ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

MICHEL BROISE

Sur les isomorphismes de certaines algèbres de von Neumann

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 83, nº 2 (1966), p. 91-111
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1966_3_83_2_91_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
3e série, t. 83, 1966, p. 91 à 111.

SUR LES ISOMORPHISMES
DE CERTAINES ALGÈBRES DE VON NEUMANN

PAR M. MICHEL BROISE.

INTRODUCTION.

Soient $\mathcal{A}$ une algèbre de von Neumann dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, φ une trace normale fidèle semi-finie sur $\mathcal{A}^+$ et $L_p(\varphi)$ l'ensemble des opérateurs mesurables (*cf.* [5] ou [7]) affiliés à $\mathcal{A}$ de puissance $p^{\text{ième}}$ sommable par rapport à φ.

De même, on définit $\mathcal{B}$, $\mathcal{K}$, ψ et $L_p(\psi)$.

Si L désigne un ensemble d'opérateurs mesurables affiliés à $\mathcal{A}$, on note L^+ l'ensemble des éléments de L qui sont positifs.

Une trace φ normale fidèle semi-finie sur $\mathcal{A}^+$ définit canoniquement une forme linéaire sur $L_1(\varphi)$. Nous notons encore φ cette forme linéaire sur $L_1(\varphi)$; ainsi φ sera une application de $\mathcal{A}^+ \cup L_1(\varphi)$ dans $\overline{R}_+ \cup \mathbf{C}$ ($\mathbf{C}$, ensemble des nombres complexes et $\overline{\mathbf{R}}_+ = [0, \infty]$).

Rappelons alors que le produit fort $x, y \to x \cdot y$ défini dans [5] ou [7] applique $L_2(\varphi) \times L_2(\varphi)$ dans $L_1(\varphi)$, que $\varphi(x \cdot y)$ est réel pour tous x et y hermitiens $\in L_2(\varphi)$, que $\varphi(x \cdot y)$ est positif pour tous x et $y \in L_2^+(\varphi)$ et que l'application $x, y \to \varphi(x \cdot y^\star)$ de $L_2(\varphi) \times L_2(\varphi)$ dans $\mathbf{C}$ est une forme sesquilinéaire hermitienne sur $L_2(\varphi)$ qui fait de $L_2(\varphi)$ un espace de Hilbert.

Nous allons étudier les applications linéaires et bijectives U de l'espace de Hilbert $L_2(\varphi)$ dans l'espace de Hilbert $L_2(\psi)$ qui sont isométriques [c'est-à-dire telles que $\varphi(x \cdot x^\star) = \psi(U(x).(U(x))^\star)$ pour tout $x \in L_2(\varphi)$] et qui satisfont à la condition $U(L_2^+(\varphi)) \subset L_2^+(\psi)$ [ce qui entraîne $U(x^\star) = (U(x))^\star$ pour tout $x \in L_2(\varphi)$].

Nous obtiendrons principalement le théorème 1 et ses différents corollaires, dont voici l'énoncé dans le cas où $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$ est facteur.

THÉORÈME 1. — *On suppose que* $\mathcal{A}$ *ou* $\mathcal{B}$ *est facteur. Alors il existe un isomorphisme ou un anti-isomorphisme* Φ *de* $\mathcal{A}$ *sur* $\mathcal{B}$ *et un scalaire* λ *positif tels que*

$$U(x) = \lambda.\Phi(x) \quad \textit{pour tout } x \in \mathcal{A} \cap L_2(\varphi).$$

COROLLAIRE 1. — *On suppose que* $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, *que* $\varphi = \psi$ *et que* $\mathcal{A}$ *est un facteur fini. Alors il existe un automorphisme ou un anti-automorphisme* Φ *de* $\mathcal{A}$ *tel que*

$$U(x) = \Phi(x) \quad \textit{pour tout } x \in \mathcal{A}$$

[Rappelons que, dans ce cas, on a $\mathcal{A} \subset L_2(\varphi)$.]

COROLLAIRE 2. — *On suppose que* $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, *que* $\varphi = \psi$ *et que* $\mathcal{A}$ *est un facteur discret.* [$\mathcal{A}$ est isomorphe à $\mathcal{L}(H)$, où H est un espace de Hilbert bien choisi.] *Alors il existe un automorphisme ou un anti-automorphisme* Φ *de* $\mathcal{A}$ *tel que*

$$U(x) = \Phi(x) \quad \textit{pour tout } x \in L_2(\varphi).$$

[Rappelons que, dans ce cas, on a $L_2(\varphi) \subset \mathcal{A}$.]

REMARQUE 1. — *Dans* $L_2(\varphi)$ *soit* $\mathfrak{m}$ *un sous-espace vectoriel engendré par l'ensemble* $\mathfrak{m}^+$ *de ses éléments positifs. On suppose que l'adhérence de* $\mathfrak{m}^+$ *dans l'espace de Hilbert* $L_2(\varphi)$ *est* $L_2^+(\varphi)$.

Soit U′ *une application linéaire de* $\mathfrak{m}$ *dans* $L_2(\varphi)$ *satisfaisant aux conditions suivantes :*

1° $\psi(U'(x)\cdot(U'(x))^\star) = \varphi(x\cdot x^\star)$ *pour tout* $x \in \mathfrak{m}$;

2° $U'(\mathfrak{m})$ *est dense dans* $L_2(\psi)$;

3° $U'(\mathfrak{m}^+) \subset L_2^+(\psi)$.

Alors U′ *se prolonge par continuité en une application linéaire bijective et isométrique* U *de* $L_2(\varphi)$ *dans* $L_2(\psi)$. *De plus, il est clair que* $U(L_2^+(\varphi)) \subset L_2^+(\psi)$.

En particulier, si l'on prend par exemple pour $\mathfrak{m}$ l'idéal bilatère $\mathfrak{m}_\varphi$ de $\mathcal{A}$ des opérateurs à traces relativement à φ, la remarque 1 permet de donner au théorème 1 et à ses différents corollaires une forme différente ne faisant intervenir que des opérateurs de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. Par exemple, dans le cas des facteurs, on a :

THÉORÈME 1 *bis*. — *On suppose que* $\mathcal{A}$ *ou* $\mathcal{B}$ *est un facteur.*

Soit U′ *une application linéaire de* $\mathfrak{m}_\varphi$ *dans* $\mathcal{B}$ *satisfaisant aux conditions suivantes :*

1° $\psi(U'(x)\cdot(U'(x))^\star) = \varphi(x\cdot x^\star)$ *pour tout* $x \in \mathfrak{m}_\varphi$;

2° *L'adhérence de* $U'(\mathfrak{m}_\varphi)$ *pour la norme* $a \to \|a\|_2 = (\varphi(a\cdot a^\star))^{\frac{1}{2}}$ *contient* $\mathfrak{m}_\psi$;

3° $U'(\mathfrak{m}_\varphi^+) \subset \mathcal{B}^+$.

Alors il existe un isomorphisme ou un anti-isomorphisme Φ de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{B}$ et un scalaire positif λ tel que

$$\mathrm{U}'(x) = \lambda . \Phi(x) \quad \textit{pour tout } x \in \mathfrak{m}_\varphi.$$

Notations et rappels divers. — Soient x et y des opérateurs (linéaires) dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ à domaine dense. On note $\mathcal{D}_x$ et $\mathcal{D}_y$ leurs domaines.

On dit que y prolonge x et l'on note $x \subseteqq y$, lorsque $\mathcal{D}_x \subset \mathcal{D}_y$ et lorsque $x(\xi) = y(\xi)$ pour tout $\xi \in \mathcal{D}_x$.

$y \circ x$ désigne l'opérateur, défini sur l'ensemble des $\xi \in \mathcal{D}_x$ pour lesquels $x(\xi) \in \mathcal{D}_y$, tel que $(y \circ x)(\xi) = y(x(\xi))$.

Si $y \circ x$ a un prolongement linéaire fermé on note $y \cdot x$ le produit fort, c'est-à-dire le plus petit prolongement linéaire fermé de $y \circ x$.

(Notons que si l'opérateur x est borné et a pour domaine $\mathcal{H}$ et si l'opérateur y est fermé, on a $y \cdot x = y \circ x$; *cf.* [6], p. 297.)

$x + y$ désigne l'opérateur défini sur $\mathcal{D}_x \cap \mathcal{D}_y$ par

$$(x + y)(\xi) = x(\xi) + y(\xi).$$

Si $x + y$ a un prolongement linéaire fermé, on désigne par $x \mathbin{\boldsymbol{+}} y$ la somme forte, c'est-à-dire le plus petit prolongement linéaire fermé de $x + y$.

Si x a un prolongement linéaire fermé; on note $x^\star$ l'opérateur adjoint. $x^\star$ est un opérateur fermé à domaine dense satisfaisant à $(x(\xi_1), \xi_2) = (\xi_1, x^\star(\xi_2))$ pour tous $\xi_1 \in \mathcal{D}_x$ et $\xi_2 \in \mathcal{D}_{x^\star}$.

Un opérateur x est dit auto-adjoint lorsque $x = x^\star$.

L'ensemble des opérateurs mesurables affiliés à $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{B}$) forme une algèbre involutive (*cf.* [5] ou [7]) avec la somme forte, le produit fort et l'involution $x \to x^\star$. Nous noterons $\mathfrak{A}$ (resp. $\mathfrak{B}$) cette algèbre.

Rappelons que les opérateurs de $\mathfrak{A}$ (resp. $\mathfrak{B}$) sont fermés affiliés à $\mathcal{A}$ (resp $\mathcal{B}$), à domaine fortement dense au sens de ([5], Déf. 1.1) ou de ([7], Déf. 2.1), et que $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{B}$) est une sous-algèbre involutive de $\mathfrak{A}$ (resp. $\mathfrak{B}$).

Soit x un élément de $\mathfrak{A}$ (resp. $\mathfrak{B}$), on notera S_x le plus petit projecteur p de $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{B}$) tel que $p \cdot x \cdot p = x$.

Si $x = x_1 + ix_2$ est la décomposition de x en parties hermitiennes, on a $\mathrm{S}_x = \mathrm{S}_{x_1} \vee \mathrm{S}_{x_2}$, où $\mathrm{S}_{x_1} \vee \mathrm{S}_{x_2}$ désigne le projecteur (hermitien) sur le sous-espace vectoriel fermé engendré par les sous-espaces $\mathrm{S}_{x_1}(\mathcal{H})$ et $\mathrm{S}_{x_2}(\mathcal{H})$.

$\mathfrak{m}_{r,\varphi}$ désigne l'idéal bilatère restreint de $\mathcal{A}$ engendré par les projecteurs de $\mathfrak{m}_\varphi$ (l'idéal des opérateurs à trace relativement à φ). Soit x un élément de $\mathfrak{m}_{r,\varphi}$, on a $\mathrm{S}_x \in \mathfrak{m}_{r,\varphi}$. Réciproquement, si $x \in \mathcal{A}$ et si $\mathrm{S}_x \in \mathfrak{m}_{r,\varphi}$ on a $x \in \mathfrak{m}_{r,\varphi}$ (*cf.* [3]). Notons aussi que si p_1 et p_2 sont deux projecteurs de $\mathfrak{m}_{r,\varphi}$, alors $p_1 \vee p_2$ est un projecteur de $\mathfrak{m}_{r,\varphi}$.

$\overline{\mathfrak{m}_{r,\varphi}}^u$ désigne l'adhérence uniforme de l'idéal $\mathfrak{m}_{r,\varphi}$ de $\mathcal{A}$, c'est une $\mathbf{C}^\star$-algèbre.

$\mathfrak{n}_\varphi$ désigne l'idéal $\mathcal{A} \cap L_2(\varphi)$ de $\mathcal{A}$.

$\mathfrak{n}_\varphi$ muni de la forme sesquilinéaire hermitienne $a, b \to \varphi(a \cdot b^\star)$ est une algèbre hilbertienne achevée.

Nous noterons $\mathcal{U}(\mathfrak{n}_\varphi)$ [resp. $\mathcal{V}(\mathfrak{n}_\varphi)$] l'algèbre de von Neumann associée à gauche (resp. à droite) à l'algèbre hilbertienne $\mathfrak{n}_\varphi$ et $a \to \lambda_a$ (resp. $a \to \rho_a$) l'isomorphisme (resp. l'anti-isomorphisme) de l'algèbre de von Neumann $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{U}(\mathfrak{n}_\varphi)$ [resp. $\mathcal{V}(\mathfrak{n}_\varphi)$].

On a introduit les idéaux bilatères $\mathfrak{m}_\varphi$, $\mathfrak{m}_{r,\varphi}$, $\overline{\mathfrak{m}_{r,\varphi}}^u$ et $\mathfrak{n}_\varphi$ de $\mathcal{A}$, on définit de même les idéaux bilatères $\mathfrak{m}_\psi$, $\mathfrak{m}_{r,\psi}$, $\overline{\mathfrak{m}_{r,\psi}}^u$ et $\mathfrak{n}_\psi$ de $\mathcal{B}$.

On appelle homomorphisme de Jordan d'une $\mathbf{C}^\star$-algèbre A dans une autre B une application linéaire Φ de A dans B telle que

$\Phi(x^\star) = (\Phi(x))^\star$ pour tout x appartenant à A et telle que

$\Phi(x^2) = (\Phi(x))^2$ pour tout x hermitien appartenant à A.

Si Φ est de plus une application bijective, on dira que Φ est un isomorphisme de Jordan de A sur B (ou un automorphisme de Jordan lorsque $A = B$). L'application Φ^{-1} de B sur A est alors un isomorphisme de Jordan.

Remarque. — Les homomorphismes de Jordan ont été étudiés dans [8], où ils sont appelés $C^\star$-homomorphismes.

LEMME 1. — *Soient a et b des éléments de $\mathcal{A}$ et soit x un élément de* $L_2(\varphi)$. *On suppose que a tend ultrafortement vers b (par exemple que a tend fortement vers b et que $\|a\|$ reste majoré par une constante).*

(i) *$a \cdot x$ tend vers $b \cdot x$ dans l'espace de Hilbert* $L_2(\varphi)$;

(ii) *Si a et b sont hermitiens $x \cdot a$ tend vers $x \cdot b$ dans* $L_2(\varphi)$.

Démonstration.

(i) Soit $a \to \lambda_a$ l'isomorphisme de $\mathcal{A}$ dans l'algèbre de von Neumann $\mathcal{U}(\mathfrak{n}_\varphi)$ associée à gauche à l'algèbre hilbertienne $\mathfrak{n}_\varphi$.

L'isomorphisme $a \to \lambda_a$ est ultrafortement continu (*cf.* [1], chap. I, . 4.3). Donc λ_a tend ultrafortement vers λ_b. Par suite, pour tout $x \in L_2(\varphi)$, $\lambda_a(x)$ tend vers $\lambda_b(x)$ dans $L_2(\varphi)$; c'est-à-dire $a \cdot x$ tend vers $b \cdot x$ dans $L_2(\varphi)$;

(ii) D'après (i), $a \cdot x^\star$ tend vers $b \cdot x^\star$ dans $L_2(\varphi)$. D'autre part, les opérateurs a et b sont hermitiens et l'application $x \to x^\star$ de $L_2(\varphi)$ dans $L_2(\varphi)$ est continue, donc $x \cdot a = (a \cdot x^\star)^\star$ tend vers $x \cdot b$ dans $L_2(\varphi)$.

LEMME 2. — *Soient x_1 et x_2 deux opérateurs positifs appartenant à* $L_2(\varphi)$ *tels que $x_1 \cdot x_2 = 0$. Alors on a* $U(x_1) \cdot U(x_2) = 0$.

Démonstration. — Les opérateurs x_1 et x_2 étant positifs, nous avons

$$\psi(U(x_1) \cdot U(x_2)) = \varphi(x_1 \cdot x_2) = 0.$$

D'après ([5], théor. 2 (i) et théor. 6), on a

$$(U(x_2))^{\frac{1}{2}} \in L_4(\psi) \qquad \text{et} \qquad U(x_1) \cdot (U(x_2))^{\frac{1}{2}} \in L_{\frac{4}{3}}(\psi).$$

Il en résulte, d'après ([5], lemme 3.1, (i)),

$$\begin{aligned} &\psi\Big((U(x_2))^{\frac{1}{2}} \cdot U(x_1) \cdot (U(x_2))^{\frac{1}{2}}\Big) \\ &\quad = \psi\Big(U(x_1) \cdot (U(x_2))^{\frac{1}{2}} \cdot (U(x_2))^{\frac{1}{2}}\Big) = \psi(U(x_1) \cdot U(x_2)) = 0. \end{aligned}$$

Mais on a

$$(U(x_2))^{\frac{1}{2}} \cdot U(x_1) \cdot (U(x_2))^{\frac{1}{2}} = \Big((U(x_1))^{\frac{1}{2}} \cdot (U(x_2))^{\frac{1}{2}}\Big)^* \cdot \Big((U(x_1))^{\frac{1}{2}} \cdot (U(x_2))^{\frac{1}{2}}\Big).$$

D'après ([5], théor. 6, (ii), *b*), il vient alors

$$(U(x_1))^{\frac{1}{2}} \cdot (U(x_2))^{\frac{1}{2}} = 0.$$

D'où

$$U(x_1) \cdot U(x_2) = 0.$$

COROLLAIRE 1. — *On a* $U(L_2^+(\varphi)) = L_2^+(\psi)$ *et l'application* U^{-1} *de* $L_2(\psi)$ *dans* $L_2(\varphi)$ *satisfait aux mêmes hypothèses que* U.

Démonstration. — Soit y un élément de $L_2^+(\psi)$. Il existe $x \in L_2(\varphi)$ tel que $U(x) = y$. En remplaçant au besoin x par $\dfrac{x + x^*}{2}$, il est clair qu'on peut supposer x hermitien. Soit $x_1 + x_2$ la décomposition de x en partie positive et en partie négative, on a x_1 et $-x_2 \in L_2^+(\varphi)$, avec $x_1 \cdot x_2 = 0$. D'après le lemme 2, il vient $U(x_1) \cdot U(x_2) = 0$. Ainsi $U(x_1) + U(x_2)$ ne peut être positif que si $U(x_2) = 0$. Donc

$$U(L_2^+(\varphi)) = L_2^+(\psi).$$

Le reste est alors évident.

COROLLAIRE 2. — *Soient* p *et* p_1 *deux projecteurs appartenant à* $L_2(\varphi)$ (*donc à* $\mathfrak{m}_{r,\varphi}$) :

(i) *On suppose que* $p_1 \cdot p = p \cdot p_1$. *Alors*

$$U(p_1) \cdot U(p) = U(p) \cdot U(p_1);$$

(ii) *On suppose que* $p \cdot p_1 \cdot p = p_1$. *Alors*

$$U(p_1) = S_{U(p)} \cdot U(p_1) \cdot S_{U(p)}.$$

Démonstration.

(i) Posons

$$q_1 = p \cdot p_1, \; q_2 = p - q_1 \qquad \text{et} \qquad q_3 = p_1 - q_1.$$

Comme $p_1 \cdot p = p \cdot p_1$, les opérateurs q_1, q_2 et q_3 sont trois projecteurs orthogonaux appartenant à $L_2(\varphi)$.

On a donc, d'après le lemme 2,

$$U(q_1)\cdot U(q_3)=U(q_2)\cdot U(q_1)=U(q_2)\cdot U(q_3)=0.$$

Il en résulte

$$U(p)\cdot U(p_1)=U(q_1+q_2)\cdot U(q_1+q_3)=U(q_1)\cdot U(q_1).$$

Par suite,

$$U(p)\cdot U(p_1)=U(p_1)\cdot U(p).$$

(ii) L'hypothèse $p\cdot p_1\cdot p=p$ peut s'écrire $p_1\leqq p$.

Donc on a

$$0\leqq U(p_1)\leqq U(p).$$

Il en résulte

$$U(p_1)=S_{U(p)}\cdot U(p_1)\cdot S_{U(p)}.$$

Corollaire 3. — *Soient p un projecteur de $L_2(\varphi)$ et x un opérateur de $L_2(\varphi)$.*

(i) *On suppose que $x\cdot p=p\cdot x$. Alors*

$$U(x)\cdot U(p)=U(p)\cdot U(x).$$

(ii) *On suppose que $p\cdot x\cdot p=x$. Alors*

$$U(x)=S_{U(p)}\cdot U(x)\cdot S_{U(p)}.$$

Démonstration. — Il est clair que l'hypothèse $p\cdot x\cdot p=x$ entraîne $x\cdot p=p\cdot x$. (i) (resp. ii) : L'hypothèse $p\cdot x=x\cdot p$ (resp. $p\cdot x\cdot p=x$) entraîne $p\cdot x^\star=x^\star\cdot p$ (resp. $p\cdot x^\star\cdot p=x^\star$). On peut donc, sans perte de généralité, supposer x hermitien.

D'après la décomposition spectrale de x, il est clair que x est la limite dans l'espace de Hilbert $L_2(\varphi)$ d'une suite d'éléments $(x_n)_{n\in N}$ de $L_2(\varphi)$, tels que pour tout $n\in N$, x_n soit une combinaison linéaire finie de projecteurs $p_{n,i}$ appartenant à $L_2(\varphi)$ et satisfaisant à $p_{n,i}\cdot p=p\cdot p_{n,i}$ (resp. $p\cdot p_{n,i}\cdot p=p_{n,i}$).

D'après le corollaire 2, on a

$$U(x_n)\cdot U(p)=U(p)\cdot U(x_n)\quad(\text{resp. } S_{U(p)}\cdot U(x_n)\cdot S_{U(p)}=U(x_n)).$$

Comme l'application bilinéaire $a, b\to a\cdot b$ de $L_2(\psi)\times L_2(\psi)$ dans $L_1(\psi)$ [resp. de $L_2(\psi)\times\mathcal{B}$ dans $L_2(\psi)$ et de $\mathcal{B}\times L_2(\psi)$ dans $L_2(\psi)$] est continue, par passage à la limite, il vient

$$U(x)\cdot U(p)=U(p)\cdot U(x)\quad(\text{resp. } S_{U(p)}\cdot U(x)\cdot S_{U(p)}=U(x)).$$

Corollaire 4. — *Soient x_1 et x_2 deux éléments positifs de* $L_2(\varphi)$. *On suppose que x_1 et x_2 ont même support* (i. e. $S_{x_1}=S_{x_2}$).

Alors les images par U *de x_1 et de x_2 ont même support* (i. e. $S_{U(x_1)}=S_{U(x_2)}$).

En particulier, si x est un élément positif de $L_2(\varphi)$ *et si* S_x *appartient à* $\mathfrak{m}_{r,\varphi}$, *alors on a* $S_{U(x)} = S_{U(S_x)}$.

Démonstration. — L'isomorphisme $a \to \lambda_a$ de $\mathcal{A}$ dans l'algèbre de von Neumann $\mathcal{U}(\mathfrak{n}_\varphi)$ associée à gauche à l'algèbre hilbertienne $\mathfrak{n}_\varphi$ se prolonge aux opérateurs mesurables (*cf.* [5], théor. 1).

Par suite, l hypothèse $S_{x_1} = S_{x_2}$ est équivalente à

$$\{\xi \in L_2(\varphi) \mid x_1 \cdot \xi = 0\} = \{\xi \in L_2(\varphi) \mid x_2 \cdot \xi = 0\}.$$

Mais tout $\xi \in L_2(\varphi)$ peut se mettre sous la forme $\xi = |\xi| \cdot u$, où

$$|\xi| = (\xi \cdot \xi^*)^{\frac{1}{2}} \in L_2^+(\varphi)$$

et où u est un opérateur partiellement isométrique de $\mathcal{A}$.

Aussi pour que

$$\{\xi \in L_2(\varphi) \mid x_1 \cdot \xi = 0\} = \{\xi \in L_2(\varphi) \mid x_2 \cdot \xi = 0\},$$

il faut et il suffit que

$$\{\xi \in L_2^+(\varphi) \mid x_1 \cdot \xi = 0\} = \{\xi \in L_2^+(\varphi) \mid x_2 \cdot \xi = 0\}.$$

D'après le lemme 2, il en résulte

$$\{U(\xi) \in L_2^+(\psi) \mid U(x_1) \cdot U(\xi) = 0\} = \{U(\xi) \in L_2^+(\psi) \mid U(x_2) \cdot U(\xi) = 0\}.$$

D'après le corollaire 1 du lemme 2, il vient

$$\{\eta \in L_2^+(\psi) \mid U(x_1) \cdot \eta = 0\} = \{\eta \in L_2^+(\psi) \mid U(x_2) \cdot \eta = 0\}.$$

Comme précédemment, il en résulte

$$\{\eta \in L_2(\psi) \mid U(x_1) \cdot \eta = 0\} = \{\eta \in L_2(\psi) \mid U(x_2) \cdot \eta = 0\}$$

et, par suite,

$$S_{U(x_1)} = S_{U(x_2)}.$$

LEMME 3. — *Il existe un homomorphisme de Jordan* Φ' *de* $\overline{\mathfrak{m}_{r,\varphi}}^u$ *dans* $\mathcal{B}$ *tel que :*

1° $U(x) = U(p) \cdot \Phi'(x) = \Phi'(x) \cdot U(p)$ *pour tout* $x \in \mathfrak{m}_{r,\varphi}$ *et pour tout projecteur* $p \in \mathfrak{m}_{r,\varphi}$ *tel que* $S_x \leqq p$ (c'est-à-dire $x = p \cdot x \cdot p$);

2° $\Phi'(p) = S_{U(p)}$ *pour tout projecteur* $p \in \mathfrak{m}_{r,\varphi}$.

Démonstration. — Soient ε un nombre strictement positif, x un élément de $\mathfrak{m}_{r,\varphi}$ et p un projecteur de $\mathfrak{m}_{r,\varphi}$ satisfaisant à $x = p \cdot x \cdot p$.

Soit $\Phi''_\varepsilon(x, p)$ l'élément de $\mathcal{B}$ défini par

$$\Phi''_\varepsilon(x, p) = (\varepsilon . I + U(p))^{-1} \cdot S_{U(p)} \cdot U(x).$$

L'opérateur $\mathrm{U}(p)$ de $\mathrm{L}_2(\psi)$ est positif, et l'application $t \to \frac{t}{\varepsilon + t}$ de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$ est positive et majorée par 1; donc

$$\Phi''_\varepsilon(p, p) = (\varepsilon . \mathrm{I} + \mathrm{U}(p))^{-1} \cdot \mathrm{U}(p)$$

est un opérateur positif de $\mathcal{B}$ et l'on a $0 \leqq \Phi''_\varepsilon(p, p) \leqq \mathrm{I}$.

On a $x = p \cdot x \cdot p$, donc d'après le corollaire 3 du lemme 2, les opérateurs $\mathrm{U}(x)$ et $\mathrm{U}(p)$ [et, par suite, $\Phi''_\varepsilon(p, p)$] commutent entre eux.

Soit a un élément positif de $\mathfrak{m}_{r,\varphi}$ tel que $\mathrm{S}_a \leqq p$. D'une part, on a $a \leqq \|a\| . p$, donc

$$0 \leqq \Phi''_\varepsilon(a, p) \leqq \|a\| \, \Phi''_\varepsilon(p, p) \leqq \|a\| . \mathrm{I};$$

d'autre part, pour a et p fixés, l'application $\varepsilon \to \Phi''_\varepsilon(a, p)$ de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathcal{B}$ est décroissante, donc les opérateurs $\Phi''_\varepsilon(a, p)$ ont une limite forte dans $\mathcal{B}$, lorsque ε tend vers zéro. Notons $\Phi''(a, p)$ cette limite. On a

$$\|\Phi''(a, p)\| \leqq \|a\|.$$

L'opérateur x est une combinaison linéaire d'opérateurs positifs appartenant à $\mathfrak{m}_{r,\varphi}$ et ayant leur support majoré par p; aussi on définit par linéarité $\Phi''(x, p)$ comme la limite forte de $\Phi''_\varepsilon(x, p)$ lorsque ε tend vers zéro.

Comme $p \in \mathfrak{m}_{r,\varphi}$ on a $p \cdot \mathfrak{A} \cdot p \subset \mathfrak{m}_{r,\varphi}$. Il est clair alors que l'application $x \to \Phi''(x, p)$ de $p \cdot \mathfrak{A} \cdot p$ dans $\mathcal{B}$ est linéaire, continue et positive.

Soit p_1 un projecteur de $\mathfrak{A}$ satisfaisant à $\mathrm{S}_x \leqq p_1 \leqq p$. Montrons que

$$\Phi''(x, p_1) = \Phi''(x, p).$$

Par linéarité, sans perte de généralité, il est clair qu'il suffit de montrer que

$$\Phi''(a, p_1) = \Phi''(a, p) \quad \text{pour tout } a \in \mathfrak{m}_{r,\varphi}$$

tel que $a \geqq 0$ et $\mathrm{S}_a \leqq p_1 \leqq p$.

En fait, on montrera que

$$\Phi''_\varepsilon(a, p_1) - \Phi''_\varepsilon(a, p) = 0 \quad \text{pour tout } \varepsilon > 0.$$

En effet, U étant une application positive, on a

$$\mathrm{S}_{\mathrm{U}(a)} \leqq \mathrm{S}_{\mathrm{U}(p_1)} \leqq \mathrm{S}_{\mathrm{U}(p)}.$$

Par suite, on a

$$\begin{aligned}\Phi''_\varepsilon(a, p_1) - \Phi''_\varepsilon(a, p) &= ((\varepsilon . \mathrm{I} + \mathrm{U}(p_1))^{-1} \cdot \mathrm{S}_{\mathrm{U}(p_1)} - (\varepsilon . \mathrm{I} + \mathrm{U}(p))^{-1} \cdot \mathrm{S}_{\mathrm{U}(p)}) \cdot \mathrm{U}(a) \\ &= ((\varepsilon . \mathrm{I} + \mathrm{U}(p_1))^{-1} - (\varepsilon . \mathrm{I} + \mathrm{U}(p))^{-1}) \cdot \mathrm{U}(a).\end{aligned}$$

Les opérateurs $\mathrm{U}(p)$, $\mathrm{U}(p_1)$ et $\mathrm{U}(a)$ sont positifs et commutent entre eux [corollaire 3, (ii) du lemme 2]; donc

$$\Phi''_\varepsilon(a, p_1) - \Phi''_\varepsilon(a, p) = (\varepsilon . \mathrm{I} + \mathrm{U}(p_1))^{-1} \cdot (\varepsilon . \mathrm{I} + \mathrm{U}(p))^{-1} \cdot (\mathrm{U}(p) - \mathrm{U}(p_1)) \cdot \mathrm{U}(a).$$

Enfin la condition $S_a \leqq p_1 \leqq p$ entraîne $(p - p_1) \cdot a = 0$ et $p - p_1 \geqq 0$; d'après le lemme 2, il en résulte $U(p - p_1) \cdot U(a) = 0$. On a donc

$$\Phi''_{\varepsilon}(a, p_1) = \Phi''_{\varepsilon}(a, p).$$

Pour tout x appartenant à $\mathfrak{m}_{r,\varphi}$, notons $\Phi''(x)$ l'opérateur $\Phi''(x, S_x)$. Montrons que l'application $x \to \Phi''(x)$ de $\mathfrak{m}_{r,\varphi}$ dans $\mathcal{B}$ est linéaire.

En effet, soient x_1 et x_2 deux éléments de $\mathfrak{m}_{r,\varphi}$ et soit p le projecteur $S_{x_1} \vee S_{x_2}$; on a $p \in \mathfrak{m}_{r,\varphi}$, donc

$$\Phi''(x_1 + x_2, p) = \Phi''(x_1, p) + \Phi''(x_2, p).$$

Enfin il est clair que Φ'' est une application continue et positive. Soit p un projecteur de $\mathfrak{m}_{r,\varphi}$. Montrons que $\Phi''(p) = S_{U(p)}$.

En effet, la fonction $f_{\varepsilon}(t) = \dfrac{t}{\varepsilon + t}$ tend vers 1 uniformément dans tout intervalle $[\alpha, \infty]$ $(\alpha > 0)$; et $f_{\varepsilon}(0) = 0$. Donc $\Phi''_{\varepsilon}(p, p) = f_{\varepsilon}(U(p))$ tend fortement vers $S_{U(p)}$; donc $\Phi''(p) = S_{U(p)}$.

Des dernières propriétés de l'application Φ'', il résulte que Φ'' se prolonge par continuité en une application linéaire, continue et positive de $\overline{\mathfrak{m}_{r,\varphi}}^u$ dans $\mathcal{B}$. Notons Φ' cette application.

Comme $\overline{\mathfrak{m}_{r,\varphi}}^u$ est la $\mathbf{C}^*$-algèbre engendrée par les projecteurs de $\mathfrak{m}_{r,\varphi}$, l'application Φ' est un homomorphisme de Jordan de $\overline{\mathfrak{m}_{r,\varphi}}^u$ dans $\mathcal{B}$.

En effet, la relation $\Phi'(x^*) = (\Phi'(x))^*$ pour tout $x \in \overline{\mathfrak{m}_{r,\varphi}}^u$ est clair. D'autre part, l'application $x \to x^2$ de $\overline{\mathfrak{m}_{r,\varphi}}^u$ dans $\overline{\mathfrak{m}_{r,\varphi}}^u$ est continue pour la norme, donc pour montrer que $\Phi'(x^2) = (\Phi'(x))^2$ pour tout x hermitien appartenant à $\overline{\mathfrak{m}_{r,\varphi}}^u$, il suffit de montrer que pour tout entier n, pour toute famille $(p_i)_{1 \leqq i \leqq n}$ de projecteurs orthogonaux de $\mathfrak{m}_{r,\varphi}$ et pour toute famille $(\lambda_i)_{1 \leqq i \leqq n}$ de nombres réels, on a

$$\sum_{1 \leqq i, j \leqq n} a_i \cdot a_j \cdot \Phi'(p_i \cdot p_j) = \sum_{1 \leqq i, j \leqq n} a_i \cdot a_j \cdot (\Phi'(p_i) \cdot \Phi'(p_j)),$$

mais pour $i \neq j$, $\Phi'(p_i) + \Phi'(p_j) = \Phi'(p_i + p_j)$ est un projecteur, donc comme il est bien connu $\Phi'(p_i) \cdot \Phi'(p_j) = 0$, par suite on a bien l'égalité précédente et Φ est un homomorphisme de Jordan.

Montrons enfin qu'on a

$$U(x) = U(p) \cdot \Phi'(x) = \Phi'(x) \cdot U(p),$$

pour tout $x \in \mathfrak{m}_{r,\varphi}$ et pour tout projecteur p de $\mathfrak{m}_{r,\varphi}$ tel que

$$S_x \leqq p.$$

En effet, supposons x hermitien; d'après le lemme 1, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{U}(p)\cdot\Phi''(x) &= \mathrm{U}(p)\cdot\Big(\lim_{\varepsilon\to 0}\text{ forte } \Phi'_\varepsilon(x, p)\Big) = \lim_{\varepsilon\to 0}\text{ dans } \mathrm{L}_2(\psi)\,(\mathrm{U}(p)\cdot\Phi'_\varepsilon(x, p))\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\text{ dans } \mathrm{L}_2(\psi)\,(\mathrm{U}(p)\cdot(\varepsilon.\mathrm{I}+\mathrm{U}(p))^{-1}\cdot\mathrm{U}(x))\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\text{ dans } \mathrm{L}_2(\psi)\,(\Phi'_\varepsilon(p, p)\cdot\mathrm{U}(x)) = \Big(\lim_{\varepsilon\to 0}\text{ forte } \Phi_\varepsilon(p, p)\Big)\cdot\mathrm{U}(x)\\
&= \mathrm{S}_{\mathrm{U}(p)}\cdot\mathrm{U}(x) = \mathrm{U}(x).
\end{aligned}$$

De même, on montrerait que

$$\mathrm{U}(x) = \Phi'(x)\cdot\mathrm{U}(p).$$

Par linéarité, il est clair que

$$\mathrm{U}(x) = \Phi'(x)\cdot\mathrm{U}(p) = \mathrm{U}(p)\cdot\Phi'(x) \quad \text{pour tout } x\in\mathfrak{m}_{r,\varphi}.$$

Lemme 4. — *Soit q un projecteur appartenant à $\mathfrak{m}_{r,\psi}$. Alors il existe une suite de projecteurs de $\mathfrak{m}_{r,\psi}$ deux à deux orthogonaux $(q_n)_{n\in\mathrm{N}}$, telle que*

$$\sum_{n\in\mathrm{N}} q_n = q \qquad \text{et} \qquad \mathrm{S}_{\mathrm{U}^{-1}(q_n)}\in\mathfrak{m}_{r,\varphi} \quad \text{pour tout } n\in\mathrm{N}.$$

En outre, si l'on pose $p_n = \mathrm{S}_{\mathrm{U}^{-1}(q_n)}$, on a

$$q_n = \Phi'(p_n) \qquad \text{et} \qquad q = \sum_{n\in\mathrm{N}}\Phi'(p_n).$$

Démonstration. — L'application U^{-1} de $\mathrm{L}_2(\psi)$ dans $\mathrm{L}_2(\varphi)$ satisfaisant aux mêmes propriétés que l'application U (corollaire 1 du lemme 2), on a

$$\mathrm{U}^{-1}(q)\geqq 0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{U}^{-1}(q)\in\mathrm{L}_2(\varphi).$$

Donc il existe un nombre positif λ et un projecteur $p_1\neq 0$ appartenant à $\mathfrak{A}$, tel que $p_1\leqq\lambda.\mathrm{U}^{-1}(q)$. Par suite, on a $p_1\in\mathrm{L}_2(\varphi)$ et $0\leqq\mathrm{U}(p_1)\leqq\lambda.q$. Par hypothèse, q appartient à $\mathfrak{m}_{r,\psi}$, donc $\mathrm{U}(p_1)$ et $\mathrm{S}_{\mathrm{U}(p_1)}$ appartiennent aussi à $\mathfrak{m}_{r,\psi}$ et l'on a $\mathrm{S}_{\mathrm{U}(p_1)}\leqq q$.

Posons $q_1 = \mathrm{S}_{\mathrm{U}(p_1)}$. On a, d'une part $q_1\leqq q$, d'autre part $\mathrm{S}_{\mathrm{U}^{-1}(q_1)}\in\mathfrak{m}_{r,\varphi}$; en effet, compte tenu du corollaire 4 du lemme 2, il vient

$$\mathrm{S}_{\mathrm{U}^{-1}(q_1)} = \mathrm{S}_{\mathrm{U}^{-1}(\mathrm{S}_{\mathrm{U}(p_1)})} = \mathrm{S}_{\mathrm{U}^{-1}(\mathrm{U}(p_1))} = p_1.$$

Soit $(q_n)_{n\in\mathrm{N}}$ une famille maximale de projecteurs orthogonaux non nuls de $\mathfrak{B}$ satisfaisant aux conditions $q_n\leqq q$ et $\mathrm{S}_{\mathrm{U}^{-1}(q_n)}\in\mathfrak{m}_{r,\varphi}$. Cette famille est dénombrable car la trace ψ est fidèle et $q\in\mathrm{L}_2(\psi)$. On a $\sum_{n\in\mathrm{N}} q_n = q$. En effet, si le projecteur $q-\sum_{n\in\mathrm{N}} q_n$ n'est pas nul, on pourrait construire comme précédemment un projecteur q' non nul satisfaisant aux conditions

$$q'\leqq q-\sum_{n\in m} q_n \qquad \text{et} \qquad \mathrm{S}_{\mathrm{U}^{-1}(q')}\in\mathfrak{m}_{r,\varphi};$$

ainsi la famille $(p_n)_{n \in \mathrm{N}}$ ne serait pas maximale. Enfin, d'après le lemme 3 et le corollaire 4 du lemme 2, on a

$$\Phi'(p_n) = \mathrm{S}_{\mathrm{U}(p_n)} = \mathrm{S}_{\mathrm{U}(\mathrm{S}_{\mathrm{U}^{-1}(q_n)})} = \mathrm{S}_{\mathrm{U}(\mathrm{U}^{-1}(q_n))} = q_n;$$

donc

$$q = \sum_{n \in \mathrm{N}} \Phi'(p_n).$$

COROLLAIRE.

(i) *Soit q un projecteur appartenant à $\mathcal{B}$. Alors il existe une famille de projecteurs de $\mathfrak{m}_{r,\varphi}$, deux à deux orthogonaux $(p_i)_{i \in \mathrm{I}}$ telle que*

$$q = \sum_{i \in \mathrm{I}} \Phi'(p_i) \quad \text{et} \quad \Phi'(p_i) \in \mathfrak{m}_{r,\psi};$$

(ii) *L'adhérence faible de $\Phi'(\mathfrak{m}_{r,\varphi})$ est $\mathcal{B}$.*

Démonstration. — (i) est clair car tout projecteur de $\mathcal{B}$ est la somme d'une famille de projecteurs orthogonaux appartenant à $\mathfrak{m}_{r,\psi}$. Enfin, il est clair que (i) $\Rightarrow$ (ii).

LEMME 5.

(i) *Il existe deux projecteurs q_1 et q_2 appartenant au centre de l'algèbre de von Neumann $\mathcal{B}$, tels que $q_1 + q_2 = \mathrm{I}$ et tels que l'application $x \to \Phi'(x) \cdot q_1$* (resp. *$x \to \Phi'(x) \cdot q)_2$ de $\overline{\mathfrak{m}_{r,\varphi}}^u$ dans $\mathcal{B}$ soit un homomorphisme* (resp. un anti-homomorphisme);

(ii) *Pour tout couple de projecteurs q_1 et q_2 satisfaisant à* (i), *pour tout x appartenant à $\mathrm{L}_2(\varphi)$ et pour tout a appartenant à $\overline{\mathfrak{m}_{r,\varphi}}^u$, on a*

$$q_1 \cdot \Phi'(a) \cdot \mathrm{U}(x) = q_1 \cdot \mathrm{U}(a \cdot x) \quad [\text{resp. } q_2 \cdot \Phi'(a) \cdot \mathrm{U}(x) = q_2 \cdot \mathrm{U}(x \cdot a)]$$

et

$$q_1 \cdot \mathrm{U}(x) \cdot \Phi'(a) = q_1 \cdot \mathrm{U}(x \cdot a) \quad [\text{resp. } q_2 \cdot \mathrm{U}(x) \cdot \Phi'(a) = q_2 \cdot \mathrm{U}(a \cdot x)];$$

(iii) *Pour tout couple de projecteurs q_1 et q_2 satisfaisant à* (i), *il existe un couple de projecteurs p_1 et p_2 dans le centre de l'algèbre de von Neumann $\mathcal{A}$, tel que $p_1 + p_2 = \mathrm{I}$ et tel que, pour tout x appartenant à $\mathrm{L}_2(\varphi)$, on ait*

$$q_1 \cdot \mathrm{U}(x) = \mathrm{U}(p_1 \cdot x) \quad [\text{resp. } q_2 \cdot \mathrm{U}(x) = \mathrm{U}(p_2 \cdot x)].$$

(iv) *L'application Φ' de $\overline{\mathfrak{m}_{r,\varphi}}^u$ dans $\mathcal{B}$ est ultrafaiblement continue et se prolonge de manière unique en un isomorphisme de Jordan Φ de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$.*

Démonstration.

(i) Φ' est un homomorphisme de Jordan de la $\mathbf{C}^\star$-algèbre $\overline{\mathfrak{m}_{r,\varphi}}^u$ dans $\mathcal{B}$ (lemme 3). L'adhérence faible de $\Phi'(\mathfrak{m}_{r,\varphi})$ est $\mathcal{B}$ [corollaire (ii) du lemme 4]. Donc le théorème 3.3 de [7] entraîne (i).

(ii) En appliquant le lemme 3 plusieurs fois, pour tout $x \in \mathfrak{m}_{r,\varphi}$ et pour tout $a \in \overline{\mathfrak{m}_{r,\varphi}}^u$, il vient

$$q_1 \cdot \Phi'(a) \cdot \mathrm{U}(x) = q_1 \cdot \Phi'(a) \cdot \Phi'(x) \cdot \mathrm{U}(\mathrm{S}_x \vee \mathrm{S}_{a \cdot x})$$
$$= q_1 \cdot \Phi'(a \cdot x) \cdot \mathrm{U}(\mathrm{S}_x \vee \mathrm{S}_{a \cdot x}) = q_1 \cdot \mathrm{U}(a \cdot x).$$

Comme $\mathfrak{m}_{r,\varphi}$ est dense dans $\mathrm{L}_2(\varphi)$, la continuité de U entraîne

$$q_1 \cdot \Phi(a) \cdot \mathrm{U}(x) = q_1 \cdot \mathrm{U}(a \cdot x) \quad \text{pour tout } a \in \overline{\mathfrak{m}_{r,\varphi}}^u \quad \text{et} \quad \text{pour tout } x \in \mathrm{L}_2(\varphi)$$

De même, on montrerait les autres relations de (ii).

(iii) D'après le corollaire (i) du lemme 4, il existe une famille $(p_{1,i})_{i \in \mathrm{I}}$ [resp. $(p_{2,j})_{j \in \mathrm{J}}$] de projecteurs deux à deux orthogonaux de $\mathfrak{m}_{r,\varphi}$, telle que $q_1 = \sum_{i \in \mathrm{I}} \Phi'(p_{1,i}) \left[\text{resp. } q_2 = \sum_{j \in \mathrm{J}} \Phi'(p_{2,j})\right]$.

Posons $p_1 = \sum_{i \in \mathrm{I}} p_{1,i} \left(\text{resp. } p_2 = \sum_{j \in \mathrm{J}} p_{2,j}\right)$.

Pour montrer que $q_1 \cdot \mathrm{U}(x) = \mathrm{U}(p_1 \cdot x)$, il suffit de vérifier que pour tout x et $y \in \mathrm{L}_2(\varphi)$, on a

$$\psi(q_1 \cdot \mathrm{U}(x) \cdot \mathrm{U}(y)) = \psi(\mathrm{U}(p_1 \cdot x) \cdot \mathrm{U}(y)) \quad \text{ou} \quad \psi(q_1 \cdot \mathrm{U}(x) \cdot \mathrm{U}(y)) = \varphi(p_1 \cdot x \cdot y).$$

Mais $x \cdot y$ et $\mathrm{U}(x) \cdot \mathrm{U}(y)$ appartiennent à $\mathrm{L}_1(\varphi)$ et $\mathrm{L}_1(\psi)$, donc (*cf.* [5], théor. 6, (iv)) les applications $a \to \varphi(a \cdot x \cdot y)$ de $\mathfrak{A}$ dans $\mathbf{C}$ et $a \to \psi(a \cdot \mathrm{U}(x) \cdot \mathrm{U}(y))$ de $\mathfrak{B}$ dans $\mathbf{C}$ sont ultrafaiblement continues. Il en résulte

$$\varphi(p_1 \cdot x \cdot y) = \sum_{i \in \mathrm{I}} \varphi(p_{1,i} \cdot x \cdot y) = \sum_{i \in \mathrm{I}} \psi(\mathrm{U}(p_{1,i} \cdot x) \cdot \mathrm{U}(y))$$

et

$$\psi(q_1 \cdot \mathrm{U}(x) \cdot \mathrm{U}(y)) = \sum_{i \in \mathrm{I}} \psi(\Phi(p_{1,i}) \cdot \mathrm{U}(x) \cdot \mathrm{U}(y)).$$

Ainsi il suffit de montrer que

$$\Phi(p_{1,i}) \cdot \mathrm{U}(x) = \mathrm{U}(p_{1,i} \cdot x).$$

Appliquons la partie (ii) de ce lemme, on a

$$\mathrm{U}(p_{1,i} \cdot x) = q_1 \cdot \mathrm{U}(p_{1,i} \cdot x) + q_2 \cdot \mathrm{U}(p_{1,i} \cdot x) = q_1 \cdot \Phi(p_{1,i}) \cdot \mathrm{U}(x) + q_2 \cdot \mathrm{U}(x) \cdot \Phi(p_{2,i});$$

or on a $q_1 \geqq \Phi(p_{1,i})$, il en résulte

$$q_1 \cdot \Phi(p_{1,i}) = \Phi(p_{1,i}) \quad \text{et} \quad q_2 \cdot \Phi(p_{1,i}) = 0,$$

d'où

$$\mathrm{U}(p_{1,i} \cdot x) = q_1 \cdot \Phi(p_{1,i}) \cdot \mathrm{U}(x).$$

Ainsi

$$q_1 \cdot \mathrm{U}(x) = \mathrm{U}(p_1 \cdot x).$$

On montrerait de même que

$$q_2 \cdot \mathrm{U}(x) = \mathrm{U}(x \cdot p_2).$$

Maintenant comme $q_1 \cdot \mathrm{U}(x) = \mathrm{U}(x) \cdot q_1$, il vient en utilisant le corollaire 1 du lemme 1,

$$\begin{aligned} p_1 \cdot x = \mathrm{U}^{-1}(q_1 \cdot \mathrm{U}(x)) &= (\mathrm{U}^{-1}((q_1 \cdot \mathrm{U}(x))^*))^* = (\mathrm{U}^{-1}(\mathrm{U}(x^*) \cdot q_1))^* \\ &= (\mathrm{U}^{-1}(q_1 \cdot \mathrm{U}(x^*)))^* = (\mathrm{U}^{-1}(\mathrm{U}(p_1 \cdot x^*)))^* = x \cdot p_1 \end{aligned}$$

et, de même, $x \cdot p_2 = p_2 \cdot x$.

Donc p_1 et p_2 appartiennent au centre de l'algèbre de von Neumann $\mathcal{A}$.

En outre, comme

$$x \cdot (p_1 + p_2) = \mathrm{U}^{-1}(\mathrm{U}(x) \cdot q_1 + \mathrm{U}(x) \cdot q_2) = \mathrm{U}^{-1}(\mathrm{U}(x)) = x$$

pour tout x appartenant à $\mathfrak{m}_{r,\varphi}$, il en résulte $p_1 + p_2 = \mathrm{I}$.

(iv) Pour montrer que l'application Φ' est ultrafaiblement continue, il suffit de montrer (*cf* [5], théor. 6 (iv)) que pout tout z appartenant à $\mathrm{L}_1(\psi)$, la forme linéaire $a \to \psi(\Phi(a) \cdot z)$ sur $\overline{\mathfrak{m}_{r,\varphi}}^u$ est ultrafaiblement continue, ou encore puisque U est une application surjective et que $\mathrm{L}_2(\psi) \cdot \mathrm{L}_2(\psi) = \mathrm{L}_1(\psi)$, il suffit de montrer que, pour tout x et y appartenant à $\mathrm{L}_2(\varphi)$, la forme linéaire $a \to \psi(\Phi'(a) \cdot \mathrm{U}(x) \cdot \mathrm{U}(y))$ sur $\overline{\mathfrak{m}_{r,\varphi}}^u$ est ultrafaiblement continue.

Or on a

$$\begin{aligned} \Phi'(a) \cdot \mathrm{U}(x) &= q_1 \cdot \Phi'(a) \cdot \mathrm{U}(x) + q_2 \cdot \Phi'(a) \cdot \mathrm{U}(x) = q_1 \cdot \mathrm{U}(a \cdot x) + q_2 \cdot \mathrm{U}(x \cdot a) \\ &= \mathrm{U}(p_1 \cdot a \cdot x) + \mathrm{U}(p_2 \cdot x \cdot a) = \mathrm{U}(p_1 \cdot a \cdot x + p_2 \cdot x \cdot a). \end{aligned}$$

Il en résulte

$$\begin{aligned} \psi(\Phi'(a) \cdot \mathrm{U}(x) \cdot \mathrm{U}(y)) &= \psi(\mathrm{U}(p_1 \cdot a \cdot x + p_2 \cdot x \cdot a) \cdot \mathrm{U}(y)) \\ &= \varphi(p_1 \cdot a \cdot x \cdot y + p_2 \cdot x \cdot a \cdot y) = \varphi(a \cdot (p_1 \cdot x \cdot y + p_2 \cdot y \cdot x)). \end{aligned}$$

Mais la forme linéaire $a \to \varphi(a \cdot (p_1 \cdot x \cdot y + p_2 \cdot y \cdot x))$ est ultrafaiblement continue, car $p_1 \cdot x \cdot y + p_2 \cdot y \cdot x$ appartient à $\mathrm{L}_1(\varphi)$.

La boule unité de $\mathcal{B}$ est faiblement complète car elle est faiblement compacte; d'autre part, tout point de $\mathcal{A}$ est faiblement adhérent à une partie bornée de $\mathfrak{m}_{r,\varphi}$ (théorème de Kaplansky). Il en résulte que Φ' se prolonge en une application linéaire Φ ultrafaiblement continue de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$. Il est clair alors que Φ est un homomorphisme de Jordan ultrafaiblement continu, donc l'image de $\mathcal{A}$ par application Φ est ultrafaiblement fermée. Comme $\Phi(\mathfrak{m}_{r,\varphi}) = \Phi'(\mathfrak{m}_{r,\varphi})$ est ultrafaiblement dense dans $\mathcal{B}$, Φ est surjectif. Φ est injectif, sinon il existerait un projecteur p non nul appartenant à $\mathfrak{m}_{r,\varphi}$ tel que $\Phi(p) = 0$ ou $\Phi'(p) = 0$, ce qui est impossible, car $\Phi'(p) = \mathrm{S}_{\mathrm{U}(p)}$.

Enfin Φ est unique, car un isomorphisme de Jordan est ultrafaiblement continu.

THÉORÈME 1. — *Soient $\mathcal{A}$ une algèbre de von Neumann dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, φ une trace normale, fidèle, semi-finie sur $\mathcal{A}^+$, $L_2(\varphi)$ l'espace de Hilbert des opérateurs mesurables affiliés à $\mathcal{A}$ de carré sommable par rapport à φ et $L_2^+(\varphi)$ l'ensemble des éléments de $L_2(\varphi)$ qui sont positifs.*

De même, on définit $\mathcal{B}$, $\mathcal{K}$, ψ, $L_2(\varphi)$ et $L_2^+(\psi)$.

Soit U une application linéaire isométrique et bijective de $L_2(\varphi)$ sur $L_2(\psi)$ telle que $U(L_2^+(\varphi)) \subset L_2^+(\psi)$.

Alors il existe un isomorphisme de Jordan et un seul Φ de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{B}$ et un opérateur z unique, auto-adjoint, positif affilié au centre de $\mathcal{B}$ tels que

$$U(x) = z \cdot \Phi(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathcal{A} \cap L_2(\varphi).$$

Si l'on suppose en outre que $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$ est un facteur, Φ est un isomorphisme ou un anti-isomorphisme de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{B}$ et z est proportionnel à l'unité de $\mathcal{B}$; ainsi il existe un scalaire positif λ non nul, unique tel que

$$U(x) = \lambda . \Phi(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathcal{A} \cap L_2(\varphi)$$

Démonstration. — Soit $(p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille de projecteurs deux à deux orthogonaux appartenant à $\mathfrak{m}_{r,\varphi}$, telle que $I = \sum_{\lambda \in \Lambda} p_\lambda$.

Posons $S_\lambda = S_{U(p_\lambda)}$ pour tout λ appartenant à Λ.

Les projecteurs S_λ sont deux à deux orthogonaux (lemme 2) et l'on a

$$S_\lambda = \Phi'(p_\lambda) = \Phi(p_\lambda) \quad \text{(lemme 3)},$$

où Φ désigne l'isomorphisme de Jordan de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{B}$ défini dans le lemme 5, (iv). Φ est ultrafaiblement continue. Il en résulte $I = \sum_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$.

L'opérateur z' « somme directe » des $U(p_\lambda) \mid S_\lambda(\mathcal{K})$ est affilié à $\mathcal{B}$ et a pour domaine $\mathcal{D}_{z'}$ le sous-espace dense dans $\mathcal{K}$ engendré par

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} (\mathcal{D}_{U(p_\lambda)} \cap S_\lambda(\mathcal{K})).$$

Les opérateurs $U(p_\lambda)$ sont auto-adjoints et positifs, donc z' a pour fermeture un opérateur z, affilié à $\mathcal{B}$, auto-adjoint et positif. (On a $z = z^* = z'^{**} = z'^*$.)

Soit x un élément de $\mathcal{A} \cap L_2(\varphi)$. Dans l'espace de Hilbert $L_2(\psi)$, en appliquant le lemme 1, on a

$$U(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} U(p_\lambda \cdot x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} U(x \cdot p_\lambda).$$

Compte tenu du lemme 5, (i) et (ii), nous en déduisons [dans $L_2(\psi)$]

$$U(x) = (q_1 + q_2) \cdot U(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} (q_1 \cdot U(x \cdot p_\lambda) + q_2 \cdot U(p_\lambda \cdot x))$$
$$= \sum_{\lambda \in \Lambda} (q_1 \cdot \Phi(x) \cdot U(p_\lambda) + q_2 \cdot \Phi(x) \cdot U(p_\lambda) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \Phi(x) \cdot U(p_\lambda).$$

Il en résulte

$$\Phi(x) \circ z' \subseteqq U(x).$$

En effet, d'une part on a, pour tout $\lambda_0 \in \Lambda$

$$(\Phi(x) \circ z') \circ S_{\lambda_0} = \Phi(x) \circ (z' \circ S_{\lambda_0}) = \Phi(x) \circ U(p_{\lambda_0}) \subseteqq \Phi(x) \cdot U(p_{\lambda_0});$$

d'autre part, dans l'espace de Hilbert $L_2(\psi)$, on a

$$\Phi(x) \cdot U(p_{\lambda_0}) = \sum_{\lambda \in \Lambda} (\Phi(x) \cdot U(p_\lambda)) \cdot S_{\lambda_0} = \left(\sum_{\lambda \in \Lambda} \Phi(x) \cdot U(p_\lambda) \right) \cdot S_{\lambda_0} = U(x) \cdot S_{\lambda_0}.$$

Ainsi

$$(\Phi(x) \circ z') \circ S_{\lambda_0} \subseteqq U(x) \cdot S_{\lambda_0}.$$

Donc

$$\Phi(x) \circ z' \subseteqq U(x).$$

De cette dernière relation, on tire

$$(U(x))^* \subseteqq (\Phi(x) \circ z')^*;$$

mais l'opérateur $\Phi(x)$ est borné, donc d'après ([6], p. 297), il en résulte

$$(\Phi(x) \circ z')^* = z'^* \circ (\Phi(x))^* = z \circ (\Phi(x))^*$$

et, par suite,

$$(U(x))^* \subseteqq z \circ (\Phi(x))^*$$

ou

$$U(x^*) \subseteqq z \circ \Phi(x^*)$$

En changeant x en x^*, il vient

$$U(x) \subseteqq z \circ \Phi(x).$$

Considérons l'opérateur $z \circ \Phi(x)$. Il est fermé car $\Phi(x)$ est borné. Il prolonge l'opérateur mesurable $U(x)$, donc il est mesurable et, d'après ([5], lemme 1.2), il coïncide avec $U(x)$. Ainsi

$$U(x) = z \circ \Phi(x) = z \cdot \Phi(x).$$

L'opérateur $\Phi(x) \circ z$ a pour adjoint $z \circ (\Phi(x))^*$. Il en résulte

$$\Phi(x) \cdot z = (\Phi(x) \circ z)^{**} = (z \circ (\Phi(x))^*)^* = (U(x^*))^* = U(x).$$

D'où

$$U(x) = z \cdot \Phi(x) = \Phi(x) \cdot z.$$

L'opérateur z est affilié au centre de $\mathcal{B}$. En effet, comme pour tout $x \in \mathcal{A} \cap L_2(\varphi)$, on a $z \circ \Phi(x) \supseteqq \Phi(x) \circ z$, $\Phi(x)$ commute à z au sens classique, donc $\Phi(x)$ commute aux projecteurs spectraux de z. Donc les projecteurs spectraux de z appartiennent à $(\Phi(\mathcal{A} \cap L_2(\varphi)))' = \mathcal{B}'$. Par suite, z est affilié au centre de $\mathcal{B}$.

Démontrons l'unicité de Φ et de z.

L'isomorphisme de Jordan Φ de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{B}$ est déterminé, dès qu'on connaît sa valeur sur les projecteurs de $\mathfrak{m}_{r,\varphi}$ (puisqu'un isomorphisme de Jordan est ultrafaiblement continu et que l'idéal $\mathfrak{m}_{r,\varphi}$ est ultrafaiblement dense dans $\mathcal{A}$). Or, d'après le lemme 3, on a $S_{U(p)} = \Phi(p)$ pour tout projecteur $p \in \mathfrak{m}_{r,\varphi}$; donc Φ est unique.

Soit z_1 un opérateur auto-adjoint positif, affilié au centre de $\mathcal{B}$, tel que $U(x) = z_1 \cdot \Phi(x)$ pour tout $x \in \mathcal{A} \cap L_2(\varphi)$.

Soient s_1 et s_2 les deux opérateurs positifs affiliés au centre de $\mathcal{B}$ satisfaisant à $s_1 \cdot s_2 = 0$ et à $s_1 - s_2 = z_1 - z$.

Si $z_1 - z$ n'est pas nul, on a S_{s_1} ou S_{s_2} différent de zéro (S_{s_1} et S_{s_2} désignent les supports de s_1 et de s_2). En effet, supposons par exemple $S_{s_1} \neq 0$; d'après le lemme 4, il existe un projecteur non nul q appartenant à $\mathfrak{m}_{r,\psi}$ tel que $q \leqq S_{s_1}$ et tel que $p = S_{U^{-1}(q)}$ appartienne à $\mathfrak{m}_{r,\varphi}$. On aurait alors $(z_1 - z) \cdot q \neq 0$ ou $z_1 \cdot q \neq z \cdot q$, ce qui impossible puisque

$$U(p) = z \cdot \Phi(p) = z \cdot q \qquad \text{et} \qquad U(p) = z_1 \cdot \Phi(p) = z_1 \cdot q.$$

On suppose maintenant que $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{B}$) est un facteur.

Du théorème 3.3 de [8], on déduit qu'il existe deux projecteurs p_1 et p_2 (resp. q_1 et q_2) appartenant au centre de l'algèbre de von Neumann $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{B}$) tels que l'application $x \to p_1 \cdot \Phi^{-1}(x)$ de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{A}$ [resp. $x \to q_1 \cdot \Phi(x)$ de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$] soit un homomorphisme et tels que l'application $x \to p_2 \cdot \Phi^{-1}(x)$ *de* $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{A}$ [resp. $x \to q_2 \cdot \Phi(x)$ de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$] soit un anti-homomorphisme.

Mais $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{B}$) est un facteur, donc on a, soit $p_1 = 0$ et $p_2 = I$, soit $p_1 = I$ et $p_2 = 0$ (resp. soit $q_1 = 0$ et $q_2 = I$, soit $q_1 = I$ et $q_2 = 0$. Par suite, Φ^{-1} (resp. Φ) est un isomorphisme ou un anti-isomorphisme de $\mathcal{B}$ sur $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{B}$) et $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{A}$) est un facteur.

Dans ces deux cas, l'opérateur z affilié au centre de $\mathcal{B}$ est proportionnel à l'unité, donc il existe un scalaire positif λ tel que

$$U(x) = \lambda \, \Phi(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathcal{A} \cap L_2(\varphi).$$

Corollaire 1. — *Soient* $\mathcal{A}$ *un facteur fini,* φ *la trace canonique sur* $\mathcal{A}^+$, *et* U *un opérateur unitaire de* $L_2(\varphi)$ *tel que* $U(L_+^2(\varphi)) \subset L_2^+(\varphi)$. *Alors il existe un automorphisme ou un anti-automorphisme* Φ *de* $\mathcal{A}$ *tel que*

$$U(x) = \Phi(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathcal{A}.$$

COROLLAIRE 2. — *Soient* $\mathcal{A}$ *un facteur discret,* φ *la trace canonique sur* $\mathcal{A}^+$ et U *un opérateur unitaire de* $L_2(\varphi)$ *tel que* $U(L_2^+(\varphi)) \subset L_2^+(\varphi)$. *Alors il existe un automorphisme ou un anti-automorphisme* Φ *de* $\mathcal{A}$ *tel que*

$$U(x) = \Phi(x) \quad \text{pour tout } x \in L_2(\varphi).$$

Le théorème 1 admet une réciproque : la proposition 1 qui nécessite l'emploi du lemme suivant :

LEMME 6. — *Soient* $\mathcal{A}$ *une algèbre de von Neumann quelconque,* z, z_1, z_2, *des opérateurs auto-adjoints affiliés au centre de* $\mathcal{A}$ *et* x *un opérateur à domaine dense, fermé, affilié à* $\mathcal{A}$.

(i) *L'opérateur* $z \circ x$ *a un domaine dense et une fermeture. En outre, si* y *est un opérateur auto-adjoint affilié à* $\mathcal{A}$ *et si* v *est un opérateur partiellement isométrique appartenant à* $\mathcal{A}$, *tels qu'on ait* $x = y \circ v$ *et* $y = x \circ v^\star$, *alors on a*

$$z \cdot x = (z \cdot y) \circ v \quad \text{et} \quad z \cdot y = (z \cdot x) \circ v^\star;$$

(ii) $$z_1 \cdot (z_2 \cdot x) = (z_1 \cdot z_2) \cdot x;$$

(iii) $$(z \cdot x) \circ (z \cdot x)^\star = (z \circ z) \cdot (x \circ x^\star).$$

Démonstration. — Rappelons d'abord que tout opérateur x fermé, à domaine dense et affilié à $\mathcal{A}$, a des décompositions polaires $x = u \circ \rho_1$ et $x = \rho_2 \circ u$, où ρ_1 et ρ_2 sont des opérateurs auto-adjoints positifs affiliés à $\mathcal{A}$, et où u est un opérateur partiellement isométrique appartenant à $\mathcal{A}$; on a $\rho_1 = u^\star \circ x$ et $\rho_2 = x \circ u^\star$.

(i) Soit $x = u \circ \rho_1$ l'une des décompositions polaires de x. L'opérateur z est affilié au centre de $\mathcal{A}$, donc $z \circ u \supseteqq u \circ z$; par suite, $z \circ x = z \circ u \circ \rho_1 \supseteqq u \circ z \circ \rho_1$; mais d'après le lemme 15.2 de [7], l'opérateur $z \circ \rho_1$ a un domaine dense, donc $z \circ x$ a un domaine dense.

D'après le lemme 15.2 de [7], la fermeture de $z \circ y$ existe, donc $(z \cdot y) \circ v$ est un opérateur fermé et comme $z \circ x = z \circ y \circ v$, l'opérateur $z \circ x$ a une fermeture et l'on a $z \cdot x \subseteqq (z \cdot y) \circ v$.

D'autre part, comme $y = x \circ v^\star$, on a

$$z \circ y = z \circ x \circ v^\star \subseteqq (z \cdot x) \circ v^\star;$$

par suite, $z \cdot y \subseteqq (z \cdot x) \circ v^\star$.

Ainsi

$$z \cdot x \subseteqq (z \cdot y) \circ v \subseteqq (z \cdot x) \circ v^\star \circ v$$

et

$$z \cdot y \subseteqq (z \cdot x) \circ v^\star \subseteqq (z \cdot y) \circ v \circ v^\star.$$

Mais $z \cdot x$ et $z \cdot y$ ont des adjoints et sont fermés, il en résulte

$$z \cdot x = (z \cdot x) \circ v^\star \circ v \quad \text{et} \quad z \cdot y = (z \cdot y) \circ v \circ v^\star,$$

donc

$$z \cdot x = (z \cdot y) \circ v \qquad \text{et} \qquad z \cdot y = (z \cdot x) \circ v^\star.$$

(ii) D'après (i), les opérateurs $z_1 \cdot (z_2 \cdot x)$ et $(z_1 \cdot z_2) \cdot x$ ont un sens et ont des domaines denses. Si $x = \rho_2 \circ u$ désigne une des décompositions polaires de x, la partie (i) et le lemme 15.2 de [7] entraînent

$$z_1 \cdot (z_2 \cdot x) = z_1 \cdot ((z_2 \cdot \rho_2) \circ u) = (z_1 \cdot (z_2 \cdot \rho_2)) \circ u$$

et

$$(z_1 \cdot z_2) \cdot x = ((z_1 \cdot z_2) \cdot \rho_2) \circ u.$$

Donc, pour montrer que $z_1 \cdot (z_2 \cdot x) = (z_1 \cdot z_2) \cdot x$, il suffit de vérifier que

$$z_1 \cdot (z_2 \cdot \rho_2) = (z_1 \cdot z_2) \cdot \rho_2.$$

Les projecteurs spectraux des opérateurs z_1, z_2 et ρ_2 engendrent une algèbre de von Neumann commutative et z_1, z_2 et ρ sont affiliés à cette algèbre. D'après le corollaire 4.1 de [7], z_1, z_2 et ρ_2 sont mesurables (pour cette algèbre de von Neumann commutative); donc on a

$$z_1 \cdot (z_2 \cdot \rho_2) = (z_1 \cdot z_2) \cdot \rho_2.$$

(iii) D'après la partie (i), il est clair que $(z \cdot x) \circ (z \cdot x)^\star$ et $(z \circ z) \cdot (x \circ x^\star)$ ont un sens et des domaines denses. Par suite, ils sont auto-adjoints.

On a, d'une part

$$z \circ x \circ x^\star \circ z \subseteqq (z \circ x) \circ (z \circ x)^\star \subseteqq (z \cdot x) \circ (z \cdot x)^\star$$

et, d'autre part, compte tenu du lemme 15.2 de [7] et de partie (ii)

$$z \circ x \circ x^\star \circ z \subseteqq z \circ ((x \circ x^\star) \cdot z) = z \circ (z \cdot (x \circ x^\star)) \subseteqq z \cdot (z \cdot (x \circ x^\star)) = (z \circ z) \cdot (x \circ x^\star).$$

D'après 15.2 de [7], l'opérateur $z \circ x \circ x^\star \circ z$ a une fermeture auto-adjointe, donc

$$(z \cdot x) \circ (z \cdot x)^\star = (z \circ z) \cdot (x \circ x^\star)).$$

Proposition 1. — *Soient* $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{B}$) *une algèbre de von Neumann,* φ (resp. ψ) *une trace normale, fidèle, semi-finie sur* $\mathcal{A}^+$ (resp. $\mathcal{B}^+$).

Soit Φ *un isomorphisme de Jordan de* $\mathcal{A}$ *sur* $\mathcal{B}$.

Alors il existe une trace normale, fidèle, semi-finie et une seule ψ' *sur* $\mathcal{B}^+$ *telle que*

$$\begin{aligned} \psi'(y) &= \varphi(\Phi^{-1}(y)) && \text{pour tout } y \in \mathcal{B}^+, \\ \psi'(\Phi(x) \cdot \Phi(x^\star)) &= \varphi(x \cdot x^\star) && \text{pour tout } x \in \mathcal{A}^+, \\ \Phi(\mathcal{A} \cap L_2(\varphi)) &= \mathcal{B} \cap L_2(\psi'), \end{aligned}$$

il existe une application linéaire isométrique et bijective et une seule U_1 *de* $L_2(\varphi)$ *sur* $L_2(\psi')$ *satisfaisant à* $U_1(L_2^+(\varphi)) \subset L_2^+(\psi')$, *tel que* $U_1(x) = \Phi(x)$ *pour tout* $x \in \mathcal{A} \cap L_2(\varphi)$.

Enfin il existe un opérateur z auto-adjoint, positif, affilié au centre de $\mathcal{B}$, *unique, tel que l'application* $x \to z \cdot U_1(x)$ *soit une application isométrique et bijective de* $L_2(\varphi)$ *sur* $L_2(\psi)$ *satisfaisant à*

$$z \cdot U_1(L_2^+(\varphi)) \subset L_2^+(\psi).$$

Démonstration. — Φ^{-1} est un isomorphisme de Jordan de $\mathcal{B}$ sur $\mathcal{A}$, donc Φ^{-1} est normal; par suite, l'application ψ' de $\mathcal{B}^+$ dans $\overline{\mathbf{R}}_+$ définie par $y \to \psi'(y) = \varphi(\Phi^{-1}(y))$ est fidèle, normale et semi-finie.

Montrons que c'est une trace.

Si v est un opérateur unitaire appartenant à $\mathcal{B}$, $\Phi^{-1}(v)$ est un opérateur unitaire de $\mathcal{A}$. (En effet, on a $\Phi^{-1}(u) \cdot \Phi^{-1}(u^\star) + \Phi^{-1}(u^\star) \cdot \Phi^{-1}(u) = 2\,\mathrm{I}$; d'autre part, on a $\|\Phi^{-1}(u)\| \leqq 1$, donc $\Phi^{-1}(u) \cdot \Phi^{-1}(u^\star) \leqq \mathrm{I}$ et, de même, $\Phi^{-1}(u^\star) \cdot \Phi^{-1}(u) \leqq \mathrm{I}$; par suite, $\Phi^{-1}(u) \cdot \Phi^{-1}(u^\star) = \Phi^{-1}(u^\star) \cdot \Phi^{-1}(u) = \mathrm{I}$.)

Il en résulte

$$\begin{aligned}
\psi'(v \cdot y \cdot v^\star) &= \psi\left(\frac{v \cdot y \cdot v^\star + v^\star \cdot y v}{2}\right) = \varphi\left(\Phi^{-1}\left(\frac{v \cdot y \cdot v^\star + v^\star \cdot y \cdot v}{2}\right)\right) \\
&= \varphi\left(\frac{\Phi^{-1}(v) \cdot \Phi^{-1}(y) \cdot \Phi^{-1}(v^\star) + \Phi^{-1}(v^\star) \cdot \Phi^{-1}(y) \cdot \Phi^{-1}(v)}{2}\right) \\
&= \varphi(\Phi^{-1}(y)) = \psi'(y).
\end{aligned}$$

Ainsi ψ' est une trace sur $\mathcal{B}^+$.

Comme $\psi'(\Phi(x) \cdot (\Phi(x))^\star) = \varphi(x \cdot x^\star)$ pour tout $x \in \mathcal{A}$, la restriction de Φ à $\mathcal{A} \cap L_2(\varphi)$ est une isométrie de $\mathcal{A} \cap L_2(\varphi)$ dans $L_2(\psi')$ et l'image de $\mathcal{A} \cap L_2(\varphi)$ par Φ est $\mathcal{A} \cap L_2(\psi')$.

Comme $\mathcal{A} \cap L_2(\varphi)$ et $\mathcal{B} \cap L_2(\psi')$ sont denses dans $L_2(\varphi)$ et $L_2(\psi')$ respectivement, la restriction de Φ à $\mathcal{A} \cap L_2(\varphi)$ se prolonge par continuité en une application linéaire unique isométrique et bijective U_1 de $L_2(\varphi)$ dans $L_2(\psi')$. Il est clair, en outre, qu'on a

$$U_1(L_2^+(\varphi)) \subset L_2^+(\psi').$$

ψ et ψ' sont des traces normales fidèles et semi-finies. On déduit du théorème 15, du lemme 15.2 et du début de la démonstration du lemme 15.4 de [7] qu'il existe un opérateur s (resp. s_1) auto-adjoint positif affilié au centre de $\mathcal{B}$ tel que pour tout x (resp. y) appartenant à $L_1^+(\psi')$ [resp. $L_1^+(\psi)$] l'opérateur $s \cdot x$ (resp. $s_1 \cdot y$) existe, appartient à $L_1^+(\psi)$ [resp. $L_1^+(\psi')$] et vérifié $\psi(s \cdot x) = \psi'(x)$ [resp. $\psi'(s_1 \cdot y) = \psi(y)$].

Soit z (resp. z_1) l'opérateur auto-adjoint positif affilié au centre de $\mathcal{B}$ tel que $z^2 = s$ [resp. $(z_1)^2 = s_1$].

D'après le lemme 6 (iii), on a

$$(z \cdot x) \circ (z \cdot x)^\star = (z \circ z) \cdot (x \circ x^\star),$$

donc $(z \cdot x) \circ (z \cdot x)^*$ appartient à $L_1^+(\psi)$, par suite l'opérateur $z \cdot x$ est mesurable et appartient à $L_2(\psi)$, enfin il est clair que l'application $x \to z \cdot x$ est une isométrie de $L_2(\psi')$ dans $L_2(\psi)$.

Montrons que cette application est surjective.

En effet, considérons l'application $x \to s_1 \cdot (s \cdot x)$ de $L_1^+(\psi')$ dans $L_1^+(\psi')$. On a

$$\psi'(s_1 \cdot (s \cdot x)) = \psi(s \cdot x) = \psi'(x);$$

mais, d'après le lemme 6 (ii),

$$s_1 \cdot (s \cdot x) = (s_1 \cdot s) \cdot x, \qquad \text{donc} \quad \psi'((s_1 \cdot s) \cdot x) = \psi'(x).$$

Le théorème 15 de [7] entraîne $s_1 \cdot s = \mathrm{I}$ et par suite $z_1 \cdot z = \mathrm{I}$. L'application $x \to z_1 \cdot (z \cdot x)$ de $L_2(\psi')$ dans $L_2(\psi')$, d'après le lemme 6 (ii) est donc l'application identique. Comme l'application $y \to z_1 \cdot y$ de $L_2(\psi)$ dans $L_2(\psi')$ est injective, l'application $x \to z \cdot x$ de $L_2(\psi')$ dans $L_2(\psi)$ est surjective. Enfin d'après le lemme 15.2 de [7], l'application $x \to z \cdot x$ envoie $L_2^+(\psi')$ dans $L_2^+(\psi)$.

Ainsi l'application $x \to z \cdot U_1(x)$ est une application isométrique et bijective de $L_2(\varphi)$ sur $L_2(\psi)$ et satisfait à $z \cdot U_1(L_2^+(\varphi)) \subset L_2^+(\psi)$; en outre, z est unique d'après le théorème 1.

THÉORÈME 2. — *Soient $\mathfrak{A}$ une algèbre de von Neumann et φ une trace normale, fidèle et semi-finie sur $\mathfrak{A}^+$.*

Soient G_1 *le groupe (cf.* cor. 1 du lemme 2) *des applications linéaires* U *isométriques et bijectives de* $L_2(\varphi)$ *sur* $L_2(\varphi)$ *telles que* $U(L_2^+(\varphi)) \subset L_2^+(\varphi)$ *et* G_2 *le groupe des automorphismes de Jordan* Φ *de* $\mathfrak{A}$.

Alors l'application $U \to \Phi$ *de* G_1 *dans* G_2 *défini par le théorème* 1 *est un isomorphisme du groupe* G_1 *sur le groupe* G_2.

Démonstration. — Soient U_1 et U_2 deux éléments de G_1. D'après le théorème 1 à U_1, U_2 et $U_2 \circ U_1$ on peut associer, de façon unique, des automorphismes de Jordan que nous noterons Φ_1, Φ_2 et Φ_3.

Pour montrer que l'application $U \to \Phi$ de G_1 dans G_2 est un homomorphisme de groupe, il suffit de montrer (puisqu'un automorphisme de Jordan est défini dès qu'on connaît sa valeur sur les projecteurs de $\mathfrak{A}$) que $\Phi_3(p) = \Phi_2(\Phi_1(p))$ pour tout projecteur p appartenant à $\mathfrak{A}$.

Du corollaire 1 (i) du lemme 4, on tire aisément que tout projecteur p appartenant à $\mathfrak{A}$ est la somme d'une famille de projecteurs orthogonaux $(p_i)_{i \in \mathrm{I}}$ appartenant à $\mathfrak{m}_{r,\varphi}$ telle que $S_{U_1(p_i)} = \Phi_1(p_i)$ appartient à $\mathfrak{m}_{r,\varphi}$. En appliquant le lemme 3 plusieurs fois et le corollaire 4 du lemme 2, il vient pour tout $i \in \mathrm{I}$

$$(\Phi_2 \circ \Phi_1)(p_i) = \Phi_2(S_{U_1(p_i)}) = S_{U_2(S_{U_1(p_i)})} = S_{(U_2 \circ U_1)(p_i)} = \Phi_3(p_i).$$

Mais les automorphismes de Jordan Φ_1, Φ_2 et Φ_3 sont normaux donc

$$\Phi_3(p) = \sum_{i \in I} \Phi_3(p_i) = \sum_{i \in I} (\Phi_2 \circ \Phi_1)(p_i) = (\Phi_2 \circ \Phi_1)(p).$$

Ainsi $\Phi_3 = \Phi_2 \circ \Phi_1$. Maintenant l'application $U \to \Phi$ est surjective d'après la proposition 1, donc cette application est un isomorphisme de groupe.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] J. Dixmier, *Algèbre de von Neumann*, Gauthier-Villars, Paris.

[2] J. Dixmier, *Les C*-algèbres et leurs représentations*, Gauthier-Villars.

[3] J. Dixmier, *Application $\natural$ dans les anneaux d'opérateurs* (*Comp. Math.*, t. 10, 1952, p. 1-55).

[4] R. V. Kadison, *Isométries of operator algebras* (*Ann. Math.*, t. 54, 1951, p. 325-338).

[5] T. Ogasawara et K. Yoshinaga, *A non commutative Theory of integration for operators* (*J. Sc. Hiroshima Univ.*, t. 18, 1955, p. 311-347).

[6] F. Riesz et B. Sz. Nagy, *Leçon d'analyse fonctionnelle*, 3e édition, Gauthier-Villars, Paris.

[7] I. Segal, *A non commutative extension of abstract integration* (*Ann. Math.*, t. 57, 1953, p. 401-457).

[8] E. Stormer, *On Jordan Structure of C*-algebras* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 120, nº 3, 1965).