

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ALAIN GUICHARDET

Caractères et représentations des produits tensoriels de C^* -algèbres

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 81, n° 2 (1964), p. 189-206

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1964_3_81_2_189_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CARACTÈRES ET REPRÉSENTATIONS DES PRODUITS TENSORIELS DE C*-ALGÈBRES

PAR M. ALAIN GUICHARDET.

Utilisant la définition des produits tensoriels de C*-algèbres donnée dans [12], nous définissons d'abord les produits tensoriels de traces sur les C*-algèbres (au sujet des traces, voir [3] ou [6]); nous étudions ensuite le quasi-dual \tilde{A} (ou ensemble des classes de quasi-équivalence de représentations factorielles) d'un produit tensoriel $A = A_1 \otimes^* A_2$; le produit tensoriel des représentations définit une application Π injective, mais non surjective en général (*cf.* fin du paragraphe 6) de $\tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2$ dans \tilde{A} ; on étudie le comportement de Π du point de vue des structures boréliennes sur les quasi-duaux définies dans [4], sans pouvoir toutefois déterminer si elle est borélienne (§ 3 et cor. 2 du th. 2); Π est surjective si A_1 ou A_2 est de type I (prop. 6); dans tous les cas, certaines représentations factorielles sont toujours des produits tensoriels, en particulier les représentations factorielles de type fini (cor. 1 du th. 2) et toute représentation irréductible π telle que $\pi(A)$ soit formée d'opérateurs compacts (th. 5).

On indique quelques relations entre les propriétés (CCR, GCR, NGCR) de A et celles de A_1 et A_2 (th. 3, 3' et 4). On montre pour terminer que, sous certaines hypothèses, la C*-algèbre du produit direct de deux groupes localement compacts est isomorphe au produit tensoriel des C*-algèbres de ces groupes (prop. 7).

Notations. — On désigne par A_1 et A_2 deux C*-algèbres, par $A_1 \otimes A_2$ leur produit tensoriel algébrique et par $A_1 \otimes^* A_2$ leur produit tensoriel

C^* -algèbre. Si B est une C^* -algèbre et σ une trace définie sur un idéal autoadjoint I et B , on appelle « éléments associés » à σ les éléments suivants :

N , l'idéal autoadjoint des $x \in I$ tels que $\sigma(x, x) = 0$;

Λ , l'application canonique de I sur I/N ;

H , l'espace hilbertien complété de I/N ;

$\mathcal{U} = \mathcal{U}(I/N)$, l'algèbre de von Neumann associée à gauche à l'algèbre hilbertienne I/N ;

Tr , la trace naturelle sur \mathcal{U} ;

\mathfrak{m} , l'idéal de définition de Tr ;

π , la représentation de B dans H définie par

$$\pi(z) \Lambda x = \Lambda (zx).$$

Profitions de l'occasion pour modifier la définition des caractères donnée dans ([6], chap. I, § 1, n° 2) : la démonstration de la proposition 3, (i) \Rightarrow (ii), est erronée, la conclusion véritable étant seulement que $\sigma'(x, y) = k \sigma(x, y)$ pour x et $y \in I$, ce qui n'exclut pas que σ' soit nulle sur I (phénomène qu'on rencontre effectivement); pour conserver la proposition 3 on doit donc définir les caractères comme suit :

Une trace maximale σ définie sur un idéal I est appelée caractère si $\sigma \neq 0$ et si toute trace maximale majorée par σ est proportionnelle à σ sur I .

Nous remercions M. J. Dixmier à qui nous devons la détection de cette erreur, ainsi que d'un certain nombre d'autres dans le présent article.

1. Produits tensoriels de traces.

LEMME 1. — Soient B une C^* -algèbre, π_1 une représentation non dégénérée de B , \mathcal{B} l'algèbre de von Neumann engendrée par $\pi_1(B)$, Tr_1 une trace normale, semi-finie, fidèle sur \mathcal{B} , \mathfrak{m}_1 son idéal de définition; supposons $\pi_1(B) \cap \mathfrak{m}_1^{\frac{1}{2}}$ partout dense dans $\mathfrak{m}_1^{\frac{1}{2}}$ pour le produit scalaire $(S, T) \rightarrow \text{Tr}_1(ST^*)$; posons $I = \pi_1^{-1}(\mathfrak{m}_1^{\frac{1}{2}})$ et, pour $x, y \in I$, $\sigma(x, y) = \text{Tr}_1(\pi_1(xy^*))$; alors σ est une trace maximale et la représentation gauche canoniquement associée à σ est quasi-équivalente à π_1 .

(Ce lemme pourrait se déduire de [3], lemme 4; nous en donnons une démonstration utilisant les notations de [6].)

Les axiomes (i), (ii) et (iii) des traces ([6], chap. I, § 1) sont trivialement vérifiés; l'axiome (iv) résulte de la continuité ultrafaible de $\text{Tr}_1(\pi_1(zxx^*))$ par rapport à $\pi_1(z)$ et du fait que $\pi_1(z)$ tend ultrafortement vers 1 suivant toute unité approchée de B . Axiome (v) : il faut vérifier que tout élément $\pi_1(x) \in \mathfrak{m}_1^{\frac{1}{2}}$ est limite, pour le produit scalaire $\text{Tr}_1(ST^*)$, d'éléments

$\pi_1(y) \pi_1(z)$, où $\pi_1(y)$ et $\pi_1(z) \in \mathfrak{m}_1^{\frac{1}{2}}$; or $\pi_1(x)$ est limite d'éléments ST, où S et T $\in \mathfrak{m}_1^{\frac{1}{2}}$ et ST à son tour est limite d'éléments $\pi_1(y) \pi_1(z)$, où $\pi_1(y)$ et $\pi_1(z) \in \mathfrak{m}_1^{\frac{1}{2}}$.

Soient maintenant H' l'espace hilbertien complété de l'algèbre hilbertienne $\mathfrak{m}_1^{\frac{1}{2}}$ et Φ l'isomorphisme de \mathcal{B} sur $\mathcal{U}(\mathfrak{m}_1^{\frac{1}{2}})$ transformant un élément quelconque R de \mathcal{B} en l'opérateur de multiplication à gauche par R; soient, d'autre part, N, Λ , H, \mathcal{U} , \mathfrak{m} , les éléments associés à σ ; N est le noyau de π_1 et l'application $\Lambda x \rightarrow \pi_1(x)$ est un isomorphisme de l'algèbre hilbertienne I/N sur $\pi_1(\mathcal{B}) \cap \mathfrak{m}_1^{\frac{1}{2}}$, sous-algèbre hilbertienne partout dense de $\mathfrak{m}_1^{\frac{1}{2}}$; elle se prolonge en un isomorphisme de H sur H' qui transforme \mathcal{U} en $\mathcal{U}(\mathfrak{m}_1^{\frac{1}{2}})$ et, pour tout $a \in \mathcal{B}$, $\pi(a)$ en l'opérateur de multiplication par $\pi_1(a)$; d'où, en combinant avec Φ^{-1} , un isomorphisme de \mathcal{U} sur \mathcal{B} qui transforme $\pi(a)$ en $\pi_1(a)$, ce qui prouve que π et π_1 sont quasi équivalentes.

Enfin pour montrer que σ est maximale, il suffit ([6], chap. I, § 1, prop. 2) de montrer que si $a \in \mathcal{B}$ et $\pi(a) \in \mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}$, on a $a \in I$; or, dans ce cas,

$$\pi_1(a) \in \mathfrak{m}_1^{\frac{1}{2}}, \quad \text{donc } a \in I.$$

DÉFINITION DES PRODUITS TENSORIELS DE TRACES. — Soient A_1 et A_2 deux C*-algèbres, $A = A_1 \overset{\star}{\otimes} A_2$, $\sigma_i (i = 1, 2)$ une trace maximale définie sur un idéal autoadjoint I_i de A_i , N_i , Λ_i , H_i , \mathcal{U}_i , \mathfrak{m}_i , π_i les éléments associés; soient \mathcal{O} l'algèbre hilbertienne $I_1/N_1 \otimes I_2/N_2$, $H = H_1 \otimes H_2$ l'espace hilbertien complété,

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}(\mathcal{O}) = \mathcal{U}_1 \otimes \mathcal{U}_2, \quad \pi = \pi_1 \otimes \pi_2,$$

Tr la trace naturelle sur \mathcal{U} , \mathfrak{m} son idéal de définition; \mathcal{U} est l'algèbre de von Neumann engendrée par $\pi(A)$; π est non dégénérée, puisque π_1 et π_2 le sont. On va montrer que $\pi(A) \cap \mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}$ est partout dense dans $\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}$ pour le produit scalaire $\text{Tr}(ST^*)$; les éléments U_ξ , où $\xi \in \mathcal{O}$ sont partout denses dans $\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}$ et, d'autre part, tout élément ξ de \mathcal{O} est de la forme

$$\xi = \sum_{n=1}^m \xi_{1,n} \otimes \xi_{2,n} \quad (\xi_{i,n} \in I_i/N_i),$$

donc de la forme

$$\xi = \sum_{n=1}^m \Lambda_1 x_{1,n} \otimes \Lambda_2 x_{2,n} \quad (x_{i,n} \in I_i);$$

alors,

$$\begin{aligned} U_{\xi} &= \sum_{n=1}^m U_{\Lambda_1 x_{1,n}} \otimes U_{\Lambda_2 x_{2,n}} = \sum_{n=1}^m U_{\Lambda_1 x_{1,n}} \otimes U_{\Lambda_2 x_{2,n}} \\ &= \sum_{n=1}^m \pi_1(x_{1,n}) \otimes \pi_2(x_{2,n}) = \pi \left(\sum_{n=1}^m x_{1,n} \otimes x_{2,n} \right) \in \pi(A). \end{aligned}$$

D'après le lemme 1, on définit une trace maximale sur l'idéal $I = \pi^{-1}(\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}})$ en posant $\sigma(x, y) = \text{Tr}(\pi(xy^*))$ et la représentation gauche canoniquement associée à π est quasi équivalente à $\pi_1 \otimes \pi_2$.

Le produit tensoriel $I_1 \otimes I_2$ est contenu et partout dense dans I [pour le produit scalaire $\sigma(x, y)$] d'après le calcul fait ci-dessus; de plus si x et $y_i \in I_i$, on a

$$\begin{aligned} \sigma(x_1 \otimes x_2, y_1 \otimes y_2) &= \text{Tr}(\pi(x_1 \otimes x_2) \pi(y_1 \otimes y_2)^*) \\ &= \text{Tr}((\pi_1(x_1) \otimes \pi_2(x_2)) (\pi_1(y_1) \otimes \pi_2(y_2))^*) \\ &= \text{Tr}(U_{\Lambda_1 x_1} \otimes U_{\Lambda_2 x_2} (U_{\Lambda_1 y_1} \otimes U_{\Lambda_2 y_2})^*) \\ &= \text{Tr}(U_{\Lambda_1 x_1} \otimes U_{\Lambda_2 x_2} U_{\Lambda_1 y_1} \otimes U_{\Lambda_2 y_2}) \\ &= (\Lambda_1 x_1 \otimes \Lambda_2 x_2 | \Lambda_1 y_1 \otimes \Lambda_2 y_2) \\ &= (\Lambda_1 x_1 | \Lambda_1 y_1) (\Lambda_2 x_2 | \Lambda_2 y_2) \\ &= \sigma_1(x_1, y_1) \sigma_2(x_2, y_2). \end{aligned}$$

On notera $\sigma_1 \otimes \sigma_2$ la trace σ et in l'appellera *produit tensoriel* de σ_1 et σ_2 . En résumé :

THÉORÈME 1. — *Étant données deux traces maximales σ_1 et σ_2 sur A_1 et A_2 on peut définir canoniquement une trace maximale $\sigma_1 \otimes \sigma_2$ sur $A_1 \overset{\star}{\otimes} A_2$ possédant les propriétés suivantes :*

(i) *Le produit tensoriel algébrique des idéaux de définition I_1 et I_2 de σ_1 et σ_2 est contenu et partout dense dans l'idéal de définition de $\sigma_1 \otimes \sigma_2$ pour sa structure préhilbertienne;*

(ii) *Si x_i et $y_i \in I_i$ ($i = 1, 2$), on a*

$$(\sigma_1 \otimes \sigma_2)(x_1 \otimes x_2, y_1 \otimes y_2) = \sigma_1(x_1, y_1) \sigma_2(x_2, y_2);$$

(iii) *La représentation gauche de $A_1 \overset{\star}{\otimes} A_2$ canoniquement associée à $\sigma_1 \otimes \sigma_2$ est quasi équivalente au produit tensoriel des représentations gauches canoniquement associées à σ_1 et σ_2 ; en particulier, $\sigma_1 \otimes \sigma_2$ est un caractère si et seulement si σ_1 et σ_2 sont des caractères.*

Remarque. — Adoptant la terminologie de ([3], chap. I, § 4) appelons φ , φ_1 , φ_2 les traces semi-finies semi-continues inférieurement associées à σ , σ_1 et σ_2 ; on a

$$(1) \quad \varphi(x_1 \otimes x_2) = \varphi_1(x_1) \varphi_2(x_2)$$

pour tout $x_1 \in A_1^+$ et tout $x_2 \in A_2^+$, en convenant que $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$.

En effet, si $\varphi_1(x_1)$ et $\varphi_2(x_2)$ sont finis, (I) résulte du théorème 1 (ii) supposons maintenant x_1 et x_2 quelconques : on a

$$\varphi_i(x_i) = \sup \varphi_i(y_i) \quad \text{pour } y_i \leq x_i \quad \text{et} \quad \varphi_i(y_i) < +\infty;$$

alors

$$\varphi(x_1 \otimes x_2) \geq \varphi(y_1 \otimes y_2) = \varphi_1(y_1) \varphi_2(y_2),$$

ce qui entraîne immédiatement (I) dans le cas où $\varphi_1(x_1)$ et $\varphi_2(x_2) > 0$; supposons enfin $\varphi_1(x_1) = 0$: on a $\pi_1(x_1) = 0$ et

$$\varphi(x_1 \otimes x_2) = \text{Tr}(\pi_1(x_1) \otimes \pi_2(x_2)) = 0.$$

2. Restrictions à A_1 et A_2 des représentations de A .

PROPOSITION 1. — *A toute représentation π de A dans un espace hilbertien H on peut associer canoniquement des représentations π_1 et π_2 de A_1 et A_2 dans H de façon que :*

(i) $\pi(u_s \otimes x_2)$ converge fortement vers $\pi_2(x_2)$ pour tout $x_2 \in A_2$ et toute unité approchée (u_s) de A_1 ;

(ii) $\pi(x_1 \otimes v_t)$ converge fortement vers $\pi_1(x_1)$ pour tout $x_1 \in A_1$ et toute unité approchée (v_t) de A_2 ;

(iii) $\pi(x_1 \otimes x_2) = \pi_1(x_1) \pi_2(x_2) = \pi_2(x_2) \pi_1(x_1)$ pour tout $x_1 \in A_1$ et tout $x_2 \in A_2$.

Choisissons une unité approchée (u_s) de A_1 et montrons que pour tout $x_2 \in A_2$, $\pi(u_s \otimes x_2)$ converge fortement vers un opérateur linéaire continu; soit H_0 le sous-espace $\pi(A_1 \otimes A_2).H$, ensemble des vecteurs de la forme

$$\xi = \sum_{j=1}^n \pi(x_j) \xi_j, \quad \text{où } x_j \in A_1 \otimes A_2 \quad \text{et} \quad \xi_j \in H;$$

$\pi(u_s \otimes x_2)$ laisse stable H_0 et est nul dans son supplémentaire orthogonal; il nous suffit donc de montrer que $\pi(u_s \otimes x_2).\xi$ converge pour tout $\xi \in \bar{H}_0$, puis pour $\xi \in H_0$ puisque les $\pi(u_s \otimes x_2)$ sont de normes bornées, et enfin pour tout ξ de la forme $\pi(y_1 \otimes y_2).\eta$ par linéarité; on a alors

$$\pi(u_s \otimes x_2).\xi = \pi(u_s y_1 \otimes x_2 y_2).\eta \rightarrow \pi(y_1 \otimes x_2 y_2).\eta.$$

L'assertion est donc démontrée et l'on voit que la limite de $\pi(u_s \otimes x_2)$ est indépendante de l'unité approchée (u_s) ; notons-la $\pi_2(x_2)$.

L'application π_2 est une représentation de A_2 : d'abord il est clair que π_2 est linéaire; ensuite

$$\begin{aligned} \pi_2(x_2) \pi_2(y_2) &= \lim \pi(u_s \otimes x_2) \lim \pi(u_s \otimes y_2) \\ &= \lim \pi(u_s^2 \otimes x_2 y_2) = \pi_2(x_2 y_2), \end{aligned}$$

car on sait que (u_s^*) est une unité approchée de A_1 ; enfin

$$\begin{aligned}\pi_2(x_2^*) &= \lim \pi(u_s \otimes x_2^*), \\ \pi_2(x_2) &= \lim \pi(u_s^* \otimes x_2),\end{aligned}$$

puisque (u_s^*) est une unité approchée de A_1 , d'où

$$\pi_2(x_2^*) = \pi_2(x_2)^*.$$

Prouvons enfin (iii)

$$\begin{aligned}\pi_1(x_1) \pi_2(x_2) &= \lim \pi(x_1 \otimes v_l) \lim \pi(u_s \otimes x_2) \\ &= \lim (\pi(x_1 \otimes v_l) \pi(u_s \otimes x_2)) = \lim \pi(x_1 u_s \otimes v_l x_2) \\ &= \pi(x_1 \otimes x_2);\end{aligned}$$

même chose pour $\pi_2(x_2) \pi_1(x_1)$.

C. Q. F. D.

Si A_1 admet un élément unité $\mathbf{1}$ on a $\pi_2(x_2) = \pi(\mathbf{1} \otimes x_2)$ et π_2 se déduit de π par restriction à la sous-algèbre $\mathbf{1} \otimes A_2$; on dira encore dans le cas général que π_2 est la *restriction* de π à A_2 ; même chose pour A_1 . Notons encore ceci : si ρ_1 est une représentation *non dégénérée* de A_2 et ρ_2 une représentation quelconque de A_2 , la restriction de $\rho_1 \otimes \rho_2$ à A_2 est un multiple de ρ_2 ; en effet,

$$\begin{aligned}\lim (\rho_1 \otimes \rho_2)(u_s \otimes x_2) &= \lim (\rho_1(u_s) \otimes \rho_2(x_2)) \\ &= \mathbf{1} \otimes \rho_2(x_2).\end{aligned}$$

Remarque analogue pour A_1 .

Enfin supposons π *factorielle*; soit \mathcal{A} le facteur engendré par $\pi(A)$; les algèbres de von Neumann engendrées resp. par $\pi_1(\mathcal{A}_1)$ et $\pi_2(\mathcal{A}_2)$ commutent et engendrent l'algèbre de von Neumann \mathcal{A} , donc sont des facteurs et π_1 et π_2 sont *factorielles*.

3. Relations entre \tilde{A}_1 , \tilde{A}_2 et \tilde{A} .

Dans tout ce paragraphe, on suppose A_1 et A_2 à bases dénombrables; on pose toujours $A = A_1 \overset{*}{\otimes} A_2$.

Pour tout $n = 1, 2, \dots, \infty$ (infini dénombrable), soit H_n un espace hilbertien de dimension n ; pour tout espace hilbertien H on note $A_{1, \text{fac}, H}$, $A_{2, \text{fac}, H}$, $A_{\text{fac}, H}$ les ensembles de représentations factorielles de A_1 , A_2 , A dans H ; $A_{1, \text{fac}}$, $A_{2, \text{fac}}$, A_{fac} les ensembles sommes des ensembles A_{1, fac, H_n} , A_{2, fac, H_n} , A_{fac, H_n} pour $n = 1, 2, \dots, \infty$; \mathcal{R}_1 , \mathcal{R}_2 , \mathcal{R} les relations de quasi-équivalence dans $A_{1, \text{fac}}$, $A_{2, \text{fac}}$, A_{fac} ; Θ_1 , Θ_2 , Θ les applications canoniques de $A_{1, \text{fac}}$, $A_{2, \text{fac}}$, A_{fac} sur \tilde{A}_1 , \tilde{A}_2 , \tilde{A} ; on identifie $H_n \otimes H_m$ et H_{nm} au moyen d'un isomorphisme fixé; on munit les ensembles A_{1, fac, H_n} , A_{2, fac, H_n} , A_{fac, H_n} des topologies simples fortes et des structures boréliennes sous-jacentes;

$A_{1, \text{fac}}, A_{2, \text{fac}}, A_{\text{fac}}$ des structures boréliennes sommes; $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \tilde{A}$ des structures boréliennes quotients (cf. [4], n° 2); on considérera aussi l'espace $(A_{1, \text{fac}} \times A_{2, \text{fac}}) / (\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2)$ muni de la structure borélienne quotient de la structure borélienne produit et l'espace $\tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2$ muni de la structure borélienne produit; il est immédiat que la bijection canonique de $(A_{1, \text{fac}} \times A_{2, \text{fac}}) / (\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2)$ sur $\tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2$ est borélienne.

LEMME 2. — *Pour tout n et tout m l'application $(\pi_1, \pi_2) \rightarrow \pi_1 \otimes \pi_2$ de $A_{1, \text{fac}, H_n} \times A_{2, \text{fac}, H_m}$ dans $A_{\text{fac}, H_n \otimes H_m}$ est continue.*

Il faut montrer que sont continues les applications

$$(\pi_1, \pi_2) \rightarrow (\pi_1 \otimes \pi_2)(x) \cdot \zeta, \quad \text{où } x \in A \text{ et } \zeta \in H_n \otimes H_m$$

ou encore les applications

$$(\pi_1, \pi_2) \rightarrow (\pi_1 \otimes \pi_2)(x_1 \otimes x_2) \cdot \xi_1 \otimes \xi_2,$$

où $x_i \in A_i, \xi_1 \in H_n$ et $\xi_2 \in H_m$; or le second membre est égal à

$$\pi_1(x_1) \cdot \xi_1 \otimes \pi_2(x_2) \cdot \xi_2$$

et l'application en question est composée de

$$(\pi_1, \pi_2) \rightarrow (\pi_1(x_1) \xi_1, \pi_2(x_2) \xi_2)$$

et de

$$(\eta_1, \eta_2) \rightarrow \eta_1 \otimes \eta_2, \quad \text{où } \eta_1 \in H_n \text{ et } \eta_2 \in H_m.$$

C. Q. F. D.

Le produit tensoriel des représentations définit donc une application borélienne de $A_{1, \text{fac}} \times A_{2, \text{fac}}$ dans A_{fac} ; celle-ci passe au quotient en une application borélienne de $(A_{1, \text{fac}} \times A_{2, \text{fac}}) / (\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2)$ dans \tilde{A} ; on notera Π l'application correspondante, *a priori non nécessairement borélienne*, de $\tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2$ dans \tilde{A} .

LEMME 3. — *Pour toute représentation π de A on note π_1 et π_2 les restrictions de π à A_1 et A_2 ; alors pour tout n l'application $\pi \rightarrow (\pi_1, \pi_2)$ de A_{fac, H_n} dans $A_{1, \text{fac}, H_n} \times A_{2, \text{fac}, H_n}$ est borélienne.*

Il suffit de voir que les applications

$$\pi \rightarrow \pi_1(x_1) \cdot \zeta, \quad \text{où } x_1 \in A_1 \text{ et } \zeta \in H_n$$

sont boréliennes; or une telle application est limite simple des applications

$$\pi \rightarrow \pi(x_1 \otimes \nu_i) \cdot \zeta$$

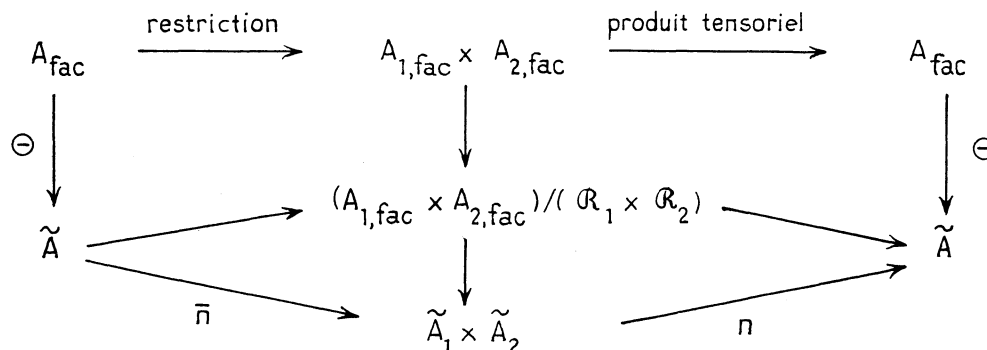
et, comme on le sait, on peut choisir l'unité approchée (ν_i) dénombrable.

C. Q. F. D.

Les opérations de restriction définissent donc une application borélienne de A_{fac} dans $A_{1,\text{fac}} \times A_{2,\text{fac}}$; celle-ci passe au quotient en une application borélienne de \tilde{A} dans $(A_{1,\text{fac}} \times A_{2,\text{fac}})/(\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2)$; on notera $\bar{\Pi}$ l'application correspondante, *borélienne*, de \tilde{A} dans $\tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2$.

L'application $\bar{\Pi} \circ \Pi$ est l'*identité* sur $\tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2$: en effet, soient $(\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2)$ un élément de $\tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2$ et π_i un élément non dégénéré de $\tilde{\pi}_i$; la restriction de $\pi_1 \otimes \pi_2$ à A_i est quasi équivalente à π_i d'après la remarque qui suit la proposition 1. Il en résulte que Π est *injective* et $\bar{\Pi}$ *surjective*.

On peut tracer le diagramme commutatif suivant :



PROPOSITION 2. — $\Pi(\tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2)$ est une partie borélienne de \tilde{A} .

On va montrer que $\mathcal{E} = \Theta^{-1}(\bar{\Pi}(\tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2))$ est borélien dans A_{fac} ; notons encore π_i la restriction à A_i d'un élément quelconque π de A_{fac} ; \mathcal{E} est l'ensemble des $\pi \in A_{\text{fac}}$ tels que $\pi_1 \otimes \pi_2$ soit quasi équivalente à π ; soit f l'application de A_{fac} dans lui-même qui consiste, à partir d'un élément π , à construire

$$(\pi_1, \pi_2) \in A_{1,\text{fac}} \times A_{2,\text{fac}}, \quad \text{puis } \pi_1 \otimes \pi_2 \in A_{\text{fac}};$$

f est borélienne et, d'autre part, \mathcal{E} est l'ensemble des $\pi \in A_{\text{fac}}$ tels qu'on ait $\mathcal{R}(\pi, f(\pi))$, i. e. que le couple $(\pi, f(\pi))$ appartienne au graphe de \mathcal{R} dans $A_{\text{fac}} \times A_{\text{fac}}$; comme ce graphe est borélien (cf. par exemple [4], démonstration de la proposition 2), \mathcal{E} est borélien.

La proposition suivante assure la possibilité d'associer à deux mesures boréliennes standard sur \tilde{A}_1 et \tilde{A}_2 une mesure « produit » sur \tilde{A} .

PROPOSITION 3. — Soient μ_1 et μ_2 des mesures boréliennes standard sur \tilde{A}_1 et \tilde{A}_2 ; il existe des parties boréliennes standard E_1 et E_2 de \tilde{A}_1 et \tilde{A}_2 portant μ_1 et μ_2 et telles que Π induise un isomorphisme borélien de $E_1 \times E_2$ sur une partie borélienne standard de \tilde{A} ; si l'on choisit E_1 et E_2 avec ces propriétés et si l'on pose $\mu = \Pi(\mu_1 \otimes \mu_2)$, la classe de quasi-équivalence $\int^{\oplus} \pi d\mu(\pi)$

(sur ce point, cf. [7], n° 2) est le produit tensoriel des classes de quasi-équivalence

$$\int^{\oplus} \pi_1 d\mu_1(\pi_1) \quad \text{et} \quad \int^{\oplus} \pi_2 d\mu_2(\pi_2);$$

en outre, la décomposition $\int^{\oplus} \pi d\mu(\pi)$ est centrale si et seulement si les deux autres le sont.

D'après ([8], th. 6.3), il existe, pour $i = 1, 2$, une partie borélienne standard E_i de \tilde{A}_i portant μ_i et une application borélienne Γ_i de E_i dans $A_{i, \text{fac}}$ telle que $\Theta_i \circ \Gamma_i = \text{identité}$; considérons les applications boréliennes

$$E_1 \times E_2 \xrightarrow{(1)} A_{1, \text{fac}} \times A_{2, \text{fac}} \xrightarrow{(2)} A_{\text{fac}} \xrightarrow{(3)} \tilde{A},$$

où (1) est l'application (Γ_1, Γ_2) , (2) l'application du produit tensoriel et (3) la restriction de Θ . On a

$$(3) \circ (2) \circ (1) = \text{restriction de } \Pi \text{ à } E_1 \times E_2,$$

donc (2) \circ (1) est injective et son image rencontre chaque classe de quasi-équivalence en un point au plus; cette image est borélienne standard et (2) \circ (1) est un isomorphisme borélien ([8], th. 3.2); la restriction de (3) est un isomorphisme borélien et son image $\Pi(E_1 \times E_2)$ est borélienne standard ([2], prop. 2); d'où la première assertion.

L'énoncé définit une mesure borélienne standard μ sur \tilde{A} , concentrée sur $\Pi(E_1 \times E_2)$; soient $E = \Pi(E_1 \times E_2)$ et Γ l'application de E dans A_{fac} réciproque de (3); soient ρ, ρ_i les éléments des classes de quasi-équivalence

$$\int^{\oplus} \pi d\mu(\pi), \quad \int^{\oplus} \pi_i d\mu_i(\pi_i)$$

définis respectivement, par

$$\rho(x) = \int^{\oplus} \Gamma(\pi)(x) d\mu(\pi),$$

représentation dans l'espace $L^2_{\Pi \otimes \Pi}(E, \mu)$;

$$\rho_i(x) = \int^{\oplus} \Gamma_i(\pi_i)(x) d\mu_i(\pi_i),$$

représentation dans l'espace $L^2_{\Pi}(E_i, \mu_i)$ (on suppose que toutes les représentations $\Gamma_i(\pi_i)$ ont lieu dans un même espace hilbertien H); on va montrer que ρ est équivalente à $\rho_1 \otimes \rho_2$, ce qui entraînera la deuxième assertion. On a aussi

$$\rho(x) = \int^{\oplus} (\Gamma_1(\pi_1) \otimes \Gamma_2(\pi_2))(x) d(\mu_1 \otimes \mu_2)(\pi_1, \pi_2),$$

on définit un isomorphisme Φ de $L_{\mathbb{H}}^2(E_1, \mu_1) \otimes L_{\mathbb{H}}^2(E_2, \mu_2)$ sur l'espace $L_{\mathbb{H} \otimes \mathbb{H}}^2(E_1 \times E_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$ en posant, pour toute suite finie $F_{i,n} \in L_{\mathbb{H}}^2(E_i, \mu_i)$,

$$\Phi\left(\sum_n F_{1,n} \otimes F_{2,n}\right) = \text{fonction } (\pi_1, \pi_2) \rightarrow \sum_n F_{1,n}(\pi_1) \otimes F_{2,n}(\pi_2);$$

(le second membre signifie : application qui associe à tout couple $(\pi_1, \pi_2) \in E_1 \times E_2$ l'élément

$$\sum_n F_{1,n}(\pi_1) \otimes F_{2,n}(\pi_2) \in \mathbb{H} \otimes \mathbb{H});$$

Φ transforme $\rho_1 \otimes \rho_2$ en ρ puisque, quels que soient

$$x_i \in A_i \quad \text{et} \quad F_i \in L_{\mathbb{H}}^2(E_i, \mu_i),$$

on a

$$\begin{aligned} & \Phi(\rho_1 \otimes \rho_2)(x_1 \otimes x_2) \cdot F_1 \otimes F_2 \\ &= \Phi(\rho_1(x_1) \cdot F_1 \otimes \rho_2(x_2) \cdot F_2) \\ &= \text{fonction } (\pi_1, \pi_2) \rightarrow (\rho_1(x_1) \cdot F_1)(\pi_1) \otimes (\rho_2(x_2) \cdot F_2)(\pi_2) \\ &= \text{fonction } (\pi_1, \pi_2) \rightarrow \Gamma_1(\pi_1)(x_1) \cdot F_1(\pi_1) \otimes \Gamma_2(\pi_2)(x_2) \cdot F_2(\pi_2) \\ &= \text{fonction } (\pi_1, \pi_2) \rightarrow (\Gamma_1(\pi_1) \otimes \Gamma_2(\pi_2))(x_1 \otimes x_2) \cdot (F_1(\pi_1) \otimes F_2(\pi_2)) \\ &= \rho(x_1 \otimes x_2) \Phi(F_1 \otimes F_2). \end{aligned}$$

Dernière assertion : appelons $\mathfrak{A}(\pi)$ et $\mathfrak{A}(\pi_i)$ les algèbres de von Neumann engendrées respectivement par $\Gamma(\pi)(A)$ et $\Gamma_i(\pi_i)(A_i)$, \mathfrak{A} et \mathfrak{A}_i les algèbres de von Neumann engendrées respectivement par $\rho(A)$ et $\rho_i(A_i)$; dire que la décomposition

$$\int^{\oplus} \pi \, d\mu(\pi) \quad \text{ou} \quad \int^{\oplus} \pi_i \, d\mu_i(\pi_i)$$

est centrale équivaut à dire qu'on a

$$\mathfrak{A} = \int^{\oplus} \mathfrak{A}(\pi) \, d\mu(\pi)$$

ou

$$\mathfrak{A}_i = \int^{\oplus} \mathfrak{A}(\pi_i) \, d\mu_i(\pi_i);$$

or Φ transforme $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ en \mathfrak{A} et

$$\int^{\oplus} \mathfrak{A}(\pi_1) \, d\mu_1(\pi_1) \otimes \int^{\oplus} \mathfrak{A}(\pi_2) \, d\mu_2(\pi_2) \quad \text{en} \quad \int^{\oplus} \mathfrak{A}(\pi) \, d\mu(\pi);$$

comme on a toujours

$$\mathfrak{A} \subset \int^{\oplus} \mathfrak{A}(\pi) \, d\mu(\pi),$$

$$\mathfrak{A}_i \subset \int^{\oplus} \mathfrak{A}(\pi_i) \, d\mu_i(\pi_i),$$

on a

$$\alpha = \int^{\oplus} \alpha(\pi) d\mu(\pi)$$

si et seulement si

$$\alpha_i = \int^{\oplus} \alpha(\pi_i) d\mu_i(\pi_i) \quad (i=1, 2).$$

4. Caractères de $A_1 \otimes^* A_2$.

PROPOSITION 4. — Soient α un facteur, Tr une trace normale, semi-finie, fidèle sur \mathcal{A}^+ , \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 deux facteurs contenus dans \mathcal{A} , permutant élément par élément et engendrant \mathcal{A} ; on suppose $0 < \text{Tr}(T_1 T_2) < +\infty$ pour au moins un couple $(T_1 T_2) \in \mathcal{A}_1^+ \times \mathcal{A}_2^+$; alors \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 sont semi-finis et il existe un isomorphisme de $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ sur \mathcal{A} transformant $T_1 \otimes T_2$ en $T_1 T_2$ quels que soient $T_1 \in \mathcal{A}_1$ et $T_2 \in \mathcal{A}_2$.

Soit B_1 (resp. B_2) l'ensemble non vide des $T_1 \in \mathcal{A}_1^+$ (resp. $T_2 \in \mathcal{A}_2^+$) tels qu'on ait $0 < \text{Tr}(T_1 S_2) < +\infty$ [resp. $0 < \text{Tr}(S_1 T_2) < +\infty$] pour au moins un $S_2 \in \mathcal{A}_2^+$ (resp. $S_1 \in \mathcal{A}_1^+$). Soit $T_2 \in B_2$; la fonction sur $\mathcal{A}_1^+ : S_1 \rightarrow \text{Tr}(S_1 T_2)$ est une trace normale (vérification immédiate), semi-finie (puisqu'elle prend une valeur qui n'est ni nulle ni infinie) et fidèle, car

$$\text{Tr}(S_1 T_2) = 0 \Rightarrow S_1 T_2 = 0 \Rightarrow S_1 = 0,$$

la dernière implication résultant de ([1], chap. I, § 2, ex. 6 b); désignons par Tr_1 une trace normale semi-finie fidèle arbitraire sur \mathcal{A}_1^+ et par \mathfrak{m}_1 son idéal de définition; on a pour tout $S_1 \in \mathcal{A}_1^+$,

$$(1) \quad \text{Tr}(S_1 T_2) = \lambda_2(T_2) \text{Tr}_1(S_1),$$

où $\lambda_2(T_2)$ est un nombre positif non nul.

De la même façon, si $T_1 \in B_1$ et $S_2 \in \mathcal{A}_2^+$, on a

$$\text{Tr}(T_1 S_2) = \lambda_1(T_1) \text{Tr}'_2(S_2),$$

où Tr'_2 est une trace normale semi-finie fidèle arbitraire sur \mathcal{A}_2^+ (on notera \mathfrak{m}_2 son idéal de définition) et $\lambda_1(T_1)$ un nombre positif non nul.

Soient $T_1 \in \mathfrak{m}_1^+ - 0$ et $T_2 \in B_2$; on a $0 < \text{Tr}_1(T_1) < +\infty$, donc, d'après (1),

$$0 < \text{Tr}(T_1 T_2) < +\infty, \quad \text{d'où} \quad T_1 \in B_1;$$

ce qui prouve que $\mathfrak{m}_1^+ \subset B_1$; de la même façon, $\mathfrak{m}_2^+ \subset B_2$. Prenons T_1 non nul $\in \mathfrak{m}_1^+$ et T_2 non nul $\in \mathfrak{m}_2^+$; comme $T_1 \in B_1$ et $T_2 \in B_2$, on a

$$\text{Tr}(T_1 T_2) = \lambda_2(T_2) \text{Tr}_1(T_1) = \lambda_1(T_1) \text{Tr}'_2(T_2),$$

donc $\lambda_1(T_1)/\text{Tr}_1(T_1) = \lambda_2(T_2)/\text{Tr}_2(T_2)$ est un nombre k indépendant de T_1 et T_2 ; si l'on pose $\text{Tr}_2 = k\text{Tr}_2'$, on a

$$(2) \quad \text{Tr}(T_1 T_2) = \text{Tr}_1(T_1) \text{Tr}_2(T_2)$$

pour T_1 non nul $\in \mathfrak{m}_1^+$ et T_2 non nul $\in \mathfrak{m}_2^+$; on a encore (2) pour $T_1 \in \mathfrak{m}_1$ et $T_2 \in \mathfrak{m}_2$ par linéarité.

Notons H, H_1, H_2 les espaces hilbertiens complétés des algèbres hilbertiennes $\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}, \mathfrak{m}_1^{\frac{1}{2}}, \mathfrak{m}_2^{\frac{1}{2}}$; l'application bilinéaire

$$(T_1, T_2) \rightarrow T_1 T_2$$

de $\mathfrak{m}_1^{\frac{1}{2}} \times \mathfrak{m}_2^{\frac{1}{2}}$ dans $\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}$ définit une application linéaire Ω de $\mathfrak{m}_1^{\frac{1}{2}} \otimes \mathfrak{m}_2^{\frac{1}{2}}$ dans $\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}$,

$$\Omega \left(\sum_{n=1}^m T_{1,n} \otimes T_{2,n} \right) = \sum_{n=1}^m T_{1,n} T_{2,n}$$

qui est un homomorphisme de \star -algèbres et conserve le produit scalaire (vérification facile); elle se prolonge en un isomorphisme Ω de $H_1 \otimes H_2$ sur un sous-espace fermé H' de H ; $\Omega(\mathfrak{m}_1^{\frac{1}{2}} \otimes \mathfrak{m}_2^{\frac{1}{2}})$ est stable par les opérateurs U_s de multiplication à gauche par S ($S \in \mathfrak{A}_1$ ou \mathfrak{A}_2); il en est donc de même de H' et H' est stable par tous les U_s ($S \in \mathfrak{A}$); on voit de même qu'il est stable par tous les opérateurs V_s de multiplication à droite par S ($S \in \mathfrak{A}$), donc $H' = H$; alors $\Omega(\mathfrak{m}_1^{\frac{1}{2}} \otimes \mathfrak{m}_2^{\frac{1}{2}})$ est une sous-algèbre hilbertienne partout dense de $\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}$ et l'on a

$$\mathfrak{u} \left(\Omega \left(\mathfrak{m}_1^{\frac{1}{2}} \otimes \mathfrak{m}_2^{\frac{1}{2}} \right) \right) = \mathfrak{u} \left(\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}} \right).$$

D'autre part, comme on le vérifiera sans peine, Ω transforme $U_{T_1 \otimes T_2}$ en $U_{T_1 T_2}$ pour tout couple $(T_1, T_2) \in \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$, donc $\mathfrak{u}(\mathfrak{m}_1^{\frac{1}{2}} \otimes \mathfrak{m}_2^{\frac{1}{2}})$ en $\mathfrak{u}(\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}})$; combinant à droite avec l'isomorphisme de $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ sur

$$\mathfrak{u} \left(\mathfrak{m}_1^{\frac{1}{2}} \otimes \mathfrak{m}_2^{\frac{1}{2}} \right) = \mathfrak{u} \left(\mathfrak{m}_1^{\frac{1}{2}} \right) \otimes \mathfrak{u} \left(\mathfrak{m}_2^{\frac{1}{2}} \right)$$

défini par

$$T_1 \otimes T_2 \rightarrow U_{T_1 \otimes T_2} = U_{T_1} \otimes U_{T_2}$$

et à gauche avec le réciproque de l'isomorphisme de \mathfrak{A} sur $\mathfrak{u}(\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}})$,

$$T \rightarrow U_T,$$

on obtient l'isomorphisme cherché.

Remarque. — Ce résultat généralise celui de [10].

THÉORÈME 2. — *Tout caractère σ de $A_1 \otimes^* A_2$ tel qu'on ait*

$$0 < \sigma(x_1 \otimes x_2, x_1 \otimes x_2) < +\infty$$

pour au moins un couple $(x_1, x_2) \in A_1 \times A_2$ est le produit tensoriel de deux caractères de A_1 et A_2 .

Soit π la représentation gauche canoniquement associée à σ , \mathcal{A} le facteur engendré par $\pi(A)$, Tr la trace canonique sur \mathcal{A} , π_i la restriction de π à A_i , \mathcal{A}_i l'algèbre de von Neumann engendrée par $\pi_i(A_i)$; \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 sont des facteurs permutant élément par élément et engendrant \mathcal{A} (cf. fin du paragraphe 2) et les hypothèses de la proposition 4 sont vérifiées; on en déduit que π est quasi équivalente à $\pi_1 \otimes \pi_2$; puis π_1 et π_2 sont non dégénérées, car par exemple

$$\begin{aligned} \pi_1(x_1)\xi = 0 \text{ pour tout } x_1 \in A_1 &\Rightarrow \pi(x_1 \otimes x_2)\xi = 0 \text{ pour tout } x_1 \in A_1, x_2 \in A_2 \\ &\Rightarrow \pi(x)\xi = 0 \text{ pour tout } x \in A \Rightarrow \xi = 0 \end{aligned}$$

enfin, elles sont normales puisque si l'on a

$$0 < \sigma(x_1 \otimes x_2, x_1 \otimes x_2) < +\infty,$$

on a

$$0 < \text{Tr}_i(\pi_i(x_i x_i^*)) < +\infty \text{ pour } i = 1, 2.$$

Alors σ est égal au produit tensoriel des caractères de π_1 et π_2 .

COROLLAIRE 1. — *Tout caractère de type fini de A est le produit tensoriel de deux caractères de type fini de A_1 et A_2 .*

COROLLAIRE 2. — *Supposons A_1 et A_2 à bases dénombrables; Π et $\bar{\Pi}$ induisent des isomorphismes boréliens réciproques de $(\tilde{A}_1)_f \times (\tilde{A}_2)_f$ sur \tilde{A}_f et vice versa.*

(\tilde{A}_f désigne l'ensemble des classes de quasi-équivalence de représentations factorielles du type fini de A .)

La restriction de $\bar{\Pi}$ à \tilde{A}_f est borélienne (§ 3) et injective d'après le théorème 2; \tilde{A}_f et $(\tilde{A}_1)_f \times (\tilde{A}_2)_f$ sont standard ([6], chap. I, § 2, th. 1); en vertu de ([8], th. 3.2), $\bar{\Pi}|_{\tilde{A}_f}$ est un isomorphisme borélien de \tilde{A}_f sur son image, $(\tilde{A}_1)_f \times (\tilde{A}_2)_f$.

5. Représentations irréductibles normales de A_1, A_2 et $A_1 \otimes^* A_2$.

LEMME 4. — *Si π_i et ρ_i sont deux représentations de même noyau de A_i ($i = 1, 2$), les représentations $\pi_1 \otimes \pi_2$ et $\rho_1 \otimes \rho_2$ ont même noyau.*

En effet, il existe un isomorphisme de $\pi_i(A_i)$ sur $\rho_i(A_i)$ transformant $\pi_i(x_i)$ en $\rho_i(x_i)$ pour tout $x_i \in A_i$; d'après ([12], th. 1), on a

$$\left\| \sum_{n=1}^m \pi_1(x_{1,n}) \otimes \pi_2(x_{2,n}) \right\| = \left\| \sum_{n=1}^m \rho_1(x_{1,n}) \otimes \rho_2(x_{2,n}) \right\|$$

quels que soient $x_{i,1}, \dots, x_{i,m} \in A_i$; alors

$$\|(\pi_1 \otimes \pi_2) x\| = \|(\rho_1 \otimes \rho_2) x\| \quad \text{pour tout } x \in A,$$

d'où le lemme.

THÉORÈME 3. — *Si A_1 ou A_2 est NGCR et à base dénombrable, $A_1 \otimes^* A_2$ est NGCR.*

Supposons, par exemple, A_1 NGCR et à base dénombrable; d'après ([5], th. 1), il existe deux familles $(\pi_{1,i})_{i \in I}$ et $(\pi'_{1,i})_{i \in I}$ de représentations irréductibles de A_1 telles que :

- pour tout $i \in I$, $\pi_{1,i}$ et $\pi'_{1,i}$ aient même noyau sans être équivalentes;
- $\sum_i \pi_{1,i}$ et $\sum_i \pi'_{1,i}$ soient fidèles.

Soit, d'autre part, $(\pi_{2,j})_{j \in J}$ une famille de représentations irréductibles de A_2 telle que $\sum_j \pi_{2,j}$ soit fidèle. Pour tout couple $(i, j) \in I \times J$ les représentations $\pi_{1,i} \otimes \pi_{2,j}$ et $\pi'_{1,i} \otimes \pi_{2,j}$ de A sont irréductibles, de même noyau (lemme 4) et inéquivalentes; de plus, les représentations

$$\sum_{i,j} \pi_{1,i} \otimes \pi_{2,j} \quad \text{et} \quad \sum_{i,j} \pi'_{1,i} \otimes \pi_{2,j}$$

sont fidèles : en effet (distributivité du produit tensoriel par rapport à la somme directe) $\sum_{i,j} \pi_{1,i} \otimes \pi_{2,j}$ est équivalente à $\left(\sum_i \pi_{1,i}\right) \otimes \left(\sum_j \pi_{2,j}\right)$ qui est fidèle; même raisonnement pour $\sum_{i,j} \pi'_{1,i} \otimes \pi_{2,j}$. Appliquant à nouveau ([5], th. 1), on voit que A est NGCR.

DÉFINITIONS. — Rappelons qu'une représentation irréductible π d'une C^* -algèbre B dans un espace hilbertien H est *normale* si et seulement si $\pi(B)$ contient tous les opérateurs compacts dans H [il suffit pour cela que $\pi(B)$ contienne un opérateur compact non nul]. Nous dirons pour abrégé que π est *compacte* si $\pi(B)$ est identique à l'algèbre des opérateurs compacts.

PROPOSITION 5. — *Soient π_1 et π_2 deux représentations irréductibles non nulles de A_1 et A_2 :*

- (i) *La représentation $\pi_1 \otimes \pi_2$ est compacte si et seulement si π_1 et π_2 le sont;*
- (ii) *Si π_1 et π_2 sont normales, il en est de même de $\pi_1 \otimes \pi_2$;*
- (iii) *Si $\pi_1 \otimes \pi_2$ est normale et si $\pi_1(A_1)$ [resp. $\pi_2(A_2)$] est à base dénombrable, alors π_1 (resp. π_2) est normale.*

Si $x_i \in A_i$ et si $\pi_i(x_i)$ est compact non nul, $\pi_1(x_1) \otimes \pi_2(x_2)$ est compact non nul; ceci prouve (ii) et la partie « si » de (i).

Partie « seulement si » de (i) : si $\pi_1 \otimes \pi_2$ est compacte, $\pi_1(x_1) \otimes \pi_2(x_2)$ est compact quels que soient x_1 et x_2 , donc aussi $\pi_1(x_1)$ et $\pi_2(x_2)$.

(iii) Supposons $\pi_1 \otimes \pi_2$ normale et, par exemple, $\pi_1(A_1)$ à base dénombrable et π_1 non normale; $\pi_1(A_1)$ est NGCR ([5], th. 1), donc aussi, d'après le théorème 3,

$$(\pi_1 \otimes \pi_2)(A) = \pi_1(A_1) \overset{\star}{\otimes} \pi_2(A_2),$$

ce qui contredit la normalité de $\pi_1 \otimes \pi_2$.

PROPOSITION 6. — Soient π une représentation factorielle de A , π_1 et π_2 ses restrictions à A_1 et A_2 ; si π_1 ou π_2 est de type I, π est quasi équivalente à $\pi_1 \otimes \pi_2$.

C'est une généralisation facile de ([12], lemme 13).

THÉORÈME 4. — Soient A_1 et A_2 deux C*-algèbres non nulles :

- (i) La C*-algèbre $A_1 \overset{\star}{\otimes} A_2$ est CCR si et seulement si A_1 et A_2 le sont;
- (ii) Si $A_1 \overset{\star}{\otimes} A_2$ est GCR et si A_1 (resp. A_2) est à base dénombrable, alors A_1 (resp. A_2) est GCR.

La partie « si » de (i) est démontrée dans ([12], cor. 5). Prouvons en même temps (ii) et la partie « seulement si » de (i), i. e. supposons A CCR (resp. A GCR et, par exemple, A_1 à base dénombrable); soient π_1 et π_2 deux représentations irréductibles de A_1 et A_2 ; $\pi_1 \otimes \pi_2$ est irréductible et compacte (resp. normale), donc π_1 et π_2 sont compactes (resp. π_1 est normale); A_1 et A_2 sont CCR (resp. A_1 est GCR).

LEMME 5. — Soient \mathcal{A} un facteur continu, S et T des éléments non nuls de \mathcal{A} et \mathcal{A}' ; ST n'est pas compact.

On peut supposer S et T positifs, puisque si ST était compact, $STT^*S^* = SS^*TT^*$ le serait aussi. Dans ces conditions, il existe des projecteurs spectraux P_E et P_F de S et T respectivement tels qu'on ait

$$S_E \geq h > 0 \quad \text{et} \quad T_F \geq k > 0;$$

si $x \in E \cap F$, on a $Tx \in E$, donc

$$\|STx\| \geq h \|Tx\| \geq hk \|x\|;$$

$E \cap F$ est de dimension infinie, car il existe des projecteurs Q_1, Q_2, \dots de \mathcal{A}' non nuls, deux à deux orthogonaux et de somme P_F et l'on a $P_E Q_n \neq 0$ pour tout n . Par conséquent, ST n'est pas compact.

THÉORÈME 5. — *Toute représentation irréductible compacte de $A_1 \overset{\star}{\otimes} A_2$ est équivalente au produit tensoriel de deux représentations irréductibles compactes de A_1 et A_2 .*

Soient π une représentation irréductible compacte de A , π_i sa restriction à A_i ; il existe $x_i \in \dot{A}_i$ tel que $\pi_i(x_i) \neq 0$;

$$\pi_1(x_1) \pi_2(x_2) = \pi(x_1 \otimes x_2)$$

est compact, donc π_1 et π_2 sont de type I (lemme 5) et π est quasi équivalente à $\pi_1 \otimes \pi_2$ (prop. 6).

PROBLÈME. — Le théorème reste-t-il vrai si l'on remplace « compacte » par « normale » ?

THÉORÈME 3'. — *Si $A_1 \overset{\star}{\otimes} A_2$ est NGCR et à base dénombrable, l'une au moins des algèbres A_1 et A_2 l'est aussi.*

Car si A_1 et A_2 admettent des idéaux autoadjoints fermés GCR non nuls I_1 et I_2 , $I_1 \overset{\star}{\otimes} I_2$ est un idéal autoadjoint fermé GCR non nul nul de $A_1 \overset{\star}{\otimes} A_2$ [12].

6. La C^* -algèbre d'un produit direct de groupes localement compacts.

Soient G_1 et G_2 deux groupes localement compacts, $G = G_1 \times G_2$ leur produit direct, A_1, A_2, A' les C^* -algèbres respectives de G_1, G_2, G ; $\mathcal{K}(G_1), \mathcal{K}(G_2), \mathcal{K}(G)$ les espaces de fonctions continues à supports compacts sur G_1, G_2, G ; soit Φ l'application linéaire injective de $\mathcal{K}(G_1) \otimes \mathcal{K}(G_2)$ dans $\mathcal{K}(G)$ associant à tout $f_1 \otimes f_2$ la fonction $(s_1, s_2) \rightarrow f_1(s_1) f_2(s_2)$; on sait que Φ est un homomorphisme de \star -algèbres quand on munit $\mathcal{K}(G_1)$, etc. du produit de convolution et de l'involution $f \rightarrow f^*$; et d'autre part, que son image B est partout dense dans $\mathcal{K}(G)$ pour la topologie déduite de la norme $\| \cdot \|_1$.

Soient maintenant π_1 et π_2 des représentations unitaires continues de G_1 et G_2 ; considérant π_1 et π_2 comme des représentations de A_1 et A_2 , on peut former la représentation $\pi_1 \otimes \pi_2$ de $\mathcal{K}(G_1) \otimes \mathcal{K}(G_2)$; d'autre part, on peut former la représentation $\pi_1 \times \pi_2$ de G définie par

$$(\pi_1 \times \pi_2)(s_1, s_2) = \pi_1(s_1) \otimes \pi_2(s_2),$$

puis la considérer comme une représentation de A' ; on vérifie alors facilement la relation

$$(1) \quad (\pi_1 \otimes \pi_2)(x) = (\pi_1 \times \pi_2)(\Phi(x)) \quad \text{pour tout } x \in \mathcal{K}(G_1) \otimes \mathcal{K}(G_2).$$

Les C^* -algèbres $A_1 \overset{\star}{\otimes} A_2$ et A' sont complétées respectivement de $\mathcal{K}(G_1) \otimes \mathcal{K}(G_2)$ et de B pour des normes que nous noterons p et q .

PROPOSITION 7. — *L'isomorphisme de \star -algèbres Φ se prolonge en un isomorphisme de C*-algèbres de $A_1 \overset{\star}{\otimes} A_2$ sur A' dans chacun des cas suivants :*

- (i) *La fonction $\mathbf{1}$ sur chacun des groupes G_1 et G_2 est limite uniforme sur tout compact de fonctions continues de type positif à supports compacts;*
- (ii) *L'un au moins des groupes G_1 et G_2 est de type I.*

Il s'agit de montrer que Φ transforme p en q .

Premier cas : On sait [14] que la fonction $\mathbf{1}$ sur G est aussi limite uniforme sur tout compact de fonctions continues de type positif à supports compacts. Les représentations régulières gauches π_1, π_2, π de G_1, G_2, G sont fidèles quand on les considère comme des représentations de A_1, A_2, A' ; d'autre part, pour $x \in \mathcal{K}(G_1) \otimes \mathcal{K}(G_2)$ et $y \in B$, on a

$$\begin{aligned} p(x) &= \|(\pi_1 \otimes \pi_2)(x)\|, \\ q(y) &= \|\pi(y)\| \\ &= \|(\pi_1 \times \pi_2)(y)\|, \end{aligned}$$

puisque π est équivalente à $\pi_1 \times \pi_2$; l'assertion résulte de (i).

Deuxième cas : Pour $x \in \mathcal{K}(G_1) \otimes \mathcal{K}(G_2)$, on a

$$p(x) = \sup \|\pi(x)\| \quad \text{pour } \pi \text{ représentation irréductible de } A_1 \overset{\star}{\otimes} A_2;$$

mais comme toute représentation irréductible de $A_1 \overset{\star}{\otimes} A_2$ est un produit tensoriel de représentations irréductibles,

$$p(x) = \sup \|(\pi_1 \otimes \pi_2)(x)\| \quad \text{pour } \pi_i \text{ représentation irréductible de } A_i.$$

De même, pour $y \in B$, on a

$$q(y) = \sup \|\rho(y)\| \quad \text{pour } \rho \text{ représentation irréductible de } G;$$

mais toute représentation irréductible de G est un produit de représentations irréductibles de G_1 et G_2 (la démonstration est la même que pour les C*-algèbres), donc

$$q(y) = \sup \|(\rho_1 \times \rho_2)(y)\| \quad \text{pour } \rho_i \text{ représentation irréductible de } G_i;$$

l'assertion résulte encore de (i).

Exemples de produits tensoriels de C-algèbres et de représentations irréductibles qui ne sont pas des produits tensoriels.* — Soient G un groupe localement compact tel que la fonction $\mathbf{1}$ sur G soit limite uniforme sur tout compact de fonctions continues de type positif à supports compacts, et π_1 une représentation factorielle de type II de G ; π_1 est quasi équivalente à une représentation ρ_1 telle que le facteur \mathcal{A} engendré par $\rho_1(G)$ soit

antiisomorphe à son commutant \mathcal{A}' ; notons Ψ l'antiisomorphisme et définissons une représentation ρ_2 de G par

$$\rho_2(s) = \Psi(\rho_1(s^{-1}))$$

et une représentation (irréductible) ρ de $G \times G$ par

$$\rho(s_1, s_2) = \rho_1(s_1) \rho_2(s_2);$$

soit enfin π la représentation irréductible de $A \otimes^* A$ ($A = C^*$ -algèbre de G) transportée de ρ par Φ . Si π était un produit tensoriel, sa restriction π'_1 à A serait de type I, ce qui n'est pas le cas, puisque π'_1 est identique à ρ_1 comme le montre le calcul suivant [f est un élément de $\mathcal{K}(G)$ et (u_α) une unité approchée de $L^1(G)$] :

$$\begin{aligned} \pi'_1(f) &= \lim_{\alpha} \pi(f \otimes u_\alpha) = \lim_{\alpha} \rho(f(s_1) u_\alpha(s_2)) \\ &= \lim_{\alpha} \rho_1(f) \rho_2(u_\alpha) = \rho_1(f). \end{aligned}$$

Remarques. — Dans le même ordre d'idées, signalons qu'on rencontre en Théorie ergodique la situation suivante : un espace localement compact X , un groupe G d'homéomorphismes de X et une mesure positive sur $X \times X$, quasi invariante et ergodique par $G \times G$, mais non équivalente à un produit de mesures.

On trouvera dans ([6], chap. II, § 3) un exemple de groupe vérifiant les conditions ci-dessus; par ailleurs, Mautner en a depuis longtemps signalé un autre (groupe de Lie résoluble de dimension 5).

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] J. DIXMIER, *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien (Cahiers scientifiques, fasc. 25, Gauthier-Villars, Paris, 1957).*
- [2] J. DIXMIER, *Dual et quasi-dual d'une algèbre de Banach involutive (Trans. Amer. Math. Soc., t. 104, 1962, p. 278-283).*
- [3] J. DIXMIER, *Traces sur les C^* -algèbres (Ann. Inst. Fourier, t. 13, 1963, p. 219-262).*
- [4] J. A. ERNEST, *A decomposition theory for unitary representations of locally compact groups (Trans. Amer. Math. Soc., t. 104, 1962, p. 252-277).*
- [5] J. GLIMM, *Type I C^* -algebras (Ann. Math., t. 73, 1961, p. 572-612).*
- [6] A. GUICHARDET, *Caractères des algèbres de Banach involutives (Ann. Inst. Fourier, t. 13, 1963, p. 1-81).*
- [7] A. GUICHARDET, *Utilisation des sous-groupes distingués ouverts dans l'étude des représentations unitaires des groupes localement compacts (Comp. Math., sous presse).*
- [8] G. W. MACKEY, *Borel structures in groups and their duals (Trans. Amer. Math. Soc., t. 85, 1957, p. 134-165).*
- [9] F. J. MURRAY et J. VON NEUMANN, *On rings of operators (Ann. Math., t. 37, 1936, p. 116-229).*
- [10] M. NAKAMURA, *On the direct product of finite factors (Tohoku Math. J., t. 6, 1954, p. 205-207).*
- [11] O. TAKENOUCI, *Sur une classe de fonctions continues de type positif sur un groupe localement compact (Math. J. Okayama Univ., t. 4, 1955, p. 143-173).*
- [12] A. WULFSOHN, *Produit tensoriel de C^* -algèbres (Bull. Sc. math., t. 87, 1963, p. 13-27).*