PAUL KOOSIS

Sur l'approximation pondérée par des polynomes et par des sommes d'exponentielles imaginaires

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 81, nº 4 (1964), p. 387-408
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1964_3_81_4_387_0>

Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.,
3e série, t. 81, 1964, p. 387 à 408.

SUR L'APPROXIMATION PONDÉRÉE PAR DES POLYNOMES ET PAR DES SOMMES D'EXPONENTIELLES IMAGINAIRES

PAR M. PAUL KOOSIS,

Introduction.

Étant donnée une fonction continue $W(x)$ (qui sera désormais appelée un *poids*) satisfaisant aux conditions

$$\begin{aligned} W(x) &\geq \text{Cte} > 0, & -\infty < x < \infty, \\ W(x) &\to \infty, & x \to \pm\infty; \end{aligned}$$

nous allons étudier le problème de l'approximation uniforme relative à $W(x)$, consistant en ceci : on se donne une famille E de fonctions continues et une autre fonction f, et l'on cherche s'il existe des $g \in E$ qui rendent

$$\sup_{-\infty < x < \infty} \frac{|f(x) - g(x)|}{W(x)}$$

arbitrairement petit. Les classes E que nous allons considérer seront composées de fonctions g telles que $\frac{g(x)}{W(x)} \to 0$, $x \to \pm\infty$, de sorte qu'on ne saurait approcher que des fonctions f ayant la même propriété. De ce fait la

DÉFINITION :

$$\mathcal{C}_W = \left\{ f \textit{ continue sur } (-\infty, \infty); \qquad \left|\frac{f(x)}{W(x)}\right| \to 0,\ x \to \pm\infty \right\}.$$

Si l'on pose, pour $f \in \mathcal{C}_W$,

$$\|f\|_W = \sup_{-\infty < x < \infty} \frac{|f(x)|}{W(x)},$$

$\mathcal{C}_W$ *devient un espace de Banach.*

Comme $W(x) \to \infty$, $x \to \pm\infty$, toute somme finie de la forme $\sum_\lambda \alpha_\lambda e^{i\lambda x}$ (les λ étant réels) appartient à $\mathcal{C}_W$.

Définition. — *Étant donné* $A > 0$, $\mathcal{C}_W(A)$ *est la fermeture, dans* $\mathcal{C}_W$, *de l'ensemble des sommes finies de la forme* $\sum_{-A \leqq \lambda \leqq A} \alpha_\lambda e^{i\lambda x}$.

Définition. — *Pour* $A \geqq 0$,

$$\mathcal{C}_W(A+) = \bigcap_{A' > A} \mathcal{C}_W(A').$$

Définition. — *Soit* $W(x)$ *un poids satisfaisant à la condition supplémentaire*

$$\frac{x^n}{W(x)} \to 0, \qquad x \to \pm\infty, \qquad \textit{pour} \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

On notera par $\mathcal{C}_W(0)$ *la fermeture, dans* $\mathcal{C}_W$, *de l'ensemble des polynomes.*

Dans la suite, chaque fois qu'on fera mention de $\mathcal{C}_W(0)$, il sera entendu que $W(x)$ remplit la condition qu'on vient d'écrire, sans que cela soit toujours rappelé explicitement.

Les ensembles $\mathcal{C}_W(A)$, $\mathcal{C}_W(A+)$, et $\mathcal{C}_W(0)$ qu'on vient de définir sont des sous-espaces fermés de $\mathcal{C}_W$, et vont jouer le rôle de la classe E. C'est à l'étude des relations d'inclusion qui peuvent avoir lieu entre $\mathcal{C}_W(0)$, $\mathcal{C}_W(0+)$ et $\mathcal{C}_W$, que cet article est consacré.

1. Composition des sous-espaces $\mathcal{C}_W(A+)$.

Lemme. — *Soit* $A \geqq 0$, *et soit* $f(z)$ *une fonction entière satisfaisant à une inégalité de la forme* $|f(re^{i\theta})| \leqq C_\varepsilon \exp(Ar|\sin\theta| + \varepsilon r)$ *pour chaque* $\varepsilon > 0$. *Alors, si* $A' > A$,

$$\int_{|\lambda| > A'} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\delta|x|} e^{i\lambda x} dx \right| d\lambda \to 0$$

lorsque δ *tend vers zéro en parcourant des valeurs positives.*

Démonstration. — Étant donné $\delta > 0$ et $A' > A$, prenons un $\varepsilon > 0$ inférieur à $\frac{\delta}{2}$ et à $\frac{A'-A}{2}$. Si $z = re^{i\theta}$, $0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$, et $\lambda \geqq A'$, on aura

$$|f(z) e^{-\delta z} e^{i\lambda z}| \leqq C_\varepsilon \exp(-\varepsilon r \sin\theta - \varepsilon r \cos\theta).$$

Cette inégalité, avec le théorème de Cauchy, montre, si l'on intègre $f(z)\, e^{-\delta z} e^{i\lambda z}$ le long d'un contour formé par les segments $[0, R]$, $[0, iR]$, et l'arc $Re^{i\theta}$, $0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$, R étant très grand, que

$$(1) \qquad \int_0^\infty f(x)\, e^{-\delta x} e^{i\lambda x}\, dx = i \int_0^\infty f(iy)\, e^{-\lambda y} e^{-i\delta y}\, dy.$$

En prenant un chemin d'intégration composé des segments $[0, iR]$, $[-R, 0]$, et de l'arc $Re^{i\theta}$, $\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi$, on voit de la même façon, que

$$(2) \qquad \int_{-\infty}^0 f(x)\, e^{\delta x} e^{i\lambda x}\, dx = -i \int_0^\infty f(iy)\, e^{-\lambda y} e^{i\delta y}\, dy.$$

De (1) et (2) on tire la formule

$$(3) \qquad \int_{-\infty}^\infty f(x)\, e^{-\delta |x|} e^{i\lambda x}\, dx = 2 \int_0^\infty f(iy)\, e^{-\lambda y} \sin \delta y\, dy,$$

valable pour chaque $\delta > 0$. Prenons maintenant un $\eta > 0$ tel que $2\eta < A' - A$. On a $|f(iy)| \leqq C_\eta \exp(A + \eta)\, y$, $y \geqq 0$, et ceci, porté dans (3), donne, après emploi de l'inégalité de Schwarz,

$$\left| \int_{-\infty}^\infty f(x)\, e^{-\delta |x|} e^{i\lambda x}\, dx \right| \leqq \frac{2\sqrt{2}\, C_\eta\, \delta}{(\lambda - A - \eta)\sqrt{(\lambda - A - \eta)^2 + 4\delta^2}}, \qquad \lambda \geqq A', \qquad \delta > 0.$$

Pour $\lambda \leqq -A'$ on a une formule analogue, et ces deux évaluations entraînent

$$\int_{|\lambda| \geqq A'} \left| \int_{-\infty}^\infty f(x)\, e^{-\delta |x|} e^{i\lambda x}\, dx \right| d\lambda \leqq \frac{4\sqrt{2}\, C_\eta}{\eta}\, \delta,$$

d'où le lemme.

THÉORÈME I. — *Soit* $A \geqq 0$, *et soit* $f(z)$ *une fonction entière satisfaisant aux conditions*

$$(4) \qquad |f(re^{i\theta})| \leqq C_\varepsilon \exp(Ar|\sin\theta| + \varepsilon r) \qquad \textit{pour chaque } \varepsilon > 0,$$

$$(5) \qquad \frac{f(x)}{W(x)} \to 0, \qquad x \to \pm\infty.$$

Alors, $f \in \mathcal{C}_W(A+)$.

DÉMONSTRATION. — Notons par $\mathcal{C}$ l'espace de Banach consistant des fonctions continus $g(x)$ tendant vers zéro lorsque $x \to \pm\infty$. Si λ est réel, $\frac{e^{i\lambda x}}{W(x)}$ appartient à $\mathcal{C}$, et il suffit évidemment de montrer que, si $f(z)$ satisfait (4) et (5), $\frac{f(x)}{W(x)}$ est dans le sous-espace fermé de $\mathcal{C}$ engendré par les $\frac{e^{i\lambda x}}{W(x)}$ avec $-A' \leqq \lambda \leqq A'$, quel que soit $A' > A$. A cette fin, supposons que nous ayons une mesure finie μ sur $(-\infty, \infty)$, telle que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda x}}{W(x)} d\mu(x) = 0, \qquad -A' \leqq \lambda \leqq A'.$$

Alors, si $A' > A$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overline{f(x)}}{W(x)} d\mu(x) = 0. \tag{6}$$

En effet, pour chaque $\delta > 0$,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overline{f(x)}\, e^{-\delta|x|}}{W(x)} d\mu(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda\xi}}{W(\xi)} d\mu(\xi) \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-\delta|x|} e^{i\lambda x} dx} \right\} d\lambda \\ &= \int_{|\lambda| \geqq A'} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda\xi}}{W(\xi)} d\mu(\xi) \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-\delta|x|} e^{i\lambda x} dx} \right\} d\lambda.\end{aligned}$$

Si $A' > A$, le dernier membre de cette identité tend vers zéro avec δ, grâce au lemme, et l'on a (6). Vu la structure connue du dual de $\mathcal{C}$, le résultat voulu s'ensuit en vertu du théorème de Hahn-Banach.

Corollaire. — *Soit* $A \geqq 0$. *Ou bien* $\mathcal{C}_W(A+) = \mathcal{C}_W$, *ou* $\mathcal{C}_W(A+)$ *consiste précisément de toutes les fonctions entières* $f(z)$ *satisfaisant aux conditions* (4) *et* (5).

Preuve. — Que chaque fonction $f(z)$ satisfaisant (4) et (5) appartienne à $\mathcal{C}_W(A+)$, c'est le contenu du théorème I.

Supposons que $\mathcal{C}_W(A+) \neq \mathcal{C}_W$. Selon la définition de $\mathcal{C}_W(A+)$, il existe alors un $A_0 > A$ tel que $\mathcal{C}_W(A_0) \neq \mathcal{C}_W$. On aura donc manifestement $\mathcal{C}_W(A') \neq \mathcal{C}_W$, $A' \leqq A_0$, et un théorème d'Akutowicz ([4], p. 297) nous permet d'affirmer que chaque $f \in \mathcal{C}_W(A')$, $A < A' \leqq A_0$, est une fonction entière satisfaisant

$$|f(re^{i\theta})| \leqq C(\varepsilon, A') \exp(A'r|\sin\theta| + \varepsilon r),$$

$C(\varepsilon, A')$ étant une constante finie, $\varepsilon > 0$. Étant donnés $f \in \mathcal{C}_W(A+)$ et $\varepsilon > 0$, on prend pour A' le plus petit des nombres $A + \varepsilon$, A_0, et l'on voit que

$$|f(re^{i\theta})| \leqq C(\varepsilon, A') \exp(Ar|\sin\theta| + 2\varepsilon r),$$

c'est la condition (4). Comme $f \in \mathcal{C}_W$, on a (5).

Lemme. — *Soit* $\frac{x^n}{W(x)} \to 0$, $x \to \pm\infty$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ *Alors,*

$$\mathcal{C}_W(0) \subset \mathcal{C}_W(A+) \quad \textit{pour tout } A \geqq 0.$$

DÉMONSTRATION. — Il suffit de prouver que $\mathcal{C}_W(0) \subset \mathcal{C}_W(A)$ pour chaque $A > 0$. Il est clair que $1 \in \mathcal{C}_W(A)$, $A > 0$. Montrons que si $A > 0$, $x \in \mathcal{C}_W(A)$. Par la formule de Taylor-Lagrange :

$$\frac{\sin hx}{h} = x + x^3 \frac{h^2 \cos\xi}{3!}, \qquad \xi \text{ étant entre } 0 \text{ et } hx.$$

Donc

$$\sup_x \left| \frac{x - \dfrac{\sin hx}{h}}{W(x)} \right| \leq \frac{h^2}{3!} \sup_x \left| \frac{x^3}{W(x)} \right| \leq Ch^2,$$

C étant indépendant de h. En faisant tendre h vers zéro, on voit que $x \in \mathcal{C}_W(A)$ pour chaque $A > 0$. La preuve de ce que $x^2 \in \mathcal{C}_W(A)$, $x^3 \in \mathcal{C}_W(A)$, etc. $(A > 0)$, s'obtient en étendant ce raisonnement de façon évidente.

LEMME. — *Si* $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log W(x)}{1 + x^2}\, dx < \infty$, $\mathcal{C}_W(A+) \neq \mathcal{C}_W$ *pour chaque* $A \geq 0$.

Pour la preuve de ce résultat, très connu et assez élémentaire, on consultera, entre autres, [3], [6], ou [10].

THÉORÈME II. — *Soit* $W(x)$ *paire, et soit* $\log W(x)$ *une fonction convexe de* $\log x$ *pour* $x \geq 1$. *Alors :*

ou bien $\mathcal{C}_W(A+) = \mathcal{C}_W$ *pour tout* $A \geq 0$, *ou, pour chaque* $A \geq 0$, $\mathcal{C}_W(A+)$ *consiste précisément des fonctions entières* $f(z)$ *satisfaisant aux conditions* (4) *et* (5).

DÉMONSTRATION. — Si $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log W(x)}{1 + x^2}\, dx < \infty$, on a $\mathcal{C}_W(A+) \neq \mathcal{C}_W$ pour chaque $A \geq 0$, grâce au lemme précédent. Le corollaire du théorème I montre alors que la deuxième alternative a lieu.

Supposons donc que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log W(x)}{1 + x^2}\, dx = \infty. \tag{7}$$

Comme $\dfrac{d \log W(x)}{d \log x}$ croît pour $x \geq 1$, ou bien cette dérivée reste bornée pour $x \to \infty$, ou elle tend vers l'infini. Au premier cas, on aurait $\log W(x) \leq \text{Cte} \log |x|$, $|x| \geq 1$, et (7) ne serait pas vrai. C'est donc le deuxième cas qui a lieu et, sous cette condition,

$$\frac{x^n}{W(x)} \to 0, \qquad x \to \pm\infty, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

comme on le voit facilement. Nous sommes donc à même d'introduire l'espace $\mathcal{C}_W(0)$. Or, comme $W(x)$ satisfait les conditions de l'hypothèse et, en outre, (7), nous pouvons, selon un théorème bien connu (*voir* [3], ou [10], nos 19-21), conclure que $\mathcal{C}_W(0) = \mathcal{C}_W$. Comme $\mathcal{C}_W(0) \subset \mathcal{C}_W(A+)$ pour tout $A \geq 0$, c'est bien la *première* alternative qui a lieu.

2. Un cas où $\mathcal{C}_W(0) = \mathcal{C}_W(0+)$.

On va maintenant regarder de plus près la relation entre $\mathcal{C}_W(0)$ et $\mathcal{C}_W(0+)$. Nous allons trouver des conditions simples qui entraînent l'égalité de ces deux sous-espaces.

Lemme. — *Soit $\omega(z)$ un polynome ayant tous ses zéros strictement au-dessous de l'axe réel, et soit $f(z)$ une fonction entière, de type exponentiel $\frac{h}{2} > 0$, bornée sur l'axe réel. Posons $f_h(z) = \dfrac{2\sin\frac{hz}{2}}{hz} f(z)$, et notons par a_n les zéros de $\omega(z)$. Alors, pour $-\infty < x < \infty$,*

$$(8)\qquad \left|\sum_n \frac{f_h(a_n)\, e^{-iha_n}}{\omega'(a_n)\,(x-a_n)} - \frac{e^{-ihx} f_h(x)}{\omega(x)}\right| \leq 2e^{\frac{3}{2}} \sup_{-\infty<t<\infty} \left|\frac{f\left(t+\frac{i}{h}\right)}{\omega\left(t+\frac{i}{h}\right)}\right|.$$

Démonstration. — Soit $b > 0$, et considérons le contour Γ_R formé du segment $[ib - R, ib + R]$ et du demi-cercle $ib + Re^{i\theta}$, $\pi \leq \theta \leq 2\pi$. Si x réel est donné à l'avance et R est assez grand, on a, par le théorème des résidus :

$$\frac{e^{hb}}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \frac{f_h(\zeta)\, e^{ih(x+ib-\zeta)}}{\omega(\zeta)\,(x-\zeta)}\, d\zeta = e^{ihx}\sum_n \frac{f_h(a_n)\, e^{-iha_n}}{\omega'(a_n)\,(x-a_n)} - \frac{f_h(x)}{\omega(x)}.$$

Vu l'hypothèse faite sur $f(z)$, on a $|f_h(\zeta)\, e^{-ih\zeta}| \leq \frac{\mathrm{Cte}}{R}$ pour ζ appartenant à la partie demi-circulaire de R. En faisant tendre R vers l'infini, on voit donc que

$$(9)\qquad \frac{e^{hb}}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_h(t+ib)\, e^{ih(x-t)}}{\omega(t+ib)\,(x-t-ib)}\, dt = \frac{f_h(x)}{\omega(x)} - e^{ihx}\sum_n \frac{f_h(a_n)\, e^{-iha_n}}{\omega'(a_n)\,(x-a_n)},$$

formule valable pour chaque x réel.

En remplaçant Γ_R par son image symétrique relative à la droite $\mathcal{I}z = b$ on obtient, par le même raisonnement,

$$(10)\qquad \frac{e^{hb}}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_h(t+ib)\, e^{-ih(x-t)}}{\omega(t+ib)\,(x-t-ib)}\, dt = 0, \qquad -\infty < x < \infty.$$

La soustraction de (10) de (9) donne

$$(11)\qquad \frac{f_h(x)}{\omega(x)} - e^{ihx}\sum_n \frac{f_h(a_n)\, e^{-iha_n}}{\omega'(a_n)\,(x-a_n)}$$
$$= \frac{e^{hb}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t+ib)\,.\,2\sin\frac{h(t+ib)}{2}\,\sin h(x-t)}{\omega(t+ib)\, h(t+ib)\,(x-t-ib)}\, dt.$$

Dans (11), faisons $b = \frac{1}{h}$, et posons, pour simplifier les écritures,

$$M = \sup_{-\infty < t < \infty} \left| \frac{f\left(t + \frac{i}{h}\right)}{\omega\left(t + \frac{i}{h}\right)} \right|;$$

il vient alors,

$$(12) \qquad \left| \sum_n \frac{f_h(a_n)\, e^{-iha_n}}{\omega'(a_n)\,(x - a_n)} - \frac{e^{-ihx} f_h(x)}{\omega(x)} \right|$$
$$\leq \frac{eM}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{2 \sin \frac{ht + i}{2}}{ht + i} \frac{\sin h(x - t)}{x - t - \frac{i}{h}} \right| dt, \qquad -\infty < x < \infty.$$

Après les changements de variable $\frac{ht}{2} = \tau$, $\frac{hx}{2} = \xi$, l'intégrale de droite devient

$$2 \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin\left(\tau + \frac{i}{2}\right)}{\tau + \frac{i}{2}} \right| \cdot \left| \frac{\sin 2(\tau - \xi)}{2(\tau - \xi) + i} \right| d\tau$$
$$\leq \sqrt{2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left|\sin\left(\tau + \frac{i}{2}\right)\right|^2}{\tau^2 + \frac{1}{4}} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 2(\tau - \xi)}{2(\tau - \xi)^2} d\tau \right]^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq 2\pi\sqrt{e} \quad \text{indépendamment de } x;$$

en portant cette évaluation dans (12), l'inégalité (8) s'ensuit.

Corollaire. — *Soient $\omega(z)$ et $f(z)$ comme dans l'énoncé du lemme. Il existe un polynome $P(x)$ [de degré inférieur à celui de $\omega(z)$] tel que*

$$\left| \frac{P(x) - e^{-ihx} \frac{2}{hx}\left(\sin \frac{hx}{2}\right) f(x)}{\omega(x)} \right| \leq 2e^{\frac{3}{2}} \sup_{-\infty < t < \infty} \left| \frac{f\left(t + \frac{i}{h}\right)}{\omega\left(t + \frac{i}{h}\right)} \right|, \qquad -\infty < x < \infty.$$

Preuve. — Selon (8), la formule en question a lieu avec

$$P(x) = \sum_n \frac{f_h(a_n)\, e^{-iha_n}\, \omega(x)}{\omega'(a_n)\,(x - a_n)}.$$

Théorème III. — *Soit $W(x)$ une fonction entière de la forme*

$$(13) \qquad W(x) = \sum_0^{\infty} \alpha_{2n} x^{2n}, \qquad \alpha_0 > 0, \qquad \alpha_{2n} \geqq 0$$

[un nombre infini des α_{2n} étant positifs, pour qu'on puisse parler de $\mathcal{C}_W(0)$]. Alors, $\mathcal{C}_W(0) = \mathcal{C}_W(0+)$.

DÉMONSTRATION. — Soit $F \in \mathcal{C}_W(0+)$. Alors, $\frac{F(x)}{W(x)} \to 0$, $x \to \pm\infty$, et il existe une suite de sommes finies

$$\sum_{-(2n)^{-1} \leq \lambda \leq (2n)^{-1}} \alpha_\lambda(n)\, e^{i\lambda x} = f_n(x)$$

telles que $\frac{f_n(x)}{W(x)} - \frac{F(x)}{W(x)} \to 0$ uniformément sur $(-\infty, \infty)$ lorsque $n \to \infty$.

Posons

$$g_n(x) = \frac{2n}{x} \sin\frac{x}{2n} e^{-\frac{ix}{n}} f_n(x).$$

Comme $|g_n(x)| \leq |f_n(x)|$, $F(x) = o(W(x))$, $x \to \pm\infty$, et $|f_n(x) - g_n(x)| \to 0$, $n \to \infty$, uniformément sur chaque intervalle fini, on voit que

$$\frac{g_n(x)}{W(x)} - \frac{F(x)}{W(x)} \to 0, \qquad n \to \infty,$$

uniformément sur $(-\infty, \infty)$. Le théorème sera donc établi dès qu'on montrera l'existence d'une suite de polynomes $P_n(x)$ telle que

$$(14) \qquad \frac{P_n(x) - g_n(x)}{W(x)} \to 0, \qquad n \to \infty, \text{ uniformément sur } (-\infty, \infty).$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe M et N tels que pour $n > N$,

$$(15) \qquad \frac{|f_n(x)|}{W(x)} < \|F\|_W + \varepsilon, \qquad -\infty < x < \infty,$$

$$(16) \qquad \frac{|f_n(x)|}{W(x)} < \varepsilon, \qquad |x| \geq M.$$

Prenons un n quelconque $> N$ qui, une fois choisi, restera *fixe* lors du raisonnement qui va suivre. Par sa forme même, $f_n(x)$ est bornée pour $-\infty < x < \infty$. De là, et des formules (13), (15) et (16) résulte l'existence d'un K fini tel que, si

$$V(x) = \sum_0^K \alpha_{2n} x^{2n},$$

on ait

$$(17) \qquad \frac{|f_n(x)|}{V(x)} < \|F\|_W + 2\varepsilon, \qquad -\infty < x < \infty,$$

$$(18) \qquad \frac{|f_n(x)|}{V(x)} < 2\varepsilon, \qquad |x| \geq M.$$

Comme $V(x) \geq \alpha_0 > 0$, $-\infty < x < \infty$, il existe un polynome $\omega(x)$ ayant tous ses zéros strictement dans le demi-plan inférieur, et tel que $|\omega(x)| = V(x)$, $-\infty < x < \infty$.

La fonction $f_n(z)$ est entière, de type exponentiel $\frac{1}{2n}$, et bornée sur l'axe réel. On peut donc appliquer le corollaire ci-dessus avec $f(x) = f_n(x)$,

$h = \frac{1}{n}$; le rôle de $e^{-ihx} f_h(x)$ est ici joué par $g_n(x)$. Selon ce corollaire, il existe un polynome $P_n(x)$, tel que

$$(19) \qquad \left| \frac{P_n(x) - g_n(x)}{\omega(x)} \right| \leq 2 e^{\frac{3}{2}} \sup_{-\infty < t < \infty} \left| \frac{f_n(t+in)}{\omega(t+in)} \right|, \qquad -\infty < x < \infty.$$

Dans l'inégalité (19), nous allons estimer le membre de droite. Étant données les propriétés de $f_n(z)$ et la construction de $\omega(z)$, la valeur de $\exp\left(\frac{iz}{2n}\right) \frac{f_n(z)}{\omega(z)}$ pour $\mathcal{I} z > 0$ se trouve moyennant la formule de Poisson. On a donc, pour t réel,

$$\pi \exp\left(\frac{i(t+in)}{2n}\right) \frac{f_n(t+in)}{\omega(t+in)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n e^{\frac{ix}{n}} f_n(x)}{[(x-t)^2 + n^2]\, \omega(x)} dx,$$

d'où, puisque $|\omega(x)| = V(x)$:

$$(20) \qquad \begin{aligned} \left| \frac{f_n(t+in)}{\omega(t+in)} \right| &\leq \frac{e^{\frac{1}{2}}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n}{(x-t)^2 + n^2} \frac{|f_n(x)|}{V(x)} dx \\ &\leq 2 e^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{\pi} (\|F\|_W + 2\varepsilon) \operatorname{arc\,tg} \frac{M}{n} + \varepsilon \right], \end{aligned}$$

grâce à (17) et à (18). Comme $|\omega(x)| = V(x) \leq W(x)$, $-\infty < x < \infty$, on voit, en portant l'évaluation (20) dans (19), qu'il existe un polynome $P_n(x)$ tel que

$$\frac{|P_n(x) - g_n(x)|}{W(x)} \leq 4 e^2 \left[\frac{1}{\pi} (\|F\|_W + 2\varepsilon) \operatorname{arc\,tg} \frac{M}{n} + \varepsilon \right], \qquad -\infty < x < \infty.$$

Or, la démonstration de cette formule-ci est valable pour n'importe quel $n > N$. En prenant n assez grand par rapport à M, il vient $\|P_n - g_n\|_W < 8 e^2 \varepsilon$, et comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on aura (14).

C. Q. F. D.

Corollaire. — *Soit* $W(x)$ *un poids de la forme* (13) :

ou bien $\mathcal{C}_W(0) = \mathcal{C}_W$,

ou $\mathcal{C}_W(0)$ *consiste précisément de toutes les fonctions entières* $f(z)$, *de type exponentiel zéro, telles que* $f(x) = o(W(x))$, $x \to \pm\infty$.

Preuve. — Par le théorème III, $\mathcal{C}_W(0) = \mathcal{C}_W(0+)$. Or, la caractérisation de $\mathcal{C}_W(0+)$ est fournie par le corollaire du théorème I (n° 1).

Nous aimerions pouvoir énoncer un analogue du théorème III pour les poids $W(x)$ satisfaisant à l'hypothèse du théorème II (n° 1). Malheureusement, nous n'y sommes pas parvenus. On a, toutefois, le

Théorème IV. — *Soit* $W(x)$ *un poids pair, tel que* $\log W(x)$ *soit une fonction convexe de* $\log x$ *pour* $x \geq 1$. *Supposons en outre qu'à chaque* $\theta > 1$ *corresponde une constante* C_0 *telle que* $x^2 W(x) \leq C_0 W(\theta x)$. *Alors,* $\mathcal{C}_W(0) = \mathcal{C}_W(0+)$.

DÉMONSTRATION. — Pour $n = 0, 1, 2, \ldots$, posons $s_n = \sup\limits_{x \geqq 1} \dfrac{x^n}{W(x)}$. Si $\log W(x)$ est une fonction convexe de $\log x$, $x \geqq 1$, il est bien connu que

$$W(x) \leqq x^2 \sup_n \frac{x^{2n}}{s_{2n}}, \qquad |x| \geqq 1. \tag{21}$$

[Ce fait rentre dans la théorie de la régularisation, due à Mandelbrojt, *voir*, par exemple, [9], p. 33-40. Pour une dérivation rapide de (21), on pourra consulter [3], p. 30-31 ou [10], n° 20.] On a d'autre part

$$\sup_n \frac{x^{2n}}{s_{2n}} \leqq W(x), \qquad |x| \geqq 1. \tag{22}$$

Écrivons

$$\Omega(x) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{s_{2n}}.$$

Si $W(x)$ satisfait aux conditions de l'hypothèse, on peut trouver, correspondant à chaque $\theta > 1$, une constante K_θ telle que

$$W(x) \leqq \Omega(x) \leqq K_\theta W(\theta x), \qquad |x| \geqq 1, \tag{23}$$

grâce aux inégalités (21) et (22).

Supposons que $f \in \mathcal{C}_W(0+)$. Alors, $f \in \mathcal{C}_\Omega(0+)$ selon (23). Comme le poids $\Omega(x)$ satisfait à l'hypothèse du théorème III, cela entraîne que $f \in \mathcal{C}_\Omega(0)$. Donc, pour chaque $\theta > 1$ on a, par (23), $f \in \mathcal{C}_{W_\theta}(0)$, où nous avons noté par $W_\theta(x)$ le poids $W(\theta x)$. De là, nous allons déduire que $f \in \mathcal{C}_W(0)$. Pour cela, il suffit de montrer que, si μ est une mesure finie telle que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^n}{W(x)} d\mu(x) = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{24}$$

on a,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{W(x)} d\mu(x) = 0. \tag{25}$$

De (24), il vient

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^n}{W(\theta x)} d\mu(\theta x) = 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \qquad \theta > 1,$$

d'où

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{W(\theta x)} d\mu(\theta x) = 0, \qquad \theta > 1,$$

vu le fait que $f \in \mathcal{C}_{W_\theta}(0)$, $\theta > 1$. Donc

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{W(x)} d\mu(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{W(x)} (d\mu(x) - d\mu(\theta x)) + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{f(x)}{W(x)} - \frac{f(x)}{W(\theta x)} \right) d\mu(\theta x),$$

quel que soit $\theta > 1$. Lorsque $\theta \to 1$, $d\mu(\theta x) \to d\mu(x)$ faiblement, et la première intégrale de droite tend vers zéro. En même temps, puisque $f(x) = o(W(x))$, $x \to \pm\infty$, et $W(\theta x) \geqq W(x)$, $\theta > 1$, la différence $\frac{f(x)}{W(x)} - \frac{f(x)}{W(\theta x)}$ tend uniformément vers zéro. La deuxième intégrale de droite tend donc elle aussi vers zéro lorsque $\theta \to 1$, et (25) est établi, comme il le fallait.

Le théorème III peut être appliqué au problème des moments.

Théorème V. — *Étant donnée la suite de nombres réels s_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, supposons qu'il y ait une mesure positive μ telle que $s_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n d\mu(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Soit $\{\alpha_n\}$ une suite quelconque de nombres positifs telle que $\sum_0^\infty \alpha_n < \infty$.*

Alors, si ν est n'importe quelle mesure positive, le fait que $s_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n d\nu(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ entraîne l'égalité de $\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\, d\nu(x)$ et de $\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\, d\mu(x)$ pour toute fonction entière $F(z)$, de type exponentiel zéro, telle que

$$|F(x)| \leqq \sup_n \left(\frac{\alpha_n x^{2n}}{s_{2n}}\right), \qquad -\infty < x < \infty. \tag{26}$$

Démonstration. — Sans restreindre la généralité, on peut supposer que α_0, et un nombre infini des α_n, soient > 0. Posons $W(x) = \sum_0^\infty \alpha'_n \frac{x^{2n}}{s^{2n}}$, où $\{\alpha'_n\}$ est une suite de nombres positifs telle que $\sum_0^\infty \alpha'_n < \infty$ et $\frac{\alpha'_n}{\alpha_n} \to \infty$, $n \to \infty$.

Si $F(z)$ est une fonction entière, de type exponentiel zéro, satisfaisant en outre (26), on a $F \in \mathcal{C}_W(0+)$ par le théorème I (n° 1). Donc, par le théorème III, $F \in \mathcal{C}_W(0)$. Ainsi existe-t-il une suite de polynomes $P_n(x)$ tels que

$$|P_n(x) - F(x)| \leqq \frac{1}{n} W(x), \qquad -\infty < x < \infty. \tag{27}$$

Si les mesures μ et ν sont comme dans l'hypothèse, on aura

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_n(x)\, d\mu(x) = \int_{-\infty}^{\infty} P_n(x)\, d\nu(x),$$

d'où, en vertu de (27),

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\, d\mu(x) - \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\, d\nu(x) \right| \leqq \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} W(x)\, d(\mu+\nu)(x) = \frac{2}{n} \sum_0^\infty \alpha'_k \to 0,$$
$$n \to \infty.$$

REMARQUE. — Un résultat analogue au théorème III est valable pour l'approximation dans la norme

$$\|f\|_{W,p} = \left[\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{f(x)}{W(x)}\right|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}, \qquad 1 \leqq p < \infty.$$

Au cas ou $1 < p < \infty$, on peut en faire une démonstration, très facile par rapport à la nôtre, fondée sur la dualité des espaces L_p et L_q $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$, et sur le théorème de M. Riesz concernant la transformée de Hilbert. Pour $p=2$, le fait en question a été établi par Akhiezer [2].

3. **Premier contre-exemple.**

Dans ce numéro, nous allons construire un poids $W(x)$ tel que toutes les inclusions $\mathcal{C}_W(0) \subset \mathcal{C}_W(0+) \subset \mathcal{C}_W$ soient propres, mais qui ne s'écarte que peu d'un autre, satisfaisant à l'hypothèse du théorème III (nº 2).

LEMME. — *Soit* $\varphi(z) = \prod_{1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{4^n}\right)$. *Si* $x = 2^m\alpha$, $2^{-\frac{1}{2}} \leqq \alpha \leqq 2^{\frac{1}{2}}$, *$m$ étant un entier positif, on a*

$$\varphi(x) = C(m, \alpha)\,(-1)^{m-1}(1-\alpha^2)\,(2^m\alpha^2)^{m-1}\,\varphi(\alpha)\,\varphi\left(\frac{1}{\alpha}\right), \tag{28}$$

$$\varphi'(2^m) = C(m, 1)\,(-1)^m\,2^{(m-1)^2}\,(\varphi(1))^2, \tag{29}$$

où $C(m, \alpha) \to 1$ *uniformément pour* $2^{-\frac{1}{2}} \leqq \alpha \leqq 2^{\frac{1}{2}}$ *lorsque* $m \to \infty$.

DÉMONSTRATION :

$$\begin{aligned}\varphi(2^m\alpha) &= (1-\alpha^2)\prod_{1}^{m-1}\left(1 - \frac{4^m\alpha^2}{4^n}\right)\prod_{m+1}^{\infty}\left(1 - \frac{4^m\alpha^2}{4^n}\right)\\ &= (1-\alpha^2)\,(-1)^{m-1}\prod_{1}^{m-1}\left(\frac{4^m\alpha^2}{4^k}\right)\prod_{1}^{m-1}\left(1 - \frac{4^n\alpha^{-2}}{4^m}\right)\prod_{m+1}^{\infty}\left(1 - \frac{4^m\alpha^2}{4^n}\right)\\ &= (-1)^{m-1}(1-\alpha^2)\,(2^m\alpha^2)^{m-1}\,\varphi(\alpha)\,\varphi\left(\frac{1}{\alpha}\right)C(m, \alpha),\end{aligned}$$

où

$$C(m, \alpha) = \prod_{m}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{4^k\alpha^2}\right)^{-1},$$

ce qui démontre (28). On prouve (29) de la même façon.

THÉORÈME VI. — *Il existe un poids pair* $W(x)$ *tel que* $\frac{x^n}{W(x)} \to 0$, $x \to \pm\infty$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ *mais* $\mathcal{C}_W(0) \neq \mathcal{C}_W(0+) \neq \mathcal{C}_W$.

DÉMONSTRATION. — Soient $1 < \lambda_1 < 2$, $\lambda_{-1} = -\lambda_1$ et $\lambda_n = 2^{|n|} \operatorname{sgn} n$ pour $n = \pm 2, \pm 3, \ldots$.

Posons

$$\varphi(z) = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z^2}{4^n}\right), \tag{30}$$

$$C(z) = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right). \tag{31}$$

Il est

$$C'(\lambda_n) \sim \frac{4}{\lambda_1^2} \varphi'(2^{|n|} \operatorname{sgn} n), \qquad n \to \pm\infty, \tag{32}$$

d'où

$$\sum_n{}' \left| \frac{\lambda_n^K}{C'(\lambda_n)} \right| < \infty \qquad (K = 0, 1, 2, \ldots), \tag{33}$$

grâce à (29). (Ici, et dans ce qui suit, la prime sur le signe de sommation indique que la valeur $n = 0$ doit être *omise*.)

Les formules (31) et (33) entraînent, comme il est bien connu ([5], p. 829; [7], p. 65-67), que

$$\sum_n{}' \frac{\lambda_n^K}{C'(\lambda_n)} = 0 \qquad (K = 0, 1, 2, \ldots). \tag{34}$$

[Je dois à J. P. Kahane l'idée d'employer $C(z)$ et la propriété (34) dans la construction faite ici.]

Écrivons

$$F(z) = z\varphi(z).$$

La fonction $F(z)$ est entière, de type exponentiel zéro. Par le choix des λ_n, nous avons

$$\sum_n{}' \frac{F(\lambda_n)}{C'(\lambda_n)} = 2\frac{F(\lambda_1)}{C'(\lambda_1)} < 0. \tag{35}$$

Définissons maintenant une fonction $W(x)$ de la façon suivante :

$$W(x) = \varphi(1), \qquad |x| \leq 1, \tag{36}$$

$$W(x) = |x^2 \varphi(x)| \quad \text{si} \quad |x| > 1 \quad \text{et} \quad |x| \notin \bigcup_1^\infty [2^n - 2^{-3n}, 2^n + 2^{-3n}], \tag{37}$$

$$\begin{cases} W(x) = \sup\{|y^2 \varphi(y)|;\ 2^n - 2^{-3n} \leq y \leq 2^n + 2^{-3n}\} \\ \qquad \text{si} \quad 2^n - 2^{-3n} \leq |x| \leq 2^n + 2^{-3n}. \end{cases} \tag{38}$$

Il est alors clair que

$$\frac{F(x)}{W(x)} \to 0, \qquad x \to \pm\infty. \tag{39}$$

Je dis que

(40) $$W(x) \geqq \text{Cte} > 0, \qquad \frac{x^K}{W(x)} \to 0, \qquad x \to \pm\infty \qquad (K = 0, 1, 2, \ldots)$$

et que

(41) $$\sum_n{}' \left| \frac{W(\lambda_n)}{C'(\lambda_n)} \right| < \infty.$$

Les formules (38) et (28) donnent

(42) $$W(x) \equiv C_n(\varphi(1))^2\, 2^{n^2-3n+1}, \qquad 2^n - 2^{-3n} \leqq |x| \leqq 2^n + 2^{-3n},$$

où

$$C_n \to 1, \qquad n \to \infty.$$

Aussi, si $|x|$ est grand, et se trouve en dehors de tous les intervalles $[2^n - 2^{-3n},\ 2^n + 2^{-3n}]$, on a, selon (37) et (28),

(43) $$A\,|x|^{\left(\frac{\log|x|}{\log 2} - B\right)} \leqq W(x) \leqq A\,|x|^{\left(\frac{\log|x|}{\log 2} + B\right)},$$

A et B étant des constantes positives. Les évaluations (42) et (43) entraînent (40), et l'inégalité (41) est conséquence de (42), (32), et (29).

Comme la fonction $F(z)$ est entière, de type exponentiel zéro, $F \in \mathcal{C}_W(0+)$ grâce à (39) et le théorème I (n° 1). Cependant, $F \notin \mathcal{C}_W(0)$. En effet, soit μ la mesure, portée par la suite $\{\lambda_n,\ n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$, qui attribue à chaque point λ_n la masse $\frac{W(\lambda_n)}{C'(\lambda_n)}$. En vertu de (41), μ est finie. Par (34), $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^k}{W(x)}\, d\mu(x) = 0$, $K = 0, 1, 2, \ldots$. Or, $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(x)}{W(x)}\, d\mu(x) \neq 0$ selon (35), donc $F \notin \mathcal{C}_W(0)$. Cela montre que $\mathcal{C}_W(0) \neq \mathcal{C}_W(0+)$.

Les formules (42), (43) montrent que $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log W(x)}{1+x^2}\, dx < \infty$. Il en résulte que $\mathcal{C}_W(0+) \neq \mathcal{C}_W$, selon un lemme du n° 1.

Le théorème est démontré.

Remarque. — Posons $\Omega(x) = \prod_1^{\infty} \left(1 + \frac{x^2}{4^n}\right)$, $-\infty < x < \infty$. Le théorème III (n° 2) a alors pour conséquence, que $\mathcal{C}_\Omega(0) = \mathcal{C}_\Omega(0+)$. En raisonnant comme dans la démonstration du lemme, on voit que

$$\Omega(|2^n\alpha|) = D(n, \alpha)\,(1+\alpha^2)\,(2^n\alpha^2)^{n-1}\,\Omega(\alpha)\,\Omega\left(\frac{1}{\alpha}\right),$$

où $D(n, \alpha) \to 1$ uniformément pour $2^{-\frac{1}{2}} \leqq \alpha \leqq 2^{\frac{1}{2}}$ lorsque $n \to \infty$. En comparant ceci avec les formules (42), (43), on voit que le poids $W(x)$ construit ci-dessus satisfait, pour $|x| \geqq 1$, la condition

$$W(x) = |x|^{\psi(x)}\,\Omega(x),$$

$\psi(x)$ étant une fonction paire qui oscille entre deux constantes finies lorsque $x \to \pm\infty$. Cependant, $\mathcal{C}_W(0) \neq \mathcal{C}_W(0+)$, quoique $\mathcal{C}_\Omega(0) = \mathcal{C}_\Omega(0+)$.

4. Deuxième contre-exemple.

Dans ce numéro, nous mettons en évidence un poids $W(x)$ tel que $\mathcal{C}_W(0) \neq \mathcal{C}_W(0+) = \mathcal{C}_W$. Notre construction est fondée sur les propriétés élémentaires de la *mesure harmonique*, dont la théorie est exposée dans [11], chap. II.

LEMME. — *Soit* E *un ensemble fermé sur la droite, réunion dénombrable d'intervalles disjoints et fermés, jouissant, en outre, des propriétés suivantes :*

1° $[-1, 1] \subset E$, $E = -E$.

2° *A l'intérieur de chaque cercle de rayon fini,* E *ne possède qu'un nombre fini de composants connexes.*

3° *Il existe des* R *arbitrairement grands tels que* $[\sqrt{R}, R] \subset E$. *Sous ces conditions, il existe une fonction* $\rho(t)$, *définie sur* E, *telle que :*

(i) $\rho(t)$ *soit paire, et constante sur chaque composant connexe de* E;

(ii) $\rho(t)$ *croisse vers l'infini lorsque* $t > 0$ *croît vers l'infini en parcourant l'ensemble* E;

(iii) *on ait* $|P(i)| \leq K < \infty$ *pour chaque polynome* P *satisfaisant* $|P(t)| \leq (t^2 + 5)^{\rho(t)}$ *sur* E, K *étant indépendant de* P.

Démonstration. — Notons par $\mathcal{D}$ le complément de E dans le plan complexe. Montrons d'abord que, correspondant à chaque $z \in \mathcal{D}$ il existe une mesure positive ω_z sur E telle que

$$\int_E d\omega_z(t) \leq 1, \tag{44}$$

$$\int_E \log|t + \sqrt{t^2 - 1}|\, d\omega_z(t) < \infty, \tag{45}$$

$$\log|P(z)| \leq \int_E \log^+|P(t)|\, d\omega_z(t) \qquad \text{pour tout polynome P.} \tag{46}$$

Considérons, pour $R > 0$, le domaine $\mathcal{D}_R = \mathcal{D} \cap \{|z| < R\}$ ayant pour frontière l'ensemble $E_R = E \cap \{|z| < R\}$ et le cercle $\Gamma_R = \{|z| = R\}$. $\mathcal{D}_R$ est de connexité finie, et à chaque $z \in \mathcal{D}_R$ correspond une mesure harmonique ω_z^R portée par $E_R \cup \Gamma_R$. On étend la définition de ω_z^R à E en la mettant $\equiv 0$ sur $E \sim E_R$, et si $z \notin \mathcal{D}_R$ on entendra par ω_z^R la mesure qui est identiquement nulle. Les ω_z^R sont positives.

Le *principe du maximum* montre que pour chaque $z \in \mathcal{D}$, les mesures ω_z^R, restreintes à E, forment une famille monotone, croissante par rapport au paramètre R. Puisque $\int_E d\omega_z^R(t) < 1$ pour chaque R, à tout $z \in \mathcal{D}$ correspond une mesure positive ω_z, portée par E, telle que

(47) $$d\omega_z^R(t) \to d\omega_z(t) \text{ faiblement sur E pour } R \to \infty,$$

et que (44) soit satisfait.

Grâce à la propriété 1°, la fonction $H(z) = \log|z + \sqrt{z^2 - 1}|$ (détermination positive de la racine carrée) est *harmonique* et *positive* dans $\mathcal{D}$, et continue jusqu'à sa frontière. Donc, si $z \in \mathcal{D}$ et $|z| < S \leq R$,

$$H(z) = \int_{E_R \cup \Gamma_R} H(\zeta)\, d\omega_z^R(\zeta) \geq \int_{E_S} H(t)\, d\omega_z^R(t).$$

Si l'on tient S fixe, et fait tendre R vers l'infini, ceci, joint à (47), donne $\int_{E_S} H(t)\, d\omega_z(t) \leq H(z)$, d'où (45) s'obtient en faisant $S \to \infty$.

Reste à établir (46). Si $P(z)$ est un polynome, l'expression $\log(|P(z)|^2 + \varepsilon^2)$ est *sous-harmonique* dans $\mathcal{D}_R$ et *continue* jusqu'à sa frontière, pourvu que $\varepsilon > 0$. Donc, si $z \in \mathcal{D}_R$, et $\varepsilon > 0$,

(48) $$\log(|P(z)|^2 + \varepsilon^2) \leq \int_{E_R \cup \Gamma_R} \log(|P(\zeta)|^2 + \varepsilon^2)\, d\omega_z^R(\zeta).$$

Lorsque ε tend vers zéro en décroissant, les fonctions $\log(|P(\zeta)|^2 + \varepsilon^2)$ forment une famille décroissante, bornée au-dessus sur l'ensemble $E_R \cup \Gamma_R$. On peut donc appliquer le théorème de Lebesgue à l'intégrale de droite dans (48), et l'on trouve à la limite $\varepsilon = 0$,

(49) $$\log|P(z)| \leq \int_{E_R \cup \Gamma_R} \log|P(\zeta)|\, d\omega_z^R(\zeta).$$

Vu que la famille des mesures ω_z^R est croissante sur E par rapport au paramètre R, on a par (49) et (47),

$$\log|P(z)| \leq \int_E \log^+|P(t)|\, d\omega_z(t) + \int_{\Gamma_R} \log|P(\zeta)|\, d\omega_z^R(\zeta).$$

Or, P est un polynome. La formule (46) sera donc prouvée dès qu'on montrera que, si $R \to \infty$ en parcourant une certaine suite de valeurs, la quantité $\omega_z^R(\Gamma_R) \log R$ tend vers zéro pour chaque z fixe $\in \mathcal{D}$.

Selon la propriété 3°, il existe des R arbitrairement grands tels que

$$[-R, -\sqrt{R}] \cup [\sqrt{R}, R] \subset E_R.$$

Prenons un tel R, et notons par $H_R(z)$ la fonction, harmonique dans le domaine obtenu en enlevant du cercle $\{|z| < R\}$ les intervalles

$(-\mathrm{R}, -\sqrt{\mathrm{R}}]$, $[\sqrt{\mathrm{R}}, \mathrm{R})$, qui vaut 1 sur Γ_{R} et 0 sur ces deux intervalles. Si $z \in \mathcal{D}_{\mathrm{R}}$, on a, par le principe du maximum,

$$\omega_z^{\mathrm{R}}(\Gamma_{\mathrm{R}}) \leqq \mathrm{H}_{\mathrm{R}}(z). \tag{50}$$

On va estimer $\mathrm{H}_{\mathrm{R}}(z)$. La chaîne des transformations

$$z \to \frac{z}{\mathrm{R}} = \zeta \to \frac{1+\zeta}{1-\zeta} = \omega \to \omega^2 = w \to \frac{4}{\sqrt{\mathrm{R}}(w-1)} = \sigma$$

engendre une application conforme $z \to \sigma$ du domaine de définition de $\mathrm{H}_{\mathrm{R}}(z)$ sur l'extérieur du segment $\left[-\left(1+\frac{1}{\sqrt{\mathrm{R}}}\right)^2, \left(1-\frac{1}{\sqrt{\mathrm{R}}}\right)^2\right]\cdot$ Cette application conforme fait correspondre au point $z=0$ le point $\sigma = \infty$, et à Γ_{R} le sous-segment $\left[-\frac{4}{\sqrt{\mathrm{R}}}, 0\right]$ de la frontière du domaine des σ. Si z est fixe, et $\sqrt{\mathrm{R}}$ est très grand par rapport à $|z|$, on peut donc dire que $\mathrm{H}_{\mathrm{R}}(z) \leqq \mathrm{Cte}\,\mathrm{R}^{-\frac{1}{2}}$ avec une constante indépendante de R. Si l'on donne maintenant des valeurs arbitrairement grandes à R, mais de façon que la condition 3° soit toujours remplie, on voit, que pour z fixe $\in \mathcal{D}$, on peut rendre $\mathrm{H}_{\mathrm{R}}(z)\log \mathrm{R}$ aussi petit qu'on veut. Ce fait, joint à (50), établit (46).

Une fois vérifiées les propriétés (44), (45), et (46), la démonstration s'achève rapidement. De (44) et (45) vient l'existence d'une fonction $\rho(t)$ ayant les propriétés (i) et (ii), et telle que

$$\int_{\mathrm{E}} \rho(t) \log(t^2+5)\, d\omega_i(t) < \infty. \tag{51}$$

La propriété (iii) est alors conséquence de (51) et (46).

Lemme. — *Il existe une fonction continue et paire,* $\mathrm{F}(x) \geqq 1$ $(-\infty < x < \infty)$, *jouissant des propriétés suivantes :*

1° $\mathrm{F}(x) \leqq 5$ *pour tout* x *appartenant à un certain ensemble* E *satisfaisant l'hypothèse du lemme précédent;*

2° *étant donné* $\delta > 0$, *on peut trouver une suite de fonctions entières* $\varphi_n(z)$, *de type exponentiel* δ, *bornées sur l'axe réel, telle que* $|\varphi_n(x)| \leqq \mathrm{F}(x)$, $-\infty < x < \infty$, *tandis que*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log|\varphi_n(x)|}{1+x^2}\, dx \to \infty, \qquad n \to \infty.$$

Démonstration. — Pour chaque $\mathrm{A} \geqq 10$, posons

$$f_{\mathrm{A}}(z) = \prod_{\frac{a}{\sqrt{2}} \leqq n \leqq \mathrm{A}} \; \prod_{n \geqq e^{\mathrm{A}}} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right). \tag{52}$$

La fonction entière $f_A(z)$ est égale à $\sin \pi z$ divisé par un polynome; elle est donc de type exponentiel π, et bornée sur l'axe réel.

On a les inégalités suivantes :

(53) $$|f_A(x)| \leqq 1, \qquad |x| \leqq A,$$

(54) $$|f_A(x)| \geqq \left(1 - O\left(e^{-\frac{A}{3}}\right)\right) e^{\frac{A}{4}}, \qquad \sqrt{e+1}\,A \leqq |x| \leqq e^{\frac{A}{3}},$$

(55) $$|f_A(x)| \leqq 1, \qquad |x| \geqq \sqrt{2}\, e^A,$$

(56) $$|f_A(x)| \leqq \exp(-2^A), \qquad |x| \geqq \sqrt{e+1}\, e^A,$$

En effet, (53) est évident, (54) résulte de

$$\prod_{\frac{A}{\sqrt{2}} \leqq n \leqq A} \left(\frac{x^2}{n^2} - 1\right) \geqq e^{\frac{A}{4}}, \qquad |x| \geqq \sqrt{e+1}\, A$$

joint à

$$\log\left[\prod_{n \geqq e^A} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)\right] = -O(1)\, x^2 \sum_{n \geqq e^A} n^{-2} \geqq -O\left(e^{-\frac{A}{3}}\right), \qquad |x| \leqq e^{\frac{A}{3}};$$

et (55), (56) s'obtiennent au moyen de l'identité

$$f_A(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x \displaystyle\prod_{1 \leqq n < \frac{A}{\sqrt{2}}} \prod_{A < n < e^A} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)}.$$

On prend maintenant une suite $\{A_n\}$ tendant très rapidement vers l'infini, l'ajustement exact de sa vitesse de croissance étant remis à plus tard. On exige toutefois, dès le début, que

(57) $$\frac{1\,000\, A_n^3}{n^2} < n\, e^{\frac{A_n}{n}} < e^{A_n},$$

et que

(58) $$A_{n+1} > e^{3 A_n}.$$

Posons $\alpha_n = \dfrac{\pi}{4 A_n}$. Si $\{A_n\}$ croît assez vite, on a

(59) $$1 - \left(\frac{\sin \alpha_n x}{\alpha_n x}\right)^2 \geqq \frac{1}{2}, \qquad |x| \geqq A_n,$$

(60) $$\sum_n^{\infty} \left(1 - \left(\frac{\sin \alpha_k x}{\alpha_k x}\right)^2\right) \leqq 2, \qquad |x| \leqq A_n.$$

De ces inégalités, (59) est manifeste; quant à (60), on a, par la formule de Taylor-Lagrange,

$$1 - \left(\frac{\sin \alpha_k x}{\alpha_k x}\right)^2 \leqq \mathrm{Cte}\, (\alpha_k x)^2,$$

donc, si $|x| \leqq A_n$, la somme dans (60) est majorée par

$$1 + \mathrm{Cte}\, A_n^2 \sum_{n+1}^{\infty} A_k^{-2} \leqq 1 + 2\, \mathrm{Cte}\, A_n^2\, A_{n+1}^{-2} \leqq 2,$$

si $\{A_n\}$ est assez rapidement croissante.

On va prendre

$$F(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{\sin \alpha_n x}{\alpha_n x}\right)^2\right) \left\{ f_{\frac{A_n}{n}}\left(\frac{x}{n}\right) \right\}. \tag{61}$$

Si $A_n \leqq |x| \leqq A_{n+1}$ on a, par (56) et (57),

$$\left| f_{\frac{A_k}{k}}\left(\frac{x}{k}\right) \right| \leqq \exp\left(-2^{\frac{A_k}{k}}\right), \qquad k < n; \tag{62}$$

et par (53),

$$\left| f_{\frac{A_k}{k}}\left(\frac{x}{k}\right) \right| \leqq 1, \qquad k \geqq n+1. \tag{63}$$

Nous prenons les A_n assez rapidement croissants pour que

$$\sum_{1}^{\infty} \exp\left(-2^{\frac{A_k}{k}}\right) \leqq 1.$$

Alors, de (59), (60, (61), (62) et (63) il vient

$$1 + \frac{1}{2}\left(f_{\frac{A_n}{n}}\left(\frac{x}{n}\right)\right)^2 \leqq F(x) \leqq 4 + \left(f_{\frac{A_n}{n}}\left(\frac{x}{n}\right)\right)^2, \qquad A_n \leqq |x| \leqq A_{n+1}. \tag{64}$$

On voit de même que

$$F(x) \leqq 3, \qquad |x| \leqq A_1. \tag{65}$$

Soit

$$E = [-A_1, A_1] \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} [-A_{n+1}, -\sqrt{2}\, e^{A_n}] \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} [\sqrt{2}\, e^{A_n}, A_{n+1}]. \tag{66}$$

Vu la condition (58), E satisfait à l'hypothèse du lemme précédent. Mais aussi $F(x) \leqq 5$, $x \in E$, en vertu de (64) et de (55) joint à (57). La propriété 1° de $F(x)$ est donc vérifiée.

Venons-en à la propriété 2°. Soit $\delta > 0$, et prenons N assez grand pour que

$$2\alpha_n + \frac{2\pi}{n} \leqq \delta, \qquad n \geqq N.$$

Alors, si $l \geqq N$, chacune des fonctions

$$\varphi_l(z) = 1 + \sum_{n=N}^{l} \left(1 - \left(\frac{\sin \alpha_n z}{\alpha_n z}\right)^2\right) \left(f_{\frac{A_n}{n}}\left(\frac{z}{n}\right)\right)^2$$

est entière, de type exponentiel δ, et bornée sur l'axe réel. Il est clair que $1 \leqq \varphi_l(x) \leqq F(x)$ pour $-\infty < x < \infty$. Or, on a par (59),

$$\varphi_l(x) \geqq 1 + \frac{1}{2}\left(f_{\frac{A_n}{n}}\left(\frac{x}{n}\right)\right)^2, \qquad |x| \geqq A_n, \qquad N \leqq n \leqq l. \tag{67}$$

Et pour $\sqrt{e+1}\,A_n \leqq |x| \leqq 10\,A_n$, le membre de droite dans (67) vaut au moins $\exp\left(\frac{A_n}{5n}\right)$, selon (54) et (57). Donc, si $N \leqq n \leqq l$,

$$\int_{A_n}^{A_{n+1}} \frac{\log \varphi_l(x)}{x^2}\,dx \geqq \frac{C}{n},$$

C étant une constante numérique. De là tire-t-on enfin

$$\int_1^{\infty} \frac{\log \varphi_l(x)}{x^2}\,dx \geqq C \log \frac{l}{N} \to \infty, \qquad l \to \infty.$$

Cela démontre la propriété 2°.

Théorème VII. — *Il existe un poids pair* $W(x)$ *tel que* $\frac{x^n}{W(x)} \to 0$, $x \to \pm\infty$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ *et tel que* $\mathcal{C}_W(0) \neq \mathcal{C}_W(0+) = \mathcal{C}_W$.

Démonstration. — Soit $F(x)$ la fonction définie par la formule (61), et soit E l'ensemble donné par (66). Soit $\rho(t)$ la fonction associée à l'ensemble E, dont l'existence est garantie par le premier lemme de ce numéro. On étend la définition de $\rho(t)$ à toute la droite réelle par interpolation linéaire sur les intervalles contigus de E. Ainsi obtient-on une fonction $\rho(x) \geqq 1$, paire, et croissante vers l'infini sur la demi-droite positive.

Posons

$$W(x) = \max\left(F(x),\ (x^2+5)^{\rho(x)}\right) \tag{68}$$

Puisque $W(x) \geqq (x^2+5)^{\rho(x)}$, $W(x) \geqq 1$ et

$$\frac{x^n}{W(x)} \to 0, \qquad x \to \pm\infty, \qquad \text{pour } n = 0, 1, 2, \ldots \tag{69}$$

Je dis que $\mathcal{C}_W(0) \neq \mathcal{C}_W$. En effet, puisque $F(x) \leqq 5$, $x \in E$,

$$W(x) = (x^2+5)^{\rho(x)} \quad \text{sur E.}$$

Donc, selon le premier lemme de ce numéro, il existe une constante $K < \infty$ telle que $|P(i)| \leqq K$ pour chaque polynome P satisfaisant $|P(x)| \leqq W(x)$, $-\infty < x < \infty$. Le poids $W(x)$ étant continu, cela entraîne $\mathcal{C}_W(0) \neq \mathcal{C}_W$, grâce à un théorème bien connu d'Akhiezer ([13]).

Cependant, $\mathcal{C}_W(0+) = \mathcal{C}_W$. Ceci sera établi dès qu'on montrera que $\mathcal{C}_W(\delta+) = \mathcal{C}_W$ pour chaque $\delta > 0$. Si $\delta > 0$ est donné on peut, par le lemme précédent, trouver une suite de fonctions entières $\varphi_n(z)$, de type exponentiel δ, bornées sur l'axe réel, telle que

$$|\varphi_n(x)| \leqq F(x), \qquad -\infty < x < \infty, \tag{70}$$

tandis que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log|\varphi_n(x)|}{1+x^2} dx \to \infty, \qquad n \to \infty. \tag{71}$$

De (69) et du fait que chaque φ_n est bornée sur l'axe réel, vient $\varphi_n \in \mathcal{C}_W$, $n = 1, 2, \ldots$. De (70) et (68) on a

$$\|\varphi_n\|_W \leqq 1 \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{72}$$

Or, selon un théorème d'Akhiezer ([1]), l'existence d'une suite de fonctions entières $\varphi_n \in \mathcal{C}_W$, de type exponentiel δ, telle que (71) et (72) aient lieu simultanément, implique que les fonctions entières de type exponentiel δ appartenant à $\mathcal{C}_W$ y sont *denses*. Toutes ces fonctions-là sont dans $\mathcal{C}_W(\delta +)$, par le théorème I (nº 1). Donc $\mathcal{C}_W(\delta +)$ est dense dans $\mathcal{C}_W$, c'est-à-dire, $\mathcal{C}_W(\delta +) = \mathcal{C}_W$, comme il nous fallait.

Remarque. — En raffinant certains détails de la construction ci-dessus, on peut obtenir un poids $W(x)$ *croissant* sur $(0, \infty)$, tel que $\mathcal{C}_W(0) \neq \mathcal{C}_W(0+) = \mathcal{C}_W$. Comme cela mène à des calculs plus longs, bien qu'étant les mêmes en principe, on ne le fera pas ici.

Note. — Lorsque je terminais la première rédaction de cet article, j'ai reçu dans mon courrier le fascicule courant du *Bulletin of the American Mathematical Society*. Là se trouve une Note de Levinson et McKean ([8]) où sont énoncés, sans indication des démonstrations, des résultats analogues à certains exposés ici, mais ayant trait à l'approximation pondérée en norme quadratique.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] N. I. Akhiezer, *O slabo vesovykh founktsiakh* (*Doklady A. N.*, t. 93, nº 6, 1953, p. 949-952).

[2] N. I. Akhiezer, *Ob odnom obobchtchenii preobrazovania Fourie i teoremy Viner-Palei* (*Doklady A. N.*, t. 94, nº 5, 1954, p. 889-892).

[3] N. I. Akhiezer, *O vzvechonnom priblizhenii niepreryvnykh founktsii mnogotchlenami na vsei tchislovoi osi* [*Ouspekhi Mat. Naouk*, t. 11, fasc. 4 (70) 1956, p. 3-43].

[4] E. J. Akutowicz, *Sur l'approximation par certaines fonctions entières* (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, t. 77, 1960, p. 281-301).

[5] Louis de Branges, *The Bernstein Problem* (*Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 10, nº 5, 1959, p. 825-832).

[6] T. Hall, *Sur l'approximation polynomiale des fonctions continues d'une variable* (*IX^e Congrès des Mathématiciens scandinaves*, 1939).

[7] J.-P. KAHANE, *Sur quelques problèmes d'unicité et de prolongement relatifs aux fonctions approchables par des sommes d'exponentielles* (*Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 5, 1953-1954, p. 39-130).

[8] N. LEVINSON, et H. P. MC KEAN, *Weighted Trigonometric Approximation on* R^1 *with Application to the Germ Field of a Stationary Gaussian Process* (*Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 70, n° 1, 1964, p. 128-129).

[9] S. MANDELBROJT, *Analytic Functions and Classes of Infinitely Differentiable Functions* [*Rice Inst. Pamphlet*, vol. 29, n° 1, 1942 (Houston)].

[10] S. N. MÉRGUÉLIANE, *Vesovye priblizhenia mnogotchlenami* [*Ouspekhi Mat. Naouk*, t. 11, fasc. 5 (71), 1956, p. 107-152]. (Une traduction anglaise de cet article a paru dans la série *Translations of the American Mathematical Society*.)

[11] R. NEVANLINNA, *Eindeutige analytische Funktionen*, 2e éd., Springer, Berlin, 1953.