c'est un idéal divisoriel (donc inversible) non principal; on vérifie en effet que si $f = \sum_{i \in \mathbf{N}} b_i \cdot X^i$ était un générateur de cet idéal, on aurait $-b_1/b_0 \in \bigcap D_i$; ceci est absurde.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] H. BASS, *K-theory and stable algebra*, Publ. Math. I. H. E. S., 22, 1964, p. 5-60.
- [2] H. BASS, A. HELLER et R. SWAN, *The Whitehead group of a polynomial extension*, Publ. Math. I. H. E. S., 22, 1964, p. 61-80.
- [3] H. BASS, J. MILNOR et J.-P. SERRE, *Solution of the congruence subgroup problem for SL_n ($n \geq 3$) and Sp_{2n} ($n \geq 2$)* (à paraître).
- [4] N. BOURBAKI, *Algèbre*, Hermann, Paris.
- [5] N. BOURBAKI, *Algèbre commutative*, Hermann, Paris.
- [6] A. DOUADY, *Démonstration élémentaire d'un théorème de périodicité de Bott*, Séminaire Bourbaki, 16^e année, 1963-1964, n° 259.
- [7] P. GABRIEL, *Des catégories abéliennes* (Bull. Soc. Math. France, t. 90, 1962, p. 323-448).
- [8] L. GERRITZEN, *Erweiterungsendliche Ringe in der nichtarchimedischen Funktionentheorie* (Inv. Math., t. 2, 1967, p. 178-190).
- [9] H. GRAUERT et R. REMMERT, *Ueber die Method der diskret bewerteten Ringe in die nichtarchimedischen Analysis* (Inv. Math., t. 2, 1967, p. 87-133).
- [10] A. GROTHENDIECK, *Éléments de géométrie algébrique*, Publ. Math. I. H. E. S.
- [11] L. GRUSON, *Théorie de Fredholm p-adique* (Bull. Soc. Math. France, t. 94, 1966, p. 67-95).
- [12] A. HELLER, *Homological algebra in abelian categories* (Ann. Math., t. 68, 1958, p. 484-525).
- [13] A. HELLER, *Some exact sequences in algebraic K-theory* (Topology, t. 3, 1965, p. 389-408).
- [14] R. KIEHL, *Theorem A und Theorem B in der nichtarchimedischen Funktionentheorie* (Inv. Math., t. 2, 1967, p. 256-273).
- [15] R. KIEHL, *Der Endlichkeitssatz für eigentliche Abbildungen in der nichtarchimedischen Funktionentheorie* (Inv. Math., t. 2, 1967, p. 191-214).
- [16] M. LAZARD, *Les zéros d'une fonction analytique sur un corps valué complet*, Publ. Math. I. H. E. S., 14, 1962, p. 47-76.
- [17] M. LAZARD, *Groupes analytiques p-adiques*, Publ. Math. I. H. E. S., 26, 1965.
- [18] J.-P. SERRE, *Algèbre locale, multiplicités*, Lecture notes in mathematics, 11, 1965, Springer.
- [19] J.-P. SERRE, *Endomorphismes complètement continus des espaces de Banach p-adiques*, Publ. Math. I. H. E. S., 12, 1962.
- [20] J. TATE, *Rigid analytic spaces* (notes multigraphiées à l'I. H. E. S.)

(Manuscrit reçu le 16 Juin 1967).