Annales scientifiques de l’É.N.S.

Mohd Mohsin

Formes différentielles cobordables

Annales scientifiques de l’É.N.S. 3e série, tome 83, nº 3 (1966), p. 201-213
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1966_3_83_3_201_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
3e série, t. 83, 1966, p. 201 à 213.

FORMES DIFFÉRENTIELLES COBORDABLES

PAR M. MOHD MOHSIN.

INTRODUCTION.

La théorie des formes différentielles et des courants sur une variété de classe C^∞ est bien connue. D'importants travaux dans ce domaine ont été faits surtout par G. de Rham dans [1]. Le point de départ de ce travail est une idée très simple, analogue à une idée ancienne de Gillis [1] : le cobord, considéré au sens des distributions, d'une forme différentielle dont les coefficients sont des fonctions continues, peut être aussi une forme différentielle à coefficients continus. Ceci nous a amené à développer, dans le chapitre I, la notion de forme différentielle cobordable dans un espace euclidien et à étudier ses propriétés en ce qui concerne le calcul différentiel extérieur.

Au chapitre II, nous étendons cette notion de forme différentielle cobordable à une variété de classe C^1 et énonçons des résultats semblables à ceux établis dans le chapitre I sur les propriétés concernant le calcul différentiel extérieur.

Le chapitre III est consacré à la définition d'une notion de courant sur une variété sans bord de classe C^1. Nous y étudions aussi les propriétés générales de ces courants.

Nous étendons au chapitre IV la formule de Stokes aux formes différentielles cobordables; le principe essentiel de la démonstration se base sur l'approximation des formes différentielles cobordables à l'aide des formes de classe C^∞ sur les compacts d'un espace euclidien (prop. 2).

CHAPITRE I.

FORMES COBORDABLES SUR DES OUVERTS DE $\mathbf{R}^n$.

1. Soit Ω un ouvert de l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$ muni de son orientation canonique. Considérons alors l'espace vectoriel des formes différentielles de degré p $(0 \leq p \leq n)$ définies sur $\mathbf{R}^n$, dont les coefficients sont des

fonctions continues à valeurs scalaires définies sur l'ouvert Ω donné. On peut représenter une forme ω de degré p par

$$(1.1) \qquad \omega = \sum_{i_1<\ldots<i_p} \omega_{i_1\ldots i_p} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p},$$

où $\omega_{i_1\ldots i_p}$ sont des fonctions continues définies dans Ω, qui prennent leurs valeurs dans $\mathbf{R}$ (ou $\mathbf{C}$).

On pose alors la définition suivante :

Définition 1. — *La forme différentielle ω est dite cobordable si son cobord au sens des distributions a des coefficients qui sont aussi des fonctions continues.*

En vertu des propriétés connues, il est évident que le cobord ainsi considéré de ω est aussi une forme différentielle cobordable et que son cobord est nul. Donc, on aboutit à la proposition suivante :

Proposition 1. — *Si ω est une forme différentielle cobordable de degré p, alors son cobord pris au sens des distributions est aussi une forme différentielle cobordable, et l'on a $d.d\omega = 0$.*

2. Notons, maintenant, par $\mathcal{E}_p^c(\Omega)$ l'espace vectoriel des formes différentielles cobordables de degré p définies dans Ω. Dans cet espace vectoriel on peut introduire une topologie naturelle :

Définition 2. — *$\mathcal{E}_p^c(\Omega)$ sera muni de la topologie la moins fine rendant continue l'application identique et l'application cobord, de $\mathcal{E}_p^c(\Omega)$ dans $\mathcal{E}_p^0(\Omega)$* (espace des p formes continues, muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de chaque coefficient).

En d'autres termes, $\omega_j \to 0$ *dans $\mathcal{E}_p^c(\Omega)$, si chaque coefficient de ω_j et de $d\omega_j$ (cobord au sens des distributions) converge vers zéro uniformément sur tout compact.*

On a, alors, la proposition suivante :

Proposition 2. — *Soit ω une forme différentielle de degré p. Alors ω est cobordable si, et seulement s'il existe une suite $\{\omega_j\}$ de formes différentielles de degré p, dont les coefficients sont des fonctions de classe C^∞, telles que, lorsque $j \to \infty$, $\omega_j \to \omega$ et $d\omega_j$ ait une limite uniformément sur tout compact; cette limite est alors $d\omega$.*

1° Soit ω cobordable. Choisissons une suite $\{\alpha_j\}$ de fonctions ≥ 0 de classe C^∞ à support compact et de telle manière que leurs supports tendent vers zéro et que $\int_{\mathbf{R}^n} \alpha_j(x)\, dx = 1$.

La suite $\{\alpha_j\}$ tend vers la distribution δ dans $\mathcal{E}'$ lorsque $j \to \infty$. Maintenant, à l'aide de ces fonctions et la forme ω, formons une suite $\{\tilde{\omega}_j\}$ de formes différentielles de degré p, en prenant

$$(1.2) \qquad \tilde{\omega}_j = \sum_{i_1<\ldots<i_p} (\omega_{i_1\ldots i_p} \star \alpha_j)\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p} = \omega \star \alpha_j.$$

Il est bien évident que les coefficients de $\tilde{\omega}_j$, $\omega_{i_1\ldots i_p} \star \alpha_j = \omega^{(j)}_{i_1\ldots i_p}$ sont des fonctions de classe C^∞; $\tilde{\omega}_j$ est définie dans un ouvert $\Omega'_j \subset \Omega$, tel que $\complement\, \Omega'_j$ soit un voisinage d'ordre ε_j de $\complement\, \Omega$, si le support de α_j est dans la boule de centre origine et de rayon ε_j. Considérons maintenant une fonction β_j de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^n$, égale à 1 dans un ouvert Ω''_j dont le complémentaire soit un voisinage d'ordre ε_j de $\complement\, \Omega'_j$, et de support dans Ω'_j. Formons donc une autre suite de formes, $\{\omega_j\}$, en posant $\omega_j = \beta_j . \tilde{\omega}_j$. Alors ω_j est définie sur tout $\mathbf{R}^n$, donc en tout cas dans Ω, et de support dans Ω'_j. Il est bien évident que, lorsque $j \to \infty$, $\varepsilon_j \to 0$, et les coefficients de la forme ω_j tendent vers ceux de ω uniformément sur tout compact; ceci implique que $\omega_j \to \omega$ sur tout compact.

Calculons, ensuite, le cobord de ω_j. Ceci nous donne

$$(1.3) \qquad d\omega_j = \sum_{i_1<\ldots<i_p} d(\beta_j . \omega^{(j)}_{i_1\ldots i_p}) \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}.$$

En vertu des propriétés du produit de convolution (1.3) s'écrit aussi par

$$(1.4) \qquad \begin{aligned} d\omega_j = & \sum_{i_1<\ldots<i_p} \beta_j(\{d\omega_{i_1\ldots i_p}\} \star \alpha_j) \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p} \\ & + \sum_{i_1<\ldots<i_p} \omega^{(j)}_{i_1\ldots i_p} d\beta_j \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p} \end{aligned}$$

et, par suite, lorsque $j \to \infty$, $d\beta_j \to 0$ et donc $d\omega_j \to d\omega$ sur tout compact.

2° Inversement, si $\omega_j \to \omega$ et $d\omega_j \to \varpi$ pour j infini, uniformément sur tout compact, alors la convergence a lieu *a fortiori* au sens des distributions. Donc $d\omega = \varpi$, et ω est cobordable.

3. Considérons, maintenant, deux formes différentielles cobordables ω et π de degrés respectifs p et q. Alors ces formes, ainsi que leurs cobords au sens des distributions, peuvent être représentés par des formules analogues à celles de (1.1) et (1.3). En vertu de la proposition 2, on peut aussi choisir une suite $\{\pi_j\}$ de formes différentielles, dont les coefficients sont de classe C^∞ et de telle manière que $\pi_j \to \pi$ et $d\pi_j \to d\pi$ sur tout compact lorsque $j \to \infty$.

Si, maintenant, on considère le produit extérieur de π_j avec ω_j, on obtient une forme différentielle de degré $p+q$, dont les coefficients sont évidemment de classe C^∞. En outre, on a

$$(1.5) \qquad d(\omega_j \wedge \pi_j) = d\omega_j \wedge \pi_j + (-1)^p \omega_j \wedge d\pi_j$$

au sens des distributions. En faisant tendre $j \to \infty$, on voit que $\omega_j \wedge \pi_j \to \omega \wedge \pi$ et $d(\omega_j \wedge \pi_j)$ a une limite sur tout compact. Cela nous montre que $\omega \wedge \pi$ est aussi une forme cobordable et l'on a

$$(1.6) \qquad d(\omega \wedge \pi) = d\omega \wedge \pi + (-1)^p \omega \wedge d\pi.$$

Ainsi on a démontré la proposition suivante :

Proposition 3. — *Soient ω et π deux formes différentielles cobordables de degrés respectifs p et q. Alors leur produit extérieur $\omega \wedge \pi$ est aussi une forme différentielle cobordable de degré $p+q$ et l'on a*

$$d(\omega \wedge \pi) = d\omega \wedge \pi + (-1)^p \omega \wedge d\pi.$$

4. Soient Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et Ω_0 un ouvert de $\mathbf{R}^m$ et H une application de classe C^1 de Ω_0 dans Ω, qu'on représente par des relations

$$(1.7) \qquad y = H(x) \quad \text{ou} \quad y_i = H_i(x) \quad (i = 1, \ldots, n).$$

D'abord, soit ω' une forme différentielle cobordable de degré o, définie sur Ω. Alors ω' admet des dérivées au sens des distributions qui sont des fonctions continues. Mais nous savons déjà que si la fonction ω' admet pour dérivées au sens des distributions des fonctions continues dans Ω, ω' y admet partout ces fonctions comme dérivées au sens usuel. Ceci montre que ω' est continûment dérivable au sens usuel.

Maintenant, en vertu de la définition de l'image réciproque de ω', on a $H^\star \omega' = \omega' \circ H$. Comme l'application H est continûment dérivable, et que ω' est aussi continûment dérivable, cela implique que $H^\star \omega'$ est aussi continûment dérivable. D'autre part, en choisissant un vecteur $\vec{X}$ de $\mathbf{R}^m$, on a

$$(H^\star d\omega').(\vec{X}) = (dH^\star \omega').(\vec{X})$$

et cela nous donne $H^\star d\omega' = dH^\star \omega'$. Ainsi on arrive au fait que l'image réciproque de ω' par rapport à l'application H est une forme différentielle cobordable et le cobord d pris au sens des distributions commute avec le symbole de l'image réciproque $H^\star$.

Dans la suite, nous voulons étendre ce genre de résultats, pour une forme différentielle cobordable de degré p. Pour cela, considérons, de même, la forme cobordable ω de degré p et l'application H donnée par (1.7), où tous les H_i sont considérés comme des formes différentielles cobordables de degré o. Alors, il existe aussi une suite $\{\omega_j\}$ des formes différentielles de classe C^∞ qui tend vers ω sur tout compact. Si l'on considère, maintenant, l'image réciproque de ω_j par rapport à l'application H, on obtient

$$H^\star\omega_j = \sum_{i_1<\ldots<i_p} H^\star\omega^{(j)}_{i_1\ldots i_p} dH_{i_1} \wedge \ldots \wedge dH_{i_p}. \tag{1.8}$$

Mais cette expression, ci-dessus, est une somme finie dont chaque terme s'exprime comme un produit extérieur de formes différentielles cobordables. Cela nous montre que $H^\star\omega_j$ est aussi une forme différentielle cobordable de degré p. Ensuite, en calculant son cobord au sens des distributions, on a

$$dH^\star\omega_j = \sum_{i_1<\ldots<i_p} \{dH^\star\omega^{(j)}_{i_1\ldots i_p}\} \wedge dH_{i_1} \wedge \ldots \wedge dH_{i_p}. \tag{1.9}$$

Comme $\omega^{(j)}_{i_1\ldots i_p}$ est une forme différentielle cobordable de degré o, il s'ensuit que $dH^\star\omega^{(j)}_{i_1\ldots i_p} = H^\star d\omega^{(j)}_{i_1\ldots i_p}$. Ceci nous donne $dH^\star\omega_j = H^\star d\omega_j$. Alors, en faisant tendre $j \to \infty$ dans l'égalité précédente, on voit que $H^\star\omega$ est bien cobordable avec

$$dH^\star\omega = H^\star d\omega. \tag{1.10}$$

Ainsi, finalement, on aboutit à la proposition suivante :

PROPOSITION 4. — *Soient Ω_0 un ouvert d'un espace euclidien $\mathbf{R}^m$; Ω un ouvert d'un autre espace euclidien $\mathbf{R}^n$ et H une application de classe C^1 de Ω_0 dans Ω. Soit ω une forme différentielle cobordable de degré p définie sur Ω. Alors, l'image réciproque de ω par rapport à H est aussi une forme différentielle cobordable et l'on a la formule de commutation des symboles de l'image réciproque $H^\star$ et du cobord d.*

Finalement, à l'aide de toutes ces propositions, on peut énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME 1. — *Les formes différentielles cobordables satisfont les propriétés suivantes par rapport au cobord d :*

1° $d.d\omega = 0$;
2° $d(\omega \wedge \pi) = d\omega \wedge \pi + (-1)^p \omega \wedge d\pi$ (p degré de ω);
3° $dH^\star\omega = H^\star d\omega$, H de classe C^1.

Remarque 1. — Sans aucune difficulté, le théorème 1 reste vrai même pour les formes différentielles cobordables définies dans des ouverts d'espaces affines, dont les coefficients prennent des valeurs dans des espaces normés.

5. Si $\omega = \alpha(x)\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ est une forme différentielle cobordable de degré n, on peut lui associer canoniquement une mesure sur $\mathbf{R}^n$ de

densité $\alpha(x)$, donnée par $\alpha(x)\,dx$, dx étant la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^n$. Lorsque la mesure ainsi associée est de masse finie, on peut facilement donner un sens à l'intégrale de ω sur $\mathbf{R}^n$ en posant $\int_{\mathbf{R}^n} \omega = \int_{\mathbf{R}^n} \alpha(x)\,dx$. Cela se produit toujours si le support de ω est compact.

Proposition 5. — *Si ω est une forme différentielle cobordable de degré $n-1$, définie dans un ouvert de $\mathbf{R}^n$ à support compact. Alors l'intégrale sur $\mathbf{R}^n$ de son cobord est nulle.*

Choisissons une suite $\{\omega_j\}$ de formes différentielles de classe C^∞ satisfaisant les conditions de la proposition 2. La suite $\{d\omega_j\}$ donc induit une suite $\{\mu_j\}$ de mesures canoniques, dont la masse totale est évidemment $\int_{\mathbf{R}^n} d\mu_j = \int_{\mathbf{R}^n} d\omega_j = 0$ pour $\forall j$. On voit donc, en faisant tendre $j \to \infty$, que $\int_{\mathbf{R}^n} d\omega$ est aussi nulle.

CHAPITRE II.

Formes cobordables sur une variété C^1.

1. On sait qu'une variété à n dimensions est un espace topologique séparé, possédant une base dénombrable d'ensembles ouverts, dont chaque point a un voisinage homéomorphe à un ouvert de l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$. On appelle carte d'une variété séparée à n dimensions V et l'on désigne par $(\mathcal{O}, \varphi)$ tout homéomorphisme φ d'un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbf{R}^n$ sur un ouvert $\varphi(\mathcal{O})$ de V. Donc, à tout point $x \in \varphi(\mathcal{O})$ correspond un point

$$\varphi^{-1}(x) = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{O},$$

c'est-à-dire un système de n nombres qu'on appelle des coordonnées locales du point x. Toute carte définit ainsi un système de coordonnées locales. Étant données deux cartes $(\mathcal{O}_i, \varphi_i)$ et $(\mathcal{O}_j, \varphi_j)$ dans V, désignons par $\mathcal{O}_{ji}$ l'ensemble des points de $\mathcal{O}_i$ dont l'image par φ_i est dans $\varphi_j(\mathcal{O}_j)$. Cet ensemble $\mathcal{O}_{ji} = \varphi_i^{-1}[\varphi_i(\mathcal{O}_i) \cap \varphi_j(\mathcal{O}_j)]$ est un ouvert contenu dans $\mathcal{O}_i$. L'application composée $\psi_{ji} = \varphi_j^{-1} \circ \varphi_i$ est un homéomorphisme de $\mathcal{O}_{ji}$ sur $\mathcal{O}_{ij}$, qu'on appelle l'homéomorphisme de passage de la première carte à la seconde. Les applications ψ_{ji} et ψ_{ij} sont inverses l'une de l'autre, et si l'on considère une troisième carte $(\mathcal{O}_k, \varphi_k)$, l'application composée $\psi_{ki} \circ \psi_{ij}$ est égale à ψ_{kj} partout où elle est définie. Tout ensemble de cartes dans V dont les ouverts $\varphi_i(\mathcal{O}_i)$ recouvrent V est appelé un atlas de V. Un atlas de V est dit C^1, si les homéomorphismes de passage relatifs à deux de ses cartes quelconques sont C^1. Un atlas C^1 est dit C^1-complet, si l'on ne peut pas lui adjoindre une nouvelle carte sans qu'il cesse d'être C^1. Une structure différentiable d'ordre 1, ou structure C^1 sur une variété V est un atlas de V C^1-complet, et une variété différentiable d'ordre 1 ou une variété de classe C^1 n'est qu'une variété munie d'une structure C^1.

2. Si, maintenant, ω est une forme différentielle de degré p sur V et $(\mathcal{O}, \varphi)$ est une carte dans V, c'est $\varphi^\star\omega$ qui est égale à une expression de la forme (1.1) qu'on appelle la représentation canonique de ω dans la carte donnée.

On pose donc la définition suivante :

DÉFINITION 3. — *On dit que la forme différentielle ω de degré p sur* V *est cobordable, si sa représentation canonique est, pour chaque carte, une forme différentielle cobordable de degré p.*

A l'aide de cette définition et en vertu des résultats précédents, on a le théorème suivant :

THÉORÈME 2. — *Soient ω et π des formes différentielles cobordables de degrés respectifs p et q définies sur la variété* V. *Soit h une application de classe* C^1 *de* V *dans une autre variété* W *de classe* C^1. *Alors on a les propriétés suivantes :*

1° $d.d\omega = 0$;

2° $d(\omega \wedge \pi) = d\omega \wedge \pi + (-1)^p \omega \wedge d\pi$;

3° $dh^\star \omega = h^\star d\omega$, et

4° $\int_V d\omega = 0$ *lorsque ω est à support compact* de degré maximal et V orientée.

Les trois premières propriétés se voient sur des cartes, en utilisant le théorème 1. Pour la quatrième, on recouvre V par un atlas C^1; si les α_i forment une partition de l'unité C^1 subordonnée, chaque forme $\alpha_i\omega$ est cobordable, et l'on est ramené à montrer que $\int_V d(\alpha_i\omega) = 0$, ce qui se fait par invariance de l'intégrale et de d par C^1 difféomorphisme et la proposition 5.

CHAPITRE III.

COURANTS SUR UNE VARIÉTÉ C^1 ORIENTÉE SANS BORD.

1. Un intérêt de la notion des formes différentielles cobordables sur les variétés de classe C^1 vient du fait qu'on peut même introduire la notion de courants sur cette classe de variétés. Considérons, d'abord, V comme une variété de classe C^1, orientée, connexe et de dimension n et notons par $\mathcal{E}_p^c(V)$ l'espace vectoriel constitué de toutes les formes différentielles

cobordables de degré p, définies sur V; et ensuite formons la somme directe de ces espaces pour $0 \leqq p \leqq n$, c'est-à-dire

$$\mathcal{E}^c = \mathcal{E}^c(\mathrm{V}) = \bigoplus_{p=0}^{n} \mathcal{E}_p^c(\mathrm{V}). \tag{3.1}$$

L'espace vectoriel $\mathcal{E}^c(\mathrm{V})$, ainsi construit, est aussi une algèbre graduée. De même, désignons par $\mathcal{D}_p^c(\mathrm{V})$ l'espace vectoriel constitué par toutes les formes de $\mathcal{E}_p^c(\mathrm{V})$ dont les supports sont compacts et représentons comme (3.1) la somme directe des $\mathcal{D}_p^c(\mathrm{V})$ par $\mathcal{D}^c(\mathrm{V})$. On dit qu'une suite de formes $\{\omega_j\}$ converge vers zéro dans $\mathcal{E}^c$ si, sur tout compact fixe de V, les suites $\{\omega_j\}$ et $\{d\omega_j\}$ convergent uniformément vers zéro. Ainsi on définit une topologie sur l'espace vectoriel $\mathcal{D}_\mathrm{K}^c(\mathrm{V})$ de formes dont les supports sont tous contenus dans K. La topologie sur $\mathcal{D}^c(\mathrm{V})$ est la limite inductive de ces topologies.

Il est évident que $\mathcal{D}^c(\mathrm{V})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}^c(\mathrm{V})$ avec une structure d'algèbre graduée, induite d'une façon canonique. De plus, $\mathcal{D}^c(\mathrm{V})$ est muni d'un opérateur différentiel linéaire $d : \mathcal{D}^c(\mathrm{V}) \to \mathcal{D}^c(\mathrm{V})$ de telle sorte que pour chaque composante $\mathcal{D}_p^c(\mathrm{V})$, on ait $d(\mathcal{D}_p^c(\mathrm{V})) \subset \mathcal{D}_{p+1}^c(\mathrm{V})$, le support de $d\omega \in \mathcal{D}_{p+1}^c(\mathrm{V})$ est contenu dans le support de $\omega \in \mathcal{D}_p^c(\mathrm{V})$.

2. On pose, alors, les définitions suivantes :

DÉFINITION 4. — *On appelle courant, sur une variété* V *orientée de classe* C^1, *une forme linéaire continue* $\mathrm{T} : \varphi \to \langle \mathrm{T}, \varphi \rangle$, *sur l'espace vectoriel* $\mathcal{D}^c(\mathrm{V})$.

DÉFINITION 5. — *On dit qu'un courant* T *sur* V *est de dimension* q *ou de degré* $n - q$ $(0 \leqq q \leqq n)$ *si l'on a* $\langle \mathrm{T}, \varphi \rangle = 0$ *pour tout* $\varphi \in \mathcal{D}_p^c(\mathrm{V})$, $p \neq q$. *Le support de* T *est défini comme le plus petit ensemble fermé de* V *en dehors duquel* T *est nul.*

Par exemple, une forme ω à coefficients localement sommables, est un courant, en posant $\langle \omega, \varphi \rangle = \int_\mathrm{V} \omega \wedge \varphi$.

Si T_q est une forme linéaire continue dans l'espace $\mathcal{D}_q^c(\mathrm{V})$ et si ω^q est la composante homogène de degré q de $\omega \in \mathcal{D}^c(\mathrm{V})$, la formule

$$\langle \mathrm{T}, \omega \rangle = \langle \mathrm{T}_q, \omega^q \rangle$$

définit un courant T de dimension q et l'application $\mathrm{T}_q \to \mathrm{T}$ est bien évidemment un isomorphisme du dual $\mathcal{D}_q'^c(\mathrm{V})$ de l'espace $\mathcal{D}_q^c(\mathrm{V})$ sur l'espace vectoriel formé des courants de dimensions q, ce qui permet d'identifier l'espace de ces courants à $\mathcal{D}_q'^c(\mathrm{V})$. On note l'espace des courants sur V par $\mathcal{D}'^c(\mathrm{V})$.

3. A chaque endomorphisme continue D de $\mathcal{D}^c(V)$ correspond un endomorphisme transposé ${}^tD$ de $\mathcal{D}'^c(V)$ défini par

$$\langle {}^tD.T, \omega \rangle = \langle T, D.\omega \rangle \tag{3.2}$$

pour tout courant T et toute forme $\omega \in \mathcal{D}^c(V)$.

Définition 6. — *On dit qu'un endomorphisme* D *est un opérateur différentiel si* D *est continu et si le support de* $D.\omega$ *est toujours contenu dans le support de* ω, *pour toute forme* $\omega \in \mathcal{D}^c(V)$.

Donc, pour toute suite $\{\omega_j\}$ de formes qui converge vers zéro dans $\mathcal{D}^c_K(V)$, la suite $\{D.\omega_j\}$ en converge aussi vers zéro. Un tel opérateur différentiel possède un transposé défini par la relation (3.2), qui nous permet de définir des opérations sur des courants. En outre, (3.2) implique que le support de ${}^tD.T$ est contenu dans le support de T. De plus, ces opérateurs différentiels forment une algèbre avec les lois habituelles.

4. Soient $\omega \in \mathcal{E}^c(V)$ et $T \in \mathcal{D}'^c(V)$. L'application $\pi \to \omega \wedge \pi$ est un opérateur differentiel dans $\mathcal{D}^c(V)$, et par suite $\pi \to \langle T, \omega \wedge \pi \rangle$ est un courant sur V qu'on note $T \wedge \omega$. On a ainsi pour tout $\pi \in \mathcal{D}^c(V)$,

$$\langle T \wedge \omega, \pi \rangle = \langle T, \omega \wedge \pi \rangle,$$

qui définit donc l'opération de multiplication d'un courant T par une forme cobordable ω. Pour tout compact K de V, d est un endomorphisme continu de l'espace $\mathcal{D}^c_K(V)$, ainsi d est un opérateur différentiel. Si T est un courant sur V, $\omega \to \langle T, d\omega \rangle$ est une forme qui définit un autre courant sur V qu'on note bT et qu'on appelle le bord de T. Ainsi, pour tout $\omega \in \mathcal{D}^c(V)$, on a

$$\langle bT, \omega \rangle = \langle T, d\omega \rangle. \tag{3.3}$$

Proposition 6. — *L'application* $T \to bT$ *est un endomorphisme de l'espace vectoriel* $\mathcal{D}'^c(V)$ *et l'on a*

1° $b(\mathcal{D}'^c_{p+1}(V)) \subset \mathcal{D}'^c_p(V)$;

2° $b.bT = 0$;

3° *Le support de* bT *est contenu dans le support de* T.

Si le support de T et celui de ω ne se rencontrent pas, il en est de même de ceux de T et $d\omega$. Ceci implique que l'expression (3.3) se réduit à 0, d'où 3°. Les deux autres propriétés sont évidentes.

On peut aussi définir la différentielle d'un courant T (notée comme dT) par

$$dT = WbT = -bWT, \tag{3.4}$$

où W est un opérateur linéaire défini pour les courants par la condition que $WT = (-1)^q T$, lorsque T est un courant homogène de degré q.

Évidemment, pour un courant homogène, son bord et sa différentielle sont égaux au signe près. La formule de multiplication d'un courant T par une forme $\varphi \in \mathcal{E}^c$, nous donne la relation

$$b(T \wedge \varphi) = bT \wedge W\varphi - T \wedge dW\varphi., \tag{3.5}$$

d'où s'ensuivent, en vertu de (3.5) les formules suivantes :

$$b(T \wedge \varphi) = bT \wedge W\varphi + T \wedge b\varphi \tag{3.6}$$

et

$$d(T \wedge \varphi) = dT \wedge \varphi + WT \wedge d\varphi. \tag{3.7}$$

On a aussi pour tout courant T,

$$d \circ dT = 0,$$

et encore

$$dT = d\varphi \quad \text{si} \quad T = \varphi.$$

Remarque 2. — Si H est une application propre de classe C^1 de la variété V dans la variété W, toutes deux supposées orientées et de classe C^1, on peut définir pour un courant T à support compact dans V, l'image de T par l'application H donnée, le courant HT défini dans W par

$$\langle HT, \omega \rangle = \langle T, H^\star \omega \rangle. \tag{3.8}$$

On peut établir que l'application H ainsi définie commute avec le bord des courants.

Remarque 3. — Si V est une variété orientée C^∞, il y a sur V une autre classe de courants, en dualité avec les formes C^∞ à support compact. Dans ce cas, les courants définis plus haut sont un cas particulier de ces courants plus généraux : $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}^c$, $\mathcal{D}'^c \subset \mathcal{D}'$.

Remarque 4. — En utilisant le théorème de Hahn-Banach, on verrait que tout courant peut s'écrire (d'une infinité de manières) $T = \mu + d\nu$, où μ et ν sont des courants à coefficients mesures.

CHAPITRE IV.

Formule de Stokes pour des formes cobordables.

1. Soit V une variété connexe, séparée, de classe C^1 et de dimension n définie sur $\mathbf{R}$, orientée et dénombrable à l'infini. Soient $(\mathcal{O}, \varphi)$ une carte de V et ω une forme différentielle de degré n, continue sur V. Considérons alors l'image réciproque de ω par φ, c'est-à-dire la forme différentielle $\varphi^\star\omega$. C'est une forme différentielle continue sur l'ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbf{R}^n$ parce que ω

est continue et φ est de classe C^1. Elle a donc pour degré la dimension n de $\mathbf{R}^n$, de sorte qu'elle s'écrit sous la forme

$$\varphi^\star \omega = f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n. \tag{4.1}$$

Associons à cette forme la mesure de Radon, définie sur l'ouvert $\mathcal{O}$ par

$$\mu_{\omega,\varphi} = f(x)\, \theta(x; \varphi)\, dx_1 \otimes \ldots \otimes dx_n, \tag{4.2}$$

où $\theta = \pm 1$ est la fonction associée à l'orientation de V par la carte donnée. Cette orientation provient de l'orientation de son espace vectoriel tangent au point $\varphi(x)$ de V. Comme φ est un homéomorphisme de $\mathcal{O}$ sur $\varphi(\mathcal{O})$, $\mu_{\omega,\varphi}$ possède une image $\varphi[\mu_{\omega,\varphi}]$, qui est une mesure sur l'ouvert $\varphi(\mathcal{O})$ de V. Ainsi la donnée de la variété V, d'une orientation de cette variété, de la forme différentielle ω et de la carte, définit une mesure de Radon $\varphi[\mu_{\omega,\varphi}]$ sur $\varphi(\mathcal{O})$. Les mesures ainsi définies sur deux ouverts de V coïncident sur l'intersection de ces ouverts.

2. Rappelons qu'il existe sur V une mesure de Radon $[\omega]_V = [\omega]$ et une seule, telle que pour chaque carte $(\mathcal{O}, \varphi)$, $[\omega]_V$ soit égale dans l'ouvert $\varphi(\mathcal{O})$ à l'image $\varphi[\mu_{\omega,\varphi}]$ de la mesure $\mu_{\omega,\varphi}$ associée sur l'ouvert $\mathcal{O}$ à l'aide de V et de la forme différentielle ω par la même carte.

On pose la définition suivante :

Définition 7. — *On dit que* ω *est intégrable sur* V *si,* $[\omega]_V$ *étant la mesure de Radon associée à* V *et à* ω, *la fonction constante égale à* 1 *est intégrable par rapport à* $[\omega]_V$; *dans ce cas, son intégrale s'appelle l'intégrale de* ω *sur* V *et se note*

$$\int_V \omega = \int_V [\omega]_V. \tag{4.3}$$

Cette intégrale existe toujours si ω est à support compact sur V et, *a fortiori*, si la variété V est compacte. Si deux cartes $(\mathcal{O}_1, \varphi_1)$ et $(\mathcal{O}_2, \varphi_2)$ sont choisies de telle manière que l'intersection $\varphi_1(\mathcal{O}_1) \cap \varphi_2(\mathcal{O}_2)$ ne soit pas vide, les mesures définies à l'aide de ces cartes et de la forme différentielle ω coïncident dans cette intersection. Donc, pour calculer l'intégrale de ω sur V, il est naturel de décomposer la variété V en une réunion (finie ou dénombrable) $\bigcup_i V_i$ d'ensembles disjoints $[\omega]_V$-mesurables et suffisamment petits pour que chacun d'eux soit contenu dans l'image d'une carte. Si, alors, chaque V_i est contenu dans $\varphi_i(\mathcal{O}_i)$ on a la formule

$$\int_V \omega = \sum_i \int_{V_i} [\omega]_V = \sum_i \int_{\varphi_i^{-1}(V_i)} f_i \theta_i\, dx_1 \otimes \ldots \otimes dx_n. \tag{4.4}$$

3. Si l'on considère une « variété singulière » avec bord orientée $H|V$, définie par une application propre H de classe C^1 d'une variété orientée V

avec bord, on appelle bord de cette variété singulière la restriction $H|bV$ de l'application H au bord de V.

On a alors le théorème suivant :

THÉORÈME 3 (Stokes). — *Soit* V *une variété avec bord de classe* C^1 *et de dimension n, orientée. Soit* H *une application propre de classe* C^1 *de* V *dans une autre variété* Ω *de classe* C^1, *définissant ainsi une variété singulière orientée, avec bord* $H|V$, *de* Ω. *Soit* ω *une forme différentielle cobordable de degré* $n-1$ *dans* Ω *à support compact. Alors, on a la formule de Stokes :*

$$\int_{H|V} d\omega = \int_{H|bV} \omega. \tag{4.5}$$

Supposons, d'abord, que $H =$ l'identité. Alors pour chaque point a de l'intérieur $\mathring{V}$ de V, on peut trouver un ouvert $\mathcal{O}_a$ de $\mathbf{R}^n$ et un voisinage connexe $\mathcal{V}_a$ dans $\mathring{V}$ de telle sorte qu'il existe une carte $(\mathcal{O}_a, \varphi_a)$ de $\mathring{V}$, qui applique l'ouvert $\mathcal{O}_a$ dans V avec $\varphi_a(\mathcal{O}_a) = \mathcal{V}_a$. Si, au contraire, le point a appartient au bord bV, il existe un C^1-difféomorphisme φ_a d'un ouvert $\mathcal{O}_a$ du demi-espace $\mathbf{R}^n_- = \{x; x_1 \leqq 0\}$ de $\mathbf{R}^n$ sur un ouvert $\mathcal{V}_a$, de V de telle manière que l'intersection $bV \cap \mathcal{V}_a$ soit l'image par φ_a de l'intersection de $\mathcal{O}_a$ avec l'hyperplan $x_1 = 0$ de $\mathbf{R}^n$. L'ensemble de tous les $\mathcal{V}_a$, ainsi formé, est un recouvrement de V, donc, *a fortiori*, de l'intersection compacte de V et du support de ω. Il suffit donc d'un nombre fini de tels voisinages, soit $(\mathcal{V}_k)_{k\in I}$ correspondant à des points a_k pour recouvrir cette intersection. Soit $(\alpha_k)_{k\in I}$ une partition de l'unité subordonnée et formée de fonctions de classe C^1. La formule à prouver s'écrit

$$\sum_{k\in I} \int_V d(\alpha_k \omega) = \sum_{k\in I} \int_{bV} \alpha_k \omega. \tag{4.6}$$

Maintenant, il faut démontrer l'égalité de chaque terme de la somme du côté gauche avec le terme correspondant du côté droit. Comme $\varphi_k = \varphi_{a_k}$ est un C^1-difféomorphisme il commute avec d, et $\varphi_k^*(\alpha_k\omega)$ est une forme cobordable dans $\mathcal{O}_k = \mathcal{O}_{a_k}$, donc il reste à montrer

$$\begin{aligned}\int_V d(\alpha_k\omega) &= \int_{\mathcal{O}_k} \varphi_k^* d(\alpha_k\omega) = \int_{\mathcal{O}_k} d(\varphi_k^*(\alpha_k\omega)) \\ &= \int_{bV} \alpha_k\omega = 0, \qquad \text{si} \quad a_k \in \mathring{V}\end{aligned} \tag{4.7}$$

et

$$\begin{aligned}\int_V d(\alpha_k\omega) &= \int_{\mathcal{O}_k} d(\varphi_k^*(\alpha_k\omega)) \\ &= \int_{bV} \alpha_k\omega = \int_{\mathcal{O}_k \cap \{x_1=0\}} \varphi_k^*(\alpha_k\omega), \qquad \text{si} \quad a_k \in bV.\end{aligned} \tag{4.8}$$

Pour démontrer l'égalité des deux intégrales dans (4.7) et (4.8), on utilise l'approximation de la forme cobordable $\varphi_k^*(\alpha_k\omega)$ et de son cobord par des suites $\{\varpi_j\}$ et $\{d\varpi_j\}$, formes de classe C^∞ à supports dans un compact fixe de $\mathcal{O}_k$, pour lesquelles l'égalité analogue est connue.

Maintenant, si l'application H donnée est une application différente de l'identité, on est amené à prouver la formule

$$\int_V H^* d\omega = \int H^* \omega. \tag{4.9}$$

Ici nous savons déjà que l'application H^* commute avec le cobord d pour les formes cobordables et cela revient à montrer que

$$\int_V d(H^*\omega) = \int_{bV} H^*\omega.$$

Mais, d'après les hypothèses faites à l'application donnée H, le support de $H^*\omega$ coupe la variété V suivant un compact et donc l'expression (4.9) n'est autre qu'une semblable à celle déjà établie en (4.6) relativement à la forme $H^*\omega$.

BIBLIOGRAPHIE.

BRACONNIER (J.) :

[1] *Introduction à la théorie des variétés différentiables*, Faculté des Sciences de Lyon, Département de Mathématique, 1960.

FLANDERS (H.) :

[1] *Differential Forms with Applications to the Physical Sciences*, Academic Press, 1963.

DE RHAM (G.) :

[1] *Variétés différentiables*, Hermann et Cie, Paris, 1960.

[2] *La théorie des formes différentielles extérieures et l'homologie des variétés différentiables* (*Rendiconti di Matematica et delle sue Applicazioni*, série V, t. 20, 1960, p. 105-146).

GILLIS (P.) :

[1] *Sur les formes différentielles et la formule de Stokes* (*Mémoires de l'Académie Royale de Belgique*, Classe des Sciences, vol. 20, 1943).

SEGRÉ (B.) :

[1] *Forme differenziali e loro integrali*, vol. I, Docet, Edizioni Universitarie, Roma, 1951.

SCHWARTZ (L.) :

[1] *Théorie des distributions*, I et II, Hermann et Cie, Paris, 1950.

[2] *Cours d'Analyse*, 2e partie, École Polytechnique, 1960.