

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ANDRÉ LICHNEROWICZ

## **Opérateurs différentiels invariants sur un espace homogène**

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3<sup>e</sup> série*, tome 81, n° 4 (1964), p. 341-385

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1964\\_3\\_81\\_4\\_341\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1964_3_81_4_341_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS INVARIANTS SUR UN ESPACE HOMOGENÈME

PAR M. ANDRÉ LICHNEROWICZ.

Ce travail est consacré à l'étude de l'algèbre  $\mathcal{O}(G/H)$  des opérateurs différentiels invariants sur un espace homogène  $G/H$  *admettant une connexion linéaire invariante*, ainsi qu'aux cas particuliers où l'espace homogène est, soit réductif, soit symétrique.

Dans le cas où l'espace envisagé est un groupe de Lie, Harish-Chandra a donné une étude désormais classique des opérateurs invariants et l'on doit à Helgason une étude du même problème dans le cas où l'espace homogène admet une structure réductive (Helgason [3]). C'est le point de vue de Helgason qui est développé ici, combiné avec un point de vue différent faisant intervenir une représentation des opérateurs au moyen de tenseurs symétriques invariants (§ 10 et chap. IV).

Dans le chapitre I, on se propose de rappeler la définition et les propriétés essentielles des opérateurs différentiels sur une variété d'une part, des espaces homogènes d'autre part. Le chapitre II est relatif à l'étude de l'algèbre  $\mathcal{O}(G/H)$  pour un espace homogène  $G/H$  *admettant une connexion linéaire invariante*. On définit un isomorphisme  $\Theta$  entre l'espace vectoriel  $\mathcal{O}(G/H)$  et l'espace vectoriel  $I(C)$  des polynômes sur l'espace tangent  $C$  invariants par le groupe linéaire d'isotropie. La représentation tensorielle (§ 10) des éléments de  $\mathcal{O}(G/H)$  permet de mettre en évidence une propriété multiplicative de  $\Theta$ . Il en résulte que si  $I(C)$  admet un système fini de générateurs, il en est de même pour  $\mathcal{O}(G/H)$  (en tant qu'algèbres). Dans une seconde partie de ce chapitre, le cas où l'espace envisagé est un groupe de Lie est traité, et l'on retrouve les principaux résultats de Harish-Chandra dans une optique voisine de celle de Helgason.

Le chapitre III est consacré au cas des *espaces homogènes réductifs* (au sens de Nomizu [5]). Le point de vue adopté diffère un peu de celui

de Helgason et permet de simplifier notablement les démonstrations de certains résultats fondamentaux de cet auteur. On notera que si  $H$  connexe est réductif dans  $G$ , l'algèbre  $\mathcal{O}(G/H)$  admet un système fini de générateurs.

Quant au dernier chapitre, il étudie le cas des *espaces homogènes symétriques admettant un élément de volume invariant*. L'algèbre  $\mathcal{O}(G/H)$  est, dans ce cas, *commutative*, ce qui n'était connu que pour les espaces *riemanniens* symétriques (Harish-Chandra, Selberg). La démonstration s'inspire — en la modifiant assez profondément — de celle donnée, pour  $H$  compact, par Selberg [6].

Ce théorème a fait l'objet d'une Note aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* [4, b].

## CHAPITRE I.

### GÉNÉRALITÉS SUR LES OPÉRATEURS.

#### I. — Opérateurs différentiels sur une variété différentiable.

1. L'ALGÈBRE DES FONCTIONS INDÉFINIMENT DIFFÉRENTIABLES. —  
 a. Soit  $V_n$  une variété différentiable connexe à base dénombrable, de dimension  $n$  et classe  $C^\infty$ . Si  $x$  est un point de  $V_n$ , l'espace vectoriel tangent en  $x$  à  $V_n$  sera désigné par  $T_x$ . L'ensemble des fonctions  $f$  définies sur  $V_n$ , à valeurs réelles et de classe  $C^\infty$ , constitue une algèbre  $C^\infty(V_n)$  sur le corps des réels. Les fonctions de  $C^\infty(V_n)$  à *support compact* forment une sous-algèbre  $C_c^\infty(V_n)$ . Dans la suite, « différentiel » sera entendu au sens de « différentiel de classe  $C^\infty$  ».

Si l'application

$$\varphi : x \rightarrow (x^\alpha) \in \mathbb{R}^n \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n)$$

définit un système de coordonnées locales valable sur un ouvert connexe  $U$  de  $V_n$ , nous désignons par  $\hat{f}$  [pour  $f \in C^\infty(V_n)$ ] la fonction composée  $f|U \circ \varphi^{-1}$  définie sur  $\varphi(U)$ ;  $\hat{f}$  est donc la restriction à  $U$  de la fonction  $f$  exprimée en coordonnées locales. Nous désignons par  $\partial_\alpha$  l'opérateur de dérivation partielle défini par

$$\partial_\alpha \hat{f} = \frac{\partial \hat{f}}{\partial x^\alpha}.$$

Si  $p = \{p_1, \dots, p_n\}$  est une suite de  $n$  entiers positifs ou nuls, nous posons

$$\partial^p = (\partial_1)^{p_1} (\partial_2)^{p_2} \dots (\partial_n)^{p_n}$$

de telle sorte que

$$(1.1) \quad \partial^p \hat{f} = \frac{\partial^{p_1 + \dots + p_n} \hat{f}}{(\partial x^1)^{p_1} \dots (\partial x^n)^{p_n}}.$$

Par définition,  $p = 0$  si  $p_1 = \dots = p_n = 0$  et

$$(1.2) \quad |p| = p_1 + \dots + p_n$$

si bien que la dérivée (1.1) est d'ordre  $|p|$ .

b. Soit  $V$  un sous-ensemble ouvert de  $U$  dont l'adhérence  $\bar{V}$  est compacte et contenue dans  $U$ . Nous appelons  $C_c^z(U)$ ,  $C_c^z(\bar{V})$ ,  $C_c^z(V)$  les sous-algèbres de  $C_c^z(V_n)$  définies par les fonctions à supports compacts contenus respectivement dans  $U$ ,  $\bar{V}$  ou  $V$ .

L'algèbre  $C_c^z(\bar{V})$  admet classiquement une structure d'espace topologique dont nous allons rappeler la définition. Les fonctions  $f$  de  $C_c^z(\bar{V})$  correspondent aux fonctions  $\hat{f}$  indéfiniment différentiables dont le support compact est dans  $\varphi(\bar{V})$ . Ces fonctions  $\hat{f}$  définissent une algèbre notée  $C_c^z(\varphi(\bar{V}))$ .

Soit  $\mathfrak{V}(m, \varepsilon, \bar{V})$  l'ensemble de toutes les fonctions  $\hat{f} \in C_c^z(\varphi(\bar{V}))$  telles que toutes les dérivées  $\partial^p \hat{f}$  d'ordre  $|p| \leq m$  soient bornées en valeur absolue par  $\varepsilon$ . Cela signifie que pour que  $\hat{f} \in \mathfrak{V}(m, \varepsilon, \bar{V})$ , il faut et il suffit que

$$[\partial^p \hat{f}](x^z) < \varepsilon$$

quels que soient  $p$  tels que  $|p| \leq m$  et  $(x^z) \in \varphi(\bar{V})$ . Les  $\mathfrak{V}$  définissent un système fondamental de voisinages de la fonction 0 dans  $C_c^z(\varphi(\bar{V}))$  qui se trouve ainsi doué d'une structure d'espace topologique à base dénombrable, complet.

Soit  $\mathfrak{R}\mathfrak{V}(m, \varepsilon, \bar{V})$  l'ensemble des fonctions  $f \in C_c^z(\bar{V})$  telles que la fonction  $\hat{f}$  correspondante appartienne à  $\mathfrak{V}(m, \varepsilon, \bar{V})$ . Les  $\mathfrak{R}\mathfrak{V}(m, \varepsilon, \bar{V})$  définissent sur  $C_c^z(\bar{V})$  une structure d'espace topologique image de celle introduite sur  $C_c^z(\varphi(\bar{V}))$ . Si  $\{f_\nu\}$  est une suite de fonctions appartenant à  $C_c^z(\bar{V})$ , dire que cette suite converge vers zéro dans  $C_c^z(\bar{V})$ , c'est-à-dire que, quels que soient  $m, \varepsilon$ , les  $f_\nu$  finissent par appartenir à  $\mathfrak{R}\mathfrak{V}(m, \varepsilon, \bar{V})$ .

Si  $K$  est un compact quelconque de  $V_n$ , on peut munir l'espace  $C_c^z(K)$  des fonctions à support compact dans  $K$  d'une structure topologique jouissant des mêmes propriétés que la précédente, à partir d'un recouvrement de  $K$  par des  $\bar{V}$ . Lorsque  $K$  varie, les espaces topologiques  $C_c^z(K)$  ont pour réunion  $C_c^z(V_n)$ ; la suite  $\{f_\nu\}$  [où  $f_\nu \in C_c^z(V_n)$ ] converge vers zéro dans l'espace pseudo-topologique  $C_c^z(V_n)$  si elles appartiennent à partir d'un certain rang, à un même  $C_c^z(K)$  et si ces  $f_\nu$  convergent vers zéro dans celui-ci.

2. OPÉRATEURS SUR  $V_n$ . — a. Nous appelons *opérateur*  $A$  sur la variété différentiable  $V_n$ , un endomorphisme de  $C_c^z(V_n)$  pour sa structure d'espace

vectoriel, c'est-à-dire une application linéaire de  $C_c^z(V_n)$  dans elle-même. Si  $f \in C_c^z(V_n)$ , nous notons  $[Af](x)$  la valeur de la fonction  $Af$  au point  $x$  de  $V_n$ . Il est clair que les opérateurs sur  $V_n$  forment une *algèbre associative unitaire* (c'est-à-dire admettant un élément unité) sur le corps des réels.

b. Une *transformation*  $\mu$  de  $V_n$  — ou difféomorphisme — est un homéomorphisme de  $V_n$  sur elle-même tel que  $\mu$  et  $\bar{\mu}^{-1}$  soient des applications différentiables. L'application linéaire  $\mu'_x$  tangente en  $x$  applique linéairement  $T_x$  sur  $T_{\mu(x)}$ . Nous désignons par  $\mu^*f$  la fonction composée  $f \circ \mu$ .

A tout opérateur  $A$  correspond par la transformation  $\mu$  un opérateur  $A^\mu$  défini par

$$A^\mu : f \in C^z(V_n) \rightarrow \bar{\mu}^{1*} A \mu^* f \in C^z(V_n);$$

$A$  est dit *invariant par la transformation*  $\mu$  si

$$A^\mu = A,$$

c'est-à-dire si

$$(2.1) \quad \mu^* A = A \mu^*.$$

Ainsi, pour que  $A$  soit invariant par  $\mu$ , il faut et il suffit qu'il soit *permutable* avec  $\mu^*$ .

c. Un endomorphisme  $A$  de  $C^z(V_n)$  [resp.  $C_c^z(V_n)$ ] est dit de *caractère local* si lorsque la restriction  $f/U$  de  $f \in C_c^z(V_n)$  [resp.  $C_c^z(V_n)$ ] à un ouvert  $U$  est nulle, il en est de même pour la restriction  $Af/U$  de  $Af$  à  $U$ . Si l'on désigne par la notation  $S(f)$  le support d'une fonction  $f$ , le caractère local de  $A$  peut encore s'exprimer par

$$(2.2) \quad S(Af) \subset S(f).$$

On a :

**THÉORÈME.** — 1° La restriction à  $C_c^z(V_n)$  de tout opérateur de caractère local définit un endomorphisme de caractère local de  $C_c^z(V_n)$ .

2° Tout endomorphisme de caractère local de  $C_c^z(V_n)$  admet une extension unique comme endomorphisme de caractère local de  $C_c^z(V_n)$ . L'opérateur ainsi obtenu est dit défini par l'endomorphisme donné de  $C_c^z(V_n)$ .

1° Si  $f$  est à support compact et si  $A$  est l'opérateur envisagé, il résulte immédiatement de (2.2) que  $S(Af)$  est compact, ce qui démontre le 1°.

Si  $f \in C_c^z(V_n)$  et si  $x \in U$  ( $U$  ouvert), il résulte du caractère local que  $[Af](x)$  ne dépend que de la restriction de  $f$  à  $U$ . Par suite, si  $\alpha$  est une fonction de  $C_c^z(V_n)$  égale à 1 dans un voisinage compact de  $x$ ,

$$[Af](x) = [A(\alpha f)](x) = [B(\alpha f)](x),$$

où  $B$  est la restriction de  $A$  à  $C_c^\infty(V_n)$ . On voit ainsi que  $A$  est entièrement déterminé par sa restriction à  $C_c^\infty(V_n)$  et que l'unicité énoncée au 2<sup>o</sup> est évidente.

2<sup>o</sup> Soit  $B$  un endomorphisme de caractère local de  $C_c^\infty(V_n)$ . Si  $\alpha$  est une fonction de  $C_c^\infty(V_n)$  égale à 1 dans un voisinage compact de  $x$ , considérons pour  $f \in C_c^\infty(V_n)$  le réel

$$[B(\alpha f)](x).$$

Ce nombre est indépendant du choix de  $\alpha$  : si  $\beta$  est une autre fonction jouissant des mêmes propriétés

$$[B(\alpha f)](x) - [B(\beta f)](x) = [B(\alpha - \beta)f](x) = 0,$$

puisque la fonction  $(\alpha - \beta)f$  est nulle sur un ouvert contenant  $x$ . Nous pouvons donc définir un endomorphisme  $A$  de  $C_c^\infty(V_n)$ , extension de  $B$ , par

$$[Af](x) = [B(\alpha f)](x).$$

Il est clair que (2.2) est vérifiée et que, par suite,  $A$  présente le caractère local, ce qui démontre le théorème.

### 3. NOTION D'OPÉRATEUR DIFFÉRENTIEL.

*a. DÉFINITION.* — On appelle opérateur différentiel sur une variété différentiable  $V_n$  un opérateur de caractère local défini par un endomorphisme de caractère local de  $C_c^\infty(V_n)$  continu au sens du paragraphe 1, b. Les opérateurs différentiels de  $V_n$  forment une algèbre associative unitaire sur le corps des réels.

Soit  $D$  un opérateur différentiel de  $V_n$ . Sa restriction à  $C_c^\infty(V_n)$  — notée encore  $D$  — est, par définition, un endomorphisme continu de caractère local. Il est clair que, pour tout  $\bar{V}$  (notations du paragraphe 1, b),  $D$  induit un endomorphisme continu de  $C_c^\infty(\bar{V})$  : si  $S(f) \in \bar{V}$ , il résulte du caractère local que  $S(Df) \in \bar{V}$ . L'endomorphisme envisagé étant continu, a en particulier la propriété suivante (propriété P) : à tout  $\varepsilon > 0$  correspond un entier  $m$  et un  $\eta > 0$  tels que

$$f \in \mathcal{R}^\omega(m, \eta, \bar{V})$$

entraîne

$$\max_{x \in \bar{V}} |[Df](x)| < \varepsilon.$$

*b.* Cela posé, soit  $x$  un point déterminé de  $V$ . A toute fonction  $\hat{f} \in C_c^\infty(\varphi(V))$  — c'est-à-dire à support compact contenu dans  $\varphi(V)$  — correspond une fonction  $f \in C_c^\infty(V)$ . Introduisons la forme linéaire  $\hat{T}$  sur  $C_c^\infty(\varphi(V))$  définie par

$$(3.1) \quad \hat{f} \in C_c^\infty(\varphi(V)) \rightarrow \langle \hat{T}, \hat{f} \rangle = [Df](x).$$

De la propriété P, il résulte que cette forme linéaire est continue. Nous définissons ainsi sur  $\varphi(V)$  une distribution  $\hat{T}$  qui, d'après le caractère local de D, admet pour support le point  $\varphi(x) = (x^\alpha)$ .

D'après le théorème de Schwartz sur les distributions à support ponctuel, il existe un entier N et des réels  $C_p$  tels que

$$\hat{T} = \sum_{|p| \leq N} C_p d^p \delta_{(x^\alpha)},$$

où  $\delta_{(x^\alpha)}$  désigne la mesure de Dirac correspondant à la masse 1 en  $(x^\alpha)$ . Il en résulte

$$\langle \hat{T}, \hat{f} \rangle = \sum_{|p| \leq N} C_p \langle d^p \delta_{(x^\alpha)}, \hat{f} \rangle.$$

Soit

$$\langle \hat{T}, \hat{f} \rangle = \sum_{|p| \leq N} (-1)^{|p|} C_p \langle \delta_{(x^\alpha)}, d^p \hat{f} \rangle.$$

De (3.1) on déduit ainsi qu'il existe sur V des fonctions  $b_p(x)$  telles que pour  $x \in V$  et  $f \in C_c^\infty(V)$ , on ait

$$(3.2) \quad [Df](x) = \sum_{|p| \leq N} b_p(x) [d^p \hat{f}](x^\alpha).$$

c. Soit U le voisinage ouvert connexe sur lequel  $\varphi: x \rightarrow (x^\alpha)$  définit un système de coordonnées locales; U admet un recouvrement localement fini par des ouverts  $U_\nu$ , d'adhérences compactes  $\overline{U}_\nu$ . Soit  $\{\alpha_\nu\}$  une *partition de l'unité*, c'est-à-dire une famille de fonctions  $\alpha_\nu$  positives ou nulles, de classe  $C^\infty$  et à support compact, telles que

$$S(\alpha_\nu) \subset U_\nu, \quad \sum_\nu \alpha_\nu = 1 \quad \text{sur } U.$$

Soit  $f$  une fonction de  $C_c^\infty(U)$ . On a

$$f = \sum_\nu (\alpha_\nu f)$$

et, par suite,

$$Df = \sum_\nu D(\alpha_\nu f);$$

$(\alpha_\nu f)$  étant une fonction de  $C_c^\infty(U_\nu)$ , il résulte de (3.2) que, pour  $x \in U_\nu$ ,

$$[D(\alpha_\nu f)](x) = \sum_{|p| \leq N} b_p^\nu(x) [d^p (\widehat{\alpha_\nu f})](x^\alpha).$$

En explicitant les dérivations du second membre on a, pour  $x \in U$ , la formule

$$[D(\alpha, f)](x) = \sum_{|\rho| \leq N} a'_\rho(x) [\partial^\rho \hat{f}](x^\alpha)$$

D'autre part, pour  $x \notin U$ ,

$$[D(\alpha, f)](x) = 0.$$

Par addition, on voit qu'il existe sur  $U$  des fonctions  $a_p(x)$  telles que, pour  $f \in C_c^\infty(U)$  et pour  $x \in U$ ,

$$(3.3) \quad [Df](x) = \sum_{|\rho| \leq N} a_\rho(x) [\partial^\rho \hat{f}](x^\alpha).$$

Pour  $x \notin U$ , il vient

$$(3.4) \quad [Df](x) = 0.$$

d. Il est aisé d'étudier les fonctions  $a_p$  définies sur  $U$  qui apparaissent dans la formule (3.3). Si  $y \in U$ , prenons pour  $f \in C_c^\infty(U)$  une fonction telle que  $\hat{f} = 1$  sur un voisinage compact  $K$  de  $y$ . La formule (3.3) nous donne alors, pour  $x \in K$ ,

$$[Df](x) = a_0(x).$$

De la définition de  $D$ , il résulte que  $a_0$  est sur  $U$  une fonction de classe  $C^\infty$ .

Raisonnons par récurrence et supposons que les  $a_p$  soient de classe  $C^\infty$  pour  $|p| < h$ . Prenons  $q = \{q_1, \dots, q_n\}$  tel que  $|q| = h$  et choisissons pour  $f \in C_c^\infty(U)$  une fonction telle que

$$\hat{f}(x^\alpha) = \frac{(x^1)^{q_1} \dots (x^n)^{q_n}}{q_1! \dots q_n!}$$

sur le compact  $K$ . La formule (3.3) laisse alors, pour  $x \in K$ ,

$$[Df](x) = \sum_{|\rho| \leq h-1} a_\rho(x) [\partial^\rho \hat{f}](x^\alpha) + a_q(x).$$

De cette relation, il résulte que  $a_q$  est sur  $U$  une fonction de classe  $C^\infty$ . Nous énonçons :

**THÉORÈME 1.** — *Étant donné sur  $V_n$  un opérateur différentiel  $D$  et un voisinage ouvert connexe  $U$  sur lequel  $\varphi : x \rightarrow (x^\alpha)$  définit un système de coordonnées locales, il existe un ensemble fini de fonctions  $a_p$  de classe  $C^\infty$  sur  $U$  tel que, pour  $f \in C_c^\infty(U)$ , on ait, si  $x \in U$ ,*

$$(3.5) \quad [Df](x) = \sum_{|\rho| \leq N} a_\rho(x) [\partial^\rho \hat{f}](x^\alpha)$$

et, si  $x \notin U$ ,

$$(3.6) \quad [Df](x) = 0.$$

Nous supposons, en substituant à  $U$  un instant un ouvert intérieur si besoin est, que pour l'entier  $N$  les  $a_p$  tels que  $|p| = N$  ne s'annulent pas simultanément sur  $U$ . Si l'on introduit sur  $U$  un autre système de coordonnées locales, on vérifie immédiatement que  $N$  jouit de la même propriété dans ces nouvelles coordonnées. L'entier  $N$  est l'ordre sur  $U$  de l'opérateur.

e. Inversement, supposons qu'un endomorphisme  $E$  de  $C_c^z(V_n)$  jouisse, pour tout voisinage ouvert connexe  $U$  de coordonnées, des propriétés énoncées dans le théorème précédent.

Cet endomorphisme est certainement de *caractère local*. En effet, si  $f \in C_c^z(V_n)$ , recouvrons  $S(f)$  par des  $U_\nu$  voisinages ouverts connexes de coordonnées d'adhérences compactes. Si  $\{\alpha_\nu\}$  est une partition correspondante de l'unité, on a

$$f = \sum_\nu \alpha_\nu f, \quad Ef = \sum_\nu E(\alpha_\nu f).$$

Or, d'après (3.5) et (3.6),

$$S(E\alpha_\nu f) \subset U_\nu \cap S(f).$$

Ainsi, par addition,

$$S(Ef) \subset S(f),$$

ce qui établit le caractère local de  $E$ .

D'autre part, si  $V$  est un ouvert de  $U$  relativement compact, il résulte de (3.5) que  $E$  est continu sur  $C_c^z(\bar{V})$ . En utilisant encore une partition de l'unité, on voit que  $E$  est un endomorphisme *continu* de  $C_c^z(V_n)$ . Ainsi :

**THÉORÈME 2.** — *Tout endomorphisme de  $C_c^z(V_n)$  qui jouit, pour tout voisinage ouvert connexe de coordonnées, des propriétés établies au théorème 1 définit un opérateur différentiel de  $V_n$ .*

Remarquons que la démonstration du théorème 1 ne fait intervenir que la propriété  $P$ ; par suite, d'après le théorème 2, un opérateur admettant cette propriété est nécessairement un opérateur différentiel.

f. Soit  $D$  un opérateur différentiel de  $V_n$ . Si  $V$  ouvert est relativement compact dans le voisinage de coordonnées  $U$  et si  $\alpha$  est une fonction de  $C_c^z(V_n)$  égale à 1 sur un voisinage compact de  $\bar{V}$ , il résulte du théorème 1 que, pour toute fonction  $f \in C_c^z(V_n)$ , on a sur  $V$

$$[Df](x) = [D(\alpha f)](x) = \sum_{|p| \leq N} a_p(x) [\partial^p(\hat{\alpha}f)](x^x) = \sum_{|p| \leq N} a_p(x) [\partial^p \hat{f}](x^x).$$

Ainsi :

**COROLLAIRE.** — *Étant donné sur  $V_n$  un opérateur différentiel  $D$  et un voisinage ouvert connexe  $U$  sur lequel  $\varphi : x \rightarrow (x^x)$  définit un système de*

coordonnées locales, il existe sur  $U$  un ensemble fini de fonctions  $a_p$  de classe  $C^\infty$  tel que, si  $f \in C_c^\infty(V_n)$ , on ait sur tout ouvert  $V \subset U$  relativement compact

$$(3.7) \quad [Df](x) = \sum_{|\rho| \leq N} a_\rho(x) [\partial^\rho f](x^z) \quad (x \in V).$$

## II. — Opérateurs sur un espace homogène.

4. GÉNÉRALITÉS SUR LES ESPACES HOMOGÈNES. — *a.* Soit  $G$  un groupe de Lie connexe. Nous désignons par  $L_g$  et  $D_g$  la translation à gauche et la translation à droite définies respectivement, pour  $g \in G$ , par

$$\gamma \rightarrow g\gamma \quad \text{et} \quad \gamma \rightarrow \gamma \bar{g}^{-1} \quad (\gamma \in G).$$

Considérons une variété différentiable sur laquelle  $G$  opère *différentialement*. Cela veut dire que :

1° Chaque élément  $g$  de  $G$  détermine une transformation  $K_g$  de  $V_n$  avec

$$(4.1) \quad K_{g_1} \circ K_{g_2} = K_{g_1 g_2} \quad (g_1, g_2 \in G);$$

2° L'application  $(g, x) \rightarrow K_g(x)$  est une application différentiable de  $G \times V_n$  sur  $V_n$ . Nous dirons que le point  $K_g(x)$  — noté aussi  $gx$  — dépend différentiablement de  $g$  et de  $x$ .

De (4.1) on déduit

$$K_e = Id, \quad K_{\bar{g}^{-1}} = (K_g)^{-1}.$$

Le groupe  $G$  opère *effectivement* sur  $V_n$  si  $K_g = Id$  entraîne  $g = e$ . Il opère *transitivement* sur  $V_n$  si, quels que soient  $(x_1, x_2) \in V_n \times V_n$  il existe  $g \in G$  tel que  $K_g(x_1) = x_2$ .

Nous supposons dans la suite que  $G$  opère *transitivement* sur  $V_n$ ; nous obtenons ainsi un espace homogène. Soit  $x_0$  un point de  $V_n$ ,  $T_{x_0}$  l'espace tangent en  $x_0$ . Considérons le sous-groupe fermé  $H_{x_0} = H$  de  $G$  constitué par les éléments de  $G$  laissant  $x_0$  fixe;  $H$  est dit le *groupe d'isotropie en  $x_0$* . Si  $x = gx_0$ , les éléments de  $G$  qui amènent  $x_0$  en  $x$  sont ceux de l'ensemble  $gH$  et le groupe d'isotropie en  $x$  est défini par

$$H_x = gHg^{-1}.$$

A tout élément  $g$  de  $G$  correspond le difféomorphisme  $K_g$  de  $V_n$  et, par suite, l'application tangente  $K'_g$ . A tout élément  $h$  de  $H$ , nous pouvons faire correspondre l'application linéaire de  $T_{x_0}$  sur lui-même définie par  $K'_h(x_0)$ . Nous obtenons ainsi une représentation linéaire de  $H$  dans  $T_{x_0}$  qui définit le *groupe linéaire d'isotropie  $\tilde{H}$*  au point  $x_0$ .

*b.* La situation précédente peut être décrite en termes d'espace quotient : partons du groupe de Lie connexe  $G$  et du sous-groupe fermé  $H$  de  $G$ .

Considérons dans  $G$  la relation d'équivalence  $g_1 \sim g_2$  si  $g_1^{-1} g_2 \in H$  et soit  $G/H$  l'espace quotient de  $G$  par cette relation d'équivalence.

La projection correspondante

$$p: G \rightarrow G/H$$

associe continûment à tout  $g \in G$  la classe à gauche  $pg = gH$ . Le groupe  $G$  opère *transitivement* sur l'espace  $G/H$  par

$$(4.1) \quad K_g \circ p = p \circ L_g,$$

le groupe d'isotropie du point  $pe$  étant  $H$ .

$G$  étant groupe de Lie et  $H$  sous-groupe analytique de  $G$ , on démontre que  $G/H$  admet une structure unique de *variété analytique réelle* telle que  $G$  opère analytiquement par (4.1) sur  $G/H$ , c'est-à-dire telle que l'application de  $G \times G/H$  sur  $G/H$  définie par  $K_g(\gamma H)$  soit analytique;  $p$  est alors une application analytique. Nous supposons désormais  $G/H$  muni de cette structure analytique.

c. L'application de la variété  $V_n$  sur l'espace  $G/H$  qui, au point  $x = gx_0$  de  $V_n$  fait correspondre la classe  $gH \in G/H$  est un difféomorphisme préservant l'action de  $G$  qui nous permet d'identifier  $V_n$  et  $G/H$ . On a alors  $x_0 = pe$  et, d'après (4.1),

$$(4.2) \quad gx_0 = K_g(x_0) = pg.$$

Pour que  $G$  opère effectivement sur  $V_n = G/H$ , il faut et il suffit que  $H$  ne contienne aucun sous-groupe  $\neq \{e\}$  invariant dans  $G$ .

d. Le groupe  $G$  peut être considéré, pour la projection  $p$ , comme un *espace fibré principal analytique* de base  $V_n = G/H$ , de fibre structurale  $H$ , le groupe  $H$  — comme groupe structural — agissant sur lui-même par translation à gauche.

Remarquons que lorsque  $H$  opère sur  $G$  par translation à droite, il préserve les fibres de la fibration envisagée. Par suite, pour tout  $h \in H$ , on a

$$(4.3) \quad p D_h g = pg.$$

De (4.1) et (4.3), il résulte

$$(4.4) \quad K_h p = p L_h = p L_h D_h,$$

avec  $L_h D_h g = hgh^{-1}$ . En passant sur (4.4) aux applications linéaires tangentes en  $e$ , on obtient pour l'espace vectoriel tangent en  $e$  à  $G$ , c'est-à-dire pour l'algèbre de Lie  $\underline{G}$  de  $G$

$$(4.5) \quad K_h p' \lambda = p' \text{ad}(h) \lambda \quad (\alpha \in \underline{G}),$$

où  $\text{ad}(h)$  désigne l'élément associé à  $h \in \mathfrak{H}$  par la représentation adjointe de  $G$ ; (4.5) nous fournit ainsi une définition commode du groupe linéaire d'isotropie  $\tilde{H}$  en  $x_0 = pe$ .

5. ESPACES HOMOGENES A CONNEXION LINEAIRE INVARIANTE. — *a.* Considérons une variété différentiable  $V_n$  munie d'une connexion linéaire  $\omega$ . Si  $x$  est un point de  $V_n$ ,  $X_x$  un vecteur tangent en  $x$ , il existe pour l'arc géodésique issu de  $x$  et tangent à  $X_x$  une représentation paramétrique affine unique  $k(t; X_x)$  telle que pour  $t = 0$  on obtient le point  $x$  avec, comme vecteur-vitesse en ce point,  $k'(0; X_x) = X_x$ . L'application  $X_x \rightarrow k(1; X_x)$  est un difféomorphisme d'un voisinage de  $0$  dans  $T_x$  sur un voisinage de  $x$  dans  $V_n$ . Ce difféomorphisme est classiquement noté  $\text{Exp}$ .

Soit  $(e_x)$  une base de  $T_{x_0}$ . On voit que l'application

$$\bar{\varphi}^{-1} : (x^z) \rightarrow x = \text{Exp}(x^z e_x)$$

et l'application inverse  $\varphi$  définissent sur un ouvert  $U(x_0)$  un système de coordonnées locales qui est dit *normal en  $x_0$*  pour la connexion envisagée. L'ouvert  $U(x_0)$  sur lequel il est défini est dit un *ouvert normal* de centre  $x_0$ .

*b.* Supposons maintenant que  $V_n = G/H$  soit un espace homogène et qu'il existe sur  $V_n$  une connexion linéaire invariante par l'action de  $G$ . Le groupe  $G$  transforme alors tout arc géodésique en un arc géodésique avec conservation du paramètre affine :

$$(5.1) \quad K_g k(t; X_x) = k(t; K'_g X_x).$$

Si  $G$  est *effectif*, on peut préciser dans ce cas la relation entre le groupe d'isotropie  $H$  et le groupe linéaire d'isotropie  $\tilde{H}$  en étudiant le noyau de l'homomorphisme  $H \rightarrow \tilde{H}$ . Si  $h$  induit l'identité dans  $\tilde{H}$ , la transformation affine  $K_h$  conserve chaque arc géodésique d'origine  $x_0 = pe$  et, par suite, laisse fixe tout point  $x$  d'un ouvert  $U(x_0)$ . Il en résulte que  $K_h$  se réduit à l'identité sur  $U(x_0)$  et, par suite, sur  $V_n$  puisque cette transformation est analytique réelle. Le groupe  $G$  étant effectif, on a  $h = e$  et  $H$  est isomorphe à  $\tilde{H}$ .

Ainsi, lorsqu'un espace homogène  $G/H$ , où  $G$  est effectif, admet une connexion linéaire invariante par  $G$ , le groupe linéaire d'isotropie est isomorphe à  $H$ .

*c.* Si  $U(x_0)$  est, pour  $V_n = G/H$ , un ouvert *normal* de centre  $x_0$ , il existe sur  $U(x_0)$  un système de coordonnées locales normal en  $x_0$ . Si  $x \in g U(x_0)$  ( $g \in G$ ), on a d'après (5.1)

$$(5.2) \quad K_g \text{Exp}(x^z e_x) = \text{Exp}(K'_g(x^z e_x)) = \text{Exp}(x^z K'_g e_x).$$

On en déduit que  $x \in g U(x_0) \rightarrow (x^x)$  définit sur  $g U(x_0)$  un système de coordonnées locales normal au point  $gx_0$ . On peut vérifier aisément que les systèmes de coordonnées locales normales ainsi obtenus sont compatibles avec la structure analytique naturelle de  $V_n = G/H$ .

Étudions pour  $x \in U(x_0)$  les coordonnées normales du point  $K_h(x)$  ( $h \in H$ ). Si  $x = \text{Exp}(x^x e_x)$ , il vient d'après (5.2),

$$K_h(x) = K_h \text{Exp}(x^x e_x) = \text{Exp}(x^x K'_h e_x).$$

Soit  $A(h) = (A_x^\beta(h))$  la *matrice représentative* dans la base  $(e_x)$  de l'opérateur linéaire  $K'_h$

$$(5.3) \quad K'_h e_x = A_x^\beta(h) e_\beta.$$

On obtient

$$(5.4) \quad K_h(x) = \text{Exp}\{(A_x^\beta(h) x^x) e_\beta\}$$

et le transformé par  $K_h$  du point  $x \in U(x_0)$ , de coordonnées normales  $(x^x)$  a pour coordonnées normales  $(A_x^\beta(h) x^x)$  dans le même système de coordonnées.

6. OPÉRATEURS INVARIANTS SUR UN ESPACE HOMOGENÈME. — a. Sur un espace homogène  $V_n = G/H$ , désignons par  $K_g$  la transformation définie par l'élément  $g$  de  $G$ . L'opérateur  $A$  est dit invariant par  $G$  si pour tout  $g \in G$ ,

$$A^{K_g} = A,$$

c'est-à-dire si

$$(6.1) \quad K_g^* A = A K_g^*.$$

Introduisons la forme linéaire  $T_A$  sur  $C^x(V_n)$  définie par

$$(6.2) \quad f \in C^x(V_n) \rightarrow \langle T_A, f \rangle = [Af](x_0).$$

Cette forme linéaire est *invariante par H*, c'est-à-dire telle que, pour tout  $h \in H$ , on ait

$$(6.3) \quad \langle T_A, K_h^* f \rangle = \langle T_A, f \rangle.$$

On a, en effet,

$$[AK_h^* f](x_0) = [K_h^* A f](x_0) = [A f](x_0),$$

c'est-à-dire (6.3).

La connaissance de  $T_A$  détermine complètement l'opérateur invariant  $A$ . Si  $x = gx_0$ , on a en effet

$$[Af](x) = [Af](gx_0) = [K_g^* A f](x_0) = [AK_g^* f](x_0),$$

c'est-à-dire

$$(6.4) \quad [Af](x) = \langle T_A, K_g^* f \rangle \quad (x = gx_0).$$

Il est clair enfin que  $\langle T, K_g^* f \rangle$ , pour  $f$  donnée, définit une fonction  $C^\infty$  sur  $G$ .

b. Inversement donnons-nous une forme linéaire  $T$  sur  $C^\infty(V_n)$  invariante par  $H$  et telle que, pour  $f$  donnée,  $\langle T, K_g^* f \rangle$  définit une fonction  $C^\infty$  sur  $G$ . A toute fonction  $f \in C^\infty(V_n)$ , faisons correspondre la fonction  $Af$  définie par

$$(6.5) \quad [Af](x) = \langle T, K_g^* f \rangle \quad (x = gx_0).$$

La relation (6.5) définit effectivement une fonction sur  $V_n$ , puisque si  $g'$  est un autre élément de  $G$  tel que  $x = g'x_0$ , on a  $g' = gh$  (où  $h \in H$ ) et, d'après l'invariance de  $T$ ,

$$\langle T, K_{g'}^* f \rangle = \langle T, K_h^* K_g^* f \rangle = \langle T, K_g^* f \rangle.$$

Il est aisé de vérifier que pour tout  $g_1 \in G$

$$(6.6) \quad K_{g_1}^* Af = AK_{g_1}^* f \quad (f \in C^\infty(V_n)).$$

En effet, en un point arbitraire  $x = gx_0$  de  $V_n$ ,

$$[K_{g_1}^* Af](x) = [Af](g_1 x) = [Af](g_1 g x_0),$$

soit

$$[K_{g_1}^* Af](x) = \langle T, K_g^* K_{g_1}^* f \rangle = [AK_{g_1}^* f](x),$$

ce qui établit (6.6).

Il nous faut enfin établir que  $Af \in C^\infty(V_n)$ . Soit  $\mu : x \rightarrow \mu(x) \in G$  une section locale  $C^\infty$  de l'espace fibré  $G$  au-dessus d'un voisinage ouvert  $U$  de  $x_0$ . Comme  $\langle T, K_g^* f \rangle$  définit pour  $f$  donnée, une fonction  $C^\infty$  sur  $G$ , on a pour cette  $f$  et  $x \in U$

$$[Af](x) = \langle T, K_{\mu(x)}^* f \rangle$$

qui dépend différentiablement de  $x$ .

Si  $gU$  est l'image de  $U$  par l'action d'un élément fixe  $g$  de  $G$ , on a, d'après (6.6), pour  $y \in gU$  et  $x = g^{-1}y \in U$

$$[Af](y) = [K_g^* Af](x) = [AK_g^* f](x).$$

Le dernier membre dépendant différentiablement de  $x$  sur  $U$ ,  $Af$  est  $C^\infty$  sur  $gU$  et, par suite,  $Af \in C^\infty(V_n)$ . Nous énonçons :

**THÉORÈME.** — *Les formules (6.2) et (6.5) établissent une application linéaire biunivoque entre l'espace des opérateurs de  $V_n = G/H$  invariants par  $G$  et l'espace des formes linéaires  $T$  sur  $C^\infty(V_n)$  invariants par  $H$  et telles que pour  $f \in C^\infty(V_n)$  donnée,  $\langle T, K_g^* f \rangle$  dépende différentiablement de  $g$ .*

**7. CAS DES OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS INVARIANTS.** — Considérons, en particulier, un opérateur différentiel  $D$  défini par un endomorphisme continu de caractère local de  $C_c^\infty(V_n)$ .

A D associons la *distribution*  $T_D$  sur  $V_n$  définie par

$$(7.1) \quad f \in C_c^z(V_n) \rightarrow \langle T_D, f \rangle = [Df](x_0).$$

Du caractère local il résulte que la *distribution*  $T_D$  admet le point  $x_0$  pour support. Elle est invariante par H au sens du paragraphe 6.

Inversement, soit T une distribution sur  $V_n$  invariante par H et admettant  $x_0$  pour support. La relation

$$(7.2) \quad [Df](x) = \langle T, K_g^* f \rangle \quad (x = gx_0)$$

fait correspondre à toute fonction  $f \in C^z(V_n)$  une fonction sur  $V_n$ . Notons que  $(g, x) \rightarrow K_g^* f(x)$  fournit une fonction indéfiniment différentiable sur  $G \times V_n$  satisfaisant aux hypothèses usuelles qui permettent « la dérivation sous le signe distribution T ». Il en résulte que, pour  $f$  donnée,  $\langle T, K_g^* f \rangle$  définit une fonction indéfiniment différentiable sur G et, d'après le paragraphe 6,  $Df \in C^z(V_n)$ ; D est un opérateur.

Si  $f \in C^z(V_n)$  et si  $x$  est dans le complémentaire  $\mathcal{CS}(f)$  du support de  $f$ , il résulte de la propriété du support de T que  $[Df](x) = 0$ . Par suite,

$$\mathcal{CS}(f) \subset \mathcal{CS}(Df)$$

ou

$$S(Df) \subset S(f).$$

La restriction de D à  $C_c^z(V_n)$  est donc un endomorphisme de caractère local de  $C_c^z(V_n)$ ; T étant une distribution, cet endomorphisme est continu et D est un opérateur différentiel invariant.

**THÉORÈME.** — *Les formules (7.1) et (7.2) établissent une application linéaire biunivoque de l'espace des opérateurs différentiels de  $V_n = G/H$  invariants par G, sur l'espace des distributions de  $V_n$  invariantes par H et de support le point  $x_0$ .*

## CHAPITRE II.

### OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS INVARIANTS ET POLYNOMES.

#### I. — Étude de $\mathcal{O}(G/H)$ .

8. DÉFINITIONS. — a. Soit  $V_n = G/H$  (G effectif) un espace homogène. Si  $g \in G$ ,  $K_g$  est toujours la transformation de  $V_n$  définie par  $g$ . Nous désignons par  $\mathcal{O}(G/H)$  l'algèbre des opérateurs différentiels de notre espace homogène invariants par G. Pour que  $D \in \mathcal{O}(G/H)$ , il faut et il suffit que pour tout  $g \in G$

$$(8.1) \quad D^{K_g} = D \quad \text{ou} \quad K_g^* D = D K_g^*.$$

Nous désignons par  $\mathcal{O}(G)$  l'algèbre des opérateurs différentiels de  $G$  invariants par l'action de  $G$  opérant à gauche sur lui-même. Nous désignons enfin par  $\mathcal{O}_0(G)$  la sous-algèbre de  $\mathcal{O}(G)$  définie par les opérateurs de  $\mathcal{O}(G)$  qui sont aussi invariants par les translations à droite par  $H$ . Pour que  $D_0 \in \mathcal{O}_0(G)$ , il faut et il suffit que l'opérateur différentiel  $D_0$  sur  $G$  satisfasse

$$(8.2) \quad D_0^g = D_0 \quad \text{ou} \quad L_g^* D_0 = D_0 L_g^*$$

et

$$(8.3) \quad D_0^h = D_0 \quad \text{ou} \quad D_h^* D_0 = D_0 D_h^*$$

quels que soient  $g \in G$ ,  $h \in H$ .

b. A chaque fonction  $f \in C^z(G/H)$  correspond une fonction  $\tilde{f} = p^* f \in C^z(G)$ . La fonction  $\tilde{f}$  est constante sur chaque fibre  $gH$  de telle sorte que  $\tilde{f}(gh) = \tilde{f}(g)$  pour tout  $h \in H$ .

La fonction  $\tilde{f}$  vérifie donc

$$(8.4) \quad D_h^* \tilde{f} = \tilde{f}.$$

Inversement, pour toute fonction  $\tilde{f} \in C^z(G)$  vérifiant (8.4) pour tout  $h \in H$ , il existe une fonction  $f \in C^z(G/H)$  telle que  $\tilde{f} = p^* f$ . Les fonctions  $\tilde{f}$  vérifiant (8.4) forment une sous-algèbre  $C_0^z(G)$  de  $C^z(G)$ . Il est clair que  $p^*$  définit un isomorphisme de  $C^z(G/H)$  sur l'algèbre  $C_0^z(G)$ . Cet isomorphisme applique  $C_c^z(G/H)$  sur une sous-algèbre  $C_1^z(G)$  de  $C_0^z(G)$  définie par les éléments  $\tilde{f}$  de  $C_0^z(G)$  tels que  $pS(\tilde{f})$  soit compact.

Nous allons établir le lemme suivant :

LEMME. — L'algèbre  $C_0^z(G)$  et sa sous-algèbre  $C_1^z(G)$  sont stables par  $\mathcal{O}_0(G)$ .

En effet : si  $D_0 \in \mathcal{O}_0(G)$  et  $\tilde{f} \in C_0^z(G)$ , on a

$$D_h^* D_0 \tilde{f} = D_0 D_h^* \tilde{f} = D_0 \tilde{f}$$

$D_0 \tilde{f}$  vérifiant (8.4), on voit que  $C_0^z(G)$  est stable par  $\mathcal{O}_0(G)$ .

Si  $\tilde{f} \in C_1^z(G)$ , il résulte du caractère local de  $D_0$  que  $S(D_0 \tilde{f}) \subset S(\tilde{f})$ . Par suite, le sous-ensemble fermé  $pS(D_0 \tilde{f})$ , contenu dans  $pS(\tilde{f})$  compact, est compact et l'algèbre  $C_1^z(G)$  est stable par  $\mathcal{O}_0(G)$ .

c. D'après la définition de  $K_g'$ , on a

$$K_g p = p L_g.$$

Par suite, si  $f \in C^z(G/H)$ ,

$$p^* K_g^* f = L_g^* p^* f.$$

Ainsi

$$(8.5) \quad (K_g^* \tilde{f}) = L_g^* \tilde{f}.$$

9. OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS ET POLYNOMES INVARIANTS SUR UN ESPACE HOMOGÈNE A CONNEXION LINÉAIRE INVARIANTE. — *a.* Supposons que l'espace homogène  $V_n = G/H$  admette une *connexion linéaire invariante*  $\omega$ . Si  $\underline{G}$  est l'algèbre de Lie de  $G$  et  $\underline{H}$  la sous-algèbre de Lie de  $\underline{G}$  correspondant à  $H$ , nous désignons par  $C$  l'espace vectoriel quotient de l'espace vectoriel  $\underline{G}$  par son sous-espace  $\underline{H}$ ; l'espace  $C$  peut être identifié à  $T_{x_0}$  et  $(e_x)$  est, dans la suite, une base de  $C$ . Nous désignons toujours par  $p'$  la projection canonique  $\underline{G} \rightarrow C$ . D'après (4.5),  $\text{ad}(H)$  opérant sur  $\underline{G}$  passe au quotient sur  $C$  et donne le groupe linéaire d'isotropie  $\tilde{H}$  opérant sur  $C$ .

Nous avons vu que si  $U(x_0)$  est un ouvert normal de centre  $x_0$ , l'application

$$(9.1) \quad (x^z) \rightarrow x = \text{Exp}(x^z e_x) \in U(x_0)$$

définit sur  $U(x_0)$  un système de coordonnées *normal en  $x_0$*  pour la connexion  $\omega$ . Si  $f \in C^z(G/H)$ , on a sur  $U(x_0)$

$$(9.2) \quad \hat{f}(x^z) = f(\text{Exp}(x^z e_x)).$$

Pour  $g \in G$

$$(9.3) \quad (x^z) \rightarrow x = K_g \text{Exp}(x^z e_x) \in {}^g U(x_0)$$

définit sur  ${}^g U(x_0)$  un système de coordonnées *normal en  $gx_0$* . Ce sont ces coordonnées normales que nous allons utiliser.

Soit  $D$  un élément de  $\mathcal{O}(G/H)$ . D'après le théorème du paragraphe 3, il existe au moins un polynôme  $P$  à  $n$  variables, tel que

$$(9.4) \quad [Df](x_0) = \left[ P \left( \frac{\partial}{\partial x^z} \right) \hat{f}(x^z) \right]_{(x^z)=0},$$

c'est-à-dire tel que

$$(9.5) \quad [Df](x_0) = \left[ P \left( \frac{\partial}{\partial x^z} \right) f(\text{Exp}(x^z e_x)) \right]_{(x^z)=0},$$

Ce polynôme est manifestement unique. Il suffit pour le voir de remarquer que si  $P$  est un polynôme  $\neq 0$  à  $n$  variables, nous pouvons choisir, sur un voisinage de  $0$ , une fonction  $\hat{f}(x^z)$  telle que

$$\left[ P \left( \frac{\partial}{\partial x^z} \right) \hat{f}(x^z) \right]_{(x^z)=0} \neq 0.$$

Il lui correspond une fonction  $f$  telle que  $[Df](x_0)$  défini par (9.5) soit  $\neq 0$ .

$D$  étant invariant par  $G$ , au point  $x = K_g(x_0)$ , on a

$$[Df](x) = [DK_g^* f](x_0),$$

soit

$$(9.6) \quad [Df](x) = \left[ P \left( \frac{\partial}{\partial x^z} \right) f(K_g \text{Exp}(x^z e_x)) \right]_{(x^z)=0}.$$

On voit que l'ordre de l'opérateur différentiel  $D$  en tout point de  $V_n = G/H$  est égal au degré du polynôme  $P$  correspondant.

b. Si  $T$  est la distribution (§ 6) de support  $x_0$  associée à  $D$  par

$$(9.7) \quad \langle T, f \rangle = [Df](x_0) = \left[ P \left( \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right) f(\text{Exp}(x^\alpha e_\alpha)) \right]_{(x^\alpha)=0}.$$

on sait que  $T$  est *invariant par*  $H$ , c'est-à-dire que pour tout élément  $h \in H$

$$(9.8) \quad \langle T, K_h^* f \rangle = \langle T, f \rangle.$$

On a

$$\langle T, K_h^* f \rangle = \left[ P \left( \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right) f(K_h \text{Exp}(x^\alpha e_\alpha)) \right]_{(x^\alpha)=0},$$

d'où, d'après (5.4),

$$\langle T, K_h^* f \rangle = \left[ P \left( \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right) f \{ \text{Exp} \{ (A_\alpha^\beta(h) x^\alpha) e_\beta \} \} \right]_{(x^\alpha)=0}.$$

où  $A(h) = (A_\alpha^\beta(h))$  est la matrice représentative, dans la base  $(e_\alpha)$  de  $C$ , de l'opérateur linéaire  $K_h$ . Effectuons le changement de coordonnées locales

$$y^\beta = A_\alpha^\beta(h) x^\alpha.$$

Il vient

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} = A_\alpha^\beta(h) \frac{\partial}{\partial y^\beta}.$$

Par suite, en substituant la notation  $(x^\alpha)$  à la notation  $(y^\beta)$ , on obtient

$$\langle T, K_h^* f \rangle = \left[ P \left( A_\alpha^\beta(h) \frac{\partial}{\partial x^\beta} \right) f(\text{Exp}(x^\alpha e_\alpha)) \right]_{(x^\alpha)=0}.$$

De la comparaison avec (9.7), il résulte que pour que (9.8) soit satisfaite, il faut et il suffit que

$$(9.9) \quad P \left( A_\alpha^\beta(h) \frac{\partial}{\partial x^\beta} \right) = P \left( \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right).$$

c. Soit  $T(C)$  l'algèbre tensorielle sur l'espace vectoriel  $C$  et  $J$  l'idéal de  $T(C)$  engendré par les éléments de la forme  $\nu \otimes \omega - \omega \otimes \nu$ , où  $\nu, \omega \in C$ . L'algèbre quotient  $T(C)/J$  est dite l'algèbre *symétrique*  $\mathfrak{S}(C)$  sur  $C$ .  $\mathfrak{S}(C)$  peut être identifiée à l'algèbre des polynômes à coefficients réels sur les indéterminées commutatives  $(e_\alpha)$ .

Si  $P$  est le polynôme sur  $C$  associé à l'opérateur  $D$ , pour que la distribution  $T$  correspondante soit invariante par  $H$ , il faut et il suffit que

$$P(K_h e_\alpha) = P(e_\alpha),$$

c'est-à-dire que  $P$  soit un polynôme de  $\mathfrak{S}(C)$  *invariant par le groupe linéaire d'isotropie*  $\tilde{H}$  opérant sur  $C$ .

Nous sommes ainsi conduit à introduire la sous-algèbre  $I(C)$  de  $\mathcal{S}(C)$  définie par les polynômes éléments de  $\mathcal{S}(C)$  invariants par  $\tilde{H}$ . Nous avons vu qu'à tout opérateur différentiel invariant  $D$  sur  $V_n = G/H$  correspond un polynôme unique  $P \in I(C)$  vérifiant (9.6) et dont le degré est égal à l'ordre  $N$  de l'opérateur. Inversement, à tout élément  $P \in I(C)$  correspond par (9.7) une distribution dont le support est  $x_0$  et, d'après le théorème du paragraphe 7, un opérateur différentiel invariant sur l'espace homogène. Nous énonçons :

**THÉORÈME.** — Si  $V_n = G/H$  est un espace homogène à connexion linéaire invariante, les espaces vectoriels définis par  $I(C)$  et  $\mathcal{D}(G/H)$  sont isomorphes par l'isomorphisme

$$(9.10) \quad \Theta : P \rightarrow D_P$$

déterminé par

$$(9.11) \quad [D_P f](x) = \left[ P \left( \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right) f(K_g \text{Exp}(x^\alpha e_\alpha)) \right]_{(x^\alpha)=0} \quad [x = K_g(x_0)],$$

où  $(e_\alpha)$  est une base de  $C$  et  $(x^\alpha)$  le système de coordonnées locales normal en  $x_0$  correspondant. L'ordre de l'opérateur  $D_P$  est égal au degré du polynôme  $P$ .

**10. EXPRESSION TENSORIELLE DES OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS ET PROPRIÉTÉ MULTIPLICATIVE DE  $\Theta$ .** — *a.* Sur l'espace homogène  $V_n = G/H$ , soit  $\nabla$  l'opérateur de dérivation covariante dans la connexion linéaire invariante,  $D$  un opérateur différentiel d'ordre  $N$  sur  $G/H$ .

Sur un voisinage ouvert  $V$  rapporté à des coordonnées locales arbitraires, on peut écrire en mettant en évidence dans  $D$  le polynôme de dérivation d'ordre maximal

$$[Df](x) = \frac{1}{N!} t_{(N)}^{\alpha_1 \dots \alpha_N}(x) \partial_{\alpha_1} \dots \partial_{\alpha_N} \hat{f}(x^h) + Q_x(\partial_\alpha) \hat{f}(x^h) \quad (x \in V),$$

où le polynôme  $Q_x$  est de degré inférieur à  $N$  et où les  $t_{(N)}$  sont supposés symétriques par rapport à leurs indices. Si l'on change de coordonnées locales dans  $V$ , les  $t_{(N)}^{\alpha_1 \dots \alpha_N}$  se transforment comme les composantes d'un tenseur symétrique contravariant  $t_{(N)}$ .

Il en résulte que l'opérateur différentiel défini par

$$[Df](x) = \frac{1}{N!} [t_{(N)}^{\alpha_1 \dots \alpha_N} \nabla_{\alpha_1} \dots \nabla_{\alpha_N} f](x)$$

est d'ordre inférieur à  $N$ . En raisonnant par récurrence, on voit qu'il existe sur  $V_n$  des tenseurs symétriques contravariants  $t_{(q)}$  ( $q = 0, 1, \dots, N$ ) tels que

$$(10.1) \quad [Df](x) = \sum_{q=0}^N \frac{1}{q!} [t_{(q)}^{\alpha_1 \dots \alpha_q} \nabla_{\alpha_1} \dots \nabla_{\alpha_q} f](x).$$

Nous écrirons cette formule sous forme condensée en introduisant la notation suivante : nous désignons par le symbole  $(\dots, \dots)$  le produit contracté *divisé par  $q!$* , d'un  $q$ -tenseur contravariant par un  $q$ -tenseur covariant. La formule (10.1) peut s'écrire

$$(10.2) \quad Df = \sum_{q=0}^N (t_{(q)}, \nabla^q f).$$

b. Supposons que D soit *invariant par G*. On a, si  $g \in G$ ,

$$(10.3) \quad K_g^* Df = \sum_{q=0}^N (K_g' t_{(q)}, K_g^* \nabla^q f).$$

La connexion étant invariante par G,  $K_g^*$  commute avec la dérivation covariante et l'on a

$$(10.4) \quad K_g^* Df = \sum_{q=0}^N (K_g' t_{(q)}, \nabla^q K_g^* f).$$

D'autre part,

$$(10.5) \quad DK_g^* f = \sum_{q=0}^N (t_{(q)}, \nabla^q K_g^* f).$$

En considérant des fonctions  $f$  telles que, en un point  $x$ ,

$$f(x) = 0, \quad [\nabla^q f](x) = 0$$

pour  $q \leq (N-1)$ , puis  $(N-2)$ ,  $\dots$ , on voit sur (10.4) et (10.5) que pour que D soit invariant par G, il faut et il suffit que pour tout  $g \in G$ ,

$$K_g' t_{(q)} = t_{(q)} \quad (q = 0, 1, \dots, N),$$

c'est-à-dire que les tenseurs  $t_{(q)}$  soient invariants par G. Nous énonçons :

**THÉORÈME.** — *Pour que l'opérateur différentiel sur  $V_n = G/H$*

$$(10.6) \quad D : f \rightarrow Df = \sum_{q=0}^N (t_{(q)}, \nabla^q f)$$

*soit invariant par G, il faut et il suffit que les tenseurs symétriques contravariants  $t_{(q)}$  soient eux-mêmes invariants par G.*

Nous nous servons de la représentation (10.6) des opérateurs différentiels invariants dans le cas où  $G/H$  est un espace homogène symétrique (chap. IV).

c. Introduisons le symbole  $\simeq$  qui désigne pour les polynômes de degré N une équivalence modulo des polynômes de degré inférieur et pour les

opérateurs différentiels d'ordre  $N$  une équivalence modulo des opérateurs d'ordre inférieur.

Donnons-nous deux polynômes  $P, P'$  de degrés respectifs  $N, N'$  appartenant à  $I(C)$  et considérons les deux opérateurs différentiels  $\Theta(P)$  et  $\Theta(P')$  correspondants. Mettons en évidence dans  $P$  et  $P'$  les termes d'ordre maximal; on a

$$P \simeq \frac{1}{N!} t_0^{\alpha_1 \dots \alpha_N} e_{\alpha_1} \dots e_{\alpha_N}, \quad P' \simeq \frac{1}{N'!} u_0^{\beta_1 \dots \beta_{N'}} e_{\beta_1} \dots e_{\beta_{N'}}.$$

Du raisonnement du *a*, il résulte qu'il existe des tenseurs  $t$  et  $u$ , se réduisant à  $t_0$  et  $u_0$  en  $x_0$ , et tels que sur l'ouvert normal  $U(x_0)$  et dans le système de coordonnées normal correspondant à  $(e_x)$ , on ait

$$[\Theta(P)f](x) \simeq \frac{1}{N!} [t^{\alpha_1 \dots \alpha_N} \nabla_{\alpha_1} \dots \nabla_{\alpha_N} f](x),$$

$$[\Theta(P')f](x) \simeq \frac{1}{N'!} [u^{\beta_1 \dots \beta_{N'}} \nabla_{\beta_1} \dots \nabla_{\beta_{N'}} f](x).$$

On en déduit

$$[\Theta(P)\Theta(P')f] \simeq \frac{1}{N!N'!} [t^{\alpha_1 \dots \alpha_N} u^{\beta_1 \dots \beta_{N'}} \nabla_{\alpha_1} \dots \nabla_{\alpha_N} \nabla_{\beta_1} \dots \nabla_{\beta_{N'}} f](x)$$

et, par suite, en  $x_0$

$$[\Theta(P)\Theta(P')f](x_0) \simeq \frac{1}{N!N'!} t_0^{\alpha_1 \dots \alpha_N} u_0^{\beta_1 \dots \beta_{N'}} [\partial_{\alpha_1} \dots \partial_{\alpha_N} \partial_{\beta_1} \dots \partial_{\beta_{N'}} \hat{f}(x^\lambda)]_{(x^\lambda)=0}.$$

Soit

$$(10.7) \quad [\Theta(P)\Theta(P')f](x_0) \simeq \frac{1}{N!N'!} t_0^{\alpha_1 \dots \alpha_N} u_0^{\beta_1 \dots \beta_{N'}} [\partial_{\alpha_1} \dots \partial_{\alpha_N} \partial_{\beta_1} \dots \partial_{\beta_{N'}} \hat{f}(x^\lambda)]_{(x^\lambda)=0},$$

où (...) est le symbole de la symétrisation.

D'autre part, le polynôme produit  $PP'$  de degré  $N + N'$  est tel que

$$PP' \simeq \frac{1}{N!N'!} t_0^{\alpha_1 \dots \alpha_N} u_0^{\beta_1 \dots \beta_{N'}} e_{\alpha_1} \dots e_{\alpha_N} e_{\beta_1} \dots e_{\beta_{N'}}.$$

Il en résulte en  $x_0$

$$(10.8) \quad [\Theta(PP')f](x_0) \simeq \frac{1}{N!N'!} t_0^{\alpha_1 \dots \alpha_N} u_0^{\beta_1 \dots \beta_{N'}} [\partial_{\alpha_1} \dots \partial_{\alpha_N} \partial_{\beta_1} \dots \partial_{\beta_{N'}} \hat{f}(x^\lambda)]_{(x^\lambda)=0}.$$

Par différence de (10.7) et (10.8), on obtient

$$\{\Theta(PP') - \Theta(P)\Theta(P')\}f \simeq 0.$$

Ainsi l'opérateur différentiel  $\Theta(PP') - \Theta(P)\Theta(P')$  est d'ordre inférieur à  $N + N'$ . Nous obtenons pour  $\Theta$  la propriété multiplicative traduite par le théorème suivant :

**THÉORÈME.** — Si  $P$  et  $P'$  sont deux polynômes de  $I(C)$  de degrés respectifs  $N$  et  $N'$ , l'opérateur différentiel invariant, élément de  $\mathcal{O}(G/H)$ , défini par

$$\Theta(PP') - \Theta(P)\Theta(P')$$

est d'ordre inférieur à  $N + N'$ .

II. — Étude de  $\mathcal{O}(G)$ .

11.  $\mathcal{O}(G)$  COMME CAS PARTICULIER DE  $\mathcal{O}(G/H)$ . — Pour approfondir l'étude de la structure de  $\mathcal{O}(G/H)$  dans le cas d'un espace homogène réductif (chap. III), il nous faut nous intéresser à l'algèbre  $\mathcal{O}(G)$  des opérateurs différentiels invariants sur  $G$ . Cette algèbre a été étudiée principalement par Schwartz et Harish-Chandra et nous allons rappeler les principaux résultats dont nous aurons besoin, en nous inspirant du point de vue de Helgason.

a. Nous désignons dans la suite par  $r$  la dimension du groupe  $G$ . Ce groupe opérant sur lui-même par translation à gauche, nous pouvons considérer la variété  $G$  comme un espace homogène simplement transitif, avec  $H = \{e\}$ .

Si  $\lambda$  appartient à l'algèbre de Lie  $\underline{G}$  de  $G$  et est, par suite, un vecteur tangent à  $G$  en  $e$ , nous notons  $\exp(t\lambda)$  le sous-groupe à un paramètre de  $G$  défini par  $\lambda$ ;  $t$  est le paramètre canonique de ce sous-groupe. L'espace vectoriel tangent en  $e$  à  $G$  définit sur  $G$  une connexion linéaire invariante  $\pi$  dont les géodésiques issues de  $e$  admettent pour représentation paramétrique canonique (§ 5)

$$k(t; \lambda) = \exp(t\lambda).$$

Soit  $(\lambda_A)$  ( $A = 1, \dots, r$ ) une base de  $\underline{G}$ . On voit que l'application

$$\bar{\varphi}^1: (t^A) \rightarrow g = \exp(t^A \lambda_A)$$

et l'application inverse  $\varphi$  définissent sur un ouvert  $U(e)$  un système de coordonnées locales *normal en  $e$*  pour la connexion envisagée. Autrement dit, ce qu'on nomme un *système de paramètres canoniques*  $(t^A)$  du groupe peut être interprété comme système de coordonnées *normal* pour la connexion envisagée.  $g_0$  désignant un élément donné de  $G$ , nous posons sur un voisinage convenable de  $o$  pour les  $(t^A)$

$$(11.1) \quad \hat{F}(t^A) = F(g_0 \exp[t^A \lambda_A]).$$

D'après ce qui précède, le théorème du paragraphe 9 peut s'appliquer à  $\mathcal{O}(G)$  sous la forme suivante : si  $\mathcal{S}(\underline{G})$  est l'algèbre symétrique sur  $\underline{G}$ , il existe un isomorphisme

$$(11.2) \quad \tilde{\theta}: Q \rightarrow D_Q$$

de l'espace vectoriel  $\mathcal{S}(\underline{G})$  sur l'espace vectoriel  $\mathcal{O}(G)$  qui, au polynôme  $Q$ , fait correspondre l'opérateur différentiel  $D_Q$ , invariant sur  $G$  défini pour  $F \in C^\infty(G)$  par

$$(11.3) \quad [D_Q F](g_0) = \left[ Q \left( \frac{\partial}{\partial t^A} \right) F(g_0 \exp(t^A \lambda_A)) \right]_{(t^A)=0} = \left[ Q \left( \frac{\partial}{\partial t^A} \right) \hat{F}(t^A) \right]_{(t^A)=0}.$$

b. Il est souvent commode, dans ce cas, d'utiliser des fonctions  $F$  de classe  $C^\omega$  sur un ouvert  $U$  de  $G$ . Nous désignons par  $\mathcal{C}^\omega(U)$  l'ensemble des fonctions  $F$  sur  $G$  qui sont de classe  $C^\omega$  sur  $U$ . A ce sujet, nous allons établir le lemme suivant :

LEMME. — Soit  $D_Q$  un élément de  $\mathcal{O}(G)$ , où  $Q$  est le polynôme associé à l'opérateur par  $\tilde{\Theta}^{-1}$ .

1° Si  $F \in \mathcal{C}^\omega(U)$ , il en est de même pour  $D_Q F$ .

2°  $D_Q$  peut être caractérisé par son action sur les fonctions  $F \in \mathcal{C}^\omega(U)$ ; autrement dit, si  $D_Q F = 0$  pour tout  $F \in \mathcal{C}^\omega(U)$ , on a  $D_Q = 0$ .

En effet, si  $g_0 \in U$ , il existe un voisinage  $U'$  de  $g_0$  contenu dans  $U$  et un voisinage  $V$  de  $0$  pour les  $(t^\lambda)$  tels que

$$Q\left(\frac{\partial}{\partial t^\lambda}\right)F(g \exp(t^\lambda \lambda_\lambda))$$

soit une fonction analytique de  $g$  et de  $(t^\lambda)$  sur  $U' \times V$ . Par suite, d'après (11.3),  $D_Q F$  donné par

$$[D_Q F](g) = \left[ Q\left(\frac{\partial}{\partial t^\lambda}\right)F(g \exp(t^\lambda \lambda_\lambda)) \right]_{(t^\lambda)=0}$$

est une fonction analytique de  $g$  sur  $U'$  et  $D_Q F \in \mathcal{C}^\omega(U)$ .

Ce résultat du 1° peut se mettre sous une autre forme : soit  $U$  un ouvert de  $G$  pour lequel  $(t^\lambda) \rightarrow g = g_0 \exp(t^\lambda \lambda_\lambda)$  définit un système de coordonnées locales. Si  $F \in C^z(G)$ , il résulte du caractère local de  $D_Q$  et du théorème 1 (§ 3), que nous pouvons représenter  $D_Q F$  sur  $U$  par

$$[D_Q F](g) = \sum_{|\rho| \leq N} a_\rho(g) [D^\rho \hat{F}](t^\lambda), \quad g = g_0 \exp(t^\lambda \lambda_\lambda) \in U.$$

Un raisonnement analogue à celui du théorème cité montre alors que les  $a_\rho$  sont de classe  $C^\omega$  sur  $U$ .

Soit  $U$  l'ouvert précédent et supposons maintenant que  $D_Q F = 0$  pour tout  $F \in \mathcal{C}^\omega(U)$ . On a nécessairement  $Q = 0$ , car si  $Q$  était différent de zéro, il serait possible de choisir une fonction  $\hat{F}(t^\lambda)$ , telle que

$$\left[ Q\left(\frac{\partial}{\partial t^\lambda}\right)\hat{F}(t^\lambda) \right]_{(t^\lambda)=0} \neq 0.$$

Pour la fonction  $F \in \mathcal{C}^\omega(U)$  qui lui correspond selon (11.1) on a alors, d'après (11.3),

$$[D_Q F](g_0) \neq 0;$$

$Q$  étant nul,  $D_Q$  l'est aussi, ce qui démontre le lemme.

12.  $\mathcal{O}(G)$  ET LES OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS INVARIANTS DU PREMIER ORDRE. — a. A tout élément  $\lambda$  de l'algèbre de Lie  $\underline{G}$  de  $G$  correspond un champ de vecteurs  $Y$  *invariant à gauche* sur  $G$ . Le sous-groupe à un paramètre  $\exp(t\lambda)$  peut être défini par la trajectoire de  $Y$  issue de  $e$  dans  $G$  et l'on a, avec des notations évidentes,

$$(12.1) \quad \frac{d}{dt} \exp(t\lambda) = Y_{\exp(t\lambda)}.$$

Le champ  $Y$  définit un *opérateur différentiel*  $\mathcal{L}(Y)$  sur  $G$  qui, à toute fonction  $F \in C^z(G)$  fait correspondre la fonction indéfiniment différentiable

$$\mathcal{L}(Y) F = i(Y) dF,$$

où  $i$  indique le produit intérieur par un vecteur. A l'aide de (12.1), on peut donner de cette fonction une expression commode. Si  $g \in G$ , on a

$$\frac{d}{dt} F(g \exp(t\lambda)) = i\left(L'_g \frac{d \exp(t\lambda)}{dt}\right) dF_{g \exp(t\lambda)}.$$

Or, d'après (12.1) et l'invariance de  $Y$ ,

$$L'_g \frac{d \exp(t\lambda)}{dt} = L'_g Y_{\exp(t\lambda)} = Y_{g \exp(t\lambda)}.$$

Ainsi

$$\frac{d}{dt} F(g \exp(t\lambda)) = [i(Y) dF](g \exp(t\lambda)).$$

Pour  $t = 0$ , on obtient ainsi

$$(12.2) \quad [\mathcal{L}(Y) F](g) = \left[ \frac{d}{dt} F(g \exp(t\lambda)) \right]_{t=0}.$$

b. Il est clair sur (12.2) que l'opérateur différentiel  $\mathcal{L}(Y)$  est invariant par l'action à gauche de  $G$ . En effet, si  $\gamma \in G$ ,

$$[L'_\gamma \mathcal{L}(Y) F](g) = [\mathcal{L}(Y) F](\gamma g) = \left[ \frac{d}{dt} F(\gamma g \exp(t\lambda)) \right]_{t=0}.$$

Soit

$$[L'_\gamma \mathcal{L}(Y) F](g) = [\mathcal{L}(Y) L'_\gamma F](g).$$

De  $L'_\gamma \mathcal{L}(Y) = \mathcal{L}(Y) L'_\gamma$ , on déduit que  $\mathcal{L}(Y) \in \mathcal{O}(G)$ .

On sait que si à  $\lambda, \lambda' \in \underline{G}$  correspondent les champs  $Y, Y'$  invariants à gauche de  $G$ , à l'élément  $[\lambda, \lambda']$  correspond le champ  $[Y, Y']$ ; de plus,

$$(12.3) \quad \mathcal{L}([Y, Y']) = \mathcal{L}(Y) \mathcal{L}(Y') - \mathcal{L}(Y') \mathcal{L}(Y).$$

Au second membre figure un crochet d'opérateurs éléments de  $\mathcal{O}(G)$ .

L'application linéaire

$$\tau : \lambda \in \underline{G} \rightarrow \mathcal{L}(Y) \in \mathcal{O}(G)$$

de  $\underline{G}$  dans l'algèbre associative unitaire  $\mathcal{O}(G)$  peut être définie, d'après (12.2), par

$$(12.4) \quad [\tau(\lambda) F(g) = \left[ \frac{d}{dt} F(g \exp(t\lambda)) \right]_{t=0}]$$

et elle jouit, d'après (12.3), de la propriété

$$(12.5) \quad \tau([\lambda, \lambda']) = \tau(\lambda) \tau(\lambda') - \tau(\lambda') \tau(\lambda).$$

Nous pouvons traduire cette propriété par l'énoncé suivant :

**THÉORÈME.** — *L'application  $\tau$  définie par (12.4) est une linéarisation de l'algèbre de Lie  $\underline{G}$  de  $G$  dans l'algèbre unitaire  $\mathcal{O}(G)$  des opérateurs différentiels invariants à gauche de  $G$ .*

c. Nous allons établir le lemme suivant qui nous sera utile à différentes reprises.

**LEMME.** — *Si  $F$  est une fonction analytique dans un voisinage d'un point  $g$  de  $G$ , on a pour  $t$  suffisamment petit la formule*

$$(12.6) \quad F(g \exp(t\lambda)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} [\tau(\lambda)^n F](g).$$

En effet, nous pouvons établir par récurrence que

$$(12.7) \quad [\tau(\lambda)^n F](g) = \left[ \frac{d^n}{dt^n} F(g \exp(t\lambda)) \right]_{t=0}.$$

D'après (12.4), cette formule est valable pour  $n = 1$ . Évaluons

$$\begin{aligned} [\tau(\lambda)^{n+1} F](g) &= [\tau(\lambda)^n \tau(\lambda) F](g) \\ &= \left[ \frac{d^n}{dt^n} \tau(\lambda) F(g \exp(t\lambda)) \right]_{t=0} = \left[ \frac{d^n}{dt^n} \frac{d}{du} F(g \exp(t+u)\lambda) \right]_{t=u=0}, \end{aligned}$$

soit, en notant  $t$  la variable  $(t+u)$ ,

$$[\tau(\lambda)^{n+1} F](g) = \left[ \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} F(g \exp(t\lambda)) \right]_{t=0},$$

ce qui démontre (12.7). Cela posé, développons  $F(g \exp(t\lambda))$  en série de Taylor de la variable  $t$  au voisinage de  $t = 0$ . On a

$$F(g \exp(t\lambda)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left[ \frac{d^n}{dt^n} F(g \exp(t\lambda)) \right]_{t=0},$$

soit, d'après (12.7), la formule (12.6) de notre lemme.

**13. REMARQUE.** — Soit  $U(\underline{G})$  l'algèbre enveloppante universelle de l'algèbre de Lie  $\underline{G}$ ,  $\rho$  la linéarisation correspondante. D'après la propriété

fondamentale de l'algèbre enveloppante universelle, il existe un homomorphisme unique  $\theta$  de l'algèbre  $U(\underline{G})$  dans l'algèbre  $\mathcal{O}(\underline{G})$  tel que

$$\tau = \theta \circ \rho.$$

Un théorème fondamental de Harish-Chandra énonce que  $\theta$  est, en fait un isomorphisme de  $U(\underline{G})$  sur  $\mathcal{O}(\underline{G})$ .

14. L'ISOMORPHISME  $\Lambda$  DE L'ESPACE VECTORIEL  $\mathfrak{S}(\underline{G})$  SUR L'ESPACE VECTORIEL  $\mathcal{O}(\underline{G})$ . — *a.* Supposons l'algèbre de Lie  $\underline{G}$  munie d'une base  $(\lambda_\lambda)$  ( $\lambda = 1, \dots, r$ ) et soit  $\mathfrak{S}(\underline{G})$  l'algèbre symétrique sur  $\underline{G}$ , ou algèbre des polynômes par rapport aux indéterminées commutatives  $\lambda_\lambda$ . Considérons d'abord un ensemble  $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p)$  de  $p$  éléments, *distincts ou non, choisis parmi les éléments  $\lambda_\lambda$  de la base* et formons le monome correspondant  $\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p \in \mathfrak{S}(\underline{G})$ . Soit  $\Lambda$  l'application linéaire de  $\mathfrak{S}(\underline{G})$  dans  $\mathcal{O}(\underline{G})$  telle que

$$(14.1) \quad \Lambda(\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma} \tau(\mu_{\sigma(1)}) \tau(\mu_{\sigma(2)}) \dots \tau(\mu_{\sigma(p)}),$$

où  $\sigma$  est le groupe symétrique sur  $p$  lettres. A partir de (14.1) et du caractère linéaire de  $\Lambda$ , l'image par  $\Lambda$  de tout polynome  $Q$  de  $\mathfrak{S}(\underline{G})$  est connue.

Nous allons d'abord montrer que la formule (14.1) est encore valable pour un ensemble  $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p)$  d'éléments arbitraires — *distincts ou non* — de  $\underline{G}$ . En effet, en rapportant  $\mu_i$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ) à la base  $(\lambda_\lambda)$ , on a

$$\mu_i = B_i^{\lambda_i} \lambda_{\lambda_i}.$$

Par suite, d'après le caractère linéaire de  $\Lambda$ ,

$$\Lambda(\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p) = \Lambda(B_1^{\lambda_1} B_2^{\lambda_2} \dots B_p^{\lambda_p} \lambda_{\lambda_1} \lambda_{\lambda_2} \dots \lambda_{\lambda_p}) = B_1^{\lambda_1} B_2^{\lambda_2} \dots B_p^{\lambda_p} \Lambda(\lambda_{\lambda_1} \lambda_{\lambda_2} \dots \lambda_{\lambda_p}).$$

Il en résulte

$$\Lambda(\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma} B_1^{\lambda_1} B_2^{\lambda_2} \dots B_p^{\lambda_p} \tau(\lambda_{\sigma(1)}) \tau(\lambda_{\sigma(2)}) \dots \tau(\lambda_{\sigma(p)})$$

soit

$$\Lambda(\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma} B_{\sigma(1)}^{\lambda_{\lambda_1}} B_{\sigma(2)}^{\lambda_{\lambda_2}} \dots B_{\sigma(p)}^{\lambda_{\lambda_p}} \tau(\lambda_{\sigma(1)}) \tau(\lambda_{\sigma(2)}) \dots \tau(\lambda_{\sigma(p)}).$$

On obtient ainsi

$$\Lambda(\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma} B_{\sigma(1)}^{\lambda_{\lambda_1}} B_{\sigma(2)}^{\lambda_{\lambda_2}} \dots B_{\sigma(p)}^{\lambda_{\lambda_p}} \tau(\lambda_{\lambda_1}) \tau(\lambda_{\lambda_2}) \dots \tau(\lambda_{\lambda_p})$$

ou

$$\Lambda(\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma} B_{\sigma(1)}^{\lambda_{\lambda_1}} \tau(\lambda_{\lambda_1}) \cdot B_{\sigma(2)}^{\lambda_{\lambda_2}} \tau(\lambda_{\lambda_2}) \dots B_{\sigma(p)}^{\lambda_{\lambda_p}} \tau(\lambda_{\lambda_p}),$$

ce qui n'est autre que (14.1) explicité. De la validité générale de (14.1), il résulte que l'application linéaire  $\Lambda$ , telle que nous l'avons définie, ne dépend pas en fait du choix d'une base de  $\underline{G}$ .

b. Soit  $F$  une fonction *analytique* sur un voisinage  $V$  de  $e$  dans  $G$ . De la formule (12.6), il résulte que, pour des  $t^A$  suffisamment petits, on a

$$(14.2) \quad F(\exp(t^A \lambda_A)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [\tau(t^A \lambda_A)^n F](e).$$

Or on vérifie immédiatement à partir de (14.1) que

$$\tau(t^A \lambda_A)^n = \sum_{n_1 + \dots + n_r = n} (t^1)^{n_1} \dots (t^r)^{n_r} \frac{n!}{n_1! \dots n_r!} \Lambda(\lambda_1^{n_1} \dots \lambda_r^{n_r}),$$

(14.2) prend ainsi la forme

$$(14.3) \quad F(\exp(t^A \lambda_A)) = \sum_{n_1, \dots, n_r=0}^{\infty} \frac{(t^1)^{n_1} \dots (t^r)^{n_r}}{n_1! \dots n_r!} [\Lambda(\lambda_1^{n_1} \dots \lambda_r^{n_r}) F](e).$$

D'autre part, si nous développons le premier membre de (14.2) en série de Taylor usuelle par rapport aux variables  $t^A$  au voisinage de  $(t^A) = 0$ , il vient

$$F(\exp(t^A \lambda_A)) = \sum_{n_1, \dots, n_r=0}^{\infty} \frac{(t^1)^{n_1} \dots (t^r)^{n_r}}{n_1! \dots n_r!} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t^1} \right)^{n_1} \dots \left( \frac{\partial}{\partial t^r} \right)^{n_r} F(\exp(t^A \lambda_A)) \right]_{(t^A)=0}.$$

On a ainsi

$$[\Lambda(\lambda_1^{n_1} \dots \lambda_r^{n_r}) F](e) = \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t^1} \right)^{n_1} \dots \left( \frac{\partial}{\partial t^r} \right)^{n_r} F(\exp(t^A \lambda_A)) \right]_{(t^A)=0}.$$

De cette relation et de la linéarité de  $\Lambda$ , on déduit que si  $Q$  est un polynôme, élément de  $\mathfrak{S}(\underline{G})$ , on a

$$[\Lambda(Q) F](e) = \left[ Q \left( \frac{\partial}{\partial t^A} \right) F(\exp(t^A \lambda_A)) \right]_{(t^A)=0}.$$

Si  $\tilde{\Theta}$  est l'isomorphisme de l'espace vectoriel  $\mathfrak{S}(\underline{G})$  sur l'espace vectoriel  $\mathcal{O}(G)$  introduit au paragraphe 11, on voit sur (11.3) que pour toute fonction  $F$  *analytique* sur  $V$

$$[\Lambda(Q) F](e) = [\tilde{\Theta}(Q) F](e).$$

Les opérateurs  $\Lambda(Q)$  et  $\tilde{\Theta}(Q)$  étant invariants sur  $G$ , on a pour  $g \in V$ ,

$$[\Lambda(Q) F](g) = [\tilde{\Theta}(Q) F](g).$$

Il résulte du lemme du paragraphe 11, 2<sup>o</sup>, que pour tout  $Q \in \mathfrak{S}(\underline{G})$

$$\Lambda(Q) = \tilde{\Theta}(Q).$$

L'application linéaire  $\Lambda$  coïncide avec  $\tilde{\Theta}$ . Nous énonçons

**THÉORÈME.** — *La formule (14.1) définit un isomorphisme de l'espace vectoriel  $\mathcal{S}(\underline{G})$  sur l'espace vectoriel  $\mathcal{O}(\underline{G})$  qui coïncide avec l'isomorphisme  $\tilde{\Theta}$  défini par (11.3).*

Nous abandonnons dans la suite la notation  $\Theta$  et ne conservons que la notation  $\Lambda$ .

15. PROPRIÉTÉ MULTIPLICATIVE DE L'APPLICATION  $\Lambda$ . — Relativement aux structures d'algèbre de  $\mathcal{S}(\underline{G})$  et de  $\mathcal{O}(\underline{G})$ , nous allons établir une propriété multiplicative de l'application  $\Lambda$  identique à celle traduite par le théorème du paragraphe 10, c.

a. Si  $\mu_1, \mu_2$  sont deux éléments de l'algèbre de Lie  $\underline{G}$

$$\Lambda(\mu_1) = \tau(\mu_1), \quad \Lambda(\mu_2) = \tau(\mu_2)$$

et

$$\Lambda([\mu_1, \mu_2]) = \tau([\mu_1, \mu_2]) = \tau(\mu_1)\tau(\mu_2) - \tau(\mu_2)\tau(\mu_1).$$

Il en résulte

$$(15.1) \quad \Lambda([\mu_1, \mu_2]) = \Lambda(\mu_1)\Lambda(\mu_2) - \Lambda(\mu_2)\Lambda(\mu_1).$$

D'autre part,

$$\Lambda(\mu_1\mu_2) = \frac{1}{2} \left\{ \tau(\mu_2)\tau(\mu_1) + \tau(\mu_1)\tau(\mu_2) \right\} = \frac{1}{2} \{ \Lambda(\mu_1)\Lambda(\mu_2) + \Lambda(\mu_2)\Lambda(\mu_1) \},$$

soit

$$\Lambda(\mu_1\mu_2) = \Lambda(\mu_1)\Lambda(\mu_2) - \frac{1}{2}(\Lambda(\mu_1)\Lambda(\mu_2) - \Lambda(\mu_2)\Lambda(\mu_1)).$$

On a donc la relation

$$(15.2) \quad \Lambda(\mu_1\mu_2) = \Lambda(\mu_1)\Lambda(\mu_2) - \frac{1}{2}\Lambda([\mu_1, \mu_2]).$$

Plus généralement, si  $(\mu_1, \dots, \mu_q)$  sont  $q$  éléments arbitraires de  $\underline{G}$ , on a

$$(15.3) \quad \Lambda(\mu_1 \dots \mu_q) = \Lambda(\mu_1) \dots \Lambda(\mu_q) + D,$$

où l'opérateur  $D \in \mathcal{O}(\underline{G})$  est d'ordre inférieur à  $q$ .

Raisonnons par récurrence en admettant (15.3) pour l'entier  $(q-1)$ : De (14.1), soit

$$\Lambda(\mu_1 \dots \mu_q) = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma} \Lambda(\mu_{\sigma(1)}) \dots \Lambda(\mu_{\sigma(q)}),$$

on tire, en fixant l'indice  $\sigma(q) = i$ ,

$$\Lambda(\mu_1 \dots \mu_q) = \frac{1}{q} \sum_{i=1}^q \Lambda(\mu_1 \dots \hat{\mu}_i \dots \mu_q) \Lambda(\mu_i),$$

où la notation  $\wedge$  indique que le facteur  $\mu_i$  manque. De l'hypothèse de récurrence, il résulte

$$\Lambda(\mu_1 \dots \mu_q) = \frac{1}{q} \sum_{i=1}^q \Lambda(\mu_1) \dots \widehat{\Lambda(\mu_i)} \dots \Lambda(\mu_q) \Lambda(\mu_i) + D_1,$$

où l'opérateur  $D_1 \in \mathcal{O}(G)$  est d'ordre inférieur à  $q$ . En permutant  $\Lambda(\mu_i)$  avec les opérateurs précédents et en corrigeant à l'aide de l'expression (15.1) du crochet, on obtient la formule (15.3) qui se trouve ainsi établie.

b. De cette formule, on déduit immédiatement que si  $M$  et  $M'$  sont deux monomes sur  $\underline{G}$  de degrés respectifs  $N$  et  $N'$ , l'opérateur

$$\Lambda(MM') - \Lambda(M)\Lambda(M')$$

est d'ordre inférieur à  $(N + N')$ . Ce résultat s'étend naturellement au cas de deux polynômes. Nous avons ainsi retrouvé pour  $\mathcal{O}(G)$  le résultat du paragraphe 10 par une voie différente.

THÉORÈME. — Si  $Q$  et  $Q'$  sont deux polynômes de  $\mathcal{S}(G)$  de degrés respectifs  $N$  et  $N'$ , l'opérateur différentiel invariant sur  $G$

$$D = \Lambda(QQ') - \Lambda(Q)\Lambda(Q')$$

est d'ordre inférieur à  $(N + N')$ .

### CHAPITRE III.

#### OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS INVARIANTS SUR UN ESPACE HOMOGÈNE RÉDUCTIF.

16. ESPACES HOMOGÈNES RÉDUCTIFS. — a. Un espace homogène  $V_n = G/H$  admet une structure réductive si l'algèbre de Lie  $\mathfrak{G}$  de  $G$  admet une décomposition en somme directe <sup>(1)</sup>

$$(16.1) \quad \mathfrak{G} = \mathfrak{H} + \mathfrak{M} \quad (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{M} = 0)$$

où le sous-espace  $\mathfrak{M}$  satisfait

$$(16.2) \quad \text{ad.}(\mathfrak{H})\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}.$$

Lorsqu'il en est ainsi, le sous-espace  $\mathfrak{M}$  définit sur le fibré principal  $G$  de base  $V_n$  une connexion infinitésimale invariante à gauche par  $G$ . On démontre qu'à cette connexion est naturellement associée, sur l'espace

(1) Sur les espaces homogènes réductifs, voir, par exemple, Nomizu [5] et Lichnerowicz [4, a].

homogène  $V_n = G/H$  une connexion linéaire invariante. Celle-ci est dite la *connexion canonique* relative à la structure réductive.

Cette connexion jouit de la propriété suivante : si  $\lambda \in M$ , soit  $\exp(s\lambda)$  le sous-groupe à un paramètre correspondant; le transport relativement à la connexion canonique le long du chemin

$$(16.3) \quad p \exp(s\lambda)$$

de  $V_n$  coïncide avec la transformation par  $\exp(s\lambda)$ . Il en résulte en particulier que (16.3) définit pour la connexion canonique un arc géodésique tangent en  $x_0$  à  $p'\lambda$  pour lequel  $s$  est le paramètre affine.

b. Prenons pour base  $(\lambda_\alpha)$  ( $\alpha = 1, \dots, r$ ) dans  $\underline{G}$  la réunion d'une base  $(\lambda_\alpha)$  ( $\alpha = 1, \dots, n$ ) de  $M$  et d'une base  $(\lambda_i)$  ( $i = n + 1, \dots, r$ ) de  $\underline{H}$ . Une telle base de  $\underline{G}$  sera dite *adaptée* à la structure réductive. Nous adoptons pour base  $(e_\alpha)$  dans  $C$  la base  $(p'\lambda_\alpha)$ . On a ainsi

$$(16.4) \quad p'\lambda_\alpha = e_\alpha, \quad p'\lambda_i = 0,$$

$\underline{G}$  étant la somme directe de  $\underline{H}$  et de  $M$ , on sait qu'il existe des voisinages ouverts connexes  $V_M$  et  $V_H$  de  $o$  respectivement dans  $M$  et  $\underline{H}$  tels que l'application

$$\varphi: (\lambda_M, \lambda_H) \rightarrow \exp \lambda_M \exp \lambda_H$$

soit un difféomorphisme de  $V_M \times V_H$  sur un voisinage ouvert  $V$  de  $e$  dans  $G$  (Helgason [3, a]). On peut supposer  $V$  tel que  $pV \subset U(x_0)$ , où  $U(x_0)$  est un ouvert normal de centre  $x_0$  de  $V_n$  munie de sa connexion canonique.

Ainsi, relativement à la base adaptée choisie,

$$\exp(t^\alpha \lambda_\alpha) \exp(t^i \lambda_i) \rightarrow (t^\alpha, t^i)$$

définit un système de coordonnées locales sur  $V$ . Si

$$g = \exp(t^\alpha \lambda_\alpha) \exp(t^i \lambda_i) \in V,$$

sa projection  $x = pg$  appartient à  $U(x_0)$  et peut s'exprimer par  $\text{Exp}(x^\alpha e_\alpha)$ . Ainsi :

$$(16.5) \quad p \exp(t^\alpha \lambda_\alpha) \exp(t^i \lambda_i) = p \exp(t^\alpha \lambda_\alpha) = \text{Exp}(x^\alpha e_\alpha).$$

De la propriété de la connexion canonique signalée en a, il résulte que  $x = pg$  a pour coordonnées normales

$$(16.6) \quad x^\alpha = t^\alpha.$$

Pour  $g_0 \in G$ ,

$$(16.7) \quad (t^i, t^j) \rightarrow g = g_0 \exp(t^\alpha \lambda_\alpha) \exp(t^i \lambda_i)$$

définit sur  $g_0 V$  un système de coordonnées locales que nous utiliserons dans la suite.

c. Si  $h \in H$ , on a, d'après (4.5)

$$(16.8) \quad p' \operatorname{ad}(h) \lambda_A = K'_h p' \lambda_A,$$

M étant invariant par  $\operatorname{ad}(h)$ , il vient

$$(16.9) \quad \operatorname{ad}(h) \lambda_\alpha = A_\alpha^{\mathfrak{g}}(h) \lambda_\beta,$$

où, d'après (16.8),  $A = (A_\alpha^{\mathfrak{g}}(h))$  est la matrice représentative de  $K'_h$  dans la base  $(e_\alpha)$ . D'autre part, pour la base  $(\lambda_i)$  de  $\underline{H}$ ,

$$(16.10) \quad \operatorname{ad}(h) \lambda_i = A_i^j(h) \lambda_j.$$

On peut résumer (16.9) et (16.10) en écrivant

$$(16.11) \quad \operatorname{ad}(h) \lambda_A = B_A^B(h) \lambda_B,$$

où la matrice  $r \times r$ ,  $B$ , est telle que

$$B_\alpha^{\mathfrak{g}}(h) = A_\alpha^{\mathfrak{g}}(h), \quad B_i^j(h) = A_i^j(h), \quad B_\alpha^i(h) = B_i^\alpha(h) = 0.$$

17. L'APPLICATION  $\bar{A}$  DE  $\mathfrak{S}(\underline{G})$  SUR  $\mathcal{O}(\underline{G})$ . — Dans toute la suite, nous considérons un espace homogène réductif  $V_n = G/H$  et n'introduisons sur  $\underline{G}$  que des bases adaptées à la structure réductive.

a. Soit  $D$  un élément de  $\mathcal{O}(\underline{G})$ . D'après le théorème du paragraphe 3, il existe un polynôme  $Q \in \mathfrak{S}(\underline{G})$ , manifestement unique, tel que

$$(17.1) \quad [DF](e) = \left[ Q \left( \frac{\partial}{\partial t^\alpha} \right) F \{ \exp(t^\alpha \lambda_\alpha) \exp(t^i \lambda_i) \} \right]_{(t^\alpha)=0}$$

où  $F \in C^z(G)$ . L'opérateur  $D$  étant invariant par  $G$ , on a au point  $g_0$

$$(17.2) \quad [DF](g_0) = \left[ Q \left( \frac{\partial}{\partial t^\alpha} \right) F \{ g_0 \exp(t^\alpha \lambda_\alpha) \exp(t^i \lambda_i) \} \right]_{(t^\alpha)=0}.$$

Inversement, si  $Q \in \mathfrak{S}(\underline{G})$ , la formule (17.2) définit un opérateur différentiel sur  $G$  invariant par les translations à gauche. Nous énonçons :

THÉORÈME 1. — Si  $G/H$  est un espace homogène réductif, il existe un isomorphisme

$$\bar{A}: Q \rightarrow \bar{D}_Q$$

de l'espace vectoriel  $\mathfrak{S}(\underline{G})$  sur l'espace vectoriel  $\mathcal{O}(\underline{G})$  qui, au polynôme  $Q$ , fait correspondre l'opérateur différentiel  $\bar{D}_Q$  invariant sur  $G$  défini, pour  $F \in C^z(G)$ , par la formule

$$[\bar{D}_Q F]_{g_0} = \left[ Q \left( \frac{\partial}{\partial t^\alpha} \right) F \{ g_0 \exp(t^\alpha \lambda_\alpha) \exp(t^i \lambda_i) \} \right]_{(t^\alpha)=0},$$

où les coordonnées locales employées sont celles du paragraphe 16.

b. Étudions maintenant l'algèbre  $\mathcal{O}_0(\mathbf{G})$  (§ 8) définie par les opérateurs de  $\mathcal{O}(\mathbf{G})$  qui sont aussi invariants par les translations à droite par H.

Si  $D_0 \in \mathcal{O}(\mathbf{G})$  et si  $h \in \mathbf{H}$ , on a

$$[D_0^h F](e) = [D_h^* D_0 D_h^* F] e = [D_0 D_h^*] F(h).$$

Il existe un polynome  $Q \in \mathcal{S}(\mathbf{G})$  tel que  $D_0 = \bar{\Lambda}(Q)$  et, par suite,

$$[D_0^h F](e) = \left[ Q \left( \frac{\partial}{\partial t^\lambda} \right) F \{ h \exp(t^\alpha \lambda_\alpha) \exp(t^i \lambda_i) h^{-1} \} \right]_{(t^\lambda)=0},$$

soit

$$[D_0^h F](e) = \left[ Q \left( \frac{\partial}{\partial t^\lambda} \right) F \{ h \exp(t^\alpha \lambda_\alpha) h^{-1} h \exp(t^i \lambda_i) h^{-1} \} \right]_{(t^\lambda)=0}.$$

On obtient ainsi

$$[D_0^h F](e) = \left[ Q \left( \frac{\partial}{\partial t^\lambda} \right) F \{ \exp(t^\alpha \text{ad}(h) \lambda_\alpha) \exp(t^i \text{ad}(h) \lambda_i) \} \right]_{(t^\lambda)=0}.$$

Soit, d'après (16.9) et (16.10),

$$[D_0^h F](e) = \left[ Q \left( \frac{\partial}{\partial t^\lambda} \right) F \{ \exp(A_\alpha^\beta(h) t^\alpha \lambda_\beta) \exp(A_i^j(h) t^i \lambda_j) \} \right]_{(t^\lambda)=0}.$$

Effectuons, selon (16.11), le changement de coordonnées locales

$$u^\beta = B_A^\beta(h) t^\lambda.$$

Il vient

$$\frac{\partial}{\partial t^\lambda} = B_A^\beta(h) \frac{\partial}{\partial u^\beta}.$$

En substituant la notation  $(t^\lambda)$  à la notation  $(u^\beta)$ , on obtient

$$(17.3) \quad [D_0^h F](e) = \left[ Q \left( B_A^\beta(h) \frac{\partial}{\partial t^\beta} \right) F \{ \exp(t^\alpha \lambda_\alpha) \exp(t^i \lambda_i) \} \right]_{(t^\lambda)=0}.$$

Pour que  $D_0$  soit invariant par  $D_h$ , il faut et il suffit que

$$[D_0^h F](e) = [D_0 F](e),$$

c'est-à-dire, d'après (17.3), que

$$Q \left( B_A^\beta(h) \frac{\partial}{\partial t^\beta} \right) = Q \left( \frac{\partial}{\partial t^\lambda} \right).$$

Ainsi, si  $Q$  est le polynome sur  $\mathbf{G}$  associé par  $\bar{\Lambda}$  à l'opérateur  $D_0 \in \mathcal{O}(\mathbf{G})$  pour que  $D_0 \in \mathcal{O}_0(\mathbf{G})$ , il faut et il suffit que

$$(17.4) \quad Q(\text{ad}(h) \lambda_A) = Q(\lambda_A),$$

c'est-à-dire que  $Q$  soit un polynome de  $\mathfrak{S}(\underline{G})$  invariant par  $\text{ad}(H)$  opérant sur  $\underline{G}$ . Nous sommes ainsi conduit à introduire la sous-algèbre  $I(\underline{G})$  de  $\mathfrak{S}(\underline{G})$  définie par les polynomes invariants par  $\text{ad}(H)$ . Nous énonçons :

THÉORÈME 2. — Si  $V_n = \underline{G}/H$  est un espace homogène réductif,  $\mathcal{O}_0(\underline{G})$  est obtenu par la restriction  $\bar{\Lambda}_0$  de  $\bar{\Lambda}$  à la sous-algèbre  $I(\underline{G})$  des polynomes sur  $\underline{G}$  invariants par  $\text{ad}(H)$ .

18. L'APPLICATION  $\Pi_0$  DE  $I(\underline{G})$  SUR  $I(C)$ . — *a.* Reprenons l'algèbre de Lie  $\underline{G}$  de  $G$  et l'espace vectoriel quotient  $C = \underline{G}/H$ . La projection canonique  $p' : \underline{G} \rightarrow C$  définit une projection notée  $\Pi$  de l'algèbre symétrique  $\mathfrak{S}(\underline{G})$  sur l'algèbre symétrique  $\mathfrak{S}(C)$  : si  $Q(\lambda_\Lambda)$  est un polynome élément de  $\mathfrak{S}(\underline{G})$ , il lui correspond par  $\Pi$  le polynome élément de  $\mathfrak{S}(C)$  défini par

$$Q(p'\lambda_\Lambda).$$

Si  $Q, Q' \in \mathfrak{S}(\underline{G})$ , on a

$$(18.1) \quad \Pi(QQ') = \Pi(Q)\Pi(Q').$$

Supposons  $\underline{G}$  munie d'une base adaptée  $(\lambda_\alpha)$  et  $C$  munie de la base  $(e_\alpha = p'\lambda_\alpha)$ . Si  $Q(\lambda_\alpha, \lambda_i) \in \mathfrak{S}(\underline{G})$ , le polynome  $P = \Pi(Q)$  est défini par

$$P(e_\alpha) = Q(e_\alpha, 0),$$

$P$  est de degré inférieur ou égal à celui de  $Q$ .

*b.* Si  $Q \in I(\underline{G})$ , c'est-à-dire est invariant par  $\text{ad}(H)$  opérant sur  $\underline{G}$ , on a pour  $h \in H$

$$Q(\text{ad}(h)\lambda_\alpha, \text{ad}(h)\lambda_i) = Q(\lambda_\alpha, \lambda_i).$$

Il en résulte

$$P(A_\alpha^g(h)e_\beta) = Q(A_\alpha^g(h)e_\beta, 0) = Q(e_\alpha, 0) = P(e_\alpha)$$

et  $P$  est invariant par  $\tilde{H}$ , donc appartient à  $I(C)$ .

Inversement, si  $P \in I(C)$ , le polynome  $Q$  de  $\mathfrak{S}(\underline{G})$  défini par

$$Q(\lambda_\Lambda) = P(\lambda_\alpha)$$

vérifie

$$Q(\text{ad}(h)\lambda_\Lambda) = P(\text{ad}(h)\lambda_\alpha) = P(A_\alpha^g(h)\lambda_\beta) = P(\lambda_\alpha) = Q(\lambda_\Lambda)$$

et appartient à  $I(\underline{G})$ . Nous énonçons :

THÉORÈME. — La restriction  $\Pi_0$  de  $\Pi$  à  $I(\underline{G})$  est un homomorphisme de  $I(\underline{G})$  sur  $I(C)$  qui, à tout polynome  $Q \in I(\underline{G})$  fait correspondre un polynome  $\Pi_0(Q) \in I(C)$  de degré inférieur ou égal à celui de  $Q$ . Pour  $P \in I(C)$ , il existe au moins un polynome  $Q$  de même degré que  $P$ , tel que  $P = \Pi_0(Q)$ .

Considérons l'algèbre  $I(M)$  des polynomes sur  $M$  invariants par l'action de  $\text{ad}(H)$ . Il résulte du théorème précédent que  $\Pi_0$  définit un isomorphisme de  $I(M)$  sur  $I(C)$ .

19. LE THÉORÈME FONDAMENTAL. — *a.* Proposons-nous de mettre en évidence une projection de l'algèbre  $\mathcal{O}_0(G)$  dans l'algèbre  $\mathcal{O}(G/H)$  des opérateurs différentiels invariants sur l'espace homogène réductif  $G/H$ .

Étant donné un opérateur  $D_0 \in \mathcal{O}_0(G)$ , considérons l'opérateur  $D$  (sur  $G/H$ ) qui, à toute fonction  $f \in C^\infty(G/H)$  fait correspondre la fonction  $Df$  définie par

$$(19.1) \quad p^*Df = D_0p^*f.$$

Soit, avec les notations du paragraphe 8,

$$(19.2) \quad (Df)^\sim = D_0\tilde{f},$$

(19.1) ou (19.2) définissent bien une fonction  $Df \in C^\infty(G/H)$ , puisque  $D_0$  laisse stable  $C_c^\infty(G)$ .

$D$  est un endomorphisme continu de  $C_c^\infty(G/H)$  de caractère local : si  $f \in C_c^\infty(G/H)$ , il résulte du caractère local de  $D_0$  que

$$pS(D_0p^*f) \subset pS(p^*f),$$

soit

$$S(Df) \subset S(f).$$

On établit immédiatement la continuité de  $D$  en utilisant les systèmes de coordonnées locales introduits au paragraphe 16;  $D$  est ainsi un *opérateur différentiel* sur  $G/H$ . *Cet opérateur est invariant par  $G$ .* En effet, d'après (8.5) et (19.2),

$$(K_g^*Df)^\sim = L_g^*D_0\tilde{f},$$

soit,  $D_0$  étant invariant à gauche par  $G$ ,

$$(K_g^*Df)^\sim = D_0L_g^*\tilde{f} = D_0(K_g^*f)^\sim = (DK_g^*f)^\sim.$$

Ainsi

$$K_g^*Df = DK_g^*f,$$

ce qui démontre l'invariance.

Nous avons ainsi défini une application  $\Psi: D_0 \rightarrow D$  de  $\mathcal{O}_0(G)$  dans  $\mathcal{O}(G/H)$ . D'après sa définition même,  $\Psi$  est linéaire et préserve le produit, c'est-à-dire est un *homomorphisme de l'algèbre  $\mathcal{O}_0(G)$  dans l'algèbre  $\mathcal{O}(G/H)$ .*

*b.* Cela posé, soit  $Q$  un polynôme élément de  $I(G)$ . Posons

$$\bar{D}_Q = \bar{\Lambda}_0(Q) \in \mathcal{O}_0(G).$$

Si  $f \in C^\infty(G/H)$  et si  $\tilde{f} = p^*f$ , on a, dans les coordonnées locales du paragraphe 16

$$[\bar{D}_Q\tilde{f}](g) = \left[ Q \left( \frac{\partial}{\partial t^x}, \frac{\partial}{\partial t^i} \right) \tilde{f} \{ g \exp(t^x \lambda_x) \exp(t^i \lambda_i) \} \right]_{(t^A)=0}.$$

Pour  $\exp(t^x \lambda_\alpha) \exp(t^i \lambda_i) \in V$ , il vient

$$(19.3) \quad \tilde{f} \{g \exp(t^x \lambda_\alpha) \exp(t^i \lambda_i)\} = \tilde{f} \{g \exp(t^x \lambda_\alpha)\} = f \{p g \exp(t^x \lambda_\alpha)\} = f \{K_g p \exp(t^x \lambda_\alpha)\};$$

(19.3) étant indépendant des variables  $(t^i)$ , on a

$$[\bar{D}_0 \tilde{f}] (g) = \left[ Q \left( \frac{\partial}{\partial t^x}, 0 \right) f \{K_g p \exp(t^x \lambda_\alpha)\} \right]_{(t^i)=0}.$$

Il résulte de (16.5), (16.6) que

$$p \exp(t^x \lambda_\alpha) = \text{Exp}(t^x e_\alpha).$$

D'autre part, si  $P = \pi_0(Q)$ ,

$$Q \left( \frac{\partial}{\partial t^x}, 0 \right) = P \left( \frac{\partial}{\partial t^x} \right).$$

Il en résulte

$$(19.4) \quad [\bar{D}_0 \tilde{f}] (g) = \left[ P \left( \frac{\partial}{\partial t^x} \right) f \{K_g \text{Exp}(t^x e_\alpha)\} \right]_{(t^i)=0},$$

soit, si  $D_p = \Theta(P)$  et si  $x = K_g(x_0)$ ,

$$[\bar{D}_0 \tilde{f}] (g) = [D_p f] (x) = [D_p f] (g).$$

De la définition (19.2) de  $\Psi$ , il vient

$$(19.5) \quad \Psi \bar{\Lambda}_0(Q) = \Theta \Pi_0(Q) \quad (Q \in I(\underline{G})),$$

$\Pi_0$  étant une application surjective de  $I(\underline{G})$  sur  $I(C)$ ,  $\Theta$  et  $\bar{\Lambda}_0$  des isomorphismes d'espaces vectoriels, il en résulte que  $\Psi$  est surjective et, par suite, est un homomorphisme de  $\mathcal{O}_0(G)$  sur  $\mathcal{O}(G/H)$ .

De (19.5) et du fait que

$$\deg \Pi_0(Q) \leq \deg Q,$$

on déduit que si  $D_0 \in \mathcal{O}_0(G)$ ,

$$\text{ordre } \Psi(D_0) \leq \text{ordre } D_0.$$

Nous énonçons, d'après le théorème du paragraphe 18,

**THÉORÈME.** — *Pour un espace homogène réductif, le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} I(\bar{G}) & \xrightarrow{\bar{\Lambda}_0} & \mathcal{O}(G) \\ \Pi_0 \downarrow & & \downarrow \Psi \\ I(C) & \xrightarrow{\Theta} & \mathcal{O}(G/H) \end{array}$$

*est commutatif. L'homomorphisme  $\Psi$  de  $\mathcal{O}_0(G)$  sur  $\mathcal{O}(G/H)$  est tel que*

$$(19.6) \quad \text{ordre } \Psi(D_0) \leq \text{ordre } D_0 \quad [D_0 \in \mathcal{O}_0(G)].$$

Mais, pour tout élément  $D \in \mathcal{O}(G/H)$ , il existe au moins un élément  $D_0 \in \mathcal{O}_0(G)$  tel que  $D = \Psi(D_0)$  et ordre  $D = \text{ordre } D_0$ .

c. Soit  $\Pi_1$  la restriction de  $\Pi_0$ ,  $\bar{\Lambda}_1$  la restriction de  $\bar{\Lambda}_0$  à  $I(M)$ . Si  $Q \in I(M)$ ,  $\bar{\Lambda}(Q)$  est l'opérateur  $D_0$  défini par

$$[D_0 F](g) = \left[ Q \left( \frac{\partial}{\partial t^x} \right) F \{ g \exp(t^x \lambda_x) \exp(t^i \lambda_i) \} \right]_{(t^\Lambda)=0} = \left[ Q \left( \frac{\partial}{\partial t^x} \right) F \{ g \exp t^x \lambda_x \} \right]_{(t^\Lambda=0)}$$

pour tout  $F \in C^x(G)$ , soit

$$[D_0 F](g) = \left[ Q \left( \frac{\partial}{\partial t^x} \right) F \{ g \exp(t^\Lambda \lambda_\Lambda) \} \right]_{(t^\Lambda)=0}$$

Si  $\Lambda_1$  est la restriction de  $\Lambda$  à  $I(M)$ , on a donc

$$\bar{\Lambda}_1 = \Lambda_1.$$

De (19.5), on déduit par restriction à  $I(M)$ ,

$$(19.7) \quad \Psi \Lambda_1 = \Theta \Pi_1.$$

Ainsi

COROLLAIRE. — Sur un espace homogène réductif  $G/H$  (avec  $\underline{G} = \underline{H} + M$ ), l'espace vectoriel  $\mathcal{O}(G/H)$  se déduit de  $I(M)$ , par la restriction  $\Lambda_1$  de  $\Lambda$  à  $I(M)$  suivie de l'homomorphisme  $\Psi$ .

20. PROPRIÉTÉ MULTIPLICATIVE RELATIVE A  $\mathcal{O}(G/H)$ . — Soient  $P, P'$  deux polynômes éléments de  $I(C)$ , de degrés respectifs  $N$  et  $N'$ ,  $Q, Q'$  les polynômes de  $I(M)$  qui leur correspondent par l'isomorphisme  $\Pi_1$ . Du paragraphe 15, il résulte

$$(20.1) \quad \Lambda_1(QQ') = \Lambda_1(Q) \Lambda_1(Q') + D_0,$$

avec

$$\text{ordre } D_0 < N + N'.$$

En transformant (20.1) par  $\Psi$ , il vient,  $\Psi$  étant un homomorphisme d'algèbre,

$$\Psi \Lambda_1(QQ') = \Psi \Lambda_1(Q) \Psi \Lambda_1(Q') + \Psi(D_0),$$

soit, d'après (19.7),

$$(20.2) \quad \Theta(PP') = \Theta(P) \Theta(P') + \Psi(D_0),$$

où

$$\text{ordre } \Psi(D_0) \leq \text{ordre } D_0 < N + N'.$$

Nous retrouvons ainsi, dans ce cas particulier, et par une autre voie, le théorème du paragraphe 10.

21. CAS OU IL EXISTE UN SYSTÈME FINI DE GÉNÉRATEURS. — a. Considérons un espace homogène  $G/H$  admettant une connexion linéaire invariante

(nous ne supposons pas au  $a$  sa réductivité). Plaçons-nous dans le cas où l'algèbre  $I(\mathbb{C})$  correspondante admet un système fini de générateurs : il existe  $k$  polynômes  $P_i \in I(\mathbb{C})$  ( $i = 1, \dots, k$ ) tels que tout élément  $P$  de  $I(\mathbb{C})$  puisse s'écrire

$$(21.1) \quad P = \Phi(P_1, \dots, P_k),$$

où  $\Phi$  est un polynôme. Désignons par  $D_i$  l'opérateur différentiel

$$(21.2) \quad D_i = \Theta(P_i).$$

On a :

**THÉORÈME.** — *Si  $I(\mathbb{C})$  admet un système fini de générateurs, tout élément  $D$  de  $\mathcal{D}(G/H)$  peut s'exprimer par un polynôme par rapport aux opérateurs différentiels  $D_i$  correspondant aux générateurs  $P_i$  de  $I(\mathbb{C})$*

$$(21.3) \quad D = \sum a_{n_1, \dots, n_k} (D_1)^{n_1} \dots (D_k)^{n_k}.$$

En effet, si  $P$  est le polynôme  $\Theta^{-1}(D)$ , il peut s'écrire, d'après (21.1),

$$P = \sum b_{n_1, \dots, n_k} (P_1)^{n_1} \dots (P_k)^{n_k}.$$

D'après le théorème du paragraphe 10, l'opérateur différentiel invariant sur  $G/H$  :

$$\Theta(P) = \sum b_{n_1, \dots, n_k} \Theta(P_1)^{n_1} \dots \Theta(P_k)^{n_k}$$

est d'ordre inférieur à l'ordre de  $D = \Theta(P)$ . Le théorème s'en déduit par induction. L'expression (21.3) de  $D$  n'est naturellement pas unique.

*b.* Supposons maintenant que l'espace homogène  $G/H$  admet une structure réductive. Si  $I(\underline{G})$  admet un système fini de générateurs  $Q_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ), tout élément  $Q \in I(\underline{G})$  peut s'écrire

$$(21.4) \quad Q = \Phi(Q_1, \dots, Q_k),$$

où  $\Phi$  est un polynôme. De

$$\Pi_0(Q + Q') = \Pi_0(Q) + \Pi_0(Q'), \quad \Pi_0(QQ') = \Pi_0(Q) \Pi_0(Q'),$$

on déduit d'après (21.4) que si  $P = \Pi_0(Q) \in I(\mathbb{C})$ , on a

$$P = \Phi(\Pi_0(Q_1), \dots, \Pi_0(Q_k)),$$

$I(\mathbb{C})$  admet ainsi un système fini de générateurs.

*c.* Supposons en particulier le sous-groupe  $H$  connexe et réductif dans  $G$  : la sous-algèbre  $\underline{H}$  est réductive dans l'algèbre de Lie  $\underline{G}$  de  $G$ . On sait que lorsqu'il en est ainsi, l'espace homogène  $G/H$  admet une structure réductive. Si nous considérons l'espace vectoriel  $\underline{G}$  comme une algèbre

de Lie abélienne,  $\mathfrak{S}(\underline{G})$  est l'algèbre enveloppante correspondante. D'après l'hypothèse faite,  $\text{ad}(\underline{H})$  définit une représentation complètement réductible de  $\underline{H}$  dans  $\underline{G}$ . La représentation correspondante de  $\underline{H}$  dans  $\mathfrak{S}(\underline{G})$  est aussi complètement réductible et  $\mathfrak{S}(\underline{G})$  est la somme directe

$$\mathfrak{S}(\underline{G}) = \mathfrak{S}(\underline{G})^{\natural} + \mathfrak{S}(\underline{G})^{\circ},$$

où  $\mathfrak{S}(\underline{G})^{\natural}$  est le sous-espace des éléments annulés par  $\text{ad}(\underline{H})$  et  $\mathfrak{S}(\underline{G})^{\circ}$  le sous-espace engendré par les éléments déduits de l'action de  $\text{ad}\mu(\mu\underline{H}\underline{\epsilon})$  sur un élément de  $\mathfrak{S}(\underline{G})$ ;  $\mathfrak{S}(\underline{G})^{\natural}$  est une sous-algèbre de  $\mathfrak{S}(\underline{G})$  qui,  $\underline{H}$  étant connexe, coïncide avec la sous-algèbre  $\mathfrak{I}(\underline{G})$  et, d'après un théorème classique <sup>(2)</sup>, admet un système fini de générateurs. Ainsi si  $\underline{H}$  connexe est réductif dans  $\underline{G}$ ,  $\mathfrak{I}(\underline{G})$  admet un système fini de générateurs.

Supposons maintenant le sous-groupe  $\underline{H}$  compact. Le groupe compact  $\text{ad}(\underline{H})$  opère sur  $\underline{G}$  et  $\underline{G}/\underline{H}$  admet une structure réductive. D'après le théorème des invariants dans le cas compact, l'algèbre  $\mathfrak{I}(\underline{G})$  admet un système fini de générateurs. Nous énonçons, d'après *a* et *b* :

**THÉORÈME.** — *Si, pour l'espace homogène  $\underline{G}/\underline{H}$ , le sous-groupe  $\underline{H}$  est connexe et réductif dans  $\underline{G}$  ou si ce sous-groupe est compact, l'algèbre  $\mathfrak{I}(\underline{G})$  admet un système fini de générateurs et il en est par suite de même pour l'algèbre  $\mathcal{O}(\underline{G}/\underline{H})$ .*

## CHAPITRE IV.

### OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS INVARIANTS SUR UN ESPACE SYMÉTRIQUE.

22. NOTION D'ESPACE HOMOGÈNE SYMÉTRIQUE. — *a.* Supposons qu'il existe, sur un groupe de Lie connexe donné,  $\underline{G}$ , un automorphisme involutif  $\mathfrak{S}$  de  $\underline{G}$ . L'application  $\mathfrak{S}$  de  $\underline{G}$  sur lui-même étant un automorphisme de  $\underline{G}$ ,

$$(22.1) \quad \mathfrak{S}(gg') = \mathfrak{S}(g)\mathfrak{S}(g')$$

quels que soient  $g, g' \in \underline{G}$ ;  $\mathfrak{S}$  étant involutif,

$$(22.2) \quad \mathfrak{S}^2 = \text{Id}.$$

Soit  $\underline{H}^{\mathfrak{S}}$  le sous-groupe des éléments de  $\underline{G}$  fixes par  $\mathfrak{S}$ . C'est un sous-groupe fermé de  $\underline{G}$  dont nous désignons par  $\underline{H}_0^{\mathfrak{S}}$  la composante connexe de l'unité.

**DÉFINITION.** — *Étant donné un espace homogène  $\underline{V}_n = \underline{G}/\underline{H}$ , nous dirons que cet espace admet une structure d'espace homogène symétrique s'il existe un automorphisme involutif  $\mathfrak{S}$  de  $\underline{G}$  tel que*

$$(22.3) \quad \underline{H}_0^{\mathfrak{S}} \subset \underline{H} \subset \underline{H}^{\mathfrak{S}}.$$

<sup>(2)</sup> Voir, par exemple, Séminaire Sophus Lie [7], Exposé 7, p. 8, Paris.

Si  $H_0$  est la composante connexe de l'unité de  $H$ , on a  $H_0 = H_0^S$ . Nous pouvons supposer, sans nuire à la généralité, que  $G$  est *effectif*.

b. L'automorphisme involutif  $S$  de  $G$  induit un automorphisme involutif  $\underline{S}$  de l'algèbre de Lie  $\underline{G}$  de  $G$ . De la relation

$$S(hgh^{-1}) = hS(g)h^{-1}$$

valable quels que soient  $g \in G$ ,  $h \in H$ , on déduit

$$(22.4) \quad \underline{S} \operatorname{ad}(h) = \operatorname{ad}(h) \underline{S}.$$

Les valeurs propres de l'automorphisme involutif  $\underline{S}$  (avec  $\underline{S}^2 = \operatorname{Id}$ ) de  $\underline{G}$  sont nécessairement égales)  $\pm 1$ . Considérons le sous-espace de  $\underline{G}$  défini par les vecteurs propres de  $\underline{S}$  correspondant à la valeur propre  $1$ . A tout élément de ce sous-espace correspond un sous-groupe à un paramètre d'éléments de  $G$  fixes par  $S$ . Inversement, à tout sous-groupe à un paramètre de  $H_0$  correspond un élément de  $\underline{G}$  invariant par  $\underline{S}$ . Ainsi le sous-espace envisagé n'est autre que la sous-algèbre  $\underline{H}$  de  $H_0$  ou  $H$ .

Soit  $M$  le sous-espace de  $\underline{G}$  défini par les vecteurs propres de  $\underline{S}$  correspondant à la valeur propre  $-1$ ;  $M$  est supplémentaire de  $\underline{H}$  dans  $\underline{G}$

$$(22.5) \quad \underline{G} = \underline{H} + M \quad (\underline{H} \cap M = 0)$$

et, d'après (22.4),

$$(22.6) \quad \operatorname{ad}(H)M \subset M.$$

On voit ainsi que la décomposition (22.5) définit pour  $G/H$  une structure d'espace homogène réductif. La connexion canonique de la structure réductive précédente est dite la connexion canonique de l'espace homogène symétrique. On sait que <sup>(3)</sup> *tout tenseur invariant par  $G$  est à dérivée covariante nulle dans cette connexion.*

Si  $\lambda, \mu \in M$ , on a

$$\underline{S}[\lambda, \mu] = [\underline{S}\lambda, \underline{S}\mu] = [\lambda, \mu]$$

et  $[\lambda, \mu] \in \underline{H}$ . Ainsi dans le cas d'un espace symétrique, le sous-espace  $M$  vérifie

$$(22.7) \quad [M, M] \subset \underline{H}.$$

La théorie des espaces homogènes réductifs <sup>(4)</sup> montre que (22.7) exprime la nullité de la torsion de la connexion canonique d'un espace homogène symétrique.

c. Un espace homogène  $V_n = G/H$  est dit *réductif localement symétrique* s'il admet une structure réductive  $\underline{G} = \underline{H} + M$  telle que (22.7) soit satisfaite. Les résultats que nous venons de signaler sont encore valables.

<sup>(3)</sup> Voir Lichnerowicz [4, a].

<sup>(4)</sup> Voir Lichnerowicz [4, a].

On établit aisément que tout espace réductif localement symétrique admet pour revêtement universel un espace homogène symétrique dont la connexion canonique est l'image réciproque de la connexion canonique de l'espace initial.

23. SYMÉTRIE PAR RAPPORT A UN POINT. — A partir de  $S$ , on peut définir des transformations intéressantes de l'espace homogène symétrique  $V_n = G/H$ ; chacune de ces transformations laisse fixe un point de la variété  $V_n$ .

a. Si  $x_0 = pe$ , associons à tout élément  $g$  de  $G$  le point

$$(23.1) \quad y = S(g) x_0.$$

A l'élément  $gh$ , où  $h \in H$ , est associé le point

$$S(gh) x_0 = S(g) S(h) x_0 = S(g) h x_0 = S(g) x_0 = y.$$

Ainsi à tout point  $x = gx_0$  de  $V_n$ , nous pouvons associer le point  $y$  défini par (23.1), qui ne dépend pas du choix de  $g$  dans  $gH$ . Nous désignons par  $S_{x_0}$  la transformation  $x \rightarrow y$  de  $V_n$ , transformation qui laisse fixe le point  $x_0$  et qui vérifie, d'après sa définition,

$$(23.2) \quad S_{x_0} \circ p = p \circ S.$$

Étudions le carré de  $S_{x_0}$ . On a

$$S_{x_0}^2 \circ p = p \circ S^2 = p$$

et  $S_{x_0}$  est une transformation involutive de  $V_n$  ( $S_{x_0}^2 = Id$ ). La transformation  $S_{x_0}$  est dite la *symétrie par rapport au point*  $x_0$ .

Composons  $S_{x_0}$  avec une transformation  $K_\gamma$ , où  $\gamma \in G$ . Pour  $x = gx_0$ , on a

$$K_\gamma[S_{x_0}(x)] = K_\gamma[K_{S(g)}(x_0)] = K_{\gamma S(g)}(x_0) = K_{S(\gamma g)}(x_0) = S_{x_0}[K_{S(\gamma)}(x)].$$

Ainsi, pour tout  $\gamma \in G$ ,

$$(23.3) \quad K_\gamma \circ S_{x_0} = S_{x_0} \circ K_{S(\gamma)}.$$

En particulier,  $S_{x_0}$  commute avec  $K_h$ , quel que soit  $h \in H$ ,

$$(23.4) \quad K_h \circ S_{x_0} = S_{x_0} \circ K_h.$$

b. Étant donné un élément  $g_1$  de  $G$ , considérons la transformation de  $V_n$  définie par

$$K_{g_1} \circ S_{x_0} \circ K_{g_1^{-1}}.$$

Si à  $g_1$ , on substitue l'élément  $g_1 h$ , où  $h \in H$ , on obtient la transformation

$$K_{g_1} \circ K_h \circ S_{x_0} \circ K_{h^{-1}} \circ K_{g_1^{-1}} = K_{g_1} \circ S_{x_0} \circ K_{g_1^{-1}},$$

d'après (23.4). Ainsi à tout point  $x_1 = g_1 x_0$ , on peut associer la transformation  $S_{x_1}$ , ne dépendant que de  $x_1$ , définie par

$$(23.5) \quad S_{x_1} = K_{g_1} \circ S_{x_0} \circ K_{g_1^{-1}} = S_{x_0} \circ K_{S(g_1)g_1^{-1}}.$$

D'après sa définition,  $S_{x_1}$  laisse fixe le point  $x_1$  et est involutive.  $S_{x_1}$  est dite la *symétrie par rapport au point*  $x_1$ .

c. De (23.2), on déduit

$$(S'_{x_0})_0 p' = p' S,$$

où  $(S'_{x_0})_0$  est l'automorphisme de  $C = T_{x_0}$  défini par  $S_{x_0}$ . Si  $\lambda \in M$

$$(S'_{x_0})_0 p' \lambda = p' S \lambda = -p' \lambda.$$

Ainsi, à tout vecteur  $p' \lambda$  de  $C$ ,  $(S'_{x_0})_0$  fait correspondre le vecteur opposé

$$(23.6) \quad (S'_{x_0})_0 = -Id.$$

On établit, d'autre part, aisément que la connexion canonique d'un espace homogène symétrique est invariante par  $S_{x_0}$ , donc par toute symétrie.

Soit  $U$  un voisinage normal de centre  $x_0$  relatif à la connexion canonique. Si  $x \in U$  est différent de  $x_0$ , il existe dans  $U$  un arc géodésique et un seul joignant  $x_0$  à  $x$ ; cet arc est tangent en  $x_0$  à un vecteur  $u$  et le point  $x$  est atteint pour la valeur  $s$  du paramètre affine correspondant à  $(x_0, u)$ . Par la symétrie  $S_{x_0}$  qui laisse invariante la connexion, cet arc géodésique est transformé en un autre arc géodésique d'origine  $x_0$ , tangent en  $x_0$  au vecteur  $-u$ , d'après (23.6) et dont l'extrémité  $S_{x_0} x$  est atteinte pour la valeur  $s$  du paramètre affine correspondant à  $(x_0, -u)$ . Nous obtenons ainsi une construction commode du symétrique par rapport à  $x_0$  d'un point de  $U$ .

Si  $(e_\alpha)$  est une base de  $C$ ,  $(x^\alpha)$  les coordonnées normales correspondantes d'un point  $x$  de  $U$ , la restriction de  $S_{x_0}$  à  $U$  est définie dans ces coordonnées par

$$(23.7) \quad (x^\alpha) \rightarrow (-x^\alpha) \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n).$$

Il en résulte, en particulier, que la symétrie  $S_{x_0}$  admet le point  $x_0$  comme point fixe isolé.

Ces résultats s'étendent à la symétrie  $S_{x_1}$  par rapport à un point arbitraire  $x_1$  de  $V_n = G/H$ .

24. GÉNÉRALITÉS SUR LES OPÉRATEURS ADJOINTS. — a. Considérons un espace homogène  $V_n = G/H$  astreint seulement à admettre un élément de volume  $\eta$  invariant par  $G$ . Si l'intersection des supports de  $f, g \in C^\infty(V_n)$  est compacte, nous posons

$$(24.1) \quad \langle f, g \rangle = \int_{V_n} f(x) g(x) \eta(x).$$

Nous appelons *opérateur adjoint* d'un opérateur différentiel  $D$  de  $V_n$  un opérateur différentiel  $\tilde{D}$  tel que si  $f \in C^\infty(V_n)$  et si  $g \in C^\infty(V_n)$  on ait

$$(24.2) \quad \langle Df, g \rangle = \langle f, \tilde{D}g \rangle.$$

Un tel opérateur existe et est manifestement uniquement déterminé par la condition (24.2).

Soit  $D^{(1)}$  et  $D^{(2)}$  deux opérateurs différentiels de  $V_n$  admettant les adjoints  $\tilde{D}^{(1)}$  et  $\tilde{D}^{(2)}$ . On a, d'après (24.2),

$$\langle D^{(1)}D^{(2)}f, g \rangle = \langle D^{(2)}f, \tilde{D}^{(1)}g \rangle = \langle f, \tilde{D}^{(2)}\tilde{D}^{(1)}g \rangle,$$

Il en résulte que  $D^{(1)}D^{(2)}$  admet l'opérateur adjoint

$$(24.3) \quad (D^{(1)}D^{(2)})^\sim = \tilde{D}^{(2)}\tilde{D}^{(1)}.$$

b. Supposons l'opérateur  $D$  de  $V_n$  invariant par  $G$ . Il en est de même pour  $\tilde{D}$ . De l'invariance de  $\eta$  il résulte, en effet, que si  $\gamma \in G$  :

$$(24.4) \quad \langle K_\gamma^* f, g \rangle = \langle f, K_\gamma^* g \rangle.$$

A l'aide de (24.4), évaluons

$$\langle K_\gamma^* Df, g \rangle = \langle Df, K_\gamma^* g \rangle = \langle f, \tilde{D}K_\gamma^* g \rangle.$$

D'autre part,

$$\langle \tilde{D}K_\gamma^* f, g \rangle = \langle K_\gamma^* f, \tilde{D}g \rangle = \langle f, K_\gamma^* \tilde{D}g \rangle;$$

$D$  étant invariant, les premiers membres des deux relations précédentes sont égaux. Il en résulte que quelle que soit  $f \in C^\infty(V_n)$ ,

$$\langle (\tilde{D}K_\gamma^* - K_\gamma^* \tilde{D})g, f \rangle = 0.$$

Ainsi

$$(\tilde{D}K_\gamma^* - K_\gamma^* \tilde{D})g = 0$$

pour toute fonction  $g \in C_c^\infty(V_n)$ , ce qui entraîne

$$\tilde{D}K_\gamma^* = K_\gamma^* \tilde{D}.$$

Nous énonçons :

**THÉORÈME.** — Si  $G/H$  est un espace homogène admettant un élément de volume invariant, l'opérateur adjoint  $\tilde{D}$  d'un opérateur différentiel invariant  $D$  de  $G/H$  est lui-même invariant.

25. OPÉRATEURS ADJOINTS SUR UN ESPACE HOMOGÈNE SYMÉTRIQUE. — Nous considérons dans la suite un espace homogène symétrique  $V_n = G/H$  admettant un élément de volume  $\eta$  invariant par  $G$ .

a. Le tenseur invariant  $\eta$  est à dérivée covariante nulle dans la connexion canonique. Sur un voisinage  $U$  muni de coordonnées locales,  $\eta$  a pour composantes

$$(25.1) \quad \eta_{\alpha_1 \dots \alpha_n} = \varphi^{\varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_n}},$$

où  $\varepsilon$  est l'indicateur de permutation. Désignons par  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$  les coefficients sur  $U$  de la connexion canonique. Il vient

$$\nabla_\rho \eta_{\alpha_1 \dots \alpha_n} = \partial_\rho \eta_{\alpha_1 \dots \alpha_n} - \sum_{i=1}^n \Gamma_{\alpha_i \rho}^\sigma \eta_{\alpha_1 \dots \sigma \dots \alpha_n} = 0,$$

soit, d'après (25.1),

$$\nabla_\rho \eta_{\alpha_1 \dots \alpha_n} = \left( \frac{\partial_\rho \varphi}{\varphi} - \Gamma_{\sigma\rho}^\sigma \right) \eta_{\alpha_1 \dots \alpha_n} = 0.$$

La connexion étant sans torsion, on obtient sur  $U$

$$(25.2) \quad \Gamma_{\sigma\rho}^\sigma = \Gamma_{\rho\sigma}^\sigma = \frac{\partial_\rho \varphi}{\varphi}.$$

Désignons par  $\bar{\delta}$  l'opérateur de codérivation sur les tenseurs contravariants défini par

$$(25.3) \quad \bar{\delta} : T^{\alpha_1 \dots \alpha_p} \rightarrow \nabla_\rho T^{\rho \alpha_2 \dots \alpha_p}.$$

Si  $V$  est un champ de vecteurs à support relativement compact dans  $U$ ,

$$\bar{\delta}V = \nabla_\rho V^\rho = (\partial_\rho V^\rho + \Gamma_{\sigma\rho}^\rho V^\sigma) = \frac{1}{\varphi} \partial_\rho (V^\rho \varphi)$$

et, par suite,

$$\int_{V_n} \bar{\delta}V \eta = \int \partial_\rho (V^\rho \varphi) dx = 0.$$

On en déduit, selon un procédé standard, que pour tout champ de vecteurs  $V$  à support compact

$$(25.4) \quad \int_{V_n} \bar{\delta}V \eta = 0.$$

b. Soit  $T$  un  $p$ -tenseur contravariant,  $U$  un  $(p-1)$  tenseur covariant tels que l'intersection de leurs supports soit compacte. Si  $V$  est le vecteur défini par

$$V^\rho = \frac{1}{(p-1)!} T^{\rho \alpha_2 \dots \alpha_p} U_{\alpha_2 \dots \alpha_p},$$

on obtient, par intégration par parties,

$$\int_{V_n} (T, \nabla U) \eta = \frac{1}{p} \int_{V_n} \bar{\delta}V \eta - \frac{1}{p} \int_{V_n} (\bar{\delta}T, U) \eta,$$

soit, d'après (25.4),

$$(25.5) \quad \int_{V_n} (T, \nabla U) \eta = - \int_{V_n} (\bar{\delta} T, U) \eta.$$

c. Soit D un opérateur différentiel de  $\mathcal{O}(G/H)$ . Si  $f \in C^\infty(V_n)$ , on peut écrire, d'après (10.6),

$$(25.6) \quad Df = \sum_{q=0}^N (t_{(q)}, \nabla^q f),$$

où les tenseurs symétriques contravariants  $t_{(q)}$  sont invariants par G. Pour  $g \in C_c^\infty(V_n)$ , on a

$$\langle Df, g \rangle = \sum_{q=0}^N \int_{V_n} (t_{(q)} g, \nabla^q f) \eta.$$

En appliquant au terme d'indice q du second membre q fois la relation (25.5), il vient

$$\langle Df, g \rangle = \sum_{q=0}^N \int_{V_n} \frac{(-1)^q}{q!} (f, \bar{\delta}^q (t_{(q)} g)) \eta.$$

Il en résulte que D admet l'opérateur adjoint défini par

$$(25.7) \quad \tilde{D}g = \sum_{q=0}^N \frac{(-1)^q}{q!} \bar{\delta}^q (t_{(q)}, g).$$

L'espace homogène étant symétrique, les  $t_{(q)}$  sont à dérivée covariante nulle dans la connexion canonique et l'on a simplement

$$(25.8) \quad \tilde{D}g = \sum_{q=0}^N (-1)^q (t_{(q)}, \nabla^q g).$$

## 26. TRANSFORMÉ PAR SYMÉTRIE D'UN OPÉRATEUR DE $\mathcal{O}(G/H)$ . —

a. Si  $D \in \mathcal{O}(G/H)$ , considérons l'opérateur différentiel

$$\hat{D} = S_{x_0}^* D S_{x_0}.$$

Cet opérateur est manifestement invariant par G. De (23.3), il résulte en effet que pour  $\gamma \in G$ ,

$$K_\gamma^* \hat{D} = K_\gamma^* S_{x_0}^* D S_{x_0}^* = S_{x_0}^* K_{S(\gamma)}^* D S_{x_0}^* = S_{x_0}^* D K_{S(\gamma)}^* S_{x_0}^* = S_{x_0}^* D S_{x_0}^* K_\gamma^*,$$

c'est-à-dire

$$K_\gamma^* \hat{D} = \hat{D} K_{\gamma_0}^*.$$

b. Supposons  $D$  défini par (25.6) et proposons-nous d'évaluer  $\hat{D}g$ , où  $g$  est une fonction indéfiniment différentiable. Il vient

$$DS_{x_0}^* g = \sum_{q=0}^N (t_{(q)}, \nabla^q S_{x_0}^* g)$$

et

$$S_{x_0}^* DS_{x_0}^* g = \sum_{q=0}^N (S'_{x_0} t_{(q)}, S_{x_0}^* \nabla^q S_{x_0}^* g).$$

La connexion canonique étant invariante par symétrie,  $S_{x_0}^*$  et  $\nabla^q$  commutent, et nous obtenons

$$\hat{D}g = \sum_{q=0}^N (S'_{x_0} t_{(q)}, \nabla^q g).$$

Si  $S_x$  est la symétrie par rapport au point  $x = K_\gamma(x_0)$ , il résulte de (23.5)

$$S_{x_0} = S_x \circ K_{\gamma S(\bar{\gamma}^1)}$$

et

$$[S'_{x_0} t_{(q)}](x) = [S'_x K'_{\gamma S(\bar{\gamma}^1)} t_{(q)}](x) = [S'_x t_{(q)}](x).$$

Au point  $x$ ,  $(S'_x)_x = -Id$  et nous obtenons

$$S'_{x_0} t_{(q)} = (-1)^q t_{(q)}.$$

Ainsi

$$\hat{D}g = \sum_{q=0}^N (-1)^q (t_{(q)}, \nabla^q g)$$

et, d'après (25.8), les opérateurs  $\hat{D}$  et  $\tilde{D}$  coïncident. On a donc

$$(26.1) \quad \tilde{D} = S_{x_0}^* DS_{x_0}^*, \quad D = S_{x_0}^* \tilde{D} S_{x_0}^*.$$

27. THÉORÈME DE COMMUTATIVITÉ. — La relation (26.1) entraîne une conséquence importante : la commutativité de l'algèbre  $\mathcal{O}(G/H)$ . En effet, soient  $D^{(1)}$  et  $D^{(2)}$  deux opérateurs de  $\mathcal{O}(G/H)$ ,  $\tilde{D}^{(1)}$  et  $\tilde{D}^{(2)}$  leurs adjoints respectifs. On a

$$D^{(1)} = S_{x_0}^* \tilde{D}^{(1)} S_{x_0}^*, \quad D^{(2)} = S_{x_0}^* \tilde{D}^{(2)} S_{x_0}^*.$$

Étudions l'adjoint de l'opérateur  $\tilde{D}^{(1)} \tilde{D}^{(2)}$ . D'après (24.3), il est égal à

$$D^{(2)} D^{(1)}.$$

D'autre part, cet opérateur est donné par

$$S_{x_0}^* \tilde{D}^{(1)} \tilde{D}^{(2)} S_{x_0}^* = S_{x_0}^* \tilde{D}^{(1)} S_{x_0}^* S_{x_0}^* \tilde{D}^{(2)} S_{x_0}^* = D^{(1)} D^{(2)}.$$

Ainsi

$$D^{(1)}D^{(2)} - D^{(2)}D^{(1)} = 0,$$

ce qui démontre la commutativité de  $\mathcal{O}(G/H)$ .

**THÉORÈME.** — *Si  $G/H$  est un espace homogène symétrique admettant un élément de volume invariant, l'algèbre  $\mathcal{O}(G/H)$  des opérateurs différentiels invariants est commutative.*

Par passage à un revêtement, on en déduit qu'il y a encore commutativité de  $\mathcal{O}(G/H)$  pour un espace homogène  $G/H$  localement symétrique et admettant une mesure positive invariante par l'action de  $G$ .

Le théorème précédent généralise un résultat de Harish-Chandra et Selberg relatif au cas des espaces homogènes riemanniens symétriques.

#### BIBLIOGRAPHIE.

- [1] I. M. GELFAND, *Spherical functions on symmetric spaces* (Dokl. Akad. Nauk. U. R. S. S., t. 70, 1950, p. 5-8).
- [2] HARISH-CHANDRA, *a. Representations of semi-simple Lie groups* (Trans. Amer. Math. Soc., t. 75, 1953, p. 185-243; t. 76, 1954, p. 26-65 et 234-253); *b. Differential operators on a semi-simple Lie algebra* (Amer. J. Math., t. 79, 1957, p. 87-120).
- [3] S. HELGASON, *a. Differential operators on homogeneous spaces* (Acta Math., t. 102, 1959, p. 239-299); *b. Differential geometry and symmetric spaces*, Academic Press, New-York, 1962.
- [4] A. LICHNEROWICZ, *a. Géométrie des groupes de transformations*, Dunod, Paris, 1958; *b. Opérateurs différentiels invariants sur un espace symétrique* (C. R. Acad. Sc., t. 257, 1963, p. 3548).
- [5] K. NOMIZU, *Invariant affine connections on homogeneous spaces* (Amer. J. Math., t. 76, 1954, p. 33-65).
- [6] A. SELBERG, *Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces.... I.* (Ind. Math. Soc., t. 20, 1956, p. 47-87).
- [7] SÉMINAIRE SOPHUS LIE, *Théorie des Algèbres de Lie*, Paris, 1955.

(Manuscrit reçu le 4 novembre 1963).

