Annales scientifiques de l'É.N.S.

Radu Rosca

Sur les congruences normales à nappes focales en correspondance pseudo-isométrique

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 83, nº 2 (1966), p. 153-170

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1966_3_83_2_153_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
3e série, t. 83, 1966, p. 153 à 170.

SUR LES CONGRUENCES NORMALES A NAPPES FOCALES EN CORRESPONDANCE PSEUDO-ISOMÉTRIQUE

PAR M. RADU ROSCA.

Dans un travail sur les congruences ∞^1 cycliques [1 *a*] nous avons rencontré un type de congruences rectilignes pour lesquelles les nappes focales se correspondent avec égalité des éléments d'aires (correspondance équi-aires) et des courbures totales. Nous nommerons ce genre de correspondance entre les nappes focales d'une congruence une *correspondance pseudo-isométrique* et la congruence correspondante une *congruence* [$\mathfrak{E}$]. L'étude qui suit a trait, en général, aux congruences normales du type [$\mathfrak{E}$], dont l'existence est assurée par un système de sept équations linéaires de Pfaff complètement intégrable. Une congruence normale [$\mathfrak{E}$] jouit en outre de deux propriétés importantes; l'une métrique qui exprime que c'est *une congruence* (ω) [2 *a*] (à angle des réseaux focaux variables si l'on se restreint au domaine réel et l'on exclut les congruences de Guichard), l'autre, de nature projective suivant laquelle c'est aussi une *congruence de Goursat*. Nous désignerons en général par [$G(\omega)$] les congruences [$\mathfrak{E}$] qui possèdent ces deux qualités (sans être normales), et par [$G_n(\omega)$] celles qui, en plus, sont normales. La loi d'orthogonalité des réseaux et des congruences et le caractère (ω) d'une congruence [$G_n(\omega)$] font que celle-ci est génératrice de ∞^1 couples de *congruences de Guichard* (déterminant par suite une double infinité de *surfaces de Voss*), qui sont décrites par les tangentes focales des réseaux orthogonaux [$G_n(\omega)$]. De plus, la double propriété d'être une congruence de Ribaucour [en tant que congruence (ω)] et de Goursat fait que [$G_n(\omega)$] détermine une *configuration projective de Vincensini dont toutes les congruences sont des congruences* [$G(\omega)$] *déduites de* [$G_n(\omega)$] *par la transformation de Goursat-Tzitzeica.*

1. Toutes les considérations qui vont suivre se rapportent à des congruences rectilignes (d'un espace euclidien E_3) dont tous les points de la surface moyenne, qui est supposée de classe $\mathfrak{C}^3$, sont réguliers, et dont la représentation sphérique est univoque. Cela étant, si $\mathbf{A}$ et 2ρ sont respectivement le point moyen et la distance focale pour chaque rayon d'une congruence normale quelconque $[C_n]$, les équations du déplacement infinitésimal du repère *canonique* $T \equiv \{\mathbf{A}\mathbf{e}_1\,\mathbf{e}_2\,\mathbf{e}_3\}$ attaché au rayon $(\mathbf{A}, \mathbf{e}_3)$, sont comme on sait [1]

$$\left\{\begin{aligned} d\mathbf{A} &= \rho\,(\omega_2^3\,\mathbf{e}_1 + \omega_1^3\,\mathbf{e}_2) + \omega^3\mathbf{e}_3, \\ d\mathbf{e}_1 &= \omega_1^2\,\mathbf{e}_2 + \omega_1^3\,\mathbf{e}_3, \\ d\mathbf{e}_2 &= -\omega_1^2\,\mathbf{e}_1 + \omega_2^3\,\mathbf{e}_3, \\ d\mathbf{e}_3 &= -\omega_1^3\,\mathbf{e}_1 - \omega_2^3\,\mathbf{e}_2. \end{aligned}\right. \tag{1}$$

En désignant par $\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2$ les pfaffiens qui correspondent aux développables de $[C_n]$, ceux-ci sont liés aux pfaffiens invariants de (1) (bien entendu, dans le cas d'une congruence normale) par les égalités

$$\overline{\omega}_1 = \frac{\omega_2^3 - \omega_1^3}{\sqrt{2}}, \qquad \overline{\omega}_2 = \frac{\omega_2^3 + \omega_1^3}{\sqrt{2}} \tag{2}$$

et nous poserons, d'après Finikoff [3 *a*],

$$\left\{\begin{aligned} 2\rho\omega_1^2 \quad &= A_2\overline{\omega}_2 + A_1\overline{\omega}_1, \\ \omega^3 + d\rho &= A_2\overline{\omega}_1 + C_1\overline{\omega}_2, \\ \omega^3 - d\rho &= A_1\overline{\omega}_2 + C_2\overline{\omega}_1. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Dans ces conditions, $\mathbf{F}_1$ et $\mathbf{F}_2$ étant les deux foyers de $(\mathbf{A}, \mathbf{e}_3)$, on a les expressions

$$\left\{\begin{aligned} d\mathbf{F}_1 &= 2\rho\overline{\omega}_1\,\frac{\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2}{\sqrt{2}} + (A_2\overline{\omega}_1 + C_1\overline{\omega}_2)\,\mathbf{e}_3, \\ d\mathbf{F}_2 &= 2\rho\overline{\omega}_2\,\frac{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2}{\sqrt{2}} + (A_1\overline{\omega}_2 + C_2\overline{\omega}_1)\,\mathbf{e}_3. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Ceci rappelé, en posant

$$\left\{\begin{aligned} \Omega_{1|1} &= A_2\overline{\omega}_1 + C_1\overline{\omega}_2, \qquad \Omega_{1|2} = 2\rho\overline{\omega}_1; \\ \Omega_{2|1} &= A_1\overline{\omega}_2 + C_2\overline{\omega}_1, \qquad \Omega_{2|2} = 2\rho\overline{\omega}_2, \end{aligned}\right. \tag{5}$$

nous dirons que $[C_n]$ est une congruence à nappes focales en *correspondance équi-aires* si l'on a

$$[\Omega_{1|1}\Omega_{1|2}] = [\Omega_{2|2}\Omega_{2|1}] \tag{6}$$

([ ], symbole du produit extérieur).

---

[1] *Voir* aussi FINIKOFF, *Theorie der Kongruenzen*, Academie Verlag, Berlin.

En introduisant dans (6) les expressions (5), il en résulte aussitôt

$$C_1 = C_2, \tag{7}$$

et, en remplaçant C_1 et C_2 par C, pour une congruence du type envisagé on aura à considérer le système d'équations de Pfaff

$$\left\{\begin{aligned} 2\rho\omega_1^2 &= A_2\overline{\omega}_1 + A_1\overline{\omega}_2, \\ 2\omega^3 &= (A_2 + C)\overline{\omega}_1 + (A_1 + C)\overline{\omega}_2, \\ 2d\rho &= (A_2 - C)\overline{\omega}_1 - (A_1 - C)\overline{\omega}_2, \\ \omega^1 &= \frac{\rho}{\sqrt{2}}(\overline{\omega}_2 + \overline{\omega}_1), \\ \omega^2 &= \frac{\rho}{\sqrt{2}}(\overline{\omega}_2 - \overline{\omega}_1). \end{aligned}\right. \tag{8}$$

En tenant compte des équations de structure $\mathcal{E}$

$$D\omega^i = [\omega^k \omega_k^i], \qquad D\omega_i^j = [\omega_i^k \omega_k^j]$$

du groupe euclidien (D, symbole de différentiation extérieure), on trouve tout d'abord

$$D\overline{\omega}_1 = -\frac{A_1}{2\rho}[\overline{\omega}_1\overline{\omega}_2], \qquad D\overline{\omega}_2 = -\frac{A_2}{2\rho}[\overline{\omega}_1\overline{\omega}_2].$$

D'autre part, en vertu des mêmes équations $\mathcal{E}$, et puisque dans le cas d'une congruence normale, on a

$$D(\omega^3 \pm d\rho) = 0,$$

les équations (8) donnent par différentiation extérieure les trois équations quadratiques extérieures distinctes

$$\left\{\begin{aligned} [dA_2\overline{\omega}_1] + [dC\ \overline{\omega}_2] &= \frac{A_2}{2\rho}(A_2 + C)[\overline{\omega}_1\overline{\omega}_2], \\ [dA_1\overline{\omega}_2] + [dC\ \overline{\omega}_1] &= \frac{A_1}{2\rho}(A_2 + C)[\overline{\omega}_1\overline{\omega}_2], \\ [dA_1\overline{\omega}_1] + [dA_2\overline{\omega}_2] &= \frac{1}{2\rho}(2A_1^2 + 2A_2^2 - A_1C - A_2C + 4\rho^2)[\overline{\omega}_1\overline{\omega}_2]. \end{aligned}\right. \tag{9}$$

Conformément à la théorie générale des équations de Pfaff, les nombres *caractéristiques* étant $s_1 = 3$, $s_2 = 0$, le système (Σ) formé par (8) et (9) est en *involution*, d'où la proposition suivante : *la congruence normale la plus générale à nappes focales en correspondance équi-aires dépend de trois fonctions arbitraires d'un argument.*

Si l'on se rappelle maintenant que l'expression des formes métriques externes des nappes focales ($\mathbf{F}_1$), ($\mathbf{F}_2$) est en général [3 *a*]

$$\left\{\begin{aligned} \psi_1 &= A_1(\overline{\omega}_1)^2 - C_1(\overline{\omega}_2)^2, \\ \psi_2 &= A_2(\overline{\omega}_2)^2 - C_2(\overline{\omega}_1)^2, \end{aligned}\right. \tag{10}$$

et compte tenu de (4) où l'on remplace [de même qu'en (10)] C_1, C_2 par C, on trouve que les courbures totales de $(\mathbf{F}_1)$, $(\mathbf{F}_2)$ sont respectivement

$$K_1 = -\frac{A_1}{4\rho^2 C}, \qquad K_2 = -\frac{A_2}{4\rho^2 C}. \tag{11}$$

Par ailleurs, dans l'étude d'une classe de congruences ∞^1 cycliques [1 *a*], nous avons été amené à considérer des congruences (non normales) pour lesquelles, en plus de l'égalité des éléments d'aire des deux nappes focales, on a aussi l'égalité de leurs courbures totales. Nous avons dénommé ce genre de correspondance une *correspondance pseudo-isométrique*, et en désignant par $[\mathfrak{C}]$ la congruence correspondante, les formules (11) suggèrent de chercher s'il existe des congruences normales du type $[\mathfrak{C}]$.

On devra donc avoir

$$A_1 = A_2 = A,$$

et en posant

$$\alpha_1 = \frac{A - C}{2}, \qquad \alpha_2 = \frac{A + C}{2}, \tag{12}$$

les équations (8), où l'on remplace A_1, A_2 par A et $\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2$ par leurs expressions (2), s'écrivent

$$\left\{\begin{aligned} &\omega_1^2 = \frac{A}{\sqrt{2}\,\rho}\,\omega_2^3, \\ &\omega^3 = \sqrt{2}\,\alpha_2\omega_2^3, \\ &d\rho = -\sqrt{2}\,\alpha_1\omega_1^3 \qquad (A = \alpha_1 + \alpha_2). \\ &\omega^1 = \rho\omega_2^3, \\ &\omega^2 = \rho\omega_1^3. \end{aligned}\right. \tag{13}$$

La différentiation extérieure des trois premières équations (13) donne, en tenant compte des équations $\mathcal{E}$,

$$\left\{\begin{aligned} &[dA\,\omega_2^3] = -\frac{1}{\sqrt{2}\,\rho}(A^2 + 2\rho^2 + 2\alpha_1 A)\,[\omega_1^3\omega_2^3], \\ &[d\alpha_2\omega_2^3] = -\frac{A\alpha_2}{\sqrt{2}\,\rho}\,[\omega_1^3\omega_2^3], \\ &[d\alpha_1\omega_1^3] = 0. \end{aligned}\right. \tag{14}$$

Si l'on se reporte maintenant aux équations quadratiques (9) où l'on remplace A_1 et A_2 par A, on constate sans peine que le système (14) est équivalent à (9). Mais puisque les formes $d\alpha_1$ et ω_1^3 sont proportionnelles, les propriétés des produits extérieurs montrent que les équations quadratiques (14) se réduisent aux deux équations linéaires

$$\left\{\begin{aligned} &d\alpha_1 = -\frac{(3A\alpha_1 + 2\rho^2)\,\omega_1^3}{\sqrt{2}\,\rho}, \\ &d\alpha_2 = -\frac{A\alpha_2}{\sqrt{2}\,\rho}\,\omega_1^3. \end{aligned}\right. \tag{15}$$

On voit que finalement on a à considérer le système d'équations linéaires de Pfaff (Σ) formé par (13) et (15), et la différentiation extérieure de (Σ) n'entraînant aucune équation nouvelle, le système en question est complètement intégrable. On peut donc énoncer le résultat suivant : *les congruences normales dont les nappes focales sont en correspondance pseudo-isométrique existent et dépendent de sept constantes arbitraires.*

2. Nous allons mettre maintenant en évidence quelques propriétés métriques et projectives du type de congruences normales dont on vient de reconnaître l'existence. En désignant (pour des raisons qui apparaîtront ultérieurement) par $[G_n(\omega)]$ une telle congruence, les équations (1) du déplacement de T deviennent, en tenant compte de (13),

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} d\mathbf{A} &= \rho(\omega_2^3\mathbf{e}_1+\omega_1^3\mathbf{e}_2)+\sqrt{2}\,\alpha_2\omega_2^3\mathbf{e}_3,\\ d\mathbf{e}_1 &= \frac{A}{\sqrt{2}\,\rho}\,\omega_2^3\mathbf{e}_2+\omega_1^3\mathbf{e}_3,\\ d\mathbf{e}_2 &= -\frac{A}{\sqrt{2}\,\rho}\,\omega_2^3\mathbf{e}_1+\omega_2^3\mathbf{e}_3,\\ d\mathbf{e}_3 &= -\omega_1^3\mathbf{e}_1-\omega_2^3\mathbf{e}_2. \end{aligned}\right.$$

Si nous introduisons le repère orthonormé $T_\varepsilon \equiv \{\mathbf{A}\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\mathbf{E}_3\}$ défini par

$$(17)\qquad \mathbf{E}_1=\mathbf{e}_2,\qquad \mathbf{E}_2=\frac{\rho\,\mathbf{e}_1+\sqrt{2}\,\alpha_2\mathbf{e}_3}{r},\qquad \mathbf{E}_3=\frac{\sqrt{2}\,\alpha_2\mathbf{e}_1-\rho\,\mathbf{e}_3}{r}\qquad (r^2=\rho^2+2\alpha_2^2),$$

et les pfaffiens

$$(18)\qquad \Omega_1=\rho\,\omega_1^3,\qquad \Omega_2=r\,\omega_2^3,$$

$\mathbf{E}_3$ est visiblement le vecteur unitaire de la normale à $(\mathbf{A})$, et l'on déduit de (16)

$$(19)\qquad d\mathbf{E}_3=-\Omega_1^3\mathbf{E}_1-\Omega_2^3\mathbf{E}_2,$$

avec

$$(20)\qquad \Omega_1^3=-\frac{n}{r^2\rho}\,\Omega_2,\qquad \Omega_2^3=-\frac{n}{r^2\rho}\,\Omega_1,$$

où l'on a posé

$$n=\rho^2+A\alpha_2;$$

il est d'ailleurs bon de remarquer que la *magnitude* de $[G_n(\omega)]$ (le sinus de l'angle que fait chaque rayon de la congruence avec la normale correspondante de la surface moyenne) a pour valeur $\frac{\sqrt{2}\,\alpha_2}{r}$. La forme des équations (20) montre aussitôt que $(\mathbf{A})$ est *minimale*, et comme sa forme métrique externe est

$$(20')\qquad \psi_A=\Omega_1\Omega_1^3+\Omega_2\Omega_2^3=\frac{2n}{r}\,\omega_1^3\omega_2^3,$$

il suffit de se rappeler que les développables de $[G_n(\omega)]$ sont définies par l'équation

$$(\omega_1^3)^2 - (\omega_2^3)^2 = 0,$$

pour conclure que $[G_n(\omega)]$ est du *type de Ribaucour*. Or il est bien connu que toute congruence de Ribaucour normale a pour surface *génératrice* une surface minimale.

Si $(\mathbf{C})$ est cette surface génératrice, on a

$$d\mathbf{C}\, d\mathbf{A} \overset{\text{def}}{=} 0,$$

d'où il résulte [3 *a*]

$$d\mathbf{C} = \lambda\rho\,(\omega_1^3\,\mathbf{e}_1 - \omega_2^3\,\mathbf{e}_2), \tag{21}$$

et par différentiation extérieure, et à l'aide de (16) et de la même équation (13), on trouve

$$d\log\lambda = -\sqrt{2}\,\frac{\alpha_2}{\rho}\,\omega_1^3. \tag{22}$$

En posant

$$\Omega_1^\star = \lambda\rho\,\omega_1^3, \qquad \Omega_2^\star = -\lambda\rho\,\omega_2^3,$$

on déduit de (16) et (21) que les deux formes fondamentales de $(\mathbf{C})$ sont

$$\left\{\begin{aligned} (d\mathbf{C})^2 &= (\Omega_1^\star)^2 + (\Omega_2^\star)^2,\\ -d\mathbf{C}\,d\mathbf{e}_3 &= \frac{1}{\lambda\rho}\{(\Omega_1^\star)^2 - (\Omega_2^\star)^2\}, \end{aligned}\right. \tag{23}$$

et, leur *jacobienne* étant $\frac{2}{\lambda\rho}\Omega_1^\star\,\Omega_2^\star$, les courbes $\omega_1^3 = 0$, $\omega_2^3 = 0$ [qui, on vient de le voir, correspondent aux asymptotiques de $(\mathbf{A})$] tracent sur $(\mathbf{C})$ le réseau des lignes de courbure. La surface $(\mathbf{A})$ est donc l'adjointe de $(\mathbf{C})$, qui comme nous allons le montrer, est un *caténoïde*. Dans ce but supposons (ce qu'on peut toujours faire [3 *a*]) que la représentation sphérique de $[C_n]$ ait la forme orthogonale; on peut par conséquent écrire

$$\omega_1^3 = m_1\,du^1, \qquad \omega_2^3 = m_2\,du^2. \tag{24}$$

Par différentiation extérieure et en tenant compte des relations

$$D\omega_1^3 = 0, \qquad D\omega_2^3 = \frac{A}{\sqrt{2}\,\rho}[\omega_1^3\,\omega_2^3],$$

qui résultent des équations $\mathcal{E}$ et de (13), on obtient

$$\frac{\dfrac{\partial m_2}{\partial u^1}}{m_1 m_2} = \frac{A}{\sqrt{2}\,\rho}, \qquad \frac{\partial m_1}{\partial u^2} = 0. \tag{25}$$

D'autre part, si l'on considère l'invariant de Sannia

$$\Phi = (\mathbf{e}_3\,d\mathbf{e}_3\,d\mathbf{A}) = \delta_{ik}\,du^i\,du^k,$$

on trouve, à l'aide de (16),

$$\delta_{11} = -\rho m_1^2, \qquad \delta_{12} = 0, \qquad \delta_{22} = \rho m_2^2,$$

et puisque dans le cas qui nous occupe, les formes secondaires ω^3 et ω_1^2 sont proportionnables à ω_2^3, les deux conditions d'intégrabilité qui expriment l'invariance de ω_1^3, ω_2^3 [3 *a*] se réduisent à

$$\sqrt{2}\,\alpha_2 m_2 = \frac{1}{m_1 m_2}\left(\frac{\partial \delta_{11}}{\partial u^1} - \frac{\delta_{22}\,\partial \log m_2}{\partial u^1} - \delta_{11}\frac{m_1^2}{m_2^2}\frac{\partial \log m_2}{\partial u^1}\right).$$

En développant les calculs et, moyennant (13) et (24), on trouve finalement

$$m_1^4 = m_2^4$$

et, le choix du signe étant indifférent, nous prendrons

$$m_1 = m_2 = m.$$

Si nous désignons maintenant par d_{ik} les coefficients de la forme externe de (**C**), les considérations précédentes et (23) donnent immédiatement

$$d_{11} = m^2\lambda\rho, \qquad d_{12} = 0, \qquad d_{22} = -m^2\lambda\rho.$$

Cela étant, les *courbures asymptotiques* des courbes u^i [qui on l'a vu correspondent aux lignes de courbure de (**C**)] sont, suivant la formule de Grove [4 *a*], respectivement

$$K(u^1) = (d)^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial\left(d_{11}^{\frac{1}{2}}\right)}{\partial u^2}, \qquad K(u^2) = -(d)^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial\left(\partial_{22}^{\frac{1}{2}}\right)}{\partial u^1},$$

où l'on a posé

$$d = \det(d_{ik}).$$

Mais les relations (25) (où l'on fait $m_1 = m_2 = m$), (22) et (13) montrent que les coefficients d_{ik} ne sont fonction que de u^1 et l'on a immédiatement

$$K(u^1) = 0.$$

Pour le calcul de $K(u^2)$, il suffit de remarquer que moyennant (13) on a

$$\frac{\partial \dfrac{\Lambda m}{\sqrt{2}\,\rho}}{\partial u^1} = 0 = \frac{\partial \alpha_2 m}{\partial u^1},$$

et de tenir compte de la troisième équation (13), pour trouver qu'on a aussi

$$K(u^2) = 0.$$

Or suivant une proposition due à Grove [4 *a*], l'annulation simultanée des courbures asymptotiques des lignes principales d'une surface est une propriété caractéristique du caténoïde, ce qui démontre l'assertion faite plus haut.

Ce point établi, il est facile de s'assurer que (**A**) est un hélicoïde d'aire minimale. En effet, les coefficients de la forme métrique fondamentale de (**A**) rapportée aux asymptotiques [qu'on déduit immédiatement de (1) et (24) où l'on fait $m_1 = m_2 = m$] n'étant fonction que de u^1, les courbes $u^2 =$ Cte sont des géodésiques et, par conséquent, des droites.

Nous allons faire maintenant quelques remarques sur le réseau $(\mathcal{A})$ (nécessairement à invariants égaux) tracé par les développables de $[G_n(\omega)]$ sur (**A**). En notant par v^i les paramètres de ce réseau, les équations (2) et (24) montrent immédiatement qu'il est *isotherme* et permettent de poser

$$\overline{\omega}_1 = - m\, dv^1, \qquad \overline{\omega}_2 = m\, dv^2. \tag{26}$$

Dans ces conditions, de (13), (18) et (20), on déduit que les coefficients g_{ik} et b_{ik} des deux formes de (**A**) ne dépendent que de $v^1 + v^2$ et en effectuant les calculs, on trouve

$$\tag{27} \begin{cases} g_{11} = m^2(\rho^2 + \alpha_2^2), & g_{12} = - m^2 \alpha_2^2, & g_{22} = m^2(\rho^2 + \alpha_2^2); \\ b_{11} = \dfrac{m^2 n}{r}, & b_{12} = 0, & b_{22} = - \dfrac{m^2 n}{r}. \end{cases}$$

Il résulte aussitôt de (27) que les *torsions géodésiques* des courbes de (**A**) *sont égales* et ce résultat est confirmé par le fait que (**A**) devient le réseau principal de (**A**) quand la magnitude $\dfrac{\sqrt{2}\,\alpha_2}{n}$ de $[G_n(\omega)]$ est nulle.

On peut aussi rattacher le réseau $(\mathcal{A})$ à la théorie des congruences de sphères de la manière suivante :

Soit $[\Sigma(u^i)]$ une congruence de sphères ayant (**A**) pour *déférente*, et $\sqrt{2\rho^\star(u^\star)}$, $\Delta(\mathbf{A}, \rho^\star)$ respectivement le rayon de $[\Sigma(u^i)]$ et le *paramètre différentiel mixte* de **A** et de $\rho^\star$ relatif à la forme métrique fondamentale de (**A**). La corde de contact C_Σ de la sphère $\Sigma(u^i)$ perce le plan tangent en **A** à (**A**) en un point **I** ayant pour expression

$$\mathbf{I} = \mathbf{A} - \Delta(\mathbf{A}, \rho^\star).$$

Ce point qui est le milieu du segment déterminé par les deux points où $\Sigma(u^i)$ touche les deux nappes de son enveloppe, définit la *loi d'association* (**A**, **I**) de Vincensini [2 *b*] invariante par déformation arbitraire de (**A**). Si l'on suppose que $\rho^\star$ n'est fonction que de u^1, on déduit de la première équation (16) et de (24) (où $m_1 = m_2 = m$)

$$\Delta(\mathbf{A}, \rho^\star) = \frac{\dfrac{\partial \rho^\star}{\partial u^1}}{m\rho}\, \mathbf{e}_2.$$

De plus (en se rappelant que $\alpha_2 m = \text{Cte}$), si l'on a aussi

$$\rho^\star = \sqrt{2}\,\alpha_2 m \int \rho\, du^1, \tag{28}$$

on trouve à l'aide de (13) et (24) que le *réseau invariant* $(\mathcal{O})$ de Vincensini, qui par définition est

$$d\mathbf{I}\, d\mathbf{A} = 0,$$

a pour équation

$$(du^1)^2 + (du^2)^2 = 0. \tag{29}$$

Il résulte donc des considérations qui précèdent et de (29) que le réseau $(\mathcal{C})$ est le *réseau associé* [son équation étant $(du^1)^2 - (du^2)^2$] au réseau invariant $(\mathcal{O})$ de Vincensini, relatif à une congruence de sphères de déférente $(\mathbf{A})$ et dont les rayons $\sqrt{2\rho^\star(u^1)}$ sont de la forme (28). Remarquons de plus que, puisque $(\mathcal{O})$ est aussi conjugué au sens Dupin, la congruence de sphères $[\Sigma(u^i)]$ détermine une *équivalence superficielle* [2 *b*] *directe* sur les deux nappes de son enveloppe.

3. En ce qui concerne les congruences $[G_n(\omega)]$, on peut aussi établir une réciproque comme suit : écrivons les formules du déplacement infinitésimal du repère canonique $T \equiv \{\mathbf{A}\mathbf{e}_1\, \mathbf{e}_2\, \mathbf{e}_3\}$ attaché à chaque rayon d'une congruence normale quelconque sous la forme [3 *a*]

$$\left\{\begin{aligned} d\mathbf{A} &= \rho\,(\omega_2^3 \mathbf{e}_1 + \omega_1^3 \mathbf{e}_2) + (\eta\omega_1^3 + \xi\omega_2^3)\,\mathbf{e}_3,\\ d\mathbf{e}_1 &= (\xi'\omega_1^3 + \eta'\omega_2^3)\,\mathbf{e}_2 + \omega_1^3\,\mathbf{e}_3,\\ d\mathbf{e}_2 &= -(\xi'\omega_1^3 + \eta'\omega_2^3)\,\mathbf{e}_1 + \omega_2^3\,\mathbf{e}_3,\\ d\mathbf{e}_3 &= -\omega_1^3\,\mathbf{e}_1 - \omega_2^3\,\mathbf{e}_2. \end{aligned}\right. \tag{30}$$

Si $\mathbf{A}_{,1}$ et $\mathbf{A}_{,2}$ sont les *dérivées covariantes* de $\mathbf{A}$ d'ordre 1 (par rapport à ω_1^3, ω_2^3) et $\mathbf{N}$ un vecteur normal à $(\mathbf{A})$, on a

$$\mathbf{N} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{A}_{,1} \times \mathbf{A}_{,2}. \tag{30'}$$

En désignant par

$$\psi_{\mathrm{A}} = b_{ik}\,\omega_3^i\,\omega_3^k \qquad (\omega_3^j = -\,\omega_j^3)$$

la forme métrique externe de $(\mathbf{A})$, on a

$$\psi_{\mathrm{A}} = f\, d\mathbf{A}\, d\mathbf{N}$$

(f, facteur de proportionnalité), et moyennant (30), (30′), il vient

$$b_{11} = f(\eta_{,1} + \xi\xi' + \xi\eta), \qquad b_{22} = f(\xi_{,2} - \eta\eta' + \xi\eta).$$

En imposant maintenant à la surface $(\mathbf{A})$ d'être minimale et d'admettre pour asymptotiques les formes invariantes du déplacement de T, et à la congruence $[C_n]$ d'être du type de Ribaucour, on trouve respectivement

$$(31)\qquad \left\{\begin{array}{c}(1+\eta^2)(\xi_{,2}-\eta\eta'+\xi\eta)+(1+\xi^2)(\eta_{,1}+\xi\xi'+\xi\eta)=0,\\ \xi\eta=0,\\ \eta_{,1}-\xi_{,2}+\xi\xi'+\eta\eta'=0\end{array}\right.$$

($\xi_{,2}$, $\eta_{,1}$, dérivées covariantes).

La seconde équation (31) exprime que la forme secondaire (qui, comme on sait, correspond au *sous-groupe stationnaire* des glissements) est proportionnelle à l'une des formes invariantes. En prenant par exemple $\eta=0$, ceci entraîne

$$(31')\qquad \xi'=0,\qquad \xi_{,2}=0,$$

et des conditions d'intégrabilité des équations $\mathcal{E}$, qui dans le cas présent s'écrivent

$$\begin{aligned}\rho\eta&=\rho_{,2}-2\rho\xi',\\ \rho\xi&=\rho_{,1}+2\rho\eta',\end{aligned}$$

on déduit

$$(32)\qquad d\log\rho=(\xi-2\eta')\,\omega_1^3.$$

D'autre part, puisque en vertu de la première égalité (31′) on a

$$D\omega_1^3=0,$$

la différentiation extérieure de (32) donne

$$\eta'_{,2}=0.$$

Il résulte tout d'abord de ce qui précède que les fonctions ξ, η et ρ ne sont fonction que d'un des paramètres des asymptotiques, et la première équation (30) montre que dans ce cas (**A**) est l'hélicoïde d'aire minimale. En second lieu, les pfaffiens invariants correspondant aux deux nappes focales de $[C_n]$ ayant pour expressions

$$\begin{aligned}&\Omega_{1|1}=\frac{2\rho}{\sqrt{2}}\{(\xi-\eta')\overline{\omega}_2+\eta'\overline{\omega}_1\}, &&\Omega_{2|1}=\frac{2\rho}{\sqrt{2}}\{(\xi-\eta')\overline{\omega}_1+\eta'\overline{\omega}_2\},\\ &\Omega_{1|2}=2\rho\overline{\omega}_1, &&\Omega_{2|2}=2\rho\overline{\omega}_2,\\ &\Omega^3_{1|1}=-\overline{\omega}_2, &&\Omega^3_{2|1}=-\overline{\omega}_1,\\ &\Omega^3_{1|2}=\frac{\eta'}{\sqrt{2}}(\overline{\omega}_1+\overline{\omega}_2), &&\Omega^3_{2|2}=\frac{\eta'}{\sqrt{2}}(\overline{\omega}_1+\overline{\omega}_2),\end{aligned}$$

on déduit

$$(33)\qquad \left\{\begin{aligned}&[\Omega_{1|1}\,\Omega_{1|2}]=-\frac{4\rho^2}{\sqrt{2}}(\xi-\eta')[\overline{\omega}_1\overline{\omega}_2]=[\Omega_{2|2}\,\Omega_{2|1}],\\ &[\Omega^3_{1|1}\,\Omega^3_{1|2}]=\frac{\eta'}{\sqrt{2}}[\overline{\omega}_1\overline{\omega}_2]=[\Omega^3_{2|2}\,\Omega^3_{2|1}].\end{aligned}\right.$$

La propriété de correspondance pseudo-isométrique pour les deux nappes focales de la congruence $[C_n]$ en jeu, se lit immédiatement sur les équations (33), et la réciproque que nous avions en vue se trouve ainsi démontrée.

4. Il est maintenant facile de mettre en évidence deux propriétés importantes d'une congruence $[G_n(\omega)]$, propriétés qu'elle partage en vertu d'un résultat énoncé par nous [1 *b*] avec la congruence des normales à l'hélicoïde d'aire minimale.

En premier lieu, en remplaçant dans (4), $\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2$ par leurs expressions (26) et A_i, C_i $(i = 1, 2)$ respectivement par A et C, on en déduit que l'angle ω des réseaux focaux est *le même* sur les deux nappes focales et a pour valeur

$$\cos\omega = \frac{A}{\sqrt{A^2 + 4\rho^2}}. \tag{34}$$

Les congruences de Ribaucour jouissant de cette propriété ont été définies et étudiées par P. Vincensini [2 *a*] dans les deux hypothèses d'un angle ω constant ou variable et dénommées par lui *congruences* (ω). Or dans notre cas la condition qui exprime que $\omega = \mathrm{Cte}$ (en écartant le cas d'une congruence de Guichard) étant

$$d\log A = d\log\rho \qquad (A = \alpha_1 + a_2), \tag{35}$$

en vertu de la troisième équation (13) et de (15) l'équation (35) entraîne

$$2\rho^2 + A^2 = 0, \tag{35'}$$

et l'angle ω est *imaginaire.*

Les congruences $[G_n(\omega)]$ *réelles sont donc des congruences* (ω) *à l'angle des réseaux focaux variable.* Il importe aussi de rappeler [2*a*] que dans les deux hypothèses qu'on peut faire au sujet de ω, les congruences admettent pour l'ensemble des solutions qui les déterminent *le groupe de parallélisme.*

Comme dans le cas qui nous occupe l'angle des plans focaux est constant $\left(2\varphi = \frac{\pi}{2}\right)$, il résulte d'une proposition due à P. Vincensini [2*a*] que toute congruence $[G_n(\omega)]$ est parallèle à une certaine congruence de *surface moyenne plane.*

La seconde propriété annoncée est de nature projective, à savoir : toute congruence $[G_n(\omega)]$ est aussi *une congruence de Goursat.*

En effet, les équations de Laplace des deux réseaux focaux étant

$$\partial^2 \mathbf{F}_j \,|\, \partial v^1 \,\partial v^2 = \Gamma^k_{j|12}\, \partial \mathbf{F}_j \,|\, \partial v^k \qquad (j, k = 1, 2),$$

l'assertion qu'on vient de faire résulte de la double propriété des symboles $\Gamma^k_{j|12}$ de dépendre du seul argument $v^1 + v^2$ et de satisfaire aux égalités

$$\Gamma^1_{1|12} = \Gamma^2_{2|12}, \qquad \Gamma^2_{1|12} = \Gamma^1_{2|12},$$

qui sont une conséquence immédiate des caractères (ω) et $[\mathfrak{E}]$ de la congruence du jeu.

5. Avant d'examiner les réseaux de courbure [réseaux (o)] des surfaces orthogonales à $[G_n(\omega)]$, il est bon de faire le rappel suivant : par définition [5 a_1'], un réseau (o) est un réseau (Ω), s'il existe un réseau à invariants égaux conjugué à la congruence normale à (o). *Les réseaux* (o) *qui nous intéressent sont donc des réseaux* (Ω), et *par suite, le réseau à invariants égaux* $(\mathcal{A})$ *du paragraphe* 2 *un réseau* (2, o).

Nous désignerons par (Ω_g) les réseaux (Ω) orthogonaux à une congruence $[G_n(\omega)]$ et par $(\boldsymbol{\Omega}_g)$ la surface support correspondante. Une telle surface sera de la forme

$$\boldsymbol{\Omega}_g = \mathbf{A} + \mu \mathbf{e}_3,$$

et l'on a

$$d\boldsymbol{\Omega}_g\, d\mathbf{e}_3 \stackrel{\text{def}}{=} 0,$$

d'où, moyennant (16),

$$d\mu = -\sqrt{2}\, \alpha_2 \omega_2^3. \tag{36}$$

En remplaçant ω_1^3, ω_2^3 par leurs expressions (2) en fonction de $\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2$ [qui correspondent aux courbes du réseau (Ω_g)] et en faisant le changement de repère

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2}{\sqrt{2}}, \qquad \mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2}{\sqrt{2}}, \qquad \mathbf{I}_3 = e_3, \tag{37}$$

on obtient en vertu des mêmes équations (16)

$$d\boldsymbol{\Omega}_g = \sigma_1 \overline{\omega}_1 \mathbf{I}_1 + \sigma_2 \overline{\omega}_2 \mathbf{I}_2, \tag{38}$$

où l'on a posé

$$\sigma_1 = \rho + \mu, \qquad \sigma_2 = \rho - \mu. \tag{39}$$

Si l'on note par un point virgule la dérivation covariante par rapport aux formes $\overline{\omega}_1$ et $\overline{\omega}_2$ et si l'on remarque que l'expression (21) de $d\mathbf{C}$ peut s'écrire

$$d\mathbf{C} = \lambda\rho\, (\overline{\omega}_2 \mathbf{I}_1 - \overline{\omega}_1 \mathbf{I}_2),$$

on déduit

$$\boldsymbol{\Omega}_{g;1} = \frac{\sigma_1}{\lambda\rho} \mathbf{C}_{;2}, \qquad \boldsymbol{\Omega}_{g;2} = -\frac{\sigma_2}{\lambda\rho} \mathbf{C}_{;1}. \tag{40}$$

Mais $\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2$ correspondant comme on a vu aux asymptotiques de $(\mathbf{C})$ (qui est minimale), les relations (40) montrent que celles-ci sont *antiparallèles* aux différents réseaux (Ω_g), et par suite, en vertu du théorème de Calapso-Weingarten, *se conservent dans une déformation infinitésimale des surfaces* $(\boldsymbol{\Omega}_g)$. D'autre part, d'après la *loi d'orthogonalité* des réseaux et des congruences les réseaux (Ω_g) jouissent de la propriété que l'angle de leurs plans focaux est *le même* pour les deux rayons $\mathbf{\Omega}_g \mathbf{\Omega}_{g;1}$ et $\mathbf{\Omega}_g \mathbf{\Omega}_{g;2}$. Les deux plans focaux autres que le plan tangent en $\mathbf{\Omega}_g$ à $(\mathbf{\Omega}_g)$ (pour l'une ou l'autre congruence focale) étant comme on sait les plans osculateurs aux courbes du réseau (Ω_g), ces plans font un même angle avec le plan tangent en $\mathbf{\Omega}_g$ à $(\mathbf{\Omega}_g)$.

De la théorie générale des congruences (ω) cet angle est, suivant Vincensini, *le même que celui de la congruence* (ω) *orthogonale correspondante*.

Toutes ces considérations sont, dans notre cas, confirmées par le calcul. En effet, on déduit de (37), (16) et (2) que les équations du déplacement infinitésimal de $\{\mathbf{I}_1 \mathbf{I}_2 \mathbf{I}_3\}$ sont

$$\begin{aligned} d\mathbf{I}_1 &= \frac{A}{2\rho}(\overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2)\mathbf{I}_2 - \overline{\omega}_1 \mathbf{I}_3, \\ d\mathbf{I}_2 &= -\frac{A}{2\rho}(\overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2)\mathbf{I}_1 + \overline{\omega}_2 \mathbf{I}_3, \\ d\mathbf{I}_3 &= \overline{\omega}_1 \mathbf{I}_1 - \overline{\omega}_2 \mathbf{I}_2, \end{aligned}$$

et, $\mathbf{\Omega}_{g;ik}$ $(i, k = 1, 2)$ étant les dérivées covariantes secondes de $\mathbf{\Omega}_g$, on trouve

$$\begin{aligned} \mathbf{\Omega}_{g;1} \times \mathbf{\Omega}_{g;11} &= \sigma_1^2\left(\frac{A}{2\rho}\mathbf{I}_3 + \mathbf{I}_2\right), \\ \mathbf{\Omega}_{g;2} \times \mathbf{\Omega}_{g;22} &= \sigma_2^2\left(\frac{A}{2\rho}\mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_1\right). \end{aligned}$$

On a donc bien

$$\frac{(\mathbf{\Omega}_{g;1}\,\mathbf{\Omega}_{g;11}\,\mathbf{I}_3)}{|\mathbf{\Omega}_{g;1} \times \mathbf{\Omega}_{g;11}|} = \frac{A}{\sqrt{A^2 + 4\rho^2}} = \frac{(\mathbf{\Omega}_{g;2}\,\mathbf{\Omega}_{g;22}\,\mathbf{I}_3)}{|\mathbf{\Omega}_{g;} \times \mathbf{\Omega}_{g;22}|} = \cos\omega$$

conformément à la propriété dont il a été question plus haut.

Mais, ce qu'il y a de plus remarquable, c'est que dans le cas d'une congruence $G_n(\omega)$ les réseaux (Ω_g) sont aussi des *réseaux* (G) (suivant la terminologie de Eisenhart [5 *a*]), c'est-à-dire des réseaux dont les congruences focales décrivent des *congruences de Guichard*. Le rappel suivant est ici nécessaire (²). Si (v^i) est le réseau de courbure d'une surface dont le tenseur métrique est g_{ik}, les conditions nécessaires et suffisantes pour que (v^i) soit un réseau (G) sont

$$(41) \qquad \frac{\partial\left\{\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\left(\frac{\partial\sqrt{g_{22}}}{\partial v^1}\right)\right\}}{\partial v^1} = 0, \qquad \frac{\partial\left\{\frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\left(\frac{\partial\sqrt{g_{11}}}{\partial v^2}\right)\right\}}{\partial v_2} = 0.$$

(²) *Voir* aussi EISENHART, *A treatise on the differential geometry of curves and surfaces*, Dover Publications, New York.

Or dans le problème qui nous occupe on obtient à partir de (39), (36), (2) et la troisième équation (13) :

$$(42) \qquad d\sigma_1 = -A\overline{\omega}_2 - C\overline{\omega}_1, \qquad d\sigma_2 = C\overline{\omega}_2 + A\overline{\omega}_1 \qquad (A = \alpha_2 + \alpha_1,\ C = \alpha_2 - \alpha_1).$$

Par ailleurs, en remarquant que moyennant (2), (24) et (26), les équations (25) (puisque $m_1 = m_2$) s'écrivent

$$\frac{\partial m}{\partial v^1} = \frac{A m^2}{2\rho} = \frac{\partial m}{\partial v^2},$$

on déduit de (38) et (42) [en tenant compte de (26)]

$$\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\left(\frac{\partial\sqrt{g_{22}}}{\partial v^1}\right) = -\frac{A m}{2\rho} = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\left(\frac{\partial\sqrt{g_{11}}}{\partial v^2}\right).$$

Il suffit donc de se rappeler (*voir* § 2) que $\frac{A m}{\rho} = \mathrm{Cte}$, pour constater que la condition (41) est satisfaite dans le cas d'un réseau (Ω_g). *Ainsi toute congruence* $[G_n(\omega)]$ *est génératrice de* ∞^1 *couples de congruences de Guichard qui lui sont perpendiculaires*, et par suite détermine aussi ∞^2 *surfaces de Voss* qui sont les enveloppées moyennes de ces congruences. Cette propriété soulève tout un ensemble de problèmes. Il serait, par exemple, intéressant de déterminer les réseaux parallèles à (Ω_g) [car par *parallélisme le caractère* (G) *se conserve*], ou les transformés de Ribaucour de (Ω_g), ou encore d'étudier les *systèmes cycliques* construits à partir des réseaux (Ω) [c'est-à-dire les systèmes cycliques dont les axes décrivent des congruences harmoniques à (Ω_g)]. Nous laisserons de côté ces différents développements et terminerons ce paragraphe par la remarque suivante :

Dans le cas où l'angle ω de la congruence $[G_n(\omega)]$ est constant, ou ce qui revient au même lorsque les courbes du réseau (Ω_g) sont planes, on a vu au paragraphe 4 que cet angle est nécessairement imaginaire. D'autre part, par un calcul que nous ne développerons pas on trouve que l'angle $\overline{\omega}$ de la congruence (ω) décrite par la normale à **(A)** a pour valeur

$$\cos\overline{\omega} = \frac{\rho C}{\sqrt{4n^2 + \rho^2}} \qquad (C = \alpha_2 - \alpha_1,\ n = A\alpha_2 + \rho^2,\ A = \alpha_1 + \alpha_2),$$

et si la condition (35′) est remplie, on trouve

$$\cos\overline{\omega} = -i = \cos\overline{\omega}.$$

Mais nous avons démontré [1 *b*] que la propriété pour la congruence des normales à une surface minimale d'être une congruence (ω) à angle des réseaux focaux constants (et dans ce cas nécessairement imaginaire) caractérise la *surface de Lie-Ribaucour* (ou encore l'hélicoïde algébrique de Gambier).

De là et de la relation (43), il résulte que *si les courbes d'un réseau* (Ω_g) *sont planes, la surface moyenne d'une congruence* $[G_n(\omega)]$ *est la surface de Lie-Ribaucour*. Cette surface, en raison de son caractère imaginaire, a été souvent laissée de côté par les géomètres, et c'est à B. Gambier [6 *a*] que revient le mérite d'avoir montré son rôle dans l'étude des déformations à réseaux conjugués persistants et la construction des systèmes triples orthogonaux algébriques.

6. Avant de démontrer le résultat que nous avons en vue, il convient de rappeler la proposition importante suivante due à P. Vincensini [2 *c*] : Étant donné un réseau à invariants égaux (R) et une droite fixe D, *aux* ∞^1 *points de la droite, il correspond un faisceau de* ∞^1 *congruences de Ribaucour à rayons homologues coplanaires admettant* (R) *pour réseau moyen*, le rapport anharmonique de quatre rayons homologues de ce faisceau étant constant : nous nommerons cette configuration une *configuration projective de Vincensini.*

Or dans le cas que nous étudions il est facile de voir que le plan Π perpendiculaire en $\mathbf{A}$ à la génératrice issue de ce point, est un plan de symétrie pour les courbes du réseau moyen $(\mathcal{A})$ de $[G_n(\omega)]$.

Cette remarque et la proposition précédente nous conduisent à la recherche des congruences ayant $(\mathcal{A})$ pour réseau moyen et dont les rayons homologues soient coplanaires à Π.

Le vecteur unitaire $\mathbf{e}$ de la congruence cherchée $[\mathbf{A}, \mathbf{e}]$ sera donc de la forme

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}_1 \sin\theta + \mathbf{e}_3 \cos\theta,$$

où θ est une fonction de classe $\mathfrak{C}$.

Par différentiation, on obtient à l'aide de (16)

$$d\mathbf{e} = (d\theta - \omega_1^3)(\mathbf{e}_1 \cos\theta - \mathbf{e}_3 \sin\theta) + \omega_2^3\left(\frac{A}{\sqrt{2}\,\rho}\sin\theta - \cos\theta\right)\mathbf{e}_2, \tag{44}$$

d'où, en désignant par $\theta_{,1}$ et $\theta_{,2}$ les dérivées covariantes de θ par rapport à ω_1^3, ω_2^3, on déduit que l'invariant Φ de Sannia a pour expression

$$\begin{aligned}\Phi = (\mathbf{e}\, d\mathbf{e}\, d\mathbf{A}) &= \rho\omega_1^3(\theta_{,1}\omega_1^3 + \theta_{,2}\omega_2^3 - \omega_1^3) \\ &\quad + (\sqrt{2}\,\alpha_2 \sin\theta - \rho\cos\theta)\left(\frac{A}{\sqrt{2}\,\rho}\sin\theta - \cos\theta\right)(\omega_1^3)^2.\end{aligned} \tag{45}$$

Conformément à la théorie générale, il résulte de (45) que les conditions pour que $[\mathbf{A}, \mathbf{e}]$ soit conjugué au réseau $(\mathcal{A})$ sont

$$\theta_{,2} = 0, \qquad \theta_{,1} - 1 + \left(\frac{\sqrt{2}\,\alpha_2}{\rho}\sin\theta - \cos\theta\right)\left(\frac{A}{\sqrt{2}\,\rho}\sin\theta - \cos\theta\right) = 0, \tag{46}$$

et ces conditions, comme nous allons le voir, ont une triple portée. Tout d'abord, en formant la seconde forme de Kümmer $d\mathbf{A}\, d\mathbf{e}$, on constate que $(\mathcal{A})$ *est aussi le réseau moyen des congruences* $[\mathbf{A}\mathbf{e}]$. En outre, si l'on se reporte aux expressions (24) de ω_2^3 et ω_3^1, les conditions (46) équivalent à l'équation de Riccati

$$(47)\qquad \frac{d\theta}{du}+\left(\frac{\sqrt{2}\,l\alpha_2}{\rho}-m\right)\sin^2\theta-\left(\frac{\sqrt{2}\,\alpha_2 m}{\rho}+l\right)\cos\theta\sin\theta=0 \qquad \left(l=\frac{m\mathrm{A}}{\sqrt{2}\,\rho}\right),$$

et toutes les qualités qui définissent une configuration projective de Vincensini sont ainsi réalisées. En troisième lieu, si l'on passe aux paramètres v^i qui correspondent aux développables des congruences en question, on déduit de (44), à l'aide de (2), (24), (26) et (47), que la représentation sphérique de ces congruences est

$$(48)\qquad (d\mathbf{e})^2=\frac{\mathrm{L}_1^2(\mathrm{L}_2^2+1)}{2}\left\{(dv^1)^2+2\,\frac{\mathrm{L}_2^2-1}{\mathrm{L}_2^2+1}\,dv^1\,dv^2+(dv^2)^2\right\},$$

où l'on a posé

$$\mathrm{L}_1=l\sin\theta-m\cos\theta,\qquad \mathrm{L}_2=\frac{\sqrt{2}\,\alpha_2\sin\theta}{\rho}-\cos\theta.$$

Mais L_1, L_2 étant fonctions du seul argument v^1+v^2, $(d\mathbf{e})^2$ affecte la forme du tenseur métrique d'un *réseau* (T) (ces réseaux rentrent dans la classe des réseaux généralisés de Tchebichef « sans détours » [7 *a*]), et nous avons montré [1 *a*] que si *les développables d'une congruence ont pour image sphérique un réseau* (T), *la congruence en question est du type* (ω).

Ainsi une congruence $[\mathrm{G}_n(\omega)]$ possède la propriété remarquable de *déterminer un faisceau plan de congruences qui sont toutes du type* (ω).

Il y a plus. En effet, le calcul du segment focal $2\,\bar{\rho}$ d'une congruence $[\mathbf{A}, \mathbf{e}]$ donne aisément

$$\bar{\rho}=\frac{m\rho}{m\cos\theta-l\sin\theta},$$

et l'on constate ainsi que $\bar{\rho}$ n'est fonction que de v^1+v^2. Ceci étant posé et en désignant par $\Gamma^{\star i}_{jk}$, $\bar{\Gamma}^i_{1|jk}$ et $\bar{\Gamma}^i_{2|jk}$ les symboles de Christoffel relatifs respectivement à $(d\mathbf{e})^2$ et aux formes métriques fondamentales des nappes focales d'une congruence $[\mathbf{A}, \mathbf{e}]$, on trouve les égalités

$$(49)\qquad \Gamma^{\star 1}_{12}=\Gamma^{\star 2}_{12},\qquad \Gamma^{\star 2}_{11}=\Gamma^{\star 1}_{22},\qquad \Gamma^{\star 1}_{11}=\Gamma^{\star 2}_{22}$$

et

$$(50\qquad \bar{\Gamma}^1_{1|12}=\bar{\Gamma}^2_{2|12},\qquad \bar{\Gamma}^2_{1|12}=\bar{\Gamma}^1_{2|12}.$$

Or (48) et (49) montrent aussitôt que toute congruence $[\mathbf{A}, \mathbf{e}]$ est une *congruence* $[\mathfrak{C}]$ et (50) montre que c'est aussi une *congruence de Goursat.*

Cette double propriété ajoutée à celle d'être une congruence (ω) montre finalement que toute congruence $[\mathbf{A}, \mathbf{e}]$ est une congruence $[G(\omega)]$. Par ailleurs, puisque le problème de trouver des réseaux harmoniques à une congruence est équivalent à la détermination des congruences conjuguées à un réseau, il est facile de voir, si l'on se rapporte à la transformation Γ des congruences de Goursat [18 *a*] (transformation de Goursat-Tzitzeica), que *toute congruence* $[\mathbf{A}, \mathbf{e}]$ *est une transformée* Γ *de* $[G_n(\omega)]$.

On trouve enfin, par le même procédé, que le vecteur unitaire

$$\mathbf{e}^\star\,(\mathbf{e}^\star = \mathbf{e}_1 \sin\theta^\star + \mathbf{e}_3 \cos\theta^\star)$$

correspondant à une congruence de Ribaucour $[\mathbf{C}, \mathbf{e}^\star]$ dont le réseau moyen est celui de courbure (u^i) de $(\mathbf{C})$ $[(\mathbf{C})$ étant la surface génératrice de $[G_n(\omega)]]$ satisfait à

$$(51) \qquad \frac{\partial \mathbf{e}^\star}{\partial u^1} = \left(\frac{\partial \theta^\star}{du^1} - m\right)(\mathbf{e}_1 \cos\theta^\star - \mathbf{e}_3 \sin\theta^\star), \qquad \frac{\partial \mathbf{e}^\star}{\partial u^2} = (l \sin\theta^\star - m\cos\theta^\star)\,\mathbf{e}_2.$$

On obtient ainsi, dans chaque plan parallèle à Π mené par les points de $(\mathbf{C})$, une *seconde* configuration projective de Vincensini, déterminée par l'équation de Riccati

$$\frac{d\theta^\star}{du^1} = l \sin\theta^\star \cos\theta^\star + m \sin^2\theta^\star \qquad \left(l = \frac{m\mathrm{A}}{\sqrt{2}\,\rho}\right).$$

L'expression du segment $2\bar{\rho}^\star$ focal d'une des congruences étant

$$\bar{\rho} = \frac{m\lambda\rho}{l\sin\theta^\star - m\cos\theta^\star},$$

on déduit par un calcul facile, et en tenant compte de (51), que toutes les congruences $[\mathbf{C}, \mathbf{e}^\star]$ en jeu sont des surfaces de Guichard dont l'une des nappes est une courbe [exactement comme la congruence des normales à $(\mathbf{C})$].

On peut donc énoncer le résultat général suivant : *une congruence normale dont les nappes focales sont en correspondance pseudo-isométrique, que nous nommerons* $[G_n(\omega)]$, *est déterminée par un système linéaire* (Σ) *de Pfaff complètement intégrable, et possède aussi le caractère* (ω) *et celui de Goursat. Une congruence* $[G_n(\omega)]$ *est génératrice de* ∞^1 *couples de congruences de Guichard, décrites par les tangentes focales des réseaux orthogonaux à* $[G_n(\omega)]$, *qui sont des réseaux* (G).

De plus, le réseau moyen de $[G_n(\omega)]$ *détermine une configuration projective de Vincensini dont toutes les congruences possèdent, à l'exception du caractère normal, toutes les autres qualités de* $[G_n(\omega)]$ *et se déduisent de celle-ci par la transformation de Goursat-Tzitzeica.*

BIBLIOGRAPHIE.

[1] R. Rosca :

a. Sur les congruences ∞^1 *cycliques du type* (ω). (*Acad. royale de Belgique*, 5e série, t. 8, 1965).

b. Asupra unui tip de congruente (ω) (*Studii şi cercetări*, 1965).

[2] P. Vincensini :

Sur les réseaux et les congruences (ω), Colloque de Géométrie différentielle, Louvain, 1961.

b. Sur deux problèmes relatifs à la déformation des surfaces (*J. Math. pures et appl.*, 1957).

c. Sur quelques types spéciaux de réseaux et de congruences conjugués (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, (3), t. 62, fasc. 3).

[3] S. Finikoff :

a. Theorie der Kongruenzen, Akademie Verlag, Berlin, 1959.

[4] V. G. Grove :

a. On congruences and conjugate nets (*Amer. J. Math.*, vol. 69, nº 1, 1947).

[5] L. P. Eisenhart :

a. Transformations of surfaces, Chelsea Publishing Comp, New-York, 2e édition, 1962.

[6] B. Gambier :

a. Sur quelques cas méconnus de la déformation des surfaces (*Bull. Soc. Math. France*, t. 56, 1928).

[7] A. Myller :

a. Les réseaux de Tchebichef généralisés et le parallélisme au sens de Weyl (*Ann, scient. Univ. de Jassy*, t. 14, fasc. 1-2).

[8] G. Tzitzeica :

a. Sur certaines congruences de droites (*J. Math. pures et appl.*, t. 7, 1928).