

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ANDRÉ MARCHAUD

Sur les droites de la surface du troisième ordre en géométrie finie. II

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 81, n° 3 (1964), p. 207-265

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1964_3_81_3_207_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES DROITES DE LA SURFACE DU TROISIÈME ORDRE EN GÉOMÉTRIE FINIE (SECOND MÉMOIRE)

PAR M. ANDRÉ MARCHAUD.

INTRODUCTION.

1. Le présent travail concerne les surfaces du troisième ordre telles que je les ai introduites en 1939 dans un Mémoire publié en hommage à Jacques Hadamard [IV] ⁽¹⁾. Une telle surface est par définition un ensemble fermé S de l'espace projectif, dont toute section plane est une courbe du troisième ordre au plus, l'une d'elles au moins étant exactement du troisième ordre et sans droite. Les courbes considérées sont obtenues directement à partir du continu. Pratiquement la seule hypothèse est celle relative à l'ordre sans qu'il soit fait d'autre convention que celle-ci (impossible à éviter) : un point isolé est compté pour deux. Dans tous les autres cas *un* point compte pour *un*.

La théorie est fondée sur les notions complémentaires de *point régulier* et de *point irrégulier*. Tout point de S par lequel on peut mener une droite (au moins) rencontrant l'ensemble exactement en trois points (trisécante), est *régulier*. Il est *irrégulier* dans le cas contraire. Si trois points d'une droite sont irréguliers, tous le sont et la droite est dite *irrégulière* [IV, n^o 9].

S possède au plus deux droites irrégulières. C'est alors la somme d'un cône et d'une droite isolée passant par son sommet [IV, n^o 13].

(¹) Les chiffres romains entre crochets renvoient à la Bibliographie.

Si S possède une seule droite irrégulière, c'est un cône complété éventuellement par un point isolé, ou bien une surface réglée ayant partout, sauf sur la droite irrégulière, un plan tangent qui varie continûment avec le point de contact [IV, n° 17] ⁽²⁾.

Enfin si S est dépourvue de droite irrégulière, elle possède au plus quatre points irréguliers (non coplanaires s'ils sont quatre). C'est bien une surface au sens ordinaire du mot car le voisinage d'un point régulier m à distance finie est une rondelle de surface simple de Jordan J_m , représentable par une équation $z = f(x, y)$, où f est définie, continue et à nombres dérivés bornés dans un domaine $x^2 + y^2 \leq r^2$, l'axe des z étant une trisécante arbitrairement choisie [IV, n° 6].

2. Dans une Note des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* [X] j'ai signalé que pour toute surface sans droite irrégulière ne contenant pas un cône, il existe entre le nombre $n = 1, 2, 3, 4$, de ses points irréguliers et le maximum N du nombre de ses droites, la relation $N = \frac{1}{2}(n^2 - 13n + 54)$ et que si ce maximum est atteint, les droites de S sont celles (réelles) d'une surface algébrique unique du troisième degré. C'est là un fait remarquable qui ne semble pas avoir été même soupçonné. Pour chaque valeur de n la proposition peut être largement complétée, comme on le verra plus loin.

Le cas $n = 0$, a été traité dans un article rédigé en hommage à la mémoire de Joseph Pérès [XII]. J'y établis la proposition suivante :

Si S est dépourvue de point irrégulier et contient plus de sept droites, ou bien c'est la somme d'un cône et d'un ovoïde ⁽³⁾ disjoints, ou bien elle possède soit 15, soit 27 droites, lesquelles sont dans l'un et l'autre cas les droites réelles d'une surface unique du troisième degré.

L'objet du présent Mémoire est l'étude des cas $n = 1, 2, 3, 4$, qu'on examinera dans l'ordre décroissant. Pour $n = 4$, les choses sont particulièrement simples. Elles se compliquent de plus en plus quand n décroît. Des propriétés obtenues, et compte tenu des résultats de [IV] et [XII], on tirera le théorème général suivant, dont le résultat publié en [X] et qui vient d'être rappelé, est un corollaire immédiat.

THÉORÈME GÉNÉRAL. — *Si une surface S du troisième ordre contient plus de sept droites, c'est :*

*ou bien un cône, complété éventuellement par un ovoïde ou un point isolé;
ou bien une surface réglée à une ou deux directrices rectilignes;*

⁽²⁾ Le cas d'exception signalé dans [IV] a été levé ultérieurement [IX, p. 54].

⁽³⁾ Un ovoïde est une surface non réglée du second ordre [III].

ou bien elle contient exactement :

$$N = 8, 9, 10, 11, 12, 15, 16, 21 \text{ ou } 27 \text{ droites,}$$

qui, sauf pour $N = 8$, lorsque S a deux points irréguliers, déterminent dans chaque cas une surface unique du TROISIÈME DEGRÉ, dont les droites réelles sont celles de S , sauf peut-être si $N = 11$.

Le tableau suivant donne la correspondance entre N et le nombre n des points irréguliers.

N.....	8	9	10	11	12	15	16	21	27
n.....	2,3	2,4	1	1	3	0,1	2	1	0

Dans chaque combinaison, la disposition des droites de S est parfaitement déterminée.

Lorsque $N = 8$, avec $n = 2$, les droites de S déterminent un faisceau linéaire dont les droites réelles d'une certaine famille (qui peut dans certains cas s'étendre à tout le faisceau), sont celles de S .

Lorsque $N = 11$, la surface algébrique déterminée par les droites de S , peut dans certains cas contenir non pas 11, mais 16 ou 21 droites réelles ⁽¹⁾.

Quelques remarques sur la détermination de régions où S possède nécessairement un plan tangent variant continûment avec le point de contact avec application au cas $N = 9$, $n = 4$, terminent le Mémoire.

Enfin une Note jointe est consacrée à la construction de surfaces S non analytiques, dont le type ne se rencontre pas parmi les surfaces du troisième degré.

⁽¹⁾ Ce théorème général a été communiqué à l'Académie des Sciences de Paris (séances des 4 décembre 1963 et 2 mars 1964 ; C. R. Acad. Sc. Paris, 257, p. 3552 et 258, p. 2474).

PREMIÈRE PARTIE.

QUELQUES PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DE S.

3. NOTATIONS. — Précisons les notations qui seront systématiquement employées. Les points seront désignés par des minuscules italiques, les droites par des minuscules grecques; les majuscules représenteront des éléments à plus d'une dimension. Si le point a n'est pas sur la droite α , $[a, \alpha]$ sera le plan déterminé par le point et la droite. Si α et β sont coplanaires, leur plan sera $[\alpha, \beta]$. La notation $[a, b, c]$ désignera le plan défini par les points a, b, c (supposés non alignés).

D'autre part, quand il s'agira des voisinages de S autour d'un nombre fini de points, on les supposera à distance finie. Ceci est permis car la famille des S est invariante par toute transformation homographique.

4. Les résultats annoncés se déduiront de quelques propriétés des S, qui sont spécifiquement de Géométrie finie. Certaines ont été établies dans mes travaux antérieurs. Je les rappellerai brièvement, en renvoyant au Mémoire correspondant. D'autres, nouvelles ou déjà signalées sans démonstration, seront justifiées. Voici celles concernant les courbes planes (pour leur définition on voudra bien se reporter à [IV, n°; 1, 2, 3]). Rappelons d'abord quelques expressions. Soit m un point simple d'une courbe simple d'ordre 3, situé sur une droite δ . On peut prélever sur la courbe, de part et d'autre de m , deux arcs; $\widehat{m'm}$ et $\widehat{m m''}$, l'un et l'autre n'ayant sur δ que le point m .

Si m' et m'' sont assez voisins de m , ces arcs sont d'ailleurs du second ordre [II, n° 18]. On dit que la courbe *traverse* ou *touche* δ en m suivant que les arcs sont ou non de part et d'autre de δ . Dans le second cas, δ est une *tangente*. On dit aussi suivant le cas, que m est une *traversée* ou un *retour*. Les propriétés en question sont les suivantes :

a. Si une droite traverse une courbe du troisième ordre en deux points simples, elle la traverse en un troisième [IV, n° 2].

On en déduit que si une courbe du troisième ordre touche une droite en un point, elle la traverse en un point.

b. Si une courbe du troisième ordre non décomposée possède un point nodal, les quatre demi-tangentes en ce point sont distinctes [XI, n° 13].

Enfin n'oublions pas que tout arc simple plan d'ordre borné (en particulier d'ordre 2 ou 3) admet en chacun de ses points une demi-tangente unique pour chaque côté [II, n° 10].

5. On a remarqué que les sections planes sont seulement supposé être du troisième ordre au plus. *A priori* il ne lui est pas interdit d'avoir des

sections planes se réduisant à un point isolé ou à un ovale. En fait la chose est impossible [IV, n° 8]. Il en résulte que si une section plane de S est du second ordre, c'est un système de deux droites. En Géométrie algébrique ou en Géométrie finie à la manière de C. Juel, on dirait qu'une des droites est double. Il n'en est rien ici où toute hypothèse de commodité est bannie. On étudiera au n° 15 les sections planes du second ordre et ce qui en résulte pour S .

Avant de passer aux propriétés nouvelles ou à celles faisant intervenir les éléments différentiels du premier ordre rappelons l'énoncé du *théorème de dégénérescence* :

Toute S contenant sept droites concourantes est un cône ou l'ensemble d'un cône et d'un ovoïde pouvant se réduire à un point. L'ovoïde s'il existe a au plus un point commun avec le cône, ce point est alors l'unique point irrégulier de S . On dira que S est dégénérée [XI, n° 15].

6. POINTS IRRÉGULIERS DE PREMIÈRE ESPÈCE, DE SECONDE ESPÈCE. — Il a paru utile de distinguer deux sortes de points irréguliers. Un point irrégulier est de *première* ou de *seconde espèce* suivant qu'il est ou non point d'accumulation de points réguliers. Dans l'hypothèse générale où nous nous trouvons dans le présent travail (S possède au plus quatre points irréguliers), les seuls points irréguliers de seconde espèce sont points isolés. Chaque S en a au plus un. Je vais montrer que *la droite joignant deux points irréguliers de première espèce est sur S* . Avant d'aborder la démonstration, remarquons qu'une S peut avoir deux points irréguliers dont un isolé, ce qui ne peut se produire pour une surface du troisième degré. Considérons par exemple la surface de révolution engendrée par une strophoïde droite en tournant autour de son axe; si l'on remplace l'ovoïde engendré par la boucle, par un point isolé intérieur, on obtient une S ayant deux points irréguliers dont un est point isolé.

Soient o et o' deux points irréguliers de première espèce d'une surface S . Si la droite oo' n'est pas sur S , elle ne contient aucun autre point de la surface. On peut tronquer un cône de révolution de sommet o' et d'axe oo' , par deux plans perpendiculaires à oo' , situés de part et d'autre de o , de manière que dans le tronc (solide) obtenu et fermé obtenu : soit U , la surface n'ait aucun point sur les bases. L'ensemble $U \cap S$ est fermé. Je dis que c'est un morceau de surface simple de Jordan ayant un point et un seul sur toute droite du cône solide issue de o' . Il suffira de montrer que chacune de ces droites (autre que oo') contient un point et un seul de $U \cap S$. Soit λ une telle droite. Le point o étant de première espèce, il y a dans $U \cap S$ un point régulier m . Si λ ne rencontre pas $U \cap S$, elle est distincte de $o'm$. Considérons la trace de S sur $[\lambda, m]$, elle comprend celle de J_m , dans laquelle m ne peut être point isolé, car alors o' serait régulier. La section

de S par $[\lambda, m]$ traverse donc $o'm$. Comme elle n'a aucun point sur les bases du tronc, il faut nécessairement qu'elle traverse λ , sans quoi o' ne pourrait être irrégulier. $U \cap S$ est donc bien un morceau de surface simple de Jordan, qui se projette depuis o' sur une des bases de U d'une manière biunivoque et bicontinue. En intervertissant o et o' , on obtiendra un second morceau de surface simple de Jordan : $U' \cap S$, où U' est un tronc analogue à U . Si maintenant on coupe S par un plan R contenant oo' , on aura sur $R \cap S$ deux arcs traversant oo' , l'un en o l'autre en o' . Pour qu'il n'y ait pas contradiction avec notre hypothèse, à savoir que o et o' sont les seuls points de S sur la droite, il faudrait que $R \cap S$ soit du second ordre quel que soit R [n° 4, a]. Mais ceci est impossible en raison du théorème de dégénérescence. La démonstration est achevée.

Ajoutons une remarque quasi évidente, qui sera fréquemment utilisée dans la suite.

Soient sur une S deux droites gauches : θ_1 et θ_2 , et en dehors d'elles un point irrégulier o . La droite $[o, \theta_1] \cap [o, \theta_2]$ est sur S .

En conséquence, une S à point isolé ne peut contenir un système de deux droites gauches.

La première affirmation se justifie par le fait que la droite a trois points distincts sur S : un sur θ_1 , un sur θ_2 et o .

7. A partir de maintenant interviendront les propriétés différentielles des S , car elles en ont de très précises, sans pourtant qu'on en ait supposé aucune. Ces propriétés n'auraient pu être étudiées à fond sans la connaissance d'un théorème fondamental de Géométrie infinitésimale directe, proposition que j'ai fait connaître en 1937 et sur laquelle je suis revenu plus en détail dans [V]. En un point non isolé m d'un ensemble fermé E , une *tangente* est une droite d'accumulation de droites $m'm''$, où les points m' et m'' de E tendent vers m . L'ensemble des tangentes en m est le *faisceau des tangentes* à E en m . On le désignera par $\mathfrak{T}_m(E)$, plus simplement par \mathfrak{T}_m si l'ensemble E n'a pas à être précisé. D'autre part tout élément d'accumulation de demi-droites mm' , où les points m' de E tendent vers m est une demi-tangente en m . Leur ensemble est le *faisceau dérivé* en m à E . Il sera désigné par $\mathcal{O}_m(E)$ ou par $\mathcal{O}_m \cdot \mathfrak{T}_m$ et \mathcal{O}_m sont fermés; la somme de \mathcal{O}_m et de son symétrique par rapport à m est contenue dans \mathfrak{T}_m . M. Georges Bouligand appelle \mathfrak{T} le *paratingent*, \mathcal{O} le *contingent*. L'expression : faisceau dérivé est due à M. F. Roger (*Thèse*, Paris, 1938; *Acta Math.*, t. 69); son origine est évidente. L'élément essentiel du théorème fondamental est le suivant :

Si en un point intérieur m d'une surface simple de Jordan (image biunivoque et bicontinue d'un disque plan), \mathfrak{T}_m ne remplit pas tout l'espace :

ou bien \mathfrak{T}_m est un plan, ou bien c'est un bidièdre (ensemble des plans remplissant deux dièdres symétriques de même arête);

ou bien c'est l'ensemble des plans ne pénétrant pas à l'intérieur d'un vrai cône convexe.

Dans tous les cas les tangentes se répartissent par plans complets : les plans de tangentes.

Le faisceau dérivé \mathcal{O}_m est l'ensemble des demi-tangentes aux sections de la surface par les plans contenant une droite issue de m arbitrairement choisie à l'extérieur de \mathcal{T}_m , proposition due à M. Georges Bouligand.

D'autre part le voisinage de m sur la surface est représentable par une équation $z = f(x, y)$, où l'axe des z est une droite issue de m , étrangère à \mathcal{T}_m , la fonction f étant continue à nombres dérivés bornés.

La proposition qui vient d'être rappelée s'applique évidemment à J_m en tout point régulier d'une S . Nous y reviendrons plus loin. Remarquons dès maintenant que tout plan passant par une trisécante à S issue de m ne peut être un plan de tangentes en ce point.

Observons en passant que l'expression *plan tangent* sera strictement réservée au cas où \mathcal{T}_m est un plan. Lorsque \mathcal{O}_m est plan sans être confondu avec \mathcal{T}_m , ce sera le *plan faisceau dérivé*. Une propriété évidente de \mathcal{T} est que s'il est un plan en m et dans son voisinage, il est continu.

8. POINTS SINGULIERS. — L'irrégularité est une anomalie locale, qui se définit par des considérations globales. Pour les surfaces du troisième degré, il y a identité entre les points irréguliers et les points singuliers. En cherchant une propriété caractéristique locale des points singuliers réels des surfaces du troisième degré, j'ai été conduit à appeler *point singulier* d'une S , un point isolé ou bien un point où la surface est au voisinage du point contenu dans le faisceau des tangentes en ce point [VI]. A la différence de ce qui se passe pour les surfaces cubiques, une S peut avoir des points qui soient à la fois réguliers et singuliers. Mais *tout point irrégulier est nécessairement singulier*. Voici une démonstration de ce fait signalé incidemment, mais sans preuve dans [VI]. La question se pose seulement pour les points irréguliers de première espèce. En effet, si o est un point irrégulier de seconde espèce, il est point isolé de S , ou bien point d'accumulation de points irréguliers uniquement. Par suite o est sur une droite irrégulière δ , et l'on peut l'enfermer dans une petite sphère de centre o de telle sorte que les seuls points de S appartenant à la sphère soient sur δ . Il en résulte que ces points appartiennent au faisceau des tangentes à S en o , lequel se réduit à δ . Le point o est donc singulier.

Supposons le point irrégulier o de première espèce. Si \mathcal{T}_o remplit tout l'espace, il n'y a pas de question. Le seul cas à examiner est celui où il existe des droites issues de o extérieures à \mathcal{T}_o . Soit μ l'une d'elles. Elle n'est pas sur S . On peut par suite enfermer o dans un cylindre de révolution (solide) U , d'axe μ n'ayant sur ses bases aucun point de S . D'autre part,

si U est assez petit dans toutes ses dimensions, toute droite $m' m''$, joignant deux points m' et m'' de $U \cap S$, fera avec μ un angle supérieur à une certaine constante positive. Je dis que $U \cap S$ est un morceau de surface simple de Jordan se projetant sur une base de U parallèlement à μ d'une manière biunivoque et bicontinue. Il suffira de montrer que toute droite λ , parallèle à μ et rencontrant U , a sur $U \cap S$ un point et un seul.

Soit m un point régulier de S , intérieur à U et extérieur à λ . Le plan $[\lambda, m]$ coupe J_m suivant un arc qui traverse nécessairement la parallèle à μ menée par m . Il en résulte que $S \cap [\lambda, m]$ traverse λ en un point unique. L'ensemble $U \cap S$ est donc bien un morceau de surface simple de Jordan auquel s'appliquent les résultats de [V]. Le faisceau dérivé en o s'obtiendra en prenant les demi-tangentes aux sections de $U \cap S$ par les plans Q passant par μ . On va en déduire que $U \cap S$ est contenu dans \mathcal{E}_o et par suite que o est bien singulier.

Soient ot et ot' les demi-tangentes à la section de $U \cap S$ par un plan Q . Supposons-les d'abord non opposées. Il est immédiat que si $U \cap S$ possédait un point intérieur à l'angle $\widehat{tot'}$, ou à son symétrique on pourrait trouver des sécantes δ traversées par $Q \cap S$ en o et en un second point dans U . Mais $Q \cap S$ ne peut être du second ordre (il faudrait que cette section se réduisît à deux droites dont l'une passerait par o). Les sécantes δ seraient des trisécantes [n° 4, a], ce qui est contradictoire avec l'hypothèse. Un raisonnement analogue conduit au même résultat quand les demi-tangentes sont opposées (la question ne se pose évidemment pas si $Q \cap S$ contient une droite passant par m).

Tout point irrégulier est donc bien singulier.

9. POINTS RÉGULIERS-SINGULIERS. — Comme on l'a déjà signalé, une S peut avoir des points qui soient à la fois réguliers et singuliers. Certes il faut être très renseigné sur le voisinage de la surface en un point régulier pour décider s'il est ou non singulier. Mais alors on a d'importantes conclusions dont voici l'essentiel, extrait du théorème final de [VI] :

Si une S possède un point régulier-singulier :

1° *C'est la somme d'une surface du troisième ordre Σ et d'une surface du second ordre Ω , ayant au plus un point commun, lequel s'il existe est le seul point irrégulier de S ; lorsque Σ et Ω sont disjoints tous les points de S sont réguliers;*

2° *Ω est un ovoïde à moins que Σ et Ω ne soient des cônes de même sommet, seul point commun.*

On voit qu'il suffirait de ne considérer que les surfaces S non coniques ou dépourvues d'un ovoïde pour qu'il y ait identité entre singularité et irrégularité. Ce serait une hypothèse de commodité sans utilité, car de

toute façon l'étude des points réguliers-singuliers eut été indispensable comme on le constatera plus loin.

10. Les propriétés dont il s'agira maintenant concernent le faisceau dérivé \mathcal{O}_m en un point régulier m d'une S . On se rappelle que J_m est une rondelle de surface représentable par une équation $z = f(x, y)$ où f est définie, continue et à nombre dérivés bornés dans $[x^2 + y^2 \leq r^2]$. A J_m s'appliquent les résultats de [VII] où l'ordre d'un morceau de surface représentable comme J_m est défini d'une manière plus large, en ce sens que segments rectilignes et facettes planes ne sont pas exclus. On y considère l'ordre local en un point : borne inférieure de l'ordre de morceaux intérieurs les uns aux autres et tendant vers le point. On supposera J_m assez petit pour être d'ordre égal à l'ordre local en m . J_m sera donc d'ordre 2 ou 3. S'il est d'ordre 2, il sera nécessairement convexe. J'ai montré en effet, que si un morceau de surface d'ordre 2 n'est pas convexe, il fait partie d'une vraie quadrique réglée [V, n° 22] et d'autre part qu'une S ne peut contenir une telle surface [IV, n° 5].

Quoi qu'il en soit, le faisceau dérivé \mathcal{O}_m est un demi-cône simple (ensemble de demi-droites issues du sommet et rencontrant une courbe simple tracée sur une sphère centrée sur le point). \mathcal{O}_m est l'ensemble des demi-tangentes aux sections par des plans passant par une trisécante issue de m arbitrairement choisie [n° 7].

11. Pour préciser la nature de \mathcal{O}_m , il a été nécessaire d'introduire une notion nouvelle : celle d'ordre conique. Un demi-cône simple est d'ordre conique borné si tout plan passant par son sommet et ne contenant aucun secteur plan du demi-cône, le rencontre suivant un nombre borné de rayons ; son ordre conique est la borne de ces nombres. C'est nécessairement un nombre pair [VII, n°s 12 à 14].

Il n'aurait pas été possible de renoncer à la possibilité de l'existence éventuelle de secteurs plans sans limiter considérablement (pour des raisons de commodité d'ailleurs illusoire) le champ des surfaces S .

Une propriété générale des demi-cônes simples dont nous aurons à faire usage est la suivante :

Si un demi-cône simple d'ordre conique $2K$ possède dans un plan $2K$ éléments distincts, ce sont des rayons isolés, ceux d'entre eux s'il y en a le long desquels le demi-cône ne traverse pas le plan, sont opposés deux à deux et dans leur voisinage, le demi-cône reste d'un même côté du plan [VII, n° 14].

D'autre part, on déduit immédiatement des n°s 19, 20, 21, 23, du même travail, les conclusions suivantes :

1° Le faisceau dérivé \mathcal{O}_m en un point régulier m d'une S , est d'ordre conique 6, 4 ou 2.

2° Si l'ordre conique est 6, J_m est un morceau de cône de sommet m ; S est par suite dégénérée.

3° Si l'ordre conique est 4, \mathcal{O}_m contient un couple de rayons opposés (seuls éléments dans leur plan) dont les supports sont sur S . De plus J_m est compris entre \mathcal{O}_m et son symétrique par rapport à m . Il est par suite contenu dans \mathfrak{C}_m . Le point m est donc dans ce cas régulier-singulier.

4° Un demi-cône simple d'ordre conique 2 est un plan, un dièdre (deux demi-plans de même arête), ou un vrai demi-cône convexe.

De ces quatre propositions on déduit une cinquième dont nous ferons un usage constant :

5° Si trois droites d'une S non dégénérée sont concourantes, mais non coplanaires, leur point commun est irrégulier.

Ajoutons enfin une conséquence immédiate de [VII, n° 25] :

6° Si en un point régulier m , \mathcal{O}_m est un plan, il suffit pour que \mathfrak{C}_m soit ce plan qu'une section de J_m par un plan contenant une trisécante issue de m reste d'un même côté du plan au voisinage de m .

12. On va maintenant déterminer la structure de S lorsque le faisceau dérivé en un point régulier a n'est pas d'ordre conique 2. On vient de voir que si \mathcal{O}_a est d'ordre conique 6, S contient un cône de sommet a . La surface se compose d'un cône (de sommet a) et d'un ovoïde ayant avec le cône un point commun au plus, seul point irrégulier s'il existe [n° 5].

Le cas où \mathcal{O}_a est d'ordre conique 4 nous retiendra plus longtemps. Le point étant régulier-singulier, S est la somme d'une surface du troisième ordre Σ et d'une surface du second ordre Ω . Comme deux droites seulement de S se croisent en a , qui ne saurait être le sommet d'un cône situé sur S , Ω est nécessairement un ovoïde [n° 9]. S contient deux droites δ et δ' , portant les quatre rayons de \mathcal{O}_a . Soit P leur plan. S'il contient une troisième droite de S , comme elle ne passe pas par a , elle n'aura aucun point sur J_a pourvu qu'on le choisisse assez petit. Dans ces conditions nous sommes assurés qu'à l'intérieur de chacun des quatre dièdres ayant pour arête commune une trisécante α issue de a , \mathcal{O}_a et J_a sont simultanément d'un même côté de P . Considérons alors deux dièdres adjacents, si J_a s'y trouve d'un même côté de P , il en sera de même pour \mathcal{O}_a . Autrement dit : le long d'un de ses rayons \mathcal{O}_a ne traversera pas le plan P , il restera donc du même côté de P le long de la demi-droite opposée [n° 11]. En définitive, J_a restera d'un même côté de P . Nous arrivons à une contradiction, car en coupant J_a par un plan Q parallèle à α , le rencontrant à son intérieur, on aurait une droite touchant une courbe du troisième ordre en deux points, ce qui impliquerait des quadrisécantes. J_a traverse donc P le long de chaque rayon de \mathcal{O}_a situé dans son plan. Mais alors la droite $Q \cap P$

traversera $Q \cap S$ sur δ et sur δ' . Ceci implique l'existence d'un troisième point de $Q \cap S$ sur $Q \cap P$ [n° 4, a]. Le plan P contient donc trois droites de S non concourantes : $\delta, \delta', \delta''$. Je dis que ce sont les seules droites de S . Toute autre droite (s'il y en a) se trouve nécessairement sur Σ . Elle croise P sur une (et au plus deux) des trois δ ; elle est par suite gauche avec l'une d'elles au moins. Remplaçons Ω par un point o intérieur, nous obtenons une surface du troisième ordre S' ayant en o un point isolé. Or une telle surface ne peut contenir deux droites gauches [n° 6]. On aboutit à une contradiction.

La surface S possède donc seulement trois droites : $\delta, \delta', \delta''$.

13. Pour l'instant nous savons que Σ et Ω ont au plus un point commun. Je vais montrer qu'ils sont disjoints. Si Σ et Ω ont un point commun b , il est irrégulier pour S [n° 9]. Il est aussi irrégulier pour Σ . S'il en était autrement on aurait pour Σ une trisécante : b, b', b'' , et par suite : $J_b, J_{b'}, J_{b''}$. D'autre part il faudrait qu'il y eût sur Ω des points voisins de b . Mais alors les parallèles à la droite bb' menées par ces points donneraient des quadrisécantes à S .

Ce point b est pour Σ irrégulier de première espèce (il n'est pas isolé et Σ ne contient que trois droites). Le point a est lui aussi irrégulier pour Σ ; autrement on aurait sur S un second ovoïde distinct de Ω . D'autre part a est de première espèce, en raison de l'existence des droites δ . La droite ab est donc sur S [n° 6]; c'est donc δ ou δ' , la première par exemple. Comme tous les points de P appartenant à une seule des droites δ sont évidemment réguliers pour Σ , le point b est nécessairement $\delta \cap \delta''$. Remplaçons provisoirement Ω par un ovoïde Ω_1 strictement intérieur. Nous obtenons une surface S_1 pour laquelle b est régulier. Une trisécante β à S_1 issue de b , donnera un voisinage J_b situé sur Σ . Le faisceau dérivé \mathcal{O}_b est le même pour S_1 et pour Σ . Je dis qu'il est d'ordre conique 4. Il suffit de montrer qu'il n'est pas d'ordre conique 2, car il n'est évidemment pas d'ordre conique 6, ce qui impliquerait l'existence d'un cône [n° 12].

Supposons que par impossible \mathcal{O}_b soit du second ordre conique; c'est alors le plan [δ, δ'']. Un plan Q contenant b mais ni δ ni δ'' , coupera J_b suivant un arc touchant $Q \cap P$ en b . Cet arc ayant deux demi-tangentes opposées on pourra lui mener par b une sécante le traversant en deux points. Mais $Q \cap \Sigma$ ne pouvant être du second ordre, la droite en question est une trisécante pour Σ ; ce qui conduit à une contradiction.

\mathcal{O}_b est donc bien d'ordre conique 4. Prenons à l'intérieur de Ω et en dehors de β un point n voisin de b . Alors toute droite croisant le segment bn à son intérieur aura deux points sur Ω .

Considérons maintenant \mathcal{O}_b . Il se compose de quatre secteurs limités par les quatre demi-droites portées par δ et δ'' , et contenus dans les dièdres

d'arête β , déterminés par δ et δ'' . Les secteurs situés dans deux dièdres opposés sont d'un même côté de $[\delta, \delta''] = P$ [n° 12]. Choisissons ceux qui sont du côté de n et menons par b dans P une droite λ qui leur soit intérieure, satisfaisant de plus aux conditions suivantes : le plan $[\lambda, n]$ ne contient/ ni β , ni aucun des éléments plans éventuels que pourrait posséder \mathcal{O}_b , lesquels sont dénombrables. Dans ces conditions les deux secteurs choisis sur \mathcal{O}_b traversent $[\lambda, n]$ suivant deux demi-droites bt_1 et bt_2 non opposées. Il en résulte que $J_b \cap [\lambda, n]$ possède deux arcs dont les demi-tangentes en b sont bt_1 et bt_2 . Ceci n'est certain que parce que \mathcal{O}_b traverse le plan $[\lambda, n]$ le long des demi-droites bt_1 et bt_2 et que, d'autre part, J_b se projette sur le plan, parallèlement à β d'une manière biunivoque. Comme bt_1 , bt_2 et bn sont d'un même côté de P , une parallèle à $[\lambda, n] \cap P$ et assez voisine coupera J_b en deux points et aussi Ω , c'est-à-dire S en quatre, ce qui est contradictoire. Les deux surfaces Σ et Ω ne peuvent donc avoir en b un point commun.

En définitive :

Si en un point régulier a d'une S le faisceau dérivé est du quatrième ordre conique, la surface est la somme d'une surface du troisième ordre Σ , possédant trois droites coplanaires non concourantes, deux d'entre elles se croisant en a et d'un ovoïde Ω sans point commun avec Σ . De plus tous les points de S sont réguliers.

Le point a est irrégulier pour Σ . Il est d'ailleurs probable que les deux autres points communs à deux droites de Σ le sont aussi; mais je n'ai pu le démontrer rigoureusement. On trouvera dans la Note jointe au Mémoire l'exemple d'une S ayant en trois points réguliers un faisceau dérivé d'ordre conique 4 où naturellement Σ a ces trois points comme points irréguliers.

Ajoutons enfin qu'une conséquence directe de notre étude est la suivante :

Si une surface S possède deux droites gauches, le faisceau dérivé en chacun de ses points réguliers est un plan, un dièdre ou un vrai demi-cône convexe.

14. Nous allons maintenant chercher la nature du faisceau dérivé en un point d'une droite de S contenant un ou deux points irréguliers.

a. Supposons d'abord qu'une droite δ de S contienne un seul point irrégulier o .

Soit m un point donné de δ , distinct de o . Il est régulier, et d'après ce qui précède, \mathcal{O}_m n'est pas d'ordre conique 4. S'il est d'ordre conique 6, S est la somme d'un cône de sommet m et d'un ovoïde ayant avec le cône le seul point commun o , unique point irrégulier de S [n° 12]. La chose ne peut se produire que si o est le seul point irrégulier de S .

Plaçons-nous dans l'hypothèse où S n'est pas dégénérée. \mathcal{O}_m est dans ce cas du second ordre conique; c'est par suite un plan ou un dièdre

d'arête δ . Je dis que c'est nécessairement un plan. Supposons par impossible que \mathcal{O}_m soit un dièdre, et coupons S par un plan R contenant δ , et laissant \mathcal{O}_m d'un même côté au sens strict. Considérons un plan variable Q passant par une trisécante fixe issue de m . Si Q ne contient pas δ , $Q \cap J_m$ présente un *retour* par rapport à $\lambda = Q \cap R$. D'autre part $S \cap R$ est certainement d'ordre 3, par suite λ rencontre S en un point et un seul (en plus de m). La section $R \cap S$ contient donc en dehors de δ , soit une droite φ , soit un ovale passant par o , où il touche δ , car $\mathcal{O}_m \cap R = \delta$. Cette seconde éventualité est à rejeter. Reste la première. Si nous pouvons montrer que la droite φ passe constamment par o , nous aboutirons à une contradiction qui ne pourra être levée que si le faisceau dérivé en m est un plan.

Supposons que $\varphi \cap \delta = a$ soit distinct de o . Ce point est régulier et le faisceau dérivé y est le plan R. Soit α une trisécante issue de a . En coupant J_m par des plans parallèles à α on voit rapidement que toute section par un plan passant par α , mais ne contenant ni φ ni δ , donne sur J_m un arc $\widehat{a'aa''}$ ayant en a une inflexion dont la tangente est dans R. On pourra alors mener par δ un plan R' assez voisin de R pour laisser \mathcal{O}_m d'un même côté au sens strict, et coupant l'arc $\widehat{a'aa''}$ en trois points sans que la droite qui les joint soit dans R'. Il n'est donc pas possible que a soit distinct de o . \mathcal{O}_m est donc bien un plan.

En définitive, nous avons obtenu la proposition suivante :

En tout point régulier d'une droite de S contenant un seul point irrégulier, le faisceau dérivé est un plan sauf peut-être dans le cas où le point irrégulier étant le seul de S, celle-ci est dégénérée.

b. Étudions maintenant le cas où la droite δ contient deux points irréguliers. Nous savons que S ne peut alors être dégénérée [n° 5]. D'autre part, en raisonnant comme dans le cas (a) on verrait que si en un point régulier m , \mathcal{O}_m était un dièdre, toutes les droites φ devraient passer par l'un des points irréguliers de δ , forcément par le même, en raison du théorème de dégénérescence.

Je vais montrer que le plan-faisceau dérivé est stationnaire à l'intérieur de chacun des segments projectifs ayant pour extrémités les deux points irréguliers, soient o et o' . Donnons-nous un point régulier m de δ et une trisécante μ issue de m . Considérons un point m' de δ , intérieur à J_m . Si $\mathcal{O}_{m'}$ est différent de \mathcal{O}_m , les sections de J_m par des plans Q et Q' passant respectivement par m et m' , tout deux parallèles à μ et perpendiculaires à δ donneront dans J_m deux arcs C et C' tangents respectivement à $Q \cap \mathcal{O}_m$ et $Q' \cap \mathcal{O}_{m'}$. Menons par δ un plan R intérieur à celui des deux dièdres définis par \mathcal{O}_m et $\mathcal{O}_{m'}$ ne contenant pas μ . La section de J_m par un plan voisin de $[\mu, \delta]$, passant par la parallèle à μ menée par o , est un arc qui

traverse R en un point au moins, mais un seulement puisque o est irrégulier. On en conclut que $R \cap J_m$ contient un arc compris entre $R \cap Q$ et $R \cap Q'$. Cet arc ne peut appartenir à un ovale de $R \cap S$, car celui-ci devrait passer par o et o' , ni, pour la même raison, à un système de deux droites de S . Il faut donc que $R \cap S$ se réduise à δ et une seconde droite λ coupant δ entre m et m' en un point a . Il est immédiat que J_m change de côté par rapport à R quand on traverse δ ou λ en dehors de a , ce qui est contradictoire le fait que $R \cap S = \delta + \lambda$. Il faut donc que \mathcal{O}_m et $\mathcal{O}_{m'}$ soient confondus. Par continuité on en déduit que le faisceau dérivé est stationnaire à l'intérieur de chacun des segments projectifs oo' .

On ne peut démontrer que les deux positions de ce plan sont confondues, comme cela se produirait si S était algébrique. Dans la Note faisant suite au présent Mémoire, on trouvera un exemple de surface pour laquelle les deux positions sont effectivement distinctes.

15. Nous terminerons cette première partie par l'étude des sections planes d'une S se réduisant à deux droites. Soit P un plan contenant deux droites de S : α et α' , et deux seulement. Désignons par a leur point commun. Donnons-nous un point régulier m , distinct de a , sur α . Soit μ une trisécante issue de m . La droite α partage J_m en deux parties : J_m^1 et J_m^2 . Chacune d'elles a tous ses points n'appartenant pas à α d'un même côté de P , au sens strict. Si, par exemple, J_m^1 avait un point n d'un côté et un point n' de l'autre, sa section par le plan mené par nn' parallèlement à μ , serait un arc traversant P en dehors de α et de α' . On dira que J_m est un *retour* ou une *traversée* par rapport à P , suivant que J_m^1 et J_m^2 sont ou non d'un même côté de P .

Considérons le faisceau \mathcal{O}_m . Il n'est pas d'ordre conique 6, car toutes les droites de S ne passent pas par m [n° 11]. Il n'est pas non plus d'ordre conique 4, ce qui obligerait S à posséder trois droites seulement, et coplanaires [n° 13]. \mathcal{O}_m est donc un dièdre ou un plan. Les choses se passent pareillement en tout point régulier m' , distinct de a sur α' . Les deux points m et m' étant fixés, on peut trouver un plan R , distinct de P , contenant m et m' , de manière que $S \cap R$ ne contienne aucune droite passant par m ou par m' . Il suffit pour en être convaincu d'invoquer le théorème de dégénérescence [n° 5]. $S \cap R$ est alors d'ordre 3, et non décomposée, car si elle contenait une droite, celle-ci croiserait P en dehors de α et de α' . Il est immédiat que ni m ni m' ne sont isolés sur $S \cap R$. Aucun d'eux n'est point nodal. Si, par exemple, m l'était, la section $S \cap R$ aurait en m quatre demi-tangentes distinctes [n° 4, b], lesquelles devraient se trouver sur $R \cap \mathcal{O}_m$. Or R traversant α , $R \cap \mathcal{O}_m$ se réduit à deux demi-droites. Ainsi m et m' sont deux points simples de la courbe non décomposée du troisième ordre $S \cap R$. On en déduit que J_m et $J_{m'}$, ne sont ni deux

retours, ni deux traversées. En effet, dans le premier cas on aurait : dans R des quadrisécantes voisines de mm' ; dans le second cas : un point de S dans P , mais extérieur à α et α' . Il faut donc qu'on ait un retour et une traversée. Supposons que le retour soit en m . En considérant le plan $[\mu, m']$ on voit que m' est régulier. D'autre part, en laissant d'abord m fixe, m' étant choisi arbitrairement, mais régulier, puis en déplaçant m on constatera immédiatement que :

- a. Tout point de α' , sauf peut-être a est régulier;
- b. Toute droite de S autre que α' ne peut croiser α en un point régulier.

On en déduit la conséquence suivante :

- c. Si deux droites concourantes de S sont l'une et l'autre croisées en un point régulier par une droite de S , leur plan contient une troisième droite de la surface.

16. Nous pouvons maintenant compléter nos connaissances relatives au faisceau dérivé aux divers points de la droite δ joignant deux points irréguliers de première espèce. Il résulte immédiatement du numéro précédent que si un certain plan P , passant par δ , coupe S suivant cette droite et une seule autre : λ , le faisceau dérivé en tout point régulier de δ est nécessairement ce plan. On peut même ajouter que ce plan est le faisceau des tangentes, sauf peut-être au point $\lambda \cap \delta$. En effet, si m est un point régulier de δ distinct de $\lambda \cap \delta$, toute section de J_m par un plan (ne contenant pas δ) passant par une trisécante en m , est tangente à P en restant d'un même côté, ce qui suffit pour que $\mathfrak{T}_m = P$ [n° 11, 6°] (*).

Les conditions précédentes seront réalisées si le plan-faisceau dérivé en un point régulier m de δ , contient en dehors de cette droite un point régulier de S . Soit p un tel point, situé dans \mathcal{O}_m , mais extérieur à δ . \mathcal{O}_m est un plan de tangentes en tout point intérieur du segment oo' qui contient m . Par suite, toute droite de \mathcal{O}_m croisant ce segment (ouvert) a au plus un point sur S en dehors de δ [n° 7]. D'autre part, p ne peut être isolé sur $S \cap \mathcal{O}_m$. Dans ce cas J_p serait d'un même côté du plan \mathcal{O}_m et alors ni o ni o' ne seraient irréguliers. On le voit pour o en considérant la section de J_p par un plan passant par o et une trisécante issue de p . Tout ceci exige que $S \cap \mathcal{O}_m$ comprenne en plus de δ , une seule et unique droite : λ . Cette droite peut passer par o ou o' . Enfin il est évident que si un plan autre que P , contient δ et une autre droite de S , il en contient nécessairement deux, l'une passant par o , l'autre par o' .

En conclusion on peut énoncer la proposition suivante, qui complète celle obtenue au n° 14.

(*) Au point $\lambda \cap \delta$, on peut seulement affirmer que le faisceau des tangentes est un bidèdre.

Le faisceau dérivé en un point régulier de la droite δ , joignant deux irréguliers de première espèce : o et o' , est un plan stationnaire pour chacun des deux segments projectifs ayant pour extrémités o et o' .

Si l'un de ces plans contient en dehors de δ un point régulier de la surface, les deux positions du faisceau dérivé sont confondues en un plan unique, contenant, en plus de δ , une droite δ' . Le plan est le faisceau des tangentes en tout point régulier de δ , sauf peut-être en $\delta \cap \delta'$. De plus, les droites autres que δ' croisant δ se répartissent par couples coplanaires, les droites d'un même couple passant : l'une par o , l'autre par o' .



DEUXIÈME PARTIE.

17. Dans cette seconde partie on étudiera la répartition des droites de S suivant le nombre n de ses points irréguliers ($n = 4, 3, 2, 1$). Le cas $n = 0$, a fait l'objet d'un Mémoire spécial [XII].

Précisions d'abord les notations. Les points irréguliers seront notés o_i , où i est un indice au plus égal à 4. Dans l'hypothèse où nous nous plaçons : pas de droite irrégulière, un o_i ne peut-être de seconde espèce que s'il est point isolé de S , laquelle en possède un au plus.

Si o_i et o_j sont de première espèce, la droite $o_i o_j$ est sur S ; on la désignera par δ_{ij} .

Toute droite de S passant par un seul o_i sera une μ , notée μ_i affectée éventuellement d'un indice supérieur.

Toute droite croisant δ_{ij} sans passer par o_i ou o_j sera une λ . D'après le n° 16 elle est unique pour chaque δ_{ij} . On la désignera par λ_{ij} ; son intersection avec δ_{ij} sera l_{ij} .

Enfin toutes les droites de S autres que les précédentes seront des α , désignées par la lettre α , affectée suivant le cas d'indices simples ou doubles ou d'accents.

Les lettres $\delta, \mu, \lambda, \alpha$, sont désormais réservées aux droites de S . On dira : une δ , une μ , une λ , une α . Mais si une droite $o_i o_j$ n'est pas sur S , on ne la désignera pas par δ_{ij} .

Rappelons qu'en raison du théorème de dégénérescence, S ne peut dégénérer que si $n = 0, 1$ ou 2 . Encore faut-il dans ce dernier cas que l'un des points irréguliers soit point isolé [n° 5].

I. — Surfaces à quatre points irréguliers.

18. Nous savons que les quatre o_i sont les sommets d'un tétraèdre. Débarrassons-nous du cas où l'un d'eux : o_1 par exemple, est point isolé. Les seules droites de S sont : $\delta_{12}, \delta_{23}, \delta_{31}$. En effet, toute autre droite serait gauche avec l'une d'elles au moins, ce qui est impossible en raison de o_1 [n° 6]. On trouvera dans la Note jointe au présent Mémoire un exemple de S non analytique ayant quatre points irréguliers dont l'un est isolé. Pour cette surface, le faisceau dérivé le long de chaque δ occupe deux positions.

Supposons maintenant que les quatre points irréguliers de S soient de première espèce. Dans ce cas nous avons six δ_{ij} . Il est immédiat que S ne contient ni μ , ni α . Je vais montrer qu'elle possède trois λ coplanaires. Considérons deux δ opposées, par exemple δ_{12} et δ_{34} . Le plan faisceau

dérivé en un point régulier de δ_{12} ne peut contenir ni o_3 ni o_4 . Il contient par suite un point régulier de δ_{34} , donc une seconde droite de S [n° 16]. Cette droite ne peut-être que λ_{12} . Mais comme elle croise δ_{34} , c'est aussi λ_{34} . De la même manière on montre l'existence de $\lambda_{13} = \lambda_{24}$ et $\lambda_{14} = \lambda_{23}$. Ces trois λ sont coplanaires. Si deux d'entre elles étaient gauches, les plans qu'elles déterminent avec o_1 , donneraient lieu à une μ , or il n'y en a pas. D'autre part le plan $[\lambda_{12}, \lambda_{13}]$, croisant δ_{14} et δ_{23} , contient une troisième droite de S qui ne peut être que λ_{14} . En définitive : S contient exactement neuf droites, six δ et trois λ coplanaires. Désignons par L le plan des λ . Il est immédiat que ces trois droites sont les diagonales du quadrilatère complet suivant lequel L coupe les plans des faces du tétraèdre défini par les quatre o_i . Il est facile de voir que les neuf droites de S déterminent une surface unique du troisième degré, dont elles sont les seules droites réelles.

19. Choisissons comme tétraèdre de référence celui dont les sommets sont les o_i . L'équation du plan de la face opposée à o_i , aura pour équation $x_i = 0$. Comme le plan L ne passe par aucun des o_i , on pourra choisir les coordonnées de façon que son équation soit

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0.$$

Les équations des droites λ s'obtiendront immédiatement. Ce sont :

$$\begin{aligned} \lambda_{12} = \lambda_{34} : & \quad x_1 + x_2 = 0, & \quad x_3 + x_4 = 0; \\ \lambda_{13} = \lambda_{24} : & \quad x_1 + x_3 = 0, & \quad x_2 + x_4 = 0; \\ \lambda_{23} = \lambda_{14} : & \quad x_2 + x_3 = 0, & \quad x_1 + x_4 = 0. \end{aligned}$$

Une surface du troisième degré Σ contenant les six δ , a nécessairement une équation de la forme

$$A_1 x_2 x_3 x_4 + A_2 x_3 x_4 x_1 + A_3 x_4 x_1 x_2 + A_4 x_1 x_2 x_3 = 0,$$

où les A_i sont des constantes. On voit immédiatement que la condition nécessaire et suffisante pour que Σ contienne les trois λ est que les A_i soient égales entre elles. Σ est donc parfaitement déterminée. Son équation s'écrit

$$x_2 x_3 x_4 + x_3 x_4 x_1 + x_4 x_1 x_2 + x_1 x_2 x_3 = 0.$$

On peut vérifier par le calcul que Σ n'a comme droites réelles que celles de S. Mais cela résulte du fait que Σ répond à la même définition que S.

Les résultats obtenus dans le cas $n = 4$, se résument dans le

THÉORÈME I. — *Soit S une surface du troisième ordre possédant exactement quatre points irréguliers : o_1, o_2, o_3, o_4 :*

1° *Si l'un d'eux est point isolé, S contient les seules droites joignant deux à deux les autres points irréguliers;*

2° Si aucun d'eux n'est isolé, S contient exactement neuf droites : six joignant deux à deux les o_i et les trois diagonales du quadrilatère complet suivant lequel un certain plan coupe les quatre plans définis par les o_i . De plus, ces neuf droites sont celles (réelles) d'une surface (unique) du troisième degré.

On peut ajouter que S et Σ se touchent le long de chaque $o_i o_j$.

Ce dernier résultat sera d'ailleurs largement complété au n° 60.

20. Ce théorème I, dont j'ai signalé la seconde partie (sous une forme un peu différente) au Congrès d'Amsterdam [VIII], généralise un résultat de C. Juel, qui avait montré l'existence des neuf droites, sans remarquer toutefois qu'elles étaient celles d'une surface cubique [I].

C'est l'apparition inattendue de l'algèbre dans le cas $n = 4$, qui m'a incité à rechercher si l'on ne la retrouverait pas dans les autres.

II. — Surfaces à trois points irréguliers.

21. Soient o_1, o_2, o_3 , les trois points irréguliers. Débarrassons-nous du cas où l'un d'eux est isolé, soit o_3 . La droite δ_{12} existe. En considérant le plan $[\delta_{12}, o_3]$ on voit que toute autre droite est une λ ou une μ . Si λ_{12} existe il n'y a pas de μ ; elle serait gauche avec λ_{12} . Si λ_{12} n'existe pas, S contient au plus deux μ nécessairement coplanaires [n° 16]. Si donc l'un des o_i est isolé, S contient au plus trois droites.

22. Plaçons-nous dans l'hypothèse où aucun des trois o_i n'est isolé, ce qui a lieu nécessairement si le nombre N des droites de S dépasse 3.

Les droites $\delta_{12}, \delta_{23}, \delta_{31}$, existent. S ne peut contenir en outre que des μ et des λ . Deux μ de même indice inférieur μ_1^1 et μ_1^2 , par exemple, impliquent l'existence de λ_{23} , car leur plan ne contient ni o_2 ni o_3 . D'autre part, trois μ de même indice inférieur ne peuvent être coplanaires (leur plan contiendrait trois droites et un point). Comme chaque λ_{ij} est unique, S contient au plus 12 droites : deux μ de chaque indice inférieur i et trois λ , et bien entendu les trois δ .

23. Voyons les choses de plus près. Désignons par N_μ et N_λ , les nombres respectifs de μ et de λ . Les droites de S seront en nombre $N = 3 + N_\mu + N_\lambda$. Remarquons tout d'abord que deux λ sont nécessairement coplanaires. Si, par exemple, λ_{12} et λ_{23} étaient gauches, la droite $[o_2, \lambda_{12}] \cap [o_2, \lambda_{23}]$ serait une μ_2 coplanaire avec λ_{12} , et l'on pourrait mener dans leur plan des trisécantes issues de o_2 . Mais le plan $[\lambda_{12}, \lambda_{23}]$ croise δ_{13} sur la droite $l_{12}l_{23}$; il contient par suite λ_{13} . Si donc il y a plus d'une λ , il y en a trois, et elles sont coplanaires. On désignera alors leur plan par L .

Nous ferons la discussion en considérant les valeurs successives de N_μ à partir de zéro. Il sera commode de faire intervenir les plans faisceaux dérivés en des points réguliers pris respectivement sur $\delta_{12}, \delta_{23}, \delta_{31}$, qu'on

désignera par Q_{12} , Q_{23} , Q_{31} . Ces trois plans sont distincts de $[o_1, o_2, o_3]$; ils ont en commun un point a . On n'est pas certain *a priori* que chaque Q_{ij} soit l'unique position du faisceau dérivé le long de δ_{ij} . Mais, comme on le verra, ceci est sans inconvénient.

Le tétraèdre de sommets o_i et a sera pris comme tétraèdre de référence. Les plans des faces opposées à o_1, o_2, o_3 , auront pour équations : $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, tandis que $x_4 = 0$, sera celle de $[o_1, o_2, o_3]$.

Remarquons dès maintenant que la surface générale du troisième degré touchant chaque Q_{ij} le long de δ_{ij} , a pour équation

$$(\Sigma) \quad Ax_4^2 + (B_1x_1 + B_2x_2 + B_3x_3)x_4^2 + Cx_1x_2x_3 = 0,$$

où C est différent de zéro.

Les points o_1, o_2, o_3 , sont singuliers pour Σ . Un calcul élémentaire montre qu'elle n'en a pas d'autre, sauf dans le cas où les cinq coefficients A, B_i, C , sont différents de zéro et satisfont à la relation

$$A^2C + 4B_1B_2B_3 = 0.$$

Les coordonnées du quatrième point singulier sont alors

$$\frac{1}{B_1}, \frac{1}{B_2}, \frac{1}{B_3}, -\frac{2}{A}.$$

24. Abordons la discussion annoncée.

1° $N_\mu = 0$: Je dis que dans ce cas $N_\lambda = 0$ ou 3. Il suffit de constater que S ne peut avoir une seule λ , par exemple λ_{23} . Celle-ci coupe Q_{12} en un point régulier, ce qui implique dans ce plan l'existence d'une μ ou d'une seconde λ [n° 16], éventualités l'une et l'autre impossibles. On a donc bien : $N_\lambda = 0$ ou 3.

On obtient un exemple du premier cas en supprimant le point isolé d'une surface S à quatre points irréguliers dont l'un est isolé.

Considérons le second. Les trois λ sont dans un plan L qui ne passe par aucun des o_i [n° 21], ni par a , car alors elles seraient concourantes en un point régulier, ce qui est impossible [n° 11, 5°]. On peut donc choisir les coordonnées de façon que L ait pour équation $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. Les équations des λ seront alors :

$$\begin{aligned} \lambda_{23} : \quad x_1 &= 0, & x_2 + x_3 + x_4 &= 0; \\ \lambda_{31} : \quad x_2 &= 0, & x_3 + x_4 + x_1 &= 0; \\ \lambda_{12} : \quad x_3 &= 0, & x_4 + x_1 + x_2 &= 0. \end{aligned}$$

On constate immédiatement que la condition nécessaire et suffisante pour que Σ contienne les trois λ , est qu'on ait $A = B_1 = B_2 = B_3$. Autrement dit : les six droites de S déterminent un faisceau linéaire de surfaces cubiques

$$Ax_4^2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + Cx_1x_2x_3 = 0.$$

Si une de ces surfaces contient d'autres droites que les δ et les λ , elles sont dans des plans tels que $x_4 = \theta x_1$, où θ est fini et différent de zéro. L'équation donnant les valeurs de θ pour lesquelles la conique complétant δ_{23} dans la section de Σ par le plan se décompose, s'obtient par un calcul facile; c'est $\theta^2 [A\theta^2 - C(\theta + 1)] = 0$. En raison de la symétrie en x_1, x_2, x_3 , on peut donc affirmer que si $C^2 + 4AC$ est négatif, les seules droites réelles de Σ sont celles de S.

On observera que si $C + 4A = 0$, Σ possède un quatrième point singulier, car ici : B_1, B_2, B_3 , sont égaux à A.

25. 2° $N_\mu = 1$: L'unique μ passe par o_1 , par exemple. C'est donc $o_1 a$, car elle doit se trouver dans Q_{12} et Q_{13} . Mais alors a est un point régulier de S se trouvant dans Q_{23} , ce qui implique l'existence de λ_{23} [n° 16]. S contient cinq droites : les trois δ , $o_1 a$ et λ_{23} . On va voir qu'elles déterminent encore un faisceau linéaire de surfaces cubiques, qui toutes (sauf les décomposées) ont pour seules droites celles de S. Dans le cas présent, Σ doit passer par a ; la constante A est par suite nulle. On peut choisir les coordonnées de manière que les équations de λ_{23} soient

$$x_1 = 0, \quad x_2 + x_3 = 0.$$

Dans ces conditions les surfaces Σ contenant les droites de S auront pour équation

$$B(x_2 + x_3)x_4^2 + Cx_1x_2x_3 = 0.$$

On vérifie immédiatement l'affirmation précédente concernant leurs droites.

26. 3° $N_\mu = 2$: Il résulte du n° 16 que les deux μ intéressent deux o_i différents. Si, par exemple, elles contenaient toutes o_1 , il faudrait que S contînt une μ_2 , que λ_{12} existe ou non. Supposons que les deux μ passent : l'une par o_1 , l'autre par o_2 . Toujours en vertu du n° 16, elles sont coplanaires et contenues : l'une dans Q_{13} , l'autre dans Q_{23} . Leur point commun p est par suite sur ao_3 . Les droites λ_{13} et λ_{23} n'existent pas. Il n'y a pas non plus de λ_{12} , car une telle droite étant gauche avec $o_1 p$, cela impliquerait une μ_3 .

Si donc $N_\mu = 2$, S contient cinq droites : les trois δ et deux μ coplanaires (passant par deux o_i). En prenant $x_3 + x_4 = 0$ pour équation du plan des deux μ , on obtient pour les surfaces Σ , le faisceau linéaire

$$A(x_3 + x_4)x_4^2 + Cx_1x_2x_3 = 0.$$

Cette fois encore toutes les surfaces non décomposées du faisceau ont pour seules droites celles de S.

27. 4° $N_\mu = 3$: Dans ce cas, ou bien les trois μ intéressent les trois o_i , ou bien deux seulement. La première éventualité est à rejeter,

car alors deux μ quelconques devraient être concourantes et par suite avoir un point commun. Ceci est impossible, car ce point serait irrégulier [n° 11, 5°; n° 17]. Dans la seconde éventualité on peut supposer qu'il y a deux μ_1 et une μ_2 , par exemple. Les deux premières impliquent l'existence de λ_{23} et, par suite, d'une μ_3 . Le cas $N_\mu = 3$, ne peut donc se présenter.

28. 5° $N_\mu = 4$: Deux des quatre μ passent par le même point o_i soit o_1 . Elles impliquent l'existence de λ_{23} . Les deux autres passent donc : l'une par o_2 , l'autre par o_3 et sont coplanaires. Désignons-les par μ_2 et μ_3 . Leur plan $[\mu_2, \mu_3]$ coupe l'ensemble des deux μ issues de o_1 en deux points : p_2 et p_3 . Les droites μ_2 et μ_3 passent chacune par un de ces points, mais pas par le même, car on aurait dans $[\mu_2, \mu_3]$, trois droites de S, plus un point. Choisissons les notations pour que μ_2 et μ_3 passent respectivement par p_2 et p_3 . Les quatre μ seront :

$$\mu_1^2 = o_1 p_2, \quad \mu_1^3 = o_1 p_3, \quad \mu_2 = o_2 p_2, \quad \mu_3 = o_3 p_3.$$

Mais $[\delta_{12}, \mu_1^3]$ ne contient aucune μ issue de o_2 . Ce plan est donc Q_{12} . De même $[\delta_{13}, \mu_1^2]$ n'est autre que Q_{13} . Par suite λ_{12} et λ_{13} n'existent pas. En définitive, les seules droites de S sont : les trois δ , les quatre μ et λ_{23} . Elles sont entièrement déterminées par les trois Q_{ij} et les plans $[o_1, \lambda_{23}] = [\mu_1^2, \mu_1^3]$ et $[\mu_2, \mu_3]$. On a en effet :

$$\begin{aligned} \lambda_{23} &= [o_1, \lambda_{23}] \cap Q_{23}, & \mu_1^2 &= [o_1, \lambda_{23}] \cap Q_{13}, & \mu_1^3 &= [o_1, \lambda_{23}] \cap Q_{12}, \\ \mu_2 &= [\mu_2, \mu_3] \cap [\delta_{12}, \mu_1^2], & \mu_3 &= [\mu_2, \mu_3] \cap [\lambda_{13}, \mu_1^3]. \end{aligned}$$

La droite λ_{23} , ne passe pas par a , car μ_1^2 et μ_1^3 sont différentes. Il en résulte que $[o_1, \lambda_{23}]$ ne passe par aucun des trois points o_2, o_3, a ; on peut donc choisir les coordonnées de manière qu'il ait pour équation

$$x_2 + x_3 + x_4 = 0.$$

D'autre part, en agissant sur x_1 , on pourra faire en sorte que $x_1 + x_4 = 0$ soit l'équation de $[\mu_2, \mu_3]$. Dans ces conditions, les équations des droites de S, autres que les δ , seront données dans le tableau suivant :

λ_{23} :	$x_1 = 0,$	$x_2 + x_3 + x_4 = 0;$
μ_1^2 :	$x_3 = 0,$	$x_2 + x_4 = 0;$
μ_1^3 :	$x_2 = 0,$	$x_3 + x_4 = 0;$
μ_2 :	$x_1 + x_4 = 0,$	$x_2 + x_4 = 0;$
μ_3 :	$x_1 + x_4 = 0,$	$x_3 + x_4 = 0.$

En écrivant que Σ contient les trois premières, on obtient successivement $A = B_2 = B_3$; $B_1 = 0$. D'où l'équation

$$A x_1^2 (x_2 + x_3 + x_4) + C x_1 x_2 x_3 = 0.$$

Pour que μ_2 et μ_3 soient sur Σ , il faut et il suffit que $A + C = 0$. En définitive, on obtient pour Σ , l'équation

$$x_4^2(x_2 + x_3 + x_4) - x_1x_2x_3 = 0.$$

Ainsi les huit droites de S déterminent *une* surface du troisième degré. On vérifie aisément que les seules droites de Σ sont celles de S.

29. 6° $N_\mu > 4$: Il y a au moins cinq μ : deux passant par o_1 , deux passant par o_2 , par exemple, et une cinquième passant par o_3 . Mais les deux premières impliquent λ_{23} . Il faut donc une seconde passant par o_3 . Nous sommes dans le cas où S contient 12 droites. Je vais montrer qu'elles sont déterminées par les Q_{ij} , le plan L des λ_{ij} et, une μ , soit μ_1^1 , issue de o_1 . Rappelons que λ_{23} , λ_{34} , λ_{12} , sont les intersections respectives des plans

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0,$$

par le plan L :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0.$$

Le système de coordonnées est celui choisi au n° 24. La droite μ_1^1 est définie par des équations

$$\mu_1^1 : \quad x_2 + hx_4 = 0, \quad x_3 + h'x_4 = 0,$$

où h et h' sont des constantes finies et différentes de zéro, car μ_1^1 n'est dans aucun des plans

$$x_4 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0.$$

Comme elle est dans $x_2 + x_3 + x_4 = 0$, on a

$$h + h' = 0,$$

ce qui donne

$$\mu_1^1 : \quad x_2 + hx_4 = 0, \quad x_3 + (1 - h)x_4 = 0.$$

Le plan $[\mu_1^1, \delta_{12}]$ contient une μ issue de o_2 , soit μ_2^1 . Ses équations seront :

$$x_3 + (1 - h)x_4 = 0, \quad x_1 + x_3 + x_4 = 0,$$

ou encore

$$\mu_2^1 : \quad x_1 + hx_4 = 0, \quad x_3 + (1 - h)x_4 = 0.$$

De la même manière on obtient dans $[\mu_1^1, \delta_{13}]$,

$$\mu_3^1 : \quad x_2 + hx_4 = 0, \quad x_1 + (1 - h)x_4 = 0.$$

Les points $\mu_1^1 \cap \mu_2^1$, $\mu_1^1 \cap \mu_3^1$, doivent être distincts, sans quoi trois droites de S seraient concourantes en un point régulier, ce qui, on le sait, est impossible. Il faut par suite que h soit non seulement différent de 0 et de 1, mais de $\frac{1}{2}$.

Il s'agit de déterminer les trois autres μ . Les droites μ_3^1 et λ_{31} sont gauches. La droite $[o_2, \mu_3^1] \cap [o_1, \lambda_{31}]$ est par suite une μ_2 , soit μ_2^2 , dont les équations seront :

$$x_1 + (1 - h)x_4 = 0, \quad x_1 + x_3 + x_4 = 0,$$

ou encore :

$$\mu_2^2 : \quad x_3 + hx_4 = 0, \quad x_1 + (1 - h)x_4 = 0.$$

Cette droite est bien distincte de μ_2^1 puisque h et $1 - h$ sont différents. De la même manière on obtient

$$\mu_3^2 = [o_3, \mu_2^1] \cap [o_3, \lambda_{12}],$$

$$\mu_3^2 : \quad x_1 + hx_4 = 0, \quad x_2 + (1 - h)x_4 = 0.$$

Quant à la seconde μ issue de o_1 , soit μ_1^2 , elle sera donnée par la relation

$$\mu_1^2 = [o_1, \mu_2^2] \cap [o_1, \mu_3^2];$$

d'où ses équations

$$\mu_1^2 : \quad x_3 + hx_4 = 0, \quad x_2 + (1 - h)x_4 = 0.$$

Ainsi, les 12 droites de S sont entièrement déterminées.

On a vu au n° 24 que si une surface Σ contient les trois δ_{ij} et les trois λ_{ij} , son équation est

$$Ax_4^2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + Cx_1x_2x_3 = 0.$$

En écrivant quelle contient μ_1^1 , on a la condition

$$A + Ch(1 - h) = 0,$$

qui détermine complètement Σ , dont l'équation est en définitive,

$$\Sigma : \quad h(h - 1)x_4^2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + x_1x_2x_3 = 0,$$

avec

$$h \neq 0, \quad h \neq 1, \quad h \neq \frac{1}{2}.$$

On constate aisément qu'elle contient les 12 droites de S. En la considérant comme une « S », on voit qu'elle n'a que trois points irréguliers, puisqu'elle contient plus de neuf droites [n° 19].

L'étude des surfaces S à trois points irréguliers est complètement achevée. On peut en résumer l'essentiel dans le

THÉORÈME II. — *Si une surface S du troisième ordre possédant trois points irréguliers, contient plus de trois droites, elle en contient exactement : 5, 6, 8 ou 12.*

Dans chacun des deux premiers cas, les droites déterminent un faisceau linéaire de surfaces du troisième degré, dont celles d'une famille (parfois toutes) ont pour seules droites réelles celles de S.

Dans les deux derniers, les 8 ou 12 droites déterminent chaque fois une surface du troisième degré unique n'ayant d'autres droites réelles que celles de S.

La nature des droites de S peut-être précisée dans tous les cas. On peut ajouter que S et la ou les surfaces cubiques se touchent le long de chacune des droites joignant deux à deux les points irréguliers.

III. — Surfaces à deux points irréguliers.

30. Nous savons qu'une S possédant deux points irréguliers peut dégénérer, mais seulement dans le cas où l'un de ses points est isolé. C'est alors l'ensemble d'un cône et du point isolé [n° 5]. D'après les notations adoptées, o_1 et o_2 , seront les points irréguliers. Si δ_{12} existe on la représentera simplement par δ . De même on supprimera les indices de λ_{12} , qui est unique quand elle existe; la lettre l désignera alors son point sur δ .

31. Examinons d'abord le cas où l'un des points irréguliers, o_2 , par exemple est isolé. On se rappelle que S ne contiendra aucun couple de droites gauches, et d'autre part que trois droites de S, concourantes en un point régulier sont coplanaires [n° 14].

Dans le cas présent les seules droites de S ne peuvent être que des α ou des μ_1 (passant par o_1). Si S possède une α , soit α_1 , toutes les droites de S la croisent et se croisent entre elles. La surface contient donc au plus trois droites (coplanaires si elles sont deux ou trois). Par un procédé analogue à celui indiqué au début du n° 6, on peut construire des modèles de S (à deux points irréguliers dont l'un est isolé) contenant une, deux ou trois α .

Dans le cas où S ne contient que des μ_1 , on peut seulement affirmer que leur nombre ne peut dépasser 6 sans que la surface dégénère. Je n'ai pu construire de S possédant moins de sept μ et aucune α .

32. Supposons maintenant que o_1 et o_2 soient de première espèce, alors S n'est pas dégénérée et δ existe. Il sera commode de donner le même indice supérieur à une μ_1 et une μ_2 coplanaires. Si le plan d'une μ et de δ contient cette seule μ , c'est le plan tangent le long de δ (sauf bien entendu en o_1 et o_2). Cette μ est donc la seule de sa catégorie. On la désignera par μ_1^0 ou μ_2^0 , suivant qu'elle passe par o_1 ou par o_2 . Il est immédiat que λ et une μ^0 ne peuvent exister simultanément.

Considérons maintenant les α . L'existence d'une telle droite implique celle de λ ou d'une μ^0 [n° 16]. Si deux α sont coplanaires, leur plan ne peut évidemment passer par o_1 ou o_2 . Comme ce plan contient nécessairement une troisième droite de S, c'est λ . On voit que trois α ne peuvent être coplanaires. Mais nous savons qu'elles ne peuvent être concourantes

sans être coplanaires. Si donc S contient au moins trois α , un couple d'entre elles est gauche.

33. Il n'y a pas ici de raison *a priori* pour que trois μ de même indice inférieur ne soient pas coplanaires. Il faut par suite examiner le cas où, par exemple, $\mu_1^1, \mu_1^2, \mu_1^3$, sont coplanaires. Il est évident que λ n'existe pas, et d'autre part, que des trois plans $[\delta, \mu_i^i]$ ($i = 1, 2, 3$), l'un d'eux au plus ne contient pas de μ_2 . On peut supposer que c'est éventuellement le dernier. Autrement dit, μ_2^1 et μ_2^2 existent certainement. Désignons par p_1 et p_2 les points $\mu_1^1 \cap \mu_2^1, \mu_1^2 \cap \mu_2^2$. La droite $p_1 p_2$ rencontre μ_1^3 en un point p_3 . Le plan $[\mu_2^1, \mu_2^2]$ contient une troisième droite de S. Si elle passe par o_2 , c'est μ_2^3 . En considérant les traces sur le plan des μ_1 et celui des μ_2 , d'une huitième et éventuelle droite de S, on voit sans peine qu'une telle droite ne peut exister. La surface S possède donc exactement sept droites. En prenant les points o_1, o_2, p_1, p_2 , comme sommets du tétraèdre de référence, on constate aisément qu'elles déterminent un réseau linéaire de surfaces du troisième degré.

34. Supposons maintenant que la troisième droite de $[\mu_2^1, \mu_2^2]$ soit une α . Cette droite α_1 , rencontre μ_1^1 et μ_1^2 , respectivement aux points q_1 et q_2 . Je dis que le plan $[\delta, \mu_1^3]$ contient une μ_2 , c'est-à-dire qu'il n'est pas le plan tangent le long de δ . Admettons par impossible qu'il le soit et considérons sur δ un point régulier m . Le plan $[m, \alpha_1]$ coupe S suivant α_1 et un ovale C, tangent en m à $[\delta, \mu_1^3] \cap [m, \alpha_1]$. On a bien un ovale car il n'y a pas de λ . Projetons cet ovale depuis o_2 sur le plan des μ_1 . Nous obtenons un ovale C' tangent en o_1 à μ_1^3 , et qui par suite traverse chacune des droites μ_1^2 et μ_1^1 en dehors de o_1 . Ces traversées ne sont certainement pas : l'une en p_1 , l'autre en p_2 . Si l'une d'elles était en p_1 , par exemple, il faudrait que C passât par q_1 . Comme le faisceau dérivé en ce point est $[\mu_2^1, \alpha_1]$, C' serait tangent à la droite $p_1 p_2$ et ne pourrait donc passer par p_2 . En conclusion : si le plan $[\delta, \mu_1^3]$ est tangent à S le long de δ , l'ovale C a un point dans l'un au moins des deux plans $[\mu_2^1, \mu_2^2]$ et $[\mu_1^1, \mu_1^2]$, en dehors de $\delta, \mu_1^1, \mu_1^2, \mu_2^1, \mu_2^2$; ce qui conduit à une contradiction.

Le plan $[\delta, \mu_1^3]$ contient donc une troisième droite de S : μ_2^3 , qui évidemment ne passe pas par p_3 (on aurait en p_3 trois droites de S concourantes non coplanaires). On a remarqué au n° 32 que la présence d'une α impliquait celle de λ ou d'une μ^0 . Comme il n'y a pas de λ , S contient une μ^0 : nécessairement μ_1^0 (autrement S aurait quatre droites dans le plan des μ_2). Cette droite μ_1^0 croise α_1 en un point a_1 , distinct de q_1 et de q_2 . En définitive on trouve sur S neuf droites, à savoir : $\delta, \alpha_1, \mu_1^1, \mu_1^2, \mu_1^3, \mu_1^0, \mu_2^1, \mu_2^2, \mu_2^3$. On voit immédiatement qu'elle n'en contient aucune autre en considérant les traces d'une dixième droite éventuelle sur les trois plans $[\delta, p_i]$.

35. Il est remarquable que les neuf droites, dont on vient d'établir l'existence, déterminent une surface unique du troisième degré n'ayant pour droites réelles que celles de S. Pour le démontrer choisissons les points o_1, o_2, p_1, p_2 , comme sommets du tétraèdre de référence, les plans des faces qui leurs sont opposées ayant pour équations (dans l'ordre) :

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0.$$

Comme le plan $[o_1, \alpha_1]$ ne passe par aucun des trois points o_2, p_1, p_2 , on peut choisir les coordonnées de manière qu'il ait pour équation

$$[o_1, \alpha_1] : x_2 + x_3 + x_4 = 0.$$

Celles de α_1 seront alors

$$\alpha_1 : x_2 + x_3 + x_4 = 0, \quad x_1 = 0,$$

d'où celles de μ_1^3 :

$$\mu_1^3 : x_3 + x_4 = 0, \quad x_2 = 0.$$

La droite μ_2^3 est déterminée par sa trace : q sur μ_1^3 , on peut disposer de la coordonnée x_1 , de façon que le plan $[\mu_2^1, \mu_2^3]$ ait pour équation

$$[\mu_2^1, \mu_2^3] : x_1 + x_4 = 0.$$

Ceci donnera pour μ_2^3 :

$$x_1 + x_4 = 0, \quad x_3 + x_4 = 0.$$

Enfin μ_2^0 est déterminée par sa trace a_1 sur α_1 . Ses équations seront :

$$\mu_2^0 : x_2 + x_3 + x_4 = 0, \quad x_3 + ax_1 = 0;$$

où a est une constante donnée différente de 0 et de 1.

L'équation d'une surface du troisième degré Σ contenant les droites $\delta, \mu_1^1, \mu_1^2, \mu_1^3, \mu_1^0, \mu_2^1, \mu_2^2, \alpha_1$, est, ordonnée par rapport à x_1 , nécessairement de la forme

$$k x_1 x_2 (x_3 + ax_4) + x_3 x_4 (x_2 + x_3 + x_4) = 0,$$

où k est une constante. En effet :

1° elle ne comporte aucun terme en x_1^3 ou en x_1^2 , car Σ passe par o_1 et que ce point est singulier;

2° le cône des tangentes en o_1 se décompose en deux plans : celui des $\mu_1 : x_2 = 0$, et $[o_1, \alpha_1] : x_2 + x_3 + x_4 = 0$;

3° pour $x_1 = 0$, on doit trouver en facteur : $x_3 x_4 (x_2 + x_3 + x_4)$.

En écrivant que la surface contient μ_2^3 , on obtient la condition $k(1-a) - 1 = 0$, ce qui donne l'équation cherchée

$$\Sigma : x_1 x_2 (x_3 + ax_4) + (1-a) x_3 x_4 (x_2 + x_3 + x_4) = 0.$$

La surface Σ est donc unique. On peut vérifier analytiquement qu'elle n'a pas d'autres droites réelles que celles de S. Mais ce calcul est inutile. En effet : Σ , considérée comme une S, a deux points irréguliers au moins : o_1

et o_2 ; par le premier passent cinq de ses droites. Or ceci n'a pas lieu pour les surfaces ayant quatre ou trois points irréguliers [nos 19 et 22]. Σ est par suite une S à deux points irréguliers.

36. En plus de son intérêt propre, l'étude des cas où S contient trois μ coplanaires passant par un même point irrégulier va nous permettre d'établir que la surface possède au plus quatre μ de même indice inférieur. Supposons l'existence de cinq μ passant par o_1 , par exemple. Tout groupe de trois d'entre elles est formé de droites non coplanaires. D'autre part, une au plus est unique dans le plan qu'elle définit avec δ . On peut choisir les notations de manière que les couples (μ_1^1, μ_2^1) , (μ_1^2, μ_2^2) , (μ_1^3, μ_2^3) existent. Considérons le plan des quatrième et cinquième μ : μ_1^4, μ_1^5 . Les droites μ_1, μ_2, μ_3 , le coupent en trois points distincts, dont aucun n'est sur μ_1^4 ou μ_1^5 . Ils sont donc alignés, puisque sur la troisième droite de S située dans $[\mu_1^4, \mu_1^5]$. Par suite $\mu_2^1, \mu_2^2, \mu_2^3$ sont coplanaires. Ceci est contradictoire, car il ne devrait y avoir plus de quatre μ de même indice inférieur [nos 34 et 35].

Étudions la répartition des droites de S lorsqu'elle contient $\mu_1^1, \mu_2^1; \mu_1^2, \mu_2^2; \mu_1^3, \mu_2^3; \mu_1^4, \mu_2^4$. Nous sommes assurés que les quatre μ_1^i et les quatre μ_2^i , déterminent dans chaque groupe six plans. Il est immédiat que si i, j, i', j' , est une permutation des entiers 1, 2, 3, 4, la droite $[\mu_1^i, \mu_1^j] \cap [\mu_2^{i'}, \mu_2^{j'}]$ est sur S car elle contient quatre points de la surface. Cette droite ne rencontre pas δ , car deux μ de même indice inférieur ne sont pas coplanaires avec δ . C'est par suite une α . On la désignera par α_{ij} . Comme il n'y a pas de μ^0 , les six α croisent λ dont elles impliquent l'existence. La surface contient certainement 16 droites : huit μ , six α , δ et λ . Elle n'en possède pas d'autres. Une droite supplémentaire, en effet, ne pourrait être qu'une α , laquelle croiserait chaque plan $[\mu_1^i, \mu_2^i]$ sur μ_1^i ou sur μ_2^i , mais pas à leur intersection : p_i . Or elle ne peut rencontrer trois μ de même indice inférieur, il faudrait donc qu'elle en croise deux de chaque sorte et alors soit une α . En définitive : Si S contient huit μ , elle contient exactement 16 droites, dont six α . Ces dernières ont entre elles des relations simples. Considérons α_{ij} et $\alpha_{i'j'}$. Si la suite i, j, i', j' est une permutation des entiers 1, 2, 3, 4, les droites sont concourantes car toutes les deux croisent la droite joignant les points p_i et p_j , lesquels sont sur S . Si au contraire les deux couples $(i, j), (i', j')$ ont un nombre commun, les deux droites sont gauches. Considérons, par exemple, α_{12} et α_{13} . Le plan $[\alpha_{12}, \alpha_{13}]$ contient λ . La droite α_{12} ne pourrait croiser α_{13} qu'au point $\lambda \cap \alpha_{12}$, ce qui donnerait lieu à trois droites concourantes non coplanaires.

37. Je vais montrer que si S possède deux α gauches, elle contient exactement 16 droites, lesquelles sont les seules droites réelles d'une

surface unique du troisième degré. Désignons provisoirement par α' et α'' , les deux α gauches. Les droites $[o_1, \alpha'] \cap [o_1, \alpha'']$ et $[o_2, \alpha'] \cap [o_2, \alpha'']$ sont respectivement une μ_1 et une μ_2 . Soient a'_1 et a''_1 les intersections de la première avec α' et α'' , de même a'_2 et a''_2 celles de la seconde avec les mêmes droites. Le plan $[a'_1, a''_1, a''_2]$ contient deux droites de S; chacune d'elles est croisée en un point régulier par une droite de S. Le plan contient donc une troisième droite de la surface [n° 15, c], laquelle droite passe nécessairement par o_1 (qui autrement serait régulier). Cette troisième droite croise $a'_1 a''_2$ en un point p_3 , différent de a'_1 et de a''_2 . De même le plan $[a'_1, a'_2, a''_2]$ contient une troisième droite de S, qui ne peut être que $o_2 p_3$. Pour les mêmes raisons, il existe sur $a'_2 a''_1$, un point p_4 , distinct de a'_2 et de a''_1 , tel que les droites $o_1 p_4$ et $o_2 p_4$ soient sur S. D'autre part, le plan-faisceau dérivé en un point régulier de δ croise α' et α'' en des points qui ne sont alignés ni avec o_1 , ni avec o_2 . On en déduit que λ existe [n° 16]. Désignons toujours sa trace sur δ par l . Il s'agit en premier lieu de prouver que la donnée de α' et α'' , puis celle de p_3 et de p_4 , puis celle de l déterminent toutes les droites de S. Appelons μ_1^1 et μ_2^2 , les droites $a'_1 a''_1$ et $a'_2 a''_2$; μ_1^3 , μ_1^4 , μ_2^3 , μ_2^4 , les droites $o_1 p_3$, $o_1 p_4$, $o_2 p_3$, $o_2 p_4$; dans ces conditions les droites données α' et α'' , seront respectivement α_{14} et α_{13} (d'après les notations introduites plus haut).

Prenons le tétraèdre $o_1 o_2 p_3 p_4$ pour tétraèdre de référence, les équations des faces opposées aux sommets étant (dans l'ordre) :

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0.$$

Les plans $[\alpha', a''_2]$ et $[\alpha', a''_1]$ contiennent respectivement $o_2 p_3$ et $o_1 p_4$. La droite α' aura par suite des équations de la forme

$$\alpha' = \alpha_{14}: \quad A' x_1 + x_4 = 0, \quad B' x_2 + x_4 = 0.$$

Pour des raisons analogues on pourra se donner les équations de α'' sous la forme

$$\alpha'' = \alpha_{13}: \quad A'' x_1 + x_3 = 0, \quad B'' x_2 + x_4 = 0.$$

Quant au point l , il sera défini par des coordonnées $(k, 1, 0, 0)$. Les constantes A' , B' , A'' , B'' , sont différentes de zéro et doivent satisfaire à la condition : $A'B' \neq A''B''$, puisque α' et α'' sont gauches. En multipliant x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , par des constantes convenables, on peut faire en sorte que $A'' = B'' = -k = 1$. En définitive, on aura, en remplaçant A' et B' par a et b , les données suivantes :

$$\begin{aligned} \alpha_{14}: \quad & a x_1 + x_4 = 0, & b x_2 + x_3 = 0; \\ \alpha_{13}: \quad & x_1 + x_3 = 0, & x_2 + x_4 = 0, & l = (-1, 1, 0, 0); \end{aligned}$$

avec la condition $ab \neq 1$. Les équations de μ_1^1 et μ_2^2 et λ s'obtiennent immédiatement. Ce sont :

$$\begin{aligned} \mu_1^1 : & \quad bx_2 + x_3 = 0, & \quad x_2 + x_4 = 0; \\ \mu_2^2 : & \quad ax_1 + x_4 = 0, & \quad x_1 + x_3 = 0; \\ \lambda : & \quad ab(x_1 + x_2) + ax_3 + bx_4 = 0, & \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{aligned}$$

On en déduit celles de $[\delta, \lambda]$:

$$[\delta, \lambda] : \quad a(b-1)x_3 + b(a-1)x_4 = 0.$$

Ce plan est distinct de $[\delta, p_3]$ et de $[\delta, p_4]$, ce qui exige : $a \neq 1$, $b \neq 1$.

38. Pour obtenir toutes les droites de S, il suffira de connaître les deux μ manquantes : μ_1^2 et μ_2^1 . La droite $\alpha_{12} = [\mu_1^1, \mu_1^2] \cap [\mu_2^3, \mu_2^4]$ est déterminée dans le plan $[\mu_2^3, \mu_2^4]$ qui n'est autre que $x_4 = 0$; par les traces de deux droites connues : μ_1^1 et λ . Pour faciliter les calculs, il sera commode d'introduire la forme linéaire

$$Q \equiv ab(x_1 + x_2) + ax_3 + bx_4 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4),$$

qui peut s'écrire aussi bien :

$$(ab-1)x_1 + abx_2 + ax_3 + bx_4 - (x_2 + x_3 + x_4)$$

ou

$$(ab-1)x_1 + (a-1)(bx_2 + x_3) + (b-1)(x_2 + x_4).$$

Il est immédiat que les points $\lambda \cap (x_4 = 0)$ et $\mu_1^1 \cap (x_4 = 0)$ sont dans le plan $abx_2 + ax_3 + bx_4 - (x_2 + x_3 + x_4)$, dont l'équation s'écrit également

$$(a-1)(bx_2 + x_3) + (b-1)(x_2 + x_4) = 0.$$

Autrement dit, les équations de α_{12} sont : $x_4 = 0$, $Q = 0$. Mais μ_1^2 est dans les plans $[\mu_1^1, \alpha_{12}]$ et $[\delta, \mu_2^2]$ dont les équations sont respectivement

$$(ab-1)x_2 + (a-1)x_3 + (b-1)x_4 = 0, \quad ax_3 - x_4 = 0.$$

En les ajoutant membre à membre après avoir multiplié la seconde par $(b-1)$, on obtient $(ab-1)(x_2 + x_3) = 0$, et par conséquent $x_2 + x_3 = 0$, puisque le coefficient de ce terme est différent de zéro. Les équations de μ_1^2 sont par suite :

$$\mu_1^2 : \quad x_2 + x_3 = 0, \quad ax_2 + x_4 = 0.$$

Celles de μ_2^1 s'obtiendront sans calcul si l'on remarque que l'opération \mathcal{C} , qui consiste à permuter a et b , x_1 et x_2 , x_3 et x_4 , laisse invariante α' , α'' , δ , λ et Q , tandis qu'elle transforme μ_1^1 en μ_2^2 . Il en résulte que μ_2^1 sera la transformée de μ_1^2 ; d'où ses équations

$$\mu_2^1 : \quad x_1 + x_4 = 0, \quad bx_1 + x_3 = 0.$$

Effectuée sur les μ , l'opération \mathcal{O} permute μ_1^3 et μ_2^4 , μ_1^4 et μ_2^3 , μ_1^2 et μ_2^1 , μ_1^1 et μ_2^2 . De la relation générale $\alpha_{ij} = [\mu_1^i, \mu_1^{j'}] \cap [\mu_2^i, \mu_2^{j'}]$, où i, j, i', j' , est une permutation des entiers 1, 2, 3, 4, on déduit immédiatement que \mathcal{O} permute α_{12} et α_{34} , tandis qu'elle laisse invariante toutes les autres α . Les équations de α_{34} sont par suite :

$$\alpha_{34} : x_2 = 0, \quad Q = 0.$$

39. Il reste à établir que les 16 droites sont celles (réelles) d'une surface cubique unique. L'équation générale d'une telle surface ayant o_1 et o_2 pour points singuliers et contenant les droites $\delta, \mu_1^3, \mu_1^4, \mu_2^3, \mu_2^4$, est $x_1 x_2 (u x_3 + v x_4) + x_3 x_4 P$, où u et v sont des constantes et P une forme linéaire. Le plan $u x_3 + v x_4$ est le plan tangent le long de δ . Pour que la surface contienne λ, α_{12} et α_{34} , il faut et il suffit que $u x_3 + v x_4$ et P soient respectivement proportionnels à $M \equiv a(b-1)x_3 + b(a-1)x_4$ et Q , ce qui donne les surfaces Σ_q du faisceau linéaire $x_1 x_2 M + q x_3 x_4 Q = 0$. Il faut montrer que pour une valeur bien déterminée de q , Σ_q contient aussi $\mu_1^1, \mu_2^2, \mu_1^2, \mu_2^1, \alpha_{13}, \alpha_{14}, \alpha_{23}, \alpha_{24}$. Mais Σ_q étant invariante par \mathcal{O} , si elle contient μ_1^1 et μ_1^2 , contiendra aussi μ_2^2 et μ_2^1 . S'il en est ainsi, Σ_q , considérée comme une S , n'aura d'autres points irréguliers que o_1 et o_2 , car elle aura cinq droites passant par chacun d'eux, ce qui on l'a vu ne peut se produire pour les S à trois ou quatre points irréguliers. En définitive, il suffira de s'assurer sur Σ_q de la présence simultanée de $\mu_1^1, \mu_2^2, \alpha_{13}$ et α_{14} , pour être certain que la surface cubique contient les 16 droites et aucune autre. Écrivons pour commencer que μ_1^1 est sur Σ_q . Quand on tient compte des équations de μ_1^1 , en ne conservant que x_1 et x_2 , M et Q deviennent respectivement

$$M = -b(ab-1)x_2, \quad Q = (ab-1)x_1,$$

ce qui donne la condition $q = 1$. D'où l'équation

$$M x_1 x_2 + x_3 x_4 Q = 0.$$

En remarquant que μ_1^2 se déduit de μ_1^1 en permutant seulement a et b et x_3 et x_4 , opération qui laisse encore M et Q invariants, on voit que μ_1^2 est aussi sur Σ . Reste à vérifier les présences de α_{13} et α_{14} . La chose est immédiate pour la première :

$$x_1 + x_3 = 0, \quad x_2 + x_4 = 0.$$

Pour la seconde on calculera encore M et Q en tenant compte des relations

$$a x_1 + x_4 = 0, \quad b x_2 + x_3 = 0,$$

en conservant seulement x_1 et x_2 . On trouve

$$M = -ab[(b-1)x_1 + (a-1)x_2] \quad \text{et} \quad Q = ab[(b-1)x_1 + (a-1)x_2];$$

ce qui achève la vérification.

En définitive, il est bien établi que si S contient deux gauches, elle contient exactement 16 droites, lesquelles sont celles réelles d'une surface unique du troisième degré.

40. Compte tenu des cas déjà étudiés, savoir : S contient trois μ coplanaires de même indice inférieur, S contient deux α gauches, nous allons chercher comment se disposent les droites de S dans les autres cas. Désignons par N_μ et N_α les nombres respectifs de μ et de α . N_α sera au plus égal à 2 et encore faudra-t-il que les deux α si elles existent soient coplanaires.

Je vais montrer que N_μ ne dépassera pas 4. Remarquons d'abord que si S possède deux couples de μ coplanaires, par exemple : (μ_1^1, μ_2^1) et (μ_1^2, μ_2^2) , elle contient certainement deux α coplanaires. En effet, μ_1^1 et μ_1^2 étant chacune croisée en des points réguliers : la première par μ_2^2 en p_1 , la seconde par μ_2^1 en p_2 , le plan $[\mu_1^1, \mu_1^2]$ contient une troisième droite de S [n° 15, c], qui dans l'hypothèse où nous sommes ne peut être une μ . C'est donc une α . De même, il y en a une dans $[\mu_2^1, \mu_2^2]$. Ces deux α sont concourantes car elles croisent nécessairement la droite $p_1 p_2$ au même point. Elles impliquent l'existence de λ .

Si N_μ surpasse 4, il y a au moins trois couples tels que les précédents, donc plus de deux α . Les seuls cas possibles sont donc $N_\mu = 4, 3, 2, 1, 0$, que nous examinerons successivement.

41. 1° $N_\mu = 4$: Les quatre μ se répartissent nécessairement en deux couples qu'on peut appeler (μ_1^1, μ_2^1) et (μ_1^2, μ_2^2) [n° 32]. On vient de voir que S contient alors deux α coplanaires et que λ existe. Prenons comme tétraèdre de référence : o_1, o_2, p_1, p_2 , les équations des plans des faces opposées aux sommets étant (dans) l'ordre :

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0.$$

Le plan des deux α ne passant par aucun des sommets du tétraèdre, on choisira les coordonnées de manière que ce plan soit le plan unitaire $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. Quant à λ , elle sera définie par le plan $[\delta, \lambda]$: $kx_3 + x_4 = 0$, où k est une constante donnée. Les surfaces cubiques ayant o_1 et o_2 comme points singuliers et passant par les quatre μ et λ , δ et les deux α , ont pour équation

$$\sum q \cdot x_1 x_2 (kx_3 + x_4) + qx_3 x_4 (x_1 + x_2 + x_3 + x_4),$$

où q est un paramètre. Elles constituent un faisceau linéaire. On va chercher pour quelles valeurs de q , la surface n'a pas d'autres droites

que celles de S. Pour cela il suffira quelle n'ait pas d'autres μ . La section de Σ_q par un plan $x_4 = ux_3$, se compose de δ et d'une conique située sur le cône

$$(k + u) x_1 x_2 + qu[x_1 + x_2 + (1 + u) x_3] = 0.$$

La condition de décomposition de ce cône s'obtient en annulant le discriminant de l'équation précédente, ce qui donne

$$qu(u + k) [ku^2 + (k + 1 - q)u + 1] = 0.$$

q est différent de zéro, sans quoi Σ_q serait décomposée. La racine $u = 0$, donne μ_1^1 et μ_2^1 ; $u = -k$ donne λ . Le plan $x_3 = 0$, correspond à $u = \infty$. La condition cherchée est donc

$$(k + 1 - q)^2 - 4k < 0.$$

Si k est négatif, Σ_q n'a quel que soit q , aucune autre droite que celles de S. Dans le cas contraire ceci n'aura lieu que pour les surfaces correspondant à un intervalle ouvert de q . Un calcul facile montre que pour les bornes de cet intervalle, Σ_q possède trois points singuliers.

42. $2^\circ N_\mu = 3$: Dans ce cas il n'y a pas de λ . Les trois μ sont si l'on veut : μ_1^0 , μ_1^1 et μ_2^1 . Le plan $[\delta, \mu_1^0]$ est le plan tangent à S le long de δ (sauf bien entendu en o_1 et o_2). Nous sommes assurés que $N_\alpha = 0$ ou 1 ; car deux α impliqueraient l'existence de λ . Si $N_\alpha = 0$, S ne peut contenir que quatre droites : δ et les trois μ . Si $N_\alpha = 1$, la droite α croise nécessairement μ_1^0 . Je dis qu'elle croise aussi μ_1^1 . Supposons par impossible qu'une droite α croise μ_2^1 , ce ne peut être en p_1 . Les droites α et μ_2^1 sont croisées : la première par μ_1^0 , la seconde par μ_1^1 , toutes deux en des points réguliers. Par suite le plan $[\alpha, \mu_2^1]$ contient une troisième droite de S [n° 15, c]. Comme cette droite ne peut être ni une seconde α , ni une quatrième μ , on aboutit à une contradiction. Dans le cas où $N_\alpha = 1$, S ne peut contenir que cinq droites : δ , μ_1^0 , μ_1^1 , μ_2^1 , et une α dans le plan $[\mu_1^0, \mu_1^1]$.

43. $N_\mu = 2$: Les deux μ sont nécessairement une μ_1 et une μ_2 , coplanaires, qu'on peut désigner par μ_1^1 et μ_2^1 . Je dis que dans ce cas λ n'existe pas. En effet, supposons le contraire. Le plan $[\lambda, p_1]$ coupe S suivant λ et un ovale C, tangent en p_1 à $l p_1$, car $[\mu_1^1, \mu_2^1] = M_1$ est le plan tangent à S en p_1 . S'il y avait une droite, elle serait dans M_1 , ce qui est impossible. Il s'agit bien d'un plan unique de tangentes, car C reste au voisinage de p_1 d'un même côté de M_1 , qui est par suite le faisceau des tangentes [n° 14, a]. Il en résulte que J_{p_1} , pris assez petit se projette sur M_1 parallèlement à λ d'une manière biunivoque suivant un domaine convexe (d) ayant p_1 à son intérieur [n° 7]. Menons par λ un plan Q rencontrant μ_1^1 et μ_2^1 à l'intérieur de (d). La section $S \cap Q$ se compose de λ et d'un ovale C_0 dont

les demi-tangentes au point q_1 où il rencontre μ_1^1 , sont opposées car le faisceau dérivé en q_1 est un plan [n° 14, α]. Ces demi-tangentes ne sont pas dans M_1 , car ce plan est traversé par J_1' le long de μ_1^1 . Projetons C sur le plan Q depuis o_1 . Nous obtiendrons un ovale C' dont la tangente en q_1 sera distincte de celle de C_0 . Il en résulte que C' et C_0 ont au moins un second point commun, et par suite qu'il existe au moins une droite issue de o_1 rencontrant C et C_0 en des points évidemment différents. Ceci conduit à une contradiction car la droite en question ne pourrait être qu'une μ_1 . Si donc $N_\mu = 2$, λ n'existe pas. Il n'y a par suite pas de α , car la trace d'une telle droite sur le plan-faisceau dérivé en un point régulier de δ impliquerait l'existence de λ .

En résumé : si $N_\mu = 2$, les seules droites possibles de S sont α et les deux μ (coplanaires avec δ).

44. 4° $N_\mu = 1$: La seule μ est par exemple μ_1^0 . Le plan [μ_1^0, δ] est le plan tangent le long de δ . La droite λ n'existe pas. Les seules possibilités sont donc : soit deux droites, δ et μ_1^0 , soit ces deux droites accompagnées d'une α croisant μ_1^0 .

5° $N = 0$: *A priori* quatre cas sont possibles : δ, λ et deux α coplanaires ; δ, λ et une α ; δ et λ ; δ seule.

45. En discutant l'équation générale des surfaces du troisième degré ayant deux points singuliers : l'un en o_1 l'autre en o_2 , on constate que toutes les combinaisons qui viennent d'être signalées, sauf la dernière sont les seules qu'on obtienne. Je n'ai pas pu décider si dans le champ des S , infiniment plus étendu que celui des surfaces cubiques, une surface à deux points irréguliers peut ne posséder que la seule droite qui les joint. Quoiqu'il en soit, voici à titre d'exemples, des surfaces du troisième degré ayant deux points singuliers : $o_1(x_2 = x_3 = x_4 = 0)$, $o_2(x_1 = x_3 = x_4 = 0)$ et qui réalisent successivement les différentes combinaisons trouvées plus haut, sauf bien entendu la dernière. On indiquera dans chaque cas les droites de la surface.

$$x_2 x_3^2 + x_1 x_2 x_4 + x_3 x_4^2 = 0;$$

$$\delta : x_3 = x_4 = 0; \quad \mu_1^1 : x_2 = x_3 = 0; \quad \mu_2^1 : x_1 = x_3 = 0; \quad \mu_1^0 : x_2 = x_4 = 0.$$

$$x_2 x_3^2 - x_1 x_2 x_4 + x_3 x_4 (x_1 + x_4) = 0;$$

$$\delta : x_3 = x_4 = 0; \quad \mu_1^1 : x_2 = x_3 = 0; \quad \mu_2^1 : x_1 = x_3 = 0; \\ \mu_1^0 : x_2 = x_4 = 0; \quad \alpha : x_2 = 0, \quad x_1 + x_4 = 0.$$

$$x_3^2 + x_1 x_2 x_4 + x_3 x_4^2 = 0;$$

$$\delta : x_3 = x_4 = 0; \quad \mu_1^1 : x_2 = x_3 = 0; \quad \mu_2^1 : x_1 = x_3 = 0.$$

$$(x_2 + x_4) x_3^2 + x_4^2 - x_1 x_2 x_4 = 0;$$

$$\delta : x_3 = x_4 = 0; \quad \mu_1^0 : x_2 = x_4 = 0; \quad \alpha : x_1 = x_2 = x_4 = 0.$$

$$\begin{aligned}
 & x_2 x_3^2 + x_4^3 + x_1 x_2 x_4 = 0; \\
 \delta : & x_3 = x_4 = 0; \quad \mu_1^0 : x_2 = x_4 = 0. \\
 & (x_1 + x_2) x_3^2 + x_4 (x_4^2 - x_1 x_2) = 0; \\
 \delta : & x_3 = x_4 = 0; \quad \lambda : x_4 = 0, \quad x_1 + x_2 = 0; \\
 \alpha' \text{ et } \alpha'' : & x_1 + x_2 + 2x_4 = 0, \quad (x_1 - x_2)^2 - 8x_3^2 = 0. \\
 & (x_1 + x_2) (x_3^2 + x_3 x_4 + x_4^2) + x_2 x_2 x_4 = 0; \\
 \delta : & x_3 = x_4 = 0; \quad \lambda : x_1 + x_2 = 0, \quad x_4 = 0; \quad \alpha : x_1 = x_2 = 0. \\
 & (x_1 + x_2) (x_3^2 + x_4^2) - x_1 x_2 (x_3 + x_4) = 0; \\
 \delta : & x_3 = x_4 = 0; \quad \lambda : x_1 + x_2 = 0, \quad x_3 + x_4 = 0.
 \end{aligned}$$

46. Les résultats concernant le cas $n = 2$, peuvent être résumés dans le

THÉORÈME III. — Soit S une surface du troisième ordre possédant deux points irréguliers :

1° Si l'un de ces points est point isolé de la surface, celle-ci se réduit à un cône complété par le point isolé, ou bien possède au plus six droites;

2° Si les deux points sont de première espèce, le nombre N (supposé > 1) des droites de S prend les seules valeurs : 16, 9, 8, 7, 5, 4, 3, 2.

Lorsque $N = 16$ ou 9, les droites déterminent dans chaque cas une surface unique du troisième degré, dont les seules droites réelles sont celles de S . Lorsque $N = 8$, les droites de S déterminent un faisceau linéaire de surfaces cubiques dont celles d'une famille (qui peut dans certains cas s'étendre à tout le faisceau) n'ont comme droites que celles de S .

IV. — Surfaces à un seul point irrégulier.

47. Dans ce cas la surface S ne peut contenir que des μ et des α . Pour simplifier l'écriture, on désignera par o le point irrégulier, et les μ seront repérées par un seul indice. Quant aux α , on les répartira en trois catégories. Une α sera dite : *ordinaire, spéciale de première espèce, spéciale de seconde espèce*, suivant qu'elle est croisée par deux μ , par une seule, par aucune. Une α ordinaire sera identifiée par les μ qu'elle croise. La notation α_{ij} , s'explique d'elle-même. Provisoirement on désignera par α' , α'' , ..., les α spéciales. Enfin les α dont on ne sait momentanément si elles sont ordinaires ou non seront notées : $\bar{\alpha}$, $\bar{\bar{\alpha}}$, ...

Il est immédiat que deux α ne peuvent se croiser sur une même μ . Soient $\bar{\alpha}$ et $\bar{\bar{\alpha}}$, deux α gauches (entre elles). La droite $[o, \bar{\alpha}] \cap [o, \bar{\bar{\alpha}}]$ est sur S ; c'est une μ , soit μ_1 . Dans le plan $]\mu_1, \bar{\alpha}]$ la droite μ_1 contient le point irrégulier o . Il résulte alors du n° 15, a et b que le plan contient une troisième droite de S . Si, en effet, il en était autrement, il faudrait que

toutes les droites de S , autres que μ_1 et $\bar{\alpha}$, rencontrent $\bar{\alpha}$, ce qui n'est pas. Cette troisième droite de S est nécessairement une μ , autrement o serait régulier. Par suite $\bar{\alpha}$ est ordinaire; il en est de même de $\bar{\alpha}$. En conséquence : *deux α gauches entre elles sont ordinaires*. Il en résulte que toute α spéciale est croisée par toutes les α , ordinaires ou non.

Lorsque o est point isolé de S , la surface ne contient que des α spéciales. Deux quelconques sont concourantes. D'autre part trois ne peuvent l'être, sans être coplanaires. Si en effet, trois α concourent, leur point commun est régulier. Si les droites ne sont pas coplanaires, la surface est un cône, ou l'ensemble d'un cône et d'un ovoïde ayant avec le cône au plus un point commun, seul point irrégulier de S [n° 12], conclusions, l'une et l'autre, incompatibles avec le fait que o est point isolé de S . Si donc S contient trois α , elles sont coplanaires et il n'y en a pas d'autre, car elle serait gauche avec l'une des trois.

48. Nous supposons maintenant o de première espèce et la surface non dégénérée. Dans ce cas le nombre k des μ est au plus égal à 6 [théorème de dégénérescence]. D'autre part trois α ne peuvent, dans ce cas encore, être concourantes sans être coplanaires.

Occupons-nous pour commencer des α spéciales. Il est immédiat que s'il en existe trois elles sont coplanaires. Il y a donc au plus trois μ . D'autre part S ne peut posséder une quatrième α , car elle serait gauche avec une au moins des α spéciales, ce qui est impossible. Le nombre N des droites de S est au plus égal à 6. Je vais montrer qu'il en est de même si S possède seulement deux α spéciales. Soient α' et α'' , ces deux droites. Elles se croisent en un point régulier a . Si leur plan ne contient pas d'autre droite de S , celle-ci ne peut avoir, en plus de α' et de α'' , que des droites croisant une seule des droites α' et α'' [n° 15, b]. Il en résulte que S n'a pas d'autre α , spéciale ou non et au plus une μ , c'est-à-dire que N est au plus égal à 3. Examinons le cas où le plan $[\alpha', \alpha'']$ contient une troisième droite. C'est une α croisée par deux μ , soient μ_1 et μ_2 . Il faut alors que α' et α'' soient de seconde espèce. En effet supposons, par exemple que α' soit de première espèce. Elle est alors croisée par une μ , soit μ_3 . Le plan $[\mu_1, \mu_3]$ contient une troisième droite rencontrant α'' . Cette droite ne peut être une α car elle serait gauche avec α' . C'est donc une μ . De même il y en aura une seconde dans $[\mu_2, \mu_3]$ croisant aussi α'' , ce qui est contradictoire avec le fait que α'' est spéciale. On en conclut que les seules droites de S sont : trois α , dont deux spéciales de seconde espèce et deux μ , en tout cinq droites. En conclusion :

Si S contient plus de six droites, elle possède au plus une α spéciale.

On supposera désormais $N > 6$. Je vais montrer que la nature de la seule α spéciale détermine alors le nombre k . Remarquons d'abord que

le nombre des α ordinaires est au plus égal à $\frac{k(k-1)}{2}$, ce qui donne $N \leq \frac{k(k+1)}{2} + 1$. Puisque N est supérieur à 6, il en résulte que k est au moins égal à 3.

Supposons d'abord la droite α spéciale de première espèce. Elle croise une μ , soit μ_1 . Désignons-la par α_1 . Nous sommes assurés de l'existence d'au moins deux autres μ , soient μ_2 et μ_3 . Si le plan $[\mu_2, \mu_3]$ ne passe pas par μ_1 , il contient une troisième droite croisant α_1 . Cette droite est certainement α_{23} , car une seule μ croise α_1 . Le plan $[\alpha_1, \alpha_{23}]$ contient une troisième droite de S , une α (ordinaire) car α et α_{23} sont croisées : la première par μ_1 , la seconde par μ_2 , en des points ordinaires [n° 15, c]. Cette α ne croise ni μ_1 , ni μ_2 , ni μ_3 . S contient par suite cinq μ , et cinq seulement. Il suffit pour s'en assurer de considérer les traces des μ sur le plan des trois α . Ces traces ne sont pas à un point d'intersection de deux de ces droites; les α ordinaires en absorbent quatre et α_1 une seule.

Examinons le cas où le plan $[\mu_2, \mu_3]$ contient μ_1 . S'il n'y a aucune autre μ ni aucune autre α , $N = 4$. Il faut donc qu'il y ait d'autres μ ou d'autres α , ce qui ramène au cas précédent.

Si donc S contient une α spéciale de première espèce : $k = 5$.

Supposons maintenant que S contienne une α spéciale de seconde espèce, soit α_0 . Nous sommes certains de l'existence de trois μ au moins, soient μ_1, μ_2, μ_3 . Dans ce cas trois μ ne peuvent être coplanaires, car α_0 devrait croiser l'une d'elles, ce qui serait contradictoire avec sa définition. Il est immédiat que α_{12} existe. Elle croise α_0 , et le plan $[\alpha_0, \alpha_{12}]$, croisé par μ_3 contient une troisième α , rencontrant μ_3 , mais ni μ_1 ni μ_2 . Ceci implique l'existence d'une μ_4 . En considérant les traces de toutes les μ possibles sur le plan $[\alpha_0, \alpha_{12}]$, on voit que $k = 4$. De plus on se rappelle que trois quelconques d'entre elles ne sont pas coplanaires.

SURFACES SANS DROITES α SPÉCIALES.

49. Nous allons étudier (en supposant toujours $N > 6$) les différents types de S , en commençant par celles dont toutes les α sont ordinaires. Dans ce cas N est au plus égal à $\frac{k(k+1)}{2}$, et l'on a cette fois $k > 3$. Les seules valeurs possibles *a priori* sont par suite : 4, 5 ou 6. Je dis que la valeur 5 est à rejeter. Comme S contient plus de 6 droites il y a au moins deux α ordinaires. On distinguera deux cas suivant quelles intéressent quatre ou trois μ . Dans le premier cas on peut supposer que les deux α sont α_{12} et α_{34} . Elles sont coplanaires. Leur plan est traversé par μ_5 et contient par suite une troisième α qui ne croise aucune des quatre : $\mu_1,$

μ_2, μ_3, μ_4 ; car deux α ne peuvent se croiser sur une μ . Cette troisième α impliquant une sixième μ , on aboutit à une contradiction.

Supposons maintenant que les deux α intéressent seulement trois μ . Ce sont si l'on veut α_{12} et α_{13} . L'une au moins des droites μ_4 et μ_5 n'est pas dans $[\mu_2, \mu_3]$, soit μ_4 par exemple. Le plan $[\mu_3, \mu_4]$, traversé par α_{13} , contient une troisième droite de S, nécessairement une α . On est ramené au cas précédent. Il est bien établi que S ne peut avoir cinq μ .

50. SURFACES A QUATRE μ . — Remarquons d'abord que trois d'entre elles sont nécessairement coplanaires. En effet, supposons le contraire et soient $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$, les quatre μ . S contient au moins trois α . Soit α_{12} l'une d'elles. Si l'une des deux autres est α_{34} ; comme elle est coplanaire avec α_{12} , leur plan contient une troisième α , car chacune d'elles est croisée en des points réguliers : l'une par μ_1 et μ_2 , l'autre par μ_3 et μ_4 [n° 15, c]; cette troisième droite ne rencontre aucune des μ . Elle est par suite spéciale. Or nous sommes dans le cas où il n'y en a pas. Supposons que l'une des α étant α_{12} , aucune des deux autres dont nous sommes assurés de l'existence ne soit α_{34} . Chacune d'elles croisera soit μ_1 , soit μ_2 . On peut supposer que l'une d'elles est α_{13} , alors le plan $[\mu_2, \mu_4]$ croise α_{13} , ce qui conduit encore à une α , qui ne rencontre aucune μ , ce qui est impossible.

En résumé dans le cas $k = 4$, trois des μ sont coplanaires. On dira qu'elles forment un *triplet*. Désignons par μ_1, μ_2, μ_3 , les μ coplanaires. Les trois α dont l'existence est certaine, ne peuvent être que $\alpha_{14}, \alpha_{24}, \alpha_{34}$; et il n'y en a évidemment pas d'autre. S contient par suite exactement sept droites. Je vais montrer qu'elles déterminent un faisceau linéaire de surfaces cubiques.

Prenons comme tétraèdre de référence celui dont les sommets sont : $\mu_1 \cap \alpha_{14}, \mu_2 \cap \alpha_{24}, \mu_3 \cap \alpha_{34}, o$, les équations des plans des faces opposées ayant (dans l'ordre) pour équations

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0.$$

Le plan $[\mu_3, \mu_4]$ passe par la droite $x_1 = x_2 = 0$. Comme il est distinct de $[\mu_1, \mu_4]$ et $[\mu_2, \mu_4]$, on peut, en multipliant les coordonnées x_1 et x_2 par des constantes convenables faire en sorte que son équation soit $x_1 + x_2 = 0$. De même le plan défini par $\mu_1 \cap \alpha_{14}$ et α_{24} , passe par la droite $x_3 = x_4 = 0$. Comme il ne contient ni $\mu_3 \cap \alpha_{34}$, ni o , on peut en multipliant les coordonnées x_3 et x_4 par des constantes ramener son équation à $x_3 + x_4 = 0$.

La droite α_{34} est dans un plan $A_2 x_2 + A_3 x_3 + A_4 x_4 = 0$, où A_3 et A_4 sont différents de zéro et différents entre eux, car α_{34} ne croise ni α_{14} , ni α_{24} , et ne passe pas par o . En conséquence on peut prendre pour équations de α_{34} :

$$\alpha_{34} : \quad x_1 + x_2 = 0, \quad ax_2 + x_3 + bx_4 = 0,$$

où a et b sont des constantes données, la seconde étant différente de zéro et de un . Les autres droites auront pour équations

$$\begin{aligned}\mu_1 &: x_2 = x_3 = 0; \\ \mu_2 &: x_1 = x_3 = 0; \\ \mu_3 &: x_1 + x_2 = 0, \quad x_3 = 0; \\ \mu_4 &: x_1 = x_2 = 0; \\ \alpha_{14} &: x_2 = x_4 = 0; \\ \alpha_{24} &: x_1 = 0, \quad x_3 + x_4 = 0.\end{aligned}$$

S'il existe une surface du troisième degré contenant les sept droites, son équation ordonnée par rapport à x_1 sera de la forme

$$ux_1^2x_2 + x_1\varphi(x_2, x_3, x_4) + x_2x_3(x_3 + x_4) = 0.$$

En effet, il n'y a pas de terme en x_1^3 , puisque la surface passe par le sommet $x_2 = x_3 = x_4 = 0$, où son plan tangent est $x_2 = 0$. D'autre part, le terme indépendant de x_1 doit être proportionnel à $x_2x_3(x_3 + x_4)$. Le coefficient de ce terme est différent de zéro sans quoi la surface serait décomposée. φ est une forme quadratique. Elle n'a pas de terme en x_1^2 puisque le point $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, est nécessairement singulier, ni de terme en x_3^2 car le coefficient du terme en x_3^2 dans l'équation complète doit être proportionnel à x_2 , le plan tangent au point $x_1 = x_2 = x_4 = 0$, étant $x_2 = 0$. Pour $x_3 = 0$, l'ensemble des termes restants doit être proportionnel à $x_1x_2(x_1 + x_2)$, pour que μ_1, μ_2, μ_3 , soient sur la surface. Il faut par suite que dans φ les coefficients de x_1^2 et x_2x_4 , soient u et zéro. D'où l'équation

$$ux_1^2x_2 + x_1(ux_2^2 + Ax_2x_3 + Bx_3x_4) + x_2x_3(x_3 + x_4) = 0.$$

Il reste à exprimer que α_{34} est sur la surface, c'est-à-dire que pour $x_1 = -x_2$, le terme $ax_2 + x_3 + bx_4$ est en facteur. La substitution donnant $x_2x_3(-Ax_2 - Bx_4 + x_3 + x_4)$, on en déduit les valeurs de A et de B , et l'équation cherchée

$$\Sigma_u : ux_1x_2(x_1 + x_2) - ax_1x_2x_3 + (1 - b)x_1x_3x_4 + x_2x_3(x_3 + x_4) = 0.$$

On obtient un faisceau linéaire dont chaque surface contient les sept droites. Il faut voir si elle n'en contient pas d'autres. Pour cela nous considérerons Σ_u comme une « S ». Elle a en o un point irrégulier. Si elle en possède un autre c'est un second point singulier o' et la droite oo' est sur Σ_u , donc sur le cône des tangentes en o , dont l'équation est

$$x_3[(1 - b)x_1 + x_2] = 0.$$

On trouve d'abord, dans $x_3 = 0$, les droites μ_1, μ_2, μ_3 . Elles sont à rejeter car tous leurs points, sauf o sont réguliers. Restent les droites

possibles dans $(1 - b)x_1 + x_2 = 0$. Elles sont données par l'équation

$$(1 - b)x_1[x_3^2 - ax_1x_3 + bx_1^2] = 0, \quad \text{où } b - 1 \neq 0.$$

Avec $x_1 = 0$, on trouve μ_4 , qui elle aussi est à rejeter, car le plan tangent le long de cette droite n'est pas stationnaire.

En définitive : pour que Σ_n n'ait pas d'autres droites que celles de S, il faut et il suffit que $a - 4bu$ soit négatif, car Σ n'a pas de α spéciale, puisque μ_1, μ_2, μ_3 sont coplanaires [n° 48].

51. Toujours dans l'hypothèse où S est dépourvue de α spéciales nous supposons maintenant $k = 6$ (et $N > 6$). Le nombre N est borné par 21. Il est évidemment diminué lorsqu'il y a des triplets. On commencera par le cas où il y en a. Le lemme suivant facilitera la discussion.

LEMME. — *Une surface S à six μ , contenant plus de six droites ne peut avoir deux triplets ayant une droite en commun.*

Supposons par impossible l'existence de deux tels triplets, on pourra les désigner par μ_1, μ_2, μ_3 et μ_3, μ_4, μ_5 . La droite μ_6 est extérieure aux plans de chacun d'eux. Il est évident que toute α croise une droite de chaque triplet. Nous savons que S possède au moins une α . *A priori* deux circonstances peuvent se produire suivant qu'elle croise ou non μ_3 , c'est-à-dire qu'elle est ou non α_{36} . Dans le premier cas considérons les plans $[\mu_1, \mu_4]$ et $[\mu_1, \mu_5]$. L'un d'eux certainement ne contient pas μ_6 . On peut supposer que c'est le premier. Il contient alors seulement les deux μ : μ_1 et μ_4 . Comme il croise α_{36} , la droite α_{14} existe. On en déduit qu'il en est de même de α_{25} , en considérant la troisième droite du plan $[\mu_2, \mu_5]$.

Si la première α certaine ne croise pas μ_3 , elle croise μ_1 ou μ_2, μ_4 ou μ_5 . On peut choisir les notations de manière que ce soit α_{14} , d'où l'on déduira l'existence de α_{25} et de α_{36} . Dans tous les cas S contient les trois α coplanaires : $\alpha_{14}, \alpha_{25}, \alpha_{36}$. Considérons le plan $[\mu_4, \mu_6]$. S'il ne contenait pas μ_2 , il croiserait α_{25} , ce qui impliquerait l'existence de α_{46} ; mais celle-ci devrait croiser μ_2 , ce qui conduit à une contradiction. Le plan $[\mu_2, \mu_4]$ contient par suite μ_6 . Il en est de même de $[\mu_1, \mu_5]$.

En définitive, on voit que S possède non pas deux, mais quatre triplets et seulement trois α : $\alpha_{14}, \alpha_{25}, \alpha_{36}$, coplanaires. Désignons par P le plan des α , par m_i les points $\mu_i \cap P$, par a_1, a_2, a_3 les points $\alpha_{25} \cap \alpha_{36}, \alpha_{36} \cap \alpha_{14}, \alpha_{14} \cap \alpha_{25}$. Les droites $\alpha_{14} = m_1m_4, \alpha_{25} = m_2m_5, m_1m_2, m_4m_5$, forment un quadrilatère complet dont les diagonales sont : m_1m_5, m_2m_4, a_3m_3 . Il sera commode de se placer dans le cas où la droite $m_1m_2m_3$ est la droite de l'infini de P, le point o étant lui-même à l'infini. Dans ces conditions les points m_4, m_5, m_6 , seront respectivement les milieux des côtés a_2a_3, a_3a_1, a_1a_2 , du triangle $a_1a_2a_3$. Les points a_1, a_2, a_3 , sont

réguliers. En chacun d'eux le faisceau dérivé est P; mais ce plan est aussi le faisceau des tangentes. En effet, en a_1 , par exemple, J_{a_1} change de côté par rapport à P quand on traverse les droites α_{36} et α_{25} . Il en résulte que la section de J_{a_1} par un plan passant par une trisécante issue de a_1 , et ne contenant ni a_2 , ni a_3 reste d'un même côté de P, ce qui justifie notre affirmation [n° 11]. Le plan P étant le faisceau des tangentes, la parallèle aux μ_i , menée par a_1 , est extérieure à ce faisceau. Par suite J_{a_1} se projette sur P parallèlement aux μ_i d'une manière biunivoque sur un petit domaine convexe (d_1), ayant a_1 à son intérieur. Il en est de même pour J_{a_2} et J_{a_3} relativement à des domaines (d_2) et (d_3).

En chaque a_i , les secteurs de J_{a_i} qui se projettent parallèlement aux μ_i , à l'intérieur de l'angle du triangle et à l'intérieur de l'angle opposé restent d'un même côté de P. Pour deux sommets au moins ce côté sera le même. Nous l'appellerons le dessus et choisirons les notations de manière que ces deux sommets soient a_1 et a_2 . Prenons un point m' voisin de m_6 sur μ_6 et situé au-dessus de P. Le plan [m' , α_{25}] coupe S suivant α_{25} et un ovale C qui se projette sur P parallèlement aux μ_i suivant un ovale C', qui passe par les points m_1, m_3, m_4, m_6 . Il est immédiat que C' contient un arc $m_3 m_6$ intérieur au triangle $m_4 a_2 m_6$, car les points de J_{a_2} qui se projettent à l'intérieur du triangle $a_1 a_2 a_3$, sont au-dessus de P. Comme C' passe par m_3, m_4, m_6 , il traverse en m_6 les droites $m_3 m_6$ et $a_1 a_2$. Mais on sait qu'en m' le faisceau dérivé est un plan [n° 14]. La droite $P \cap \mathcal{O}_m$, pénètre donc à l'intérieur de l'angle $\widehat{m_3 m_6 a_2}$. En opérant de la même manière sur la section de S par le plan [m' , α_{14}], on arriverait à la conclusion que la droite $P \cap \mathcal{O}_m$ pénètre à l'intérieur de l'angle $\widehat{m_5 m_6 a_1}$. Il y a contradiction. La démonstration du lemme est achevée.

52. SURFACES A SIX μ , AVEC UN TRIPLET (AU MOINS). — Soient μ_1, μ_2, μ_3 , les droites μ formant un triplet. On a déjà remarqué que toute α croise l'une d'elles. Comme nous supposons $N > 6$, il existe au moins une α . On peut choisir les notations de façon que ce soit α_{14} . La droite μ_5 ne peut être à la fois dans [μ_2, μ_4] et [μ_3, μ_4]. On peut supposer qu'elle n'est pas dans le premier. Dans ces conditions α_{25} existe. Elle est coplanaire avec α_{14} . Le plan [α_{14}, α_{25}] contient une troisième droite de S qui ne peut être que α_{36} . Le plan [μ_4, μ_5] contient lui aussi une troisième droite de S, qui ne peut être que α_{36} . Le plan [μ_4, μ_5] contient une troisième droite de S car μ_4 et μ_5 sont croisées respectivement par α_{14} et α_{25} , en des points réguliers [n° 15, c]. Si α_{45} existait, elle devrait croiser une des droites du triplet, ce qui est contradictoire. Par suite la troisième droite de [μ_4, μ_5] ne peut être que μ_3 ou μ_6 . Mais d'après le lemme c'est certainement μ_6 . Les six μ forment deux triplets : μ_1, μ_2, μ_3 ; μ_4, μ_5, μ_6 , sans droite commune.

Nous savons que α_{14} , α_{25} , α_{36} existent. On en déduit immédiatement que si μ_i et μ_j appartiennent l'une au premier triplet, l'autre au second, α_{ij} existe, car le plan $[\mu_i, \mu_j]$ croise l'une des trois droites : α_{14} , α_{25} , α_{36} . En définitive S contient 15 droites : les six μ et neuf α .

Je vais montrer que les 15 droites déterminent *une* surface cubique, dont les droites réelles sont celles de S. Prenons comme tétraèdre de référence celui dont les sommets sont :

$$a_1 = \alpha_{25} \cap \alpha_{36}, \quad a_2 = \alpha_{36} \cap \alpha_{14}, \quad a_3 = \alpha_{14} \cap \alpha_{25} \quad \text{et } o,$$

les équations des plans des faces opposées étant

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0.$$

Les plans $[\mu_1, \mu_2, \mu_3]$ et $[\mu_4, \mu_5, \mu_6]$ ne passent par aucun des a_i et leur droite commune ne croise aucune droite $a_i a_j$. En multipliant les coordonnées x_1, x_2, x_3 , par des constantes convenables on pourra faire en sorte que les équations des deux plans soient

$$\begin{aligned} [\mu_1, \mu_2, \mu_3] : & \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0; \\ [\mu_4, \mu_5, \mu_6] : & \quad ax_1 + bx_2 + x_3 = 0; \end{aligned}$$

où a et b seront des constantes données différentes de zéro et de un .

Les couples de droites coplanaires $(\alpha_{15}, \alpha_{24})$, $(\alpha_{16}, \alpha_{34})$, $(\alpha_{26}, \alpha_{35})$ croisent respectivement les droites α_{36} , α_{23} , α_{14} . Le premier est dans un plan passant par $x_3 = x_4 = 0$. En multipliant x_4 par une constante convenable, on pourra supposer que son équation est

$$[\alpha_{15}, \alpha_{24}, \alpha_{36}] : \quad x_3 + x_4 = 0.$$

A partir de ces données, on va déterminer les 15 droites de S. On a immédiatement les équations des μ et celles des α situées dans $x_4 = 0$. Ce sont :

$$\begin{aligned} \mu_1 : & \quad x_1 = 0, & \quad x_2 + x_3 = 0; \\ \mu_2 : & \quad x_2 = 0, & \quad x_1 + x_3 = 0; \\ \mu_3 : & \quad x_3 = 0, & \quad x_1 + x_2 = 0; \\ \mu_4 : & \quad x_1 = 0, & \quad bx_2 + x_3 = 0; \\ \mu_5 : & \quad x_2 = 0, & \quad ax_1 + x_3 = 0; \\ \mu_6 : & \quad x_3 = 0, & \quad ax_1 + bx_2 = 0; \\ \alpha_{14} : & \quad x_1 = x_4 = 0; \\ \alpha_{25} : & \quad x_2 = x_4 = 0; \\ \alpha_{36} : & \quad x_3 = x_4 = 0. \end{aligned}$$

Pour déterminer les autres α , il faut d'abord obtenir celles des $[\mu_i, \mu_j]$. Ce sont :

$$\begin{aligned} [\mu_1, \mu_5] : & \quad ax_1 + x_2 + x_3 = 0; \\ [\mu_2, \mu_4] : & \quad x_1 + bx_2 + x_3 = 0; \\ [\mu_1, \mu_6] : & \quad ax_1 + b(x_2 + x_3) = 0; \\ [\mu_3, \mu_4] : & \quad b(x_1 + x_2) + x_3 = 0; \\ [\mu_2, \mu_6] : & \quad a(x_1 + x_3) + bx_2 = 0; \\ [\mu_3, \mu_5] : & \quad a(x_1 + x_2) + x_3 = 0. \end{aligned}$$

Comme α_{15} et α_{24} sont dans $x_3 + x_4 = 0$, on a immédiatement leurs équations

$$\begin{aligned}\alpha_{15} : x_3 + x_4 = 0, & \quad ax_1 + x_2 + x_3 = 0; \\ \alpha_{24} : x_3 + x_4 = 0, & \quad x_1 + bx_2 + x_3 = 0.\end{aligned}$$

Les deux dernières α , soient α_{26} et α_{35} , s'obtiendront en se rappelant qu'elles croisent : la première α_{14} et α_{15} , la seconde α_{14} et α_{24} . On trouve

$$\begin{aligned}\alpha_{26} : a(x_1 + x_3) + bx_2 = 0, & \quad a(b-1)x_1 + (a-b)x_4 = 0; \\ \alpha_{35} : a(x_1 + x_2) + x_3 = 0, & \quad a(b-1)x_1 + (a-b)x_4 = 0.\end{aligned}$$

L'équation d'une surface du troisième degré contenant les six μ ainsi que α_{14} , α_{25} , α_{36} , s'écrit

$$x_4(x_1 + x_2 + x_3)(ax_1 + bx_2 + x_3) + ux_1x_2x_3 = 0,$$

où u est une constante. Le cône des tangentes au point singulier o est en effet celui des deux triplets. On peut prendre égal à un le coefficient de x_4 . L'identité

$$\begin{aligned}\Sigma : (x_1 + x_2 + x_3)(ax_1 + bx_2 + x_3) \\ \equiv (ax_1 + x_2 + x_3)(x_1 + bx_2 + x_3) - (1-a)(1-b)x_1x_4\end{aligned}$$

permet d'écrire l'équation de la surface sous la forme équivalente :

$$x_4[(ax_1 + x_2 + x_3)(x_1 + bx_2 + x_3) - (1-a)(1-b)x_1x_2] + ux_1x_2x_3 = 0.$$

Pour que Σ contienne α_{15} et α_{24} , il faut et il suffit que

$$u = -(1-a)(1-b),$$

ce qui donne en définitive

$$\Sigma : x_4(x_1 + x_2 + x_3)(ax_1 + bx_2 + x_3) - (1-a)(1-b)x_1x_2x_3 = 0.$$

Pour démontrer Σ que contient les 15 droites de S et, au point de vue réel, aucune autre, on considérera Σ comme une « S ». Il est immédiat que o est son unique point irrégulier. En effet, un second, soit o' serait point singulier de Σ , et la droite oo' serait sur la surface, donc sur le cône des tangentes en o , qui n'est autre que l'ensemble des plans des deux triplets. Il faudrait que o' soit sur une μ , ce qui est impossible car tous les points de ces droites, autres que o , sont évidemment réguliers. D'autre part Σ n'a pas de droite α spéciale puisqu'elle contient six μ [n° 48]. Σ est par suite de même nature que S. Elle contient : α_{14} , α_{25} , α_{36} , les six μ et α_{15} et α_{24} , qui constituaient les données primitives dont on a déduit toutes les droites de S. Les droites réelles de Σ sont donc bien celles de S.

53. SURFACES A SIX μ SANS TRIPLETS. — Soient toujours : μ_1 , μ_2 , μ_3 , μ_4 , μ_5 , μ_6 , les six μ . Elles déterminent 15 plans $[\mu_i, \mu_j]$. Puisque N surpasse 6, nous sommes assurés de l'existence d'une α ordinaire, car

nous nous trouvons encore dans l'hypothèse où S ne contient aucune α spéciale.

On peut supposer que la droite α dont l'existence est assurée est α_{12} . Chaque plan $[\mu_i, \mu_j]$ où i et j ne sont ni 1 ni 2, croise α_{12} , ce qui implique l'existence de α_{ij} , et de proche en proche de toutes les α_{ij} quels que soient i et j . S contient six μ et quinze α ordinaires, soit en tout 21 droites. Le maximum est atteint. Je vais montrer que dans ce cas encore, les droites de S sont celles (réelles) d'une surface du troisième degré.

Donnons-nous : $\alpha_{12}, \alpha_{23}, \alpha_{31}$ et $\alpha_{45}, \alpha_{56}, \alpha_{64}$, les trois premières sont gauches deux à deux et déterminent une quadrique réglée H, sur laquelle se trouvent les trois dernières, car elles croisent chacune des trois premières. Ces six droites et le point o suffisent pour déterminer toutes les droites de S. En effet, on a

$$\begin{aligned} \mu_1 &= [o, \alpha_{12}] \cap [o, \alpha_{31}], & \mu_2 &= [o, \alpha_{23}] \cap [o, \alpha_{12}], & \mu_3 &= [o, \alpha_{31}] \cap [o, \alpha_{23}], \\ \mu_4 &= [o, \alpha_{45}] \cap [o, \alpha_{64}], & \mu_5 &= [o, \alpha_{56}] \cap [o, \alpha_{45}], & \mu_6 &= [o, \alpha_{64}] \cap [o, \alpha_{56}]. \end{aligned}$$

Choisissons pour tétraèdre de référence celui dont les sommets sont : $\mu_1 \cap \alpha_{12}, \mu_2 \cap \alpha_{23}, \mu_3 \cap \alpha_{31}$, et o , les équations des plans des faces opposées à ces points étant (dans l'ordre) :

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0.$$

Les équations des droites $\alpha_{12}, \alpha_{23}, \alpha_{31}$, seront :

$$\begin{aligned} \alpha_{12} : & \quad x_3 = 0, & \quad x_4 + u_1 x_2 = 0; \\ \alpha_{23} : & \quad x_1 = 0, & \quad x_4 + u_2 x_3 = 0; \\ \alpha_{31} : & \quad x_2 = 0, & \quad x_4 + u_3 x_1 = 0; \end{aligned}$$

où les u_i sont des constantes différentes de zéro. On peut disposer des coordonnées de manière que ces constantes soient égales à l'unité, ce qui donnera plus simplement :

$$\begin{aligned} \alpha_{12} : & \quad x_3 = 0, & \quad x_2 + x_4 = 0; \\ \alpha_{23} : & \quad x_1 = 0, & \quad x_3 + x_4 = 0; \\ \alpha_{31} : & \quad x_2 = 0, & \quad x_1 + x_4 = 0. \end{aligned}$$

Les droites $\alpha_{45}, \alpha_{56}, \alpha_{64}$, croisent les trois $\alpha_{12}, \alpha_{23}, \alpha_{31}$. Chacune d'elles a des équations de la forme

$$x_2 + x_4 + r x_3 = 0, \quad r(x_3 + x_4) + (r-1)x_1 = 0,$$

où r est un paramètre différent de zéro et de un . En effet, pour $r=0$, la droite passe par $\mu_2 \cap \alpha_{12}$; pour $r=1$, elle passe par $\mu_3 \cap \alpha_{23}$. Les trois droites $\alpha_{45}, \alpha_{56}, \alpha_{64}$, seront déterminées par trois nombres r_1, r_2, r_3 , distincts entre eux et différents de zéro et de un .

Pour une valeur donnée de r , les coordonnées des points de la droite satisfont aux relations

$$x_2 + x_4 = -rx_3, \quad x_3 + x_4 = \frac{1-r}{r}x_1,$$

d'où l'on tire

$$x_1 + x_4 = -\frac{1}{1-r}x_2.$$

Cherchons l'équation d'une surface cubique contenant μ_1, μ_2, μ_3 et $\alpha_{12}, \alpha_{23}, \alpha_{31}$. Elle ne comportera pas de terme en x_i^3 (la surface passe par les sommets du tétraèdre de référence), ni de terme en x_i^2 (le point o est singulier). Le plan tangent au point $(x_2 = x_3 = x_4 = 0)$ est $x_3 = 0$. Le terme en x_1^2 est par suite : $x_3x_1^2$. Les termes en x_2^2 et x_3^2 s'obtiendront par permutation circulaire. L'équation est donc de la forme

$$A_1x_2x_3^2 + A_2x_3x_1^2 + A_3x_1x_2^2 + B_1x_2x_3x_4 + B_2x_1x_3x_4 + B_3x_1x_2x_4 + B_4x_1x_2x_3 = 0.$$

En écrivant que les droites $\alpha_{12}, \alpha_{23}, \alpha_{31}$, sont sur la surface, on obtient les conditions $A_i = B_i (i = 1, 2, 3)$, ce qui donne

$$A_1x_2x_3(x_3 + x_4) + A_2x_3x_1(x_1 + x_4) + A_3x_1x_2(x_2 + x_4) + B_4x_1x_2x_3.$$

Pour exprimer qu'une génératrice de H de paramètre r est sur la surface, il suffira de remplacer les parenthèses par les expressions données plus haut. Ceci donne après suppression du facteur $x_1x_2x_3$, et mise sous forme entière, l'équation du troisième degré :

$$A_1(1-r) - A_2r - A_3r^2(1-r) + B_4r(1-r) = 0,$$

dont les coefficients sont déterminés à un facteur près par ses racines r_1, r_2, r_3 . La surface est donc elle-même parfaitement déterminée. Comme elle contient les six μ et les six α de départ, elle contient les 21 droites de S. Il s'agit de prouver qu'elle n'en contient pas d'autre. Pour cela on la considérera comme une « S ». Elle n'est pas dégénérée puisque toutes ses droites ne sont pas concourantes. Elle n'a qu'un point irrégulier car elle contient plus de 16 droites [théorèmes I, II et III]. Elle est donc de même nature que S et n'a pas de droite α spéciale puisqu'elle contient six μ [n° 48]. En définitive : toute S possédant six μ sans triplet, contient 21 droites, lesquelles sont les droites réelles d'une surface du troisième degré.

SURFACES A DROITES α SPÉCIALES.

54. Examinons d'abord le cas où la droite α spéciale est de première espèce. Nous avons vu au n° 48 que dans ce cas S contient cinq μ . Cherchons leur disposition. Soit encore α_1 la droite α spéciale et μ_1 la

droite μ qu'elle croise. Les six plans déterminés par $\mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5$, ne peuvent tous contenir μ_1 . On peut supposer que $[\mu_2, \mu_3]$ ne la contient pas. Ceci implique l'existence de α_{23} , puis celle de α_{45} , en considérant le plan $[\alpha_1, \alpha_{23}]$. D'autre part aucune α ne croise μ_1 , car elle serait gauche avec α_1 , ce qui est incompatible avec sa qualité de α spéciale. Il faut donc que $[\mu_1, \mu_2]$ passe par μ_4 ou μ_5 . On peut supposer que c'est μ_4 . Alors $[\mu_1, \mu_2]$ contiendra μ_4 . En définitive S possède deux triplets $[\mu_1, \mu_2, \mu_4], [\mu_1, \mu_3, \mu_5]$, et quatre α_{ij} , réparties en deux couples : $(\alpha_{23}, \alpha_{45})$ et $(\alpha_{34}, \alpha_{25})$, coplanaires l'un et l'autre avec α_1 . S contient exactement 10 droites. Je vais montrer que dans ce cas encore les droites de S déterminent *une* surface cubique dont les droites réelles sont celles de S.

Désignons respectivement par $a_1 a_2 a_3$, les points $\alpha_1 \cap \alpha_{45}$, $\alpha_1 \cap \alpha_{23}$ et $\alpha_{23} \cap \alpha_{45}$, et prenons $a_1 a_2 a_3 o$ comme tétraèdre de référence, les plans des faces opposées aux sommets étant (dans l'ordre) :

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0.$$

Les plans $[\mu_1, \mu_2]$ et $[\mu_1, \mu_3]$ ne passent par aucun des a_i . En multipliant les coordonnées x_1, x_2, x_3 , par des constantes convenables, on pourra faire en sorte que leurs équations respectives soient

$$\begin{aligned} [\mu_1, \mu_2] : & x_1 + x_2 + x_3 = 0; \\ [\mu_1, \mu_3] : & x_1 + x_2 + ax_3 = 0; \end{aligned}$$

où a est une constante donnée, différente de zéro et de *un* (les plans ont en commun μ_1 , située dans $x_3 = 0$).

D'autre part, on pourra, en multipliant x_4 par une autre constante représenter par $x_3 + x_4 = 0$ l'équation du plan $[\alpha_1, \alpha_{25}, \alpha_{34}]$. On obtient immédiatement les équations des plans

$$\begin{aligned} [\mu_3, \mu_4] : & x_2 + a(x_1 + x_3) = 0; \\ [\mu_2, \mu_5] : & x_1 + a(x_2 + x_3) = 0; \end{aligned}$$

d'où celles de α_{34} et α_{25} . L'équation d'une surface cubique contenant les cinq μ , ainsi que $\alpha_1, \alpha_{23}, \alpha_{45}$, a nécessairement une équation de la forme

$$x_4(x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + x_2 + ax_3) + Ax_1x_2x_3 = 0.$$

En effet, elle n'a pas de terme en x_4^3 , ni en x_4^2 ; le cône des tangentes en o se décompose en les deux plans $[\mu_1, \mu_2]$ et $[\mu_1, \mu_3]$, enfin le terme indépendant de x_4 doit être $x_1x_2x_3$. A est une constante à déterminer. On a pris égal à *un* le coefficient du premier terme, autrement la surface serait décomposée. Telle quelle la surface contient les cinq μ et $\alpha_1, \alpha_{23}, \alpha_{45}$. Pour écrire qu'elle contient les deux autres α , on utilisera l'identité

$$u(x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + x_2 + ax_3) \equiv [x_1 + u(x_2 + x_3)][x_2 + a(x_1 + x_3)] - (u - 1)^2 x_1x_2.$$

On obtient immédiatement la condition $aA = -(a-1)^2$, ce qui donne en définitive l'équation cherchée

$$\Sigma : ax_4(x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + x_2 + ax_3) - (a-1)^2 x_1 x_2 x_3 = 0 \quad [a(a-1) \neq 0].$$

Il reste à établir que Σ ne possède pas d'autres droites réelles que celles de S . Pour cela on considérera encore la surface algébrique comme une « S ». Le point o est pour elle irrégulier. Si elle en avait un second : o' , la droite oo' serait sur Σ . Ce serait alors une des cinq μ . Mais chacune de ces droites appartenant à un triplet a tous ses points, sauf o réguliers pour Σ . Cette surface est par suite de même nature que S , car elle a une α spéciale de première espèce dans le plan $x_3 = 0$.

En conclusion : Si S possède une α spéciale de première espèce elle contient exactement dix droites, qui sont celles (réelles) d'une surface du troisième degré.

55. Le dernier cas à étudier est celui où S possède une droite α spéciale de seconde espèce. Nous savons que $k = 4$ et que trois μ quelconques ne sont pas coplanaires [n° 48]. Désignons par α_0 la droite α spéciale, par $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$, les droites μ . S contient six α ordinaires, réparties en trois couples : $(\alpha_{12}, \alpha_{34}), (\alpha_{23}, \alpha_{14}), (\alpha_{13}, \alpha_{24})$, chacun d'eux étant coplanaire avec α_0 . Je vais montrer que les onze droites de S déterminent encore une surface du troisième degré. Mais à la différence de ce qui s'était passé jusqu'ici, elle ne sera pas nécessairement dans tous les cas une « S » de même nature que S .

Les points $\alpha_{12} \cap \alpha_{34}, \alpha_{23} \cap \alpha_{14}, \alpha_{13} \cap \alpha_{24}$, ne peuvent être tout trois sur α_0 . Choisissons les notations de manière que le premier ne s'y trouve pas, et désignons-le par a_3 . Désignons par a_1 et a_2 les points $\alpha_0 \cap \alpha_{34}$ et $\alpha_0 \cap \alpha_{12}$. Prenons $(a_1 a_2 a_3 o)$ comme tétraèdre de référence, les équations des plans des faces opposées aux sommets ayant pour équations

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0.$$

Les plans $[\mu_1, \mu_3]$ et $[\mu_2, \mu_4]$ ne passent par aucun des a_i . On pourra, en multipliant les trois premières coordonnées par des constantes convenables, faire en sorte que $[\mu_1, \mu_3]$ ait pour équation

$$[\mu_1, \mu_3] : x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

Le plan $[\mu_2, \mu_4]$ sera alors représenté par une équation

$$[\mu_2, \mu_4] : ax_1 + bx_2 + x_3 = 0,$$

où a et b sont des constantes données, différentes de zéro et de un et différentes entre elles, car la droite $[\mu_1, \mu_3] \cap [\mu_2, \mu_4]$ ne peut croiser ni α_{12} , ni α_{34} ni α_0 . D'autre part, les plans $[\alpha_{13}, \alpha_{24}]$ et $[\alpha_{14}, \alpha_{23}]$ contiennent la droite $x_3 = x_4 = 0$. Ils sont distincts de $x_4 = 0$ et $x_3 = 0$, et distincts

entre eux. En multipliant x_4 par une constante appropriée, on pourra écrire leurs équations

$$\begin{aligned} [\alpha_{13}, \alpha_{24}] : x_3 + x_4 &= 0, \\ [\alpha_{14}, \alpha_{23}] : x_3 + cx_4 &= 0; \end{aligned}$$

où c est une constante donnée différente de zéro et de un . Des équations précédentes on déduit celles des plans $[\mu_2, \mu_3]$ et $[\mu_1, \mu_4]$; savoir :

$$\begin{aligned} [\mu_2, \mu_3] : x_1 + bx_2 + x_3 &= 0; \\ [\mu_1, \mu_4] : ax_1 + x_2 + x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Si une surface du troisième degré contient les quatre μ , le coefficient de x_4 dans son équation est proportionnel à l'expression

$$(x_1 + x_2 + x_3)(ax_1 + bx_2 + x_3) + qx_1x_2,$$

où q est une constante, car le cône Γ des tangentes en o à la surface appartient au faisceau linéaire déterminé par les quatre μ . Comme le terme indépendant de x_4 doit être proportionnel à $x_1x_2x_3$, l'équation de la surface est par suite :

$$\Sigma : x_4[(x_1 + x_2 + x_3)(ax_1 + bx_2 + x_3) + qx_1x_2] + rx_1x_2x_3 = 0,$$

où q et r sont des paramètres à déterminer. Pour que Σ contienne α_{13} et α_{24} , qui sont dans $x_3 + x_4 = 0$, et la première dans $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, la seconde dans $ax_1 + bx_2 + x_3 = 0$, il faut et il suffit que $q = r$. Pour écrire que α_{14} et α_{23} , qui sont dans $x_3 + cx_4 = 0$, et respectivement dans

$$x_1 + bx_2 + x_3 = 0 \quad \text{et} \quad ax_1 + x_2 + x_3 = 0,$$

on utilisera l'identité (déjà employée) :

$$(x_1 + x_2 + x_3)(ax_1 + bx_2 + x_3) \equiv (ax_1 + x_2 + x_3)(x_1 + bx_2 + x_3) - (1-a)(1-b)x_1x_2,$$

ce qui donne pour l'équation de Σ la forme équivalente

$$x_4(ax_1 + x_2 + x_3)(x_1 + bx_2 + x_3) + rx_1x_2(x_3 + x_4) - (1-a)(1-b)x_1x_2x_3 = 0.$$

Si dans cette équation on annule le premier terme, en faisant $x_3 = -cx_4$, dans les autres, on obtient la dernière condition cherchée

$$r(1-c) - (1-a)(1-b) = 0,$$

ce qui donne en définitive l'équation

$$\Sigma : (1-c)(x_1 + x_2 + x_3)(ax_1 + bx_2 + x_3)x_4 + (1-a)(1-b)(x_3 + x_4)x_1x_2 = 0.$$

Cherchons à quelles conditions Σ , considérée comme une « S », n'a pas d'autre point irrégulier que S. Si elle en possède un second : o' , c'est un

point singulier et la droite oo' est sur Σ . Elle est par suite à l'intersection du cône

$$(1-c)(x_1+x_2+x_3)(ax_1+bx_2+x_3)+(1-a)(1-b)x_1x_2=0,$$

et d'un des plans : $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$. Les deux premiers donnent les quatre μ , qui sont à rejeter car le plan tangent à Σ n'est stationnaire le long d'aucune d'elles. Restent les droites

$$(1-c)(x_1+x_2)(ax_1+bx_2)+(1-a)(1-b)x_1x_2=0, \quad x_3=0,$$

pour lesquelles trois cas peuvent se produire.

1° Les droites sont réelles et distinctes. Soient p' et p'' leurs intersections avec α_0 . Ces points sont distincts de a_1 et a_2 car $1-c$, a et b sont différents de zéro. Par chacun d'eux on peut donc mener dans $x_3=0$ des trisécantes à Σ . Pour les autres points de chacune des deux droites on peut mener des trisécantes dans $x_3=0$. Le point o est par suite le seul point irrégulier de Σ . Elle possède six μ . Il est immédiat que celles-ci ne comprennent aucun triplet, car en raison des conditions auxquelles satisfont les constantes a , b , c , le cône n'est pas décomposé. La surface Σ contient 21 droites [n° 53].

2° Les deux droites sont confondues suivant une droite δ . Celle-ci semble être une cinquième μ , transformant α_0 en une α spéciale de première espèce. Mais alors il faudrait que les cinq μ constituent deux triplets [n° 54], c'est-à-dire que le cône Γ soit décomposé. Il faut donc que Σ ait un second point singulier o' sur δ (ce qui se vérifie si l'on veut par le calcul). Les points o et o' sont les seuls points irréguliers de Σ , car cinq droites de la surface passent par o , ce qui ne peut se produire lorsque le nombre des points irréguliers est 4 ou 3 [n°s 19 et 22]. Comme trois μ ne sont pas coplanaires, Σ est une surface à deux points irréguliers contenant exactement 16 droites [n°s 37 et 40].

3° Les deux droites sont imaginaires. C'est le seul cas où Σ n'a d'autres droites réelles que celles de S .

En conclusion, nous avons obtenu le résultat suivant :

Si, S possède une droite spéciale de seconde espèce α_0 , elle contient exactement 11 droites qui déterminent une surface du troisième degré, contenant ces 11 droites. Elle n'en contient pas d'autres si elle n'a pas de droite réelle dans le plan $[o, \alpha_0]$. Dans le cas contraire elle contient 16 ou 21 droites suivant qu'elle touche le plan $[o, \alpha_0]$ ou le coupe suivant deux droites réelles. Lorsque Σ contient 16 droites elle a deux points irréguliers.

56. De l'ensemble des résultats obtenus pour les surfaces à point irrégulier unique, nous extrairons le

THÉORÈME IV. — *Soit S une surface du troisième ordre à point irrégulier unique, et non dégénérée, c'est-à-dire sur laquelle on ne peut trouver sept droites concourantes;*

Si S contient plus de six droites, elle en contient exactement : $N = 7, 10, 11, 15$ ou 21 , qui sauf pour $N = 7$, déterminent dans chaque cas une surface du troisième degré unique;

Pour $N = 7$, les droites déterminent un faisceau linéaire de surfaces cubiques dont une famille (ouverte) ne possède d'autres droites réelles que celles de S;

Pour $N = 10, 15$ ou 21 , la surface algébrique ne contient pas d'autres droites réelles que celles de S.

Dans le cas $N = 11$, la surface algébrique peut contenir 16 ou 21 droites. Lorsque ce nombre est 16, la surface du troisième degré a deux points singuliers réels.

57. On a rappelé au début que toute S possédant plus de quatre points irréguliers est un cône complété éventuellement par un point isolé, ou une surface réglée à une ou deux directrices rectilignes [n° 1], et donné l'énoncé du théorème de dégénérescence [n° 5]. Si l'on tient compte du résultat de [XII] reproduit dans l'introduction et des théorèmes concernant les cas où le nombre n des points irréguliers prend les valeurs 4, 3, 2, 1, on voit que lorsque le nombre N des droites de S est fini, il prend seulement certaines valeurs bien définies. D'autre part on constate que si N surpasse 7, les droites de S sont à deux exceptions près, celles réelles d'une surface du troisième degré, unique dans chaque cas. D'une manière précise, on peut formuler le

THÉORÈME GÉNÉRAL. — *Si une surface S du troisième ordre contient plus de sept droites, c'est :*

ou bien un cône, ou l'ensemble d'un cône et d'un ovoïde pouvant se réduire à un point isolé;

ou bien une surface réglée à une ou deux directrices rectilignes;

ou bien elle contient exactement :

$$N = 8, 9, 10, 11, 12, 15, 16, 21 \text{ ou } 27 \text{ droites,}$$

qui sauf pour $N = 8$, lorsque la surface a deux points irréguliers, déterminent dans chaque cas une surface unique du troisième degré, dont les droites réelles sont celles de S, sauf peut-être si $N = 11$.

Le tableau suivant donne la correspondance entre N et le nombre n des points irréguliers.

N	8	9	10	11	12	15	16	21	27
n	2,3	2,4	1	1	3	0,1	2	1	0

Pour chaque combinaison, la disposition des droites est parfaitement déterminée.

Lorsque $N = 8$, avec $n = 2$, les droites de S déterminent seulement un faisceau linéaire, dont les surfaces d'une certaine famille (qui peut parfois s'étendre à tout le faisceau) n'ont d'autres droites réelles que celles de S .

Lorsque $N = 11$, la surface algébrique peut avoir 16 ou 21 droites réelles; dans le premier cas elle a deux points singuliers réels.

58. L'examen du tableau précédent montre qu'à chaque valeur de n correspond un maximum N_n pour N , dont les valeurs successives pour $n = 0, 1, 2, 3, 4$, sont : 27, 21, 16, 12, 9. Les différences secondes étant égales à un , N_n peut s'exprimer par un polynôme du second degré :

$$N_n = \frac{1}{2}(n^2 - 13n + 54).$$

On retrouve l'essentiel du premier théorème que j'ai signalé dans [X].

Toute surface du troisième ordre ayant exactement $n = 0, 1, 2, 3, 4$, points irréguliers, et sur laquelle on ne peut trouver sept droites concourantes, possède au plus $\frac{1}{2}(n^2 - 13n + 54)$ droites. Lorsque le maximum est atteint, les droites sont celles d'une surface du troisième degré, unique dans chaque cas.

Pour $n = 3$ ou 4 , la restriction relative aux droites concourantes est inutile.

Je n'ai pas cru devoir transposer les résultats en faisant intervenir les points singuliers comme je l'avais fait antérieurement. La définition de ces points (pour les surfaces S) étant comme on l'a vu [n° 8] beaucoup moins directe que celle des points irréguliers.

REMARQUES SUR LES PLANS TANGENTS.

59. Dans [VIII] et [X] j'ai fait allusion à la possibilité de déterminer des régions de S où celle-ci admet un plan tangent continu. Il s'agit des surfaces dont les droites déterminent une surface cubique Σ . *A priori* on ne pourra conclure que dans les parties de S où les J_m sont d'ordre 3.

Soit α une droite de S . Les plans la contenant coupent en général la surface suivant α et un ovale dont on connaît les points situés sur les droites de S , c'est-à-dire celles de Σ , non contenues dans le plan. Ces points seront d'autant plus nombreux que N est plus grand. On conçoit qu'il doit être possible de connaître dans certains cas, le sens de la concavité

de l'ovale. Cette remarque suggère différents procédés. J'en signalerai un, qui s'applique avec bonheur au cas $n = 4$, ce qui me permettra de justifier un résultat signalé au Congrès d'Amsterdam.

Soient α et β deux droites de S , gauches entre elles, et m un point de S extérieur à chacune de ces droites. Si la droite $\mu = [\alpha, m] \cap [\beta, m]$ n'est pas sur S , le point m est régulier. Désignons par a et b les traces de μ sur α et sur β , et supposons que les plans $[\alpha, m]$ et $[\beta, m]$ ne contiennent comme droites de S que α et β . Nous aurons sur la surface deux ovals; C_α et C_β et sur Σ deux coniques Γ_α et Γ_β . Menons dans son plan à chacun des ovals une droite d'appui et soit T leur plan. Si au voisinage de m les ovals sont de part et d'autre de T , ce plan est le faisceau des tangentes en m . En effet, en coupant J_m par des plans parallèles à μ , on voit que le faisceau dérivé ω_m a quatre rayons (au moins) dans T . Or il résulte des n^{os} 11 et 13 que pour une surface S contenant deux droites gauches entre elles, le faisceau dérivé en tout point régulier est d'ordre conique 2, et, d'autre part que si le faisceau dérivé est un plan, il suffit qu'une section de J_m par un plan contenant une trisécante reste d'un même côté de ω_m pour que ce plan soit le faisceau des tangentes.

Les ovals C_α et C_β passent respectivement par b et par a . Il est immédiat que la condition nécessaire et suffisante pour que les ovals soient au voisinage de m de part et d'autre de T est que a et b soient simultanément extérieurs ou intérieurs à C_β et C_α .

Le problème consistera en premier lieu à déterminer les couples de coniques Γ_α et Γ_β pour lesquelles la condition requise est réalisée et ensuite de trouver ceux pour lesquels les ovals C_α et C_β ont les mêmes dispositions relatives. La discussion est souvent très délicate car la seule propriété utilisable des ovals est celle-ci : soient m_1, m_2, \dots, m_k , k points rencontrés dans cet ordre en parcourant un ovale borné, le polygone $m_1 m_2 \dots m_k$ est convexe.

60. Il est un cas où les choses sont remarquablement simples. C'est celui où S possède quatre points irréguliers dont aucun n'est point isolé de S . Reprenons les notations des n^{os} 19 et 20, et choisissons pour α et β deux arêtes opposées du tétraèdre dont les sommets sont les points irréguliers, par exemple : δ_{12} et δ_{34} . Soit m un point de S extérieur aux plans des faces du tétraèdre et à la droite $l_{12} l_{34}$. L'ovale C_α passe par o_1, o_1 et b . Mais la tangente en ce point est dans le plan $[l_{12}, \delta_{34}]$. Ce point est par suite extérieur à C_α ainsi que tout le segment ouvert d'extrémités o_1 et o_2 qui le contient, soit $\overline{o_1 o_2}$. De même tout le segment ouvert d'extrémités o_2 et o_3 , qui contient l_{34} , soit $\overline{o_3 o_4}$ est extérieur à C_β . Si donc a et b sont respectivement sur $\overline{o_1 o_2}$ et $\overline{o_3 o_4}$, ou sur les segments complémentaires, le faisceau des tangentes en m est un plan.

Pour préciser considérons l'équation de Σ , donnée au n° 19. Les points l_{12} et l_{34} ont respectivement pour coordonnées $(1, -1, 0, 0)$ et $(0, 0, 1, -1)$. Soient (m_1, m_2, m_3, m_4) celles de m . On obtient immédiatement celles de a et de b ; ce sont : $(m_1, m_2, 0, 0)$ et $(0, 0, m_3, m_4)$. La condition obtenue plus haut s'exprime par l'inégalité $m_1 m_2 m_3 m_4 > 0$. Elle est symétrique par rapport aux quatre coordonnées. Comme m ne peut être à la fois sur les trois droites $l_{12}l_{34}$, $l_{13}l_{24}$, $l_{14}l_{23}$, on en déduit qu'elle est valable quel que soit m .

Les plans des quatre faces du tétraèdre o_1, o_2, o_3, o_4 découpent dans l'espace huit régions. Celles à l'intérieur desquelles le faisceau des tangentes aux points de S est certainement un plan, c'est-à-dire où S possède un plan tangent continu [n° 7], sont celles qui contiennent les droites $l_{12}l_{34}$, $l_{13}l_{24}$, $l_{14}l_{23}$.

Un calcul élémentaire montre que dans les autres régions, Σ est à courbures même sens, il suffit de passer en coordonnées cartésiennes en mettant l'équation sous la forme

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + 1 = 0.$$

On trouve rapidement que $rt - s^2$ est du signe opposé à x, y, z .

Le résultat que nous avons obtenu ne peut donc pas être amélioré.

NOTE.

On va construire dans cette Note des surfaces du troisième ordre de types absolument différents de ceux qu'on rencontre parmi les surfaces du troisième degré. Ces surfaces ne seront pas même analytiques et n'auront pas de plan tangent en toute région sur un ensemble partout dense. Elles fourniront des exemples de points réguliers où le faisceau dérivé est du quatrième ordre conique, et de surfaces où le plan-faisceau dérivé sur la droite joignant deux points irréguliers de première espèce occupe deux positions distinctes. Le procédé de construction sera analogue à celui que j'ai déjà utilisé dans [VII].

1. Donnons-nous dans un plan P , un domaine convexe borné A , et à son intérieur un ensemble de points $\{p_i\}$, dénombrable et partout dense dans A . Soit d_i la distance de p_i à la frontière de A , elle est différente de zéro et bornée par le diamètre d de A . Donnons-nous également une série positive convergente : $k = \sum_1^{\infty} k_i$. Sur la perpendiculaire à P , menée par chaque p_i , prenons au-dessus de P un point q_i à la hauteur $d_i k_i$, et considérons la surface conique engendrée par les segments joignant q_i au contour de A . En axes rectangulaires cette surface sera représentée

par une équation $z = F_i(p)$, où la fonction F_i est définie dans A. Considérons alors la fonction

$$F = \sum_1^{\infty} F_i(p).$$

Chaque F_i est convexe et satisfait à la condition de Lipschitz :

$$|F_i(p) - F_i(p')| \leq k_i \cdot pp',$$

d'où l'on déduit

$$|F(p) - F(p')| \leq k \cdot pp'.$$

L'équation $z = F(p)$ représente un morceau de surface \mathcal{A} à pentes bornées par rapport à P, dont le bord est celui de A. Il est immédiat que \mathcal{A} ne contient aucun segment rectiligne sauf ceux qui peuvent se trouver sur le contour de A, et, d'autre part que le faisceau dérivé aux points qui se projettent sur $\{p_i\}$ est un vrai demi-cône convexe. Pour justifier cette seconde affirmation, peut-être un peu moins évidente que la première, considérons un point m_j de \mathcal{A} , dont la projection orthogonale sur P est le point p_j de l'ensemble dénombrable donné. Soit R un plan donné passant par $p_j m_j$. Orientons sa trace sur P, et désignons par Δ_i^+ et Δ_i^- les dérivées à gauche et à droite de F_i en p_j sur la droite $R \cap P$ et par Δ^+ et Δ^- , celles de F. Pour chaque valeur de i différente de j , la différence $\Delta_i^- - \Delta_i^+$ est positive ou nulle, tandis qu'elle est positive pour la valeur j . On en déduit l'inégalité $\Delta^- - \Delta^+ > 0$. Comme R a été choisi arbitrairement, le faisceau dérivé en m_j , qui s'obtient en prenant les demi-tangentes aux sections par les divers plans R [n° 7] est bien un vrai demi-cône convexe car il n'a aucun couple de rayons opposés.

2. La construction des morceaux \mathcal{A} , permet de transformer des surfaces du troisième degré en surfaces « S » dont certaines parties ne sont pas analytiques. Soit m un point d'une surface cubique Σ où l'indicatrice d'Euler est une ellipse. Un plan voisin du plan tangent et du côté de Σ , coupe la surface suivant une courbe contenant un ovale, qui sera si l'on veut le bord de J_m pourvu que le plan soit assez près du plan tangent. On pourra construire un morceau \mathcal{A} , ayant même bord que J_m , contenu entre J_m et le plan de son bord. Il suffira pour cela de choisir assez petite la somme de la série Σk_i . En remplaçant J_m par \mathcal{A} , on obtiendra un ensemble satisfaisant à la définition des « S ».

La transformation précédente est en quelque sorte artificielle. Je vais maintenant construire des surfaces de toutes pièces.

3. Prenons pour A un triangle $a_1 a_2 a_3$, dont on désignera les côtés par $\overline{a_2 a_3}$, $\overline{a_3 a_1}$, $\overline{a_1 a_2}$, et les droites qui les portent par δ_1 , δ_2 , δ_3 . Les cônes $z = F_i(p)$, sont ici des surfaces pyramidales. On en déduit que

les demi-tangentes à \mathcal{A} , en un point intérieur d'un côté donné de A est un demi-plan stationnaire dont l'arête est le côté. La projection orthogonale de chacun de ces demi-plans recouvre A; ils ont par suite un point commun u , dont la projection orthogonale est intérieure à A. Le morceau de surface \mathcal{A} est (au sens large) intérieur au tétraèdre $U = (a_1 a_2 a_3 u)$ et constitue avec A la frontière d'un corps convexe. En chaque point de cette frontière le faisceau dérivé est un plan, un dièdre ou un vrai demi-cône convexe. C'est ce qui se passe en particulier pour chaque sommet a_i . On en déduit qu'en a_1 , par exemple, le faisceau dérivé à \mathcal{A} est un secteur conique Γ_1 , d'ordre conique 2, dont les rayons extrêmes sont les demi-droites $a_1 a_2$ et $a_1 a_3$. On désignera de même par Γ_2 et Γ_3 . l'ensemble des demi-tangentes à \mathcal{A} , en a_2 et a_3 .

Prenons enfin sur la hauteur de U, issue de u et au-delà de ce point à partir de la base un point fixe a_4 . Il est immédiat que toute droite joignant a_4 à un point de A possède un point et un seul sur \mathcal{A} et, d'autre part, que toute sécante contenant deux points de \mathcal{A} ne peut s'approcher à moins d'une certaine distance l du point a_4 . Cette dernière remarque sera utilisée au n° 7.

Nous allons construire à partir de \mathcal{A} une surface simple de Jordan, image du plan P complété par sa droite de l'infini.

Désignons par $\mathcal{H}_i (i = 1, 2, 3, 4)$ l'homologie involutive ayant pour éléments doubles le point a_i et le plan de la face opposée. On va transformer \mathcal{A} par les produits

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{H}_1 \mathcal{H}_4, \quad \mathcal{L}_2 = \mathcal{H}_2 \mathcal{H}_4, \quad \mathcal{L}_3 = \mathcal{H}_3 \mathcal{H}_4.$$

On remarque que chacune des \mathcal{L}_i est le produit des deux autres, car $\mathcal{H}_1 \mathcal{H}_2 \mathcal{H}_3 \mathcal{H}_4 = 1$.

Il est clair que A et ses transformés par les trois \mathcal{L}_i couvrent le plan P. Il résulte alors d'une remarque précédente que l'ensemble de \mathcal{A} et de ses transformés est une surface simple, image biunivoque et bicontinue du plan projectif P. C'est la surface annoncée. Elle contient les trois droites δ_i et aucune autre. On la désignera par S, bien qu'il ne soit pas évident *a priori* qu'elle satisfait à la définition des surfaces que tout au long du Mémoire on représente par cette majuscule, savoir : ensemble fermé dont chaque section plane est une courbe du troisième ordre au plus, l'une au moins étant effectivement du troisième ordre et sans droite. On va voir que la surface construite satisfait bien aux conditions requises.

Voyons d'abord comment se soudent ses différents morceaux. \mathcal{A} et $\mathcal{A}\mathcal{L}_1$ ont en commun le segment $\overline{a_2 a_3}$. En un point m , intérieur à ce segment le faisceau dérivé à \mathcal{A} est le demi-plan d'arête δ_1 contenant u . Son transformé par \mathcal{L}_1 , qui n'est autre que le faisceau dérivé à $\mathcal{A}\mathcal{L}_1$, est le demi-plan opposé. Par suite \mathcal{O}_m est le plan $[\delta_1, u]$; les morceaux \mathcal{A} et $\mathcal{A}\mathcal{L}_1$ se raccordent le long de $\overline{a_2 a_3}$. En m , S traverse P et $[\delta_1, u]$, son

intersection par un plan contenant m , mais pas δ_1 , présente en ce point une inflexion.

Considérons \mathcal{AL}_2 et \mathcal{AL}_3 . Ce sont les transformés de \mathcal{A} et \mathcal{AL}_1 par \mathcal{L}_2 . Il en résulte qu'ils se raccordent le long du transformé de $\overline{a_2a_3}$ par \mathcal{L}_2 , qui n'est autre que le segment (projectif) complémentaire de $\overline{a_2a_3}$. Le plan-faisceau dérivé y sera le transformé de $[\delta_1, u]$, c'est-à-dire son conjugué harmonique par rapport à P et $[\delta_1, a_4]$.

Ainsi : en tout point d'une droite δ_i , distinct des sommets qui s'y trouvent, le plan-faisceau dérivé est stationnaire sur chacun des segments limités par ces sommets; il occupe deux positions distinctes conjuguées harmoniques par rapport à P et $[\delta_i, a_4]$.

Examinons ce qui se passe en un sommet de A. Considérons a_1 . Ce point est commun à \mathcal{A} et à ses transformés par les \mathcal{L}_i . Le faisceau dérivé à \mathcal{A} est le secteur Γ_i , dont les transformés par les \mathcal{L}_i constituent avec Γ_i un demi-cône d'ordre conique 4. En effet, Γ_1 et $\Gamma_1\mathcal{L}_1$, sont au-dessus de P, tandis que $\Gamma_1\mathcal{L}_2$ et $\Gamma_1\mathcal{L}_3$ sont au-dessous; il en résulte bien qu'un plan n'ayant de secteur plan sur aucun d'eux, coupe leur ensemble suivant quatre rayons au plus.

4. Étudions maintenant les sections planes de S. Remarquons que la section de \mathcal{AL}_i par un plan donné R s'obtiendra en transformant par \mathcal{L}_i l'intersection de \mathcal{A} par $R\mathcal{L}_i$.

Supposons d'abord que le plan donné passe par une δ_i , δ_1 par exemple. En considérant le corps convexe limité par A et \mathcal{A} , on voit que la condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{A} \cap R$ ne se réduise pas à $\overline{a_2a_3}$ est que R pénètre à l'intérieur de U. On a alors

$$\mathcal{A} \cap R = \overline{a_2a_3} + \widehat{a_2a_3},$$

où $\widehat{a_2a_3}$ est un arc borné du second ordre. Le plan $[\delta_1, u]$ et son transformé par \mathcal{L}_2 définissent deux bidièdres, dont l'un, Δ contient P. On voit que si R est extérieur (au sens large) à Δ , ni R, ni aucun de ses transformés par les \mathcal{L}_i ne pénètre à l'intérieur de U. Il en résulte que $R \cap S$ se réduit à δ_1 . Supposons R intérieur à Δ au sens strict. Dans ce cas : soit $R = R\mathcal{L}_1$, soit $R\mathcal{L}_2 = R\mathcal{L}_3$ pénétreront à l'intérieur de U. Dans le premier cas on aura pour l'intersection : δ_1 et un ovale borné, constitué par un arc $\widehat{a_2a_3}$ et son transformé par \mathcal{L}_1 ; dans le second : δ_1 et un ovale non borné situé sur \mathcal{AL}_2 et \mathcal{AL}_3 .

En conclusion : tout plan passant par une δ_i , coupe S suivant cette seule droite, ou suivant celle-ci et un ovale passant par les deux points a_i situés sur la droite. On en déduit l'impossibilité de mener des trisécantes à S par les points a_i .

5. Considérons maintenant le cas où le plan donné R ne passe par aucune δ_i . Il sera commode d'utiliser les notions complémentaires de *corde* et de *contre-corde* d'un arc du second ordre. Pour un arc borné, la corde au sens élémentaire est caractérisée par le fait que toute droite (de son plan) la coupant à son intérieur rencontre l'arc en *un* point avec traversée, alors que les droites coupant la droite support de la corde à l'extérieur de celle-ci : ou bien n'ont aucun point sur l'arc, ou bien le touchent en un point ou bien le traversent en deux. Le segment projectif complémentaire de la corde est la contre-corde. Les propriétés qui caractérisent la corde et la contre-corde étant projectives, servent de définition pour les arcs du second ordre quelconques. Il est immédiat que si la corde d'un arc est la contre-corde d'un autre arc ayant mêmes extrémités, leur ensemble est une courbe simple (close) du troisième ordre.

Voici un autre résultat qui nous sera utile. Soient sur une droite β , trois segments consécutifs : $b_1 b_2$, $b_2 b_3$, $b_3 b_4$, dont la somme reconstruit β sans recouvrement, si trois arcs du second ordre : $\widehat{b_1 b_2}$, $\widehat{b_2 b_3}$, $\widehat{b_3 b_4}$, ayant pour cordes les trois segments, sont tels que deux quelconques consécutifs sont au voisinage de leur point commun de part et d'autre de β , leur ensemble forme une courbe simple close du troisième ordre.

Pour le prouver, il suffira de montrer qu'une sécante ayant sur l'un des arcs deux points distincts de ses extrémités, rencontre l'ensemble en un troisième point et un seul. Soient m' et m'' deux points intérieurs à l'un des arcs $\widehat{b_3 b_4}$, par exemple. On peut supposer que les segments $\overline{b_1 b_2}$ et $\overline{b_2 b_3}$ sont bornés. Le point b_2 sera alors intérieur au segment $\overline{b_1 b_3}$, qui est la contre-corde de l'arc $\widehat{b_3 b_4}$. La droite $m' m''$ traverse β en un point c , intérieur à $\widehat{b_1 b_3}$. Elle ne rencontre à la fois $\widehat{b_1 b_2}$ et $\widehat{b_2 b_3}$ que si c est en b_2 . Dans le cas contraire elle rencontre un seul des arcs et en un point, car c est intérieur à la corde de l'arc rencontré.

6. Revenons aux sections de S . Soit R un plan donné, à distance finie ou non, ne contenant aucune δ_i . La droite $R \cap P$ ne peut pénétrer à l'intérieur des quatre triangles projectifs constitués par A et ses transformés par les trois \mathcal{L}_i . Comme S est invariante par chacune de ces transformations, on peut supposer que $R \cap P$ ne pénètre pas à l'intérieur de A . Deux cas sont à considérer suivant que la droite passe ou non par un sommet du triangle.

1° $R \cap P$ passe par a_1 , par exemple. Soit b_1 sa trace sur δ_1 . Les intersections de R avec $\mathcal{A}\mathcal{L}_2$ et $\mathcal{A}\mathcal{L}_3$ sont deux arcs d'extrémités a_1 et b_2 ; la corde de l'un est la contre-corde de l'autre; leur ensemble constitue une courbe du troisième ordre. Au voisinage de a_1 les parties \mathcal{A} et $\mathcal{A}\mathcal{L}_1$ sont d'un même côté de P . Le plan R ne peut par suite traverser à la fois Γ_1 et $\Gamma_1\mathcal{L}$. S'il n'en traverse aucun, $R \cap S$ se réduit à la courbe précé-

dente. Notons en passant que c'est le cas si R contient a_4 . Si R traverse Γ_1 ou $\Gamma_1 \mathcal{L}_1$, l'intersection $R \cap S$ est une courbe à point nodal en a_1 .

2° $R \cap P$ ne passe par aucun sommet de A . Les résultats du numéro précédent montrent que l'intersection de R avec l'ensemble des transformés de \mathcal{A} par les trois \mathcal{L}_i est une courbe simple close du troisième ordre. Quant à $R \cap \mathcal{A}$, ce peut être un ovale, un point isolé ou rien. L'intersection $R \cap S$ est donc une courbe simple du troisième ordre à laquelle peuvent être adjoints : soit un ovale, soit un point isolé. Notons encore que si R contient a_4 , $R \cap S$ est une courbe simple d'ordre 3.

Pour achever la démonstration, il suffira de montrer que toute droite λ , différente des δ_i , a trois points au plus sur S . Si λ passe par a_4 elle a un point et un seul sur S . Dans le cas contraire on considérera la section de S par le plan $[\lambda, a_4]$. D'après ce qu'on a vu plus haut sa trace sur S est une δ_i ou une courbe simple close d'ordre 3.

7. En définitive, il est bien établi que S répond à la définition des surfaces du troisième ordre, considérées dans le Mémoire. Elle possède trois points irréguliers de première espèce : les points a_i . Le plan-faisceau dérivé est stationnaire à l'intérieur de chacun des segments projectifs déterminés par deux points irréguliers de première espèce sur la droite qui les joint et ces plans occupent deux positions différentes.

On a vu (au n° 3 de cette Note) qu'il existe une longueur l telle que les droites dont la distance à a_4 est moindre que l , ont au plus un point sur \mathcal{A} . En raison de la manière dont S a été construite, on pourra trouver une sphère centrée sur a_4 suffisamment petite, pour que toute droite y pénétrant rencontre S en un point au plus. Si l'on complète S par un ovoïde intérieur à la sphère, on obtient une nouvelle surface du troisième ordre dont tous les points sont réguliers et où en trois d'entre eux le faisceau dérivé est du quatrième ordre conique. On peut aussi remplacer l'ovoïde par un point isolé intérieur, ce qui donne une surface à quatre points irréguliers, dont un isolé.

Ces types de surfaces ne peuvent évidemment se rencontrer parmi les surfaces algébriques. Elles ne sont pas analytiques et n'ont pas de plan tangent aux points d'un ensemble partout dense en toute région, si, comme il est possible on a choisi un ovoïde possédant cette propriété.

BIBLIOGRAPHIE.

JUEL (C.) :

- [I] *Einleitung in die Theorie der Elementarflächen dritter Ordnung (Math. Ann., t. 86).*

MARCHAUD (A.) :

- [II] *Sur les continus d'ordre borné (Acta Math., t. 55).*
 [III] *Sur les surfaces du second ordre en Géométrie finie (J. Math. pures et appl., t. 15).*

- [IV] *Sur les surfaces du troisième ordre de la Géométrie finie (J. Math. pures et appl., t. 19).*
- [V] *Sur les propriétés différentielles du premier ordre des surfaces simples de Jordan (Ann. scient. Ec. Norm. Sup., t. 63).*
- [VI] *Sur une classe de points singuliers des surfaces du troisième ordre de la Géométrie finie (J. Math. pures et appl., t. 31).*
- [VII] *Sur les propriétés différentielles du premier ordre des surfaces d'ordre borné et plus particulièrement de celles du troisième ordre (Ann. scient. Ec. Norm. Sup., t. 69).*
- [VIII] *Sur les points singuliers des surfaces du troisième ordre de la Géométrie finie (Proc. Intern. Math. Congr. Amsterdam, 1953).*
- [IX] *Propriétés différentielles des courbes et des surfaces d'ordre borné (Colloque sur les questions de réalité en Géométrie, Liège, 1955).*
- [X] *Sur certaines relations algébriques entre les droites d'une même surface du troisième ordre de la Géométrie finie (C. R. Acad. Sc., t. 255, 1962, p. 3349).*
- [XI] *Sur les courbes et les surfaces du troisième ordre en Géométrie finie (Acad. Roy. Belge, Bull. Cl. Sc., t. 49).*
- [XII] *Sur les droites de la surface du troisième ordre de la Géométrie finie (J. Math. pures et appl.).*

