ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ROBERT MEYNIEUX

Sur l'équation fonctionnelle vectorielle $f[x(u), y(v), z(u+v)] = 0$ (chapitre II)

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 81, nº 2 (1964), p. 107-163

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1964_3_81_2_107_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
3e série, t. 81, 1964, p. 107 à 163.

SUR L'ÉQUATION FONCTIONNELLE VECTORIELLE

$$f[x(u), y(v), z(u+v)] = 0$$

(*Suite*)

PAR ROBERT MEYNIEUX.

CHAPITRE II.

ENSEMBLES ANALYTIQUES.

SECTION I : APPLICATIONS CONTINÛMENT DIFFÉRENTIABLES.

23. APPLICATIONS DIFFÉRENTIABLES. — *a*. Nous aurons à considérer plus loin des *variétés* analytiques *plongées* dans $\mathbf{R}^m$ (*cf.* J. Lelong-Ferrand [6], p. 118), et des applications analytiques d'une variété dans une autre. Certaines des propriétés utilisées appartiennent plus généralement aux variétés et applications continûment différentiables. D'autre part, on peut remplacer le corps $\mathbf{R}$ des réels par le corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes, sans que les notions dont il s'agit cessent d'avoir un sens et sans que les propriétés invoquées cessent d'être vraies; d'ailleurs, dans le cas complexe, « analytique » équivaut à « (partout) différentiable » au sens où nous l'entendons (*cf.* H. Cartan [7], p. 74 et 135, où toutefois le mot « différentiable » s'entend par rapport aux variables réelles; pour les variables complexes on emploie le mot « holomorphe »).

Donnons d'abord les définitions nécessaires (nous avons choisi celles qui nous ont paru les plus commodes pour la suite; elles ne sont pas toujours équivalentes à celles d'autres auteurs). Comme aux nos 21-22, nous désignerons par K le corps $\mathbf{R}$ *ou* le corps $\mathbf{C}$.

b. Soient : A, de dimension $m \geqq 1$, et B, de dimension $n \geqq 0$, deux espaces affines sur K (m et n entiers); $A^\star$ et $B^\star$ les espaces vectoriels associés. Soient : D un *ouvert* non vide de A; a un point de D; f une application de D dans B; b le point $f(a) \in B$. La *condition* sous laquelle on dit que f est *différentiable* en a, condition classique qui implique la continuité en a (*cf.* par exemple M. Fréchet [8], R. de Possel [9]), peut ici (espaces de dimensions finies) s'exprimer sous une forme indépendante de toute norme, et de tout repère (*cf.* aussi G. Papy [10]), savoir :

Parmi les applications affines de A *dans* B, *il en existe une* (et alors nécessairement une seule) *qui est tangente à* f *en* a.

Ceci suppose la définition préalable du *contact en* a de deux applications f, g de D dans B, éléments de B^D; voici la *condition de contact :*

Le vecteur $f - g$ *de l'espace vectoriel* $(B^\star)^D$, espace qui est un module sur l'anneau K^D, et donc aussi *un module sur le sous-anneau* H *formé des applications bornées de* D *dans* K, *appartient au sous-*H*-module que constitue le sous-groupe additif engendré par les produits de la forme* $\varepsilon\psi$, *où* $\varepsilon \in K^D$ *est continue en* a *et s'y annule, et où* ψ *est la restriction à* D *d'une application affine de* A *dans* $B^\star$ *qui s'annule en* a. (La condition ne fait intervenir en fait que les germes de f et g en a.)

c. Supposons f différentiable en a, et soit φ_a l'application affine tangente à f en a. Alors l'application : $\xi \to [\varphi_a(a+\xi) - b]$ de $A^\star$ dans $B^\star$ est l'application linéaire associée à l'application affine φ_a; nous désignerons par f'_a cette application linéaire, et nous l'appellerons *différentielle de* f *en* a (*cf.* C. Chevalley [11], p. 78) [quand $A^\star$ coïncide avec K, f'_a peut être représentée par le vecteur $f'_a(1) \in B^\star$, et lui être assimilée] : c'est un élément de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(A^\star; B^\star)$, de dimension mn sur K. Quand on rapporte A et B (si $n \geqq 1$) à des bases, f'_a est représentée par une matrice dont les mn éléments sont les dérivées partielles en a des coordonnées de $f(x)$ par rapport à celles de x. Soit p le *rang* de f'_a (et de la matrice), i. e. la dimension de $\varphi_a(A)$, sous-espace affine de B; ce rang est $\leqq \inf(m, n)$ et $\geqq 0$; nous dirons que f, différentiable en a, est de rang p en a.

d. Nous dirons que l'application f de D dans B est différentiable si, pour tout $x \in D$, elle est différentiable en x (elle est alors continue). Supposons-le. Alors, en tout point $x \in D$, le rang $r(x)$ de f est défini, ainsi que la différentielle f'_x; $r(x)$ est la dimension, non seulement du sous-espace vectoriel $f'_x(A^\star) \subset B^\star$, mais encore de l'espace-quotient de $A^\star$ par le *noyau* $N(x) = (f'_x)^{-1}(0)$, lequel a la dimension $m - r(x)$.

24. Applications continûment différentiables. Applications analytiques. — *a.* Supposons, en outre, que l'application $x \to f'_x$ de D dans $\mathcal{L}(A^\star; B^\star)$ soit continue : nous disons dans ce cas que f est *continûment différentiable.* (On sait que pour cela l'*existence et la continuité dans* D *des dérivées partielles de* f *par rapport aux coordonnées de* x relatives à un repère de A *sont non seulement nécessaires, mais encore suffisantes.*)

b. Soit f une application de D dans B. On dit que f est *analytique* en $a \in \mathrm{D}$ (*cf.* [7], p. 36 et 123) s'il existe une série entière formelle à m indéterminées (sans terme constant), à coefficients dans $\mathrm{B}^\star$, qui donne naissance à une série absolument convergente, ayant pour somme $f(x) - f(a)$, quand on substitue aux m indéterminées les coordonnées du vecteur $x - a \in \mathrm{A}^\star$ (relatives à une base, dont le choix est indifférent), pourvu que x soit assez voisin de a dans D (ouvert de A).

Le lieu des points de D *où* f *est analytique est un ouvert* (vide ou non) de D (et donc de A) : *cf.* [7], p. 37 et 124.

On dit que f est *analytique* (dans D) si, pour tout $x \in \mathrm{D}$, elle est analytique en x. Alors f est *continûment différentiable; et l'application* $x \to f'_x$ de D dans $\mathcal{L}(\mathrm{A}^\star; \mathrm{B}^\star)$ *est analytique;* de sorte que f est *indéfiniment différentiable*, et que *ses dérivées partielles* (éléments de $\mathrm{B}^\star$) de tous ordres en x (par rapport aux coordonnées, une base de $\mathrm{A}^\star$ étant choisie) *dépendent analytiquement de* x (i. e.: sont les images de x par des applications analytiques de D dans $\mathrm{B}^\star$).

c. Soit f une application *analytique* de D dans B. L'*ouvert* lieu des points de D *au voisinage desquels* f *est constante* est aussi *fermé dans* D, car c'est le lieu des points *où toutes les dérivées partielles de tous ordres* ($\geqq 1$) *de* f *s'annulent.*

Supposons D *connexe* (c'est donc un *domaine* de A). Alors f est constante dans D dès qu'elle est constante dans un ouvert partiel.

Corollaire. — *Deux applications analytiques du domaine* D *dans* B *sont identiques dès qu'elles coïncident dans un ouvert partiel.*

C'est le *principe du prolongement analytique*, *cf.* [7], p. 40 et 124. On peut aussi l'exprimer en disant que, dans l'espace produit $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$, l'ensemble saturé de sous-espaces engendré (n° 9 *b*) par les graphes des applications analytiques dans B des ouverts non vides de A est *lâche* (n° 9 *d*).

25. Applications continûment différentiables (*suite*). Variation du rang. — *a*. Soit encore f une application dans B, *différentiable* en $a \in \mathrm{A}$, d'un voisinage de a dans A; soit $b = f(a)$. Supposons $n \geqq 1$, et soit g une application, *différentiable* en b, d'un voisinage de b incluant l'image de f, dans un troisième espace affine. Alors *l'application composée* $g \circ f$ *est différentiable* en a, et *sa différentielle en* a *est la composée* $g'_b \circ f'_a$ *des différentielles* de g et f. Le rang de $g \circ f$ en a est au plus celui de g en b, et au plus celui de f en a; c'est celui de g si f est de rang n, et celui de f si g est de rang n.

b. Supposons maintenant que f et g soient l'une et l'autre des applications *continûment différentiables* (ou *analytiques*) définies, f dans un ouvert D de A, et g dans un ouvert de B. *Alors* $g \circ f$ *est elle aussi continûment différentiable* (resp. *analytique*).

c. Soit f comme il vient d'être dit, et conservons les notations du nº 23 *d*.

On peut écrire $r(x) = \omega(f'_x)$, si ω désigne la fonction à valeurs entières $\geqq 0$, définie dans $\mathcal{L}(A^\star; B^\star)$, qui à chaque élément de cet espace (i. e. à chaque application linéaire de $A^\star$ dans $B^\star$) associe son rang. Or, pour tout entier $p > 0$ et $\leqq \inf(m, n)$, les points de $\mathcal{L}(A^\star; B^\star)$ où le rang est $< p$ sont ceux où s'annule une certaine fonction polynomiale Φ_p de degré p, qui prend ses valeurs dans un espace vectoriel sur K de dimension $\frac{m!\,n!}{(p!)^2(m-p)!\,(n-p)!}$; ces points forment donc un ensemble *fermé*.

Autrement dit, *la fonction* ω, *et* par suite aussi *la fonction* r, *ont en chaque point un minimum local;* en outre, si l'application f est analytique, il en est de même de l'application $x \to \Phi_p(f'_x)$, d'après les nºs 24 *b* et 25 *b*, puisque l'application polynomiale Φ_p est (*a fortiori*) analytique : *cf.* plus loin nº 26 *c*.

d. La fonction r est donc (*cf.* nº 8) *localement constante dans un ouvert partout dense de* D, réunion disjointe et finie d'ouverts partiels où elle est constante. *Si*, en outre, *f est analytique, et* D *connexe*, le principe du prolongement analytique (nº 24 *c*), joint aux résultats des alinéas précédents, montre qu'alors *r prend sa plus grande valeur en tout point d'un ouvert partout dense de* D; si p désigne cette plus grande valeur, l'ouvert dont il s'agit est le lieu des $x \in D$ qui ne satisfont pas à l'équation analytique $\Phi_p(f'_x) = 0$.

26. Cas des applications polynomiales ou rationnelles. — *a.* La notion d'application *analytique* (d'un ouvert d'espace affine dans un espace affine) est définie au nº 24 *b*. Si l'on impose des conditions supplémentaires, on obtient une classe plus restreinte d'applications. Il est possible de choisir les conditions ainsi imposées de façon que :

1º $\forall f$ dans cette classe, l'application $x \to f'_x$ appartienne aussi à cette classe (*cf.* nº 24 *b*);

2º $\forall f$, $\forall g$ dans cette classe, $g \circ f$ (si elle est définie) appartienne aussi à cette classe (*cf.* nº 25 *b*);

3º $\forall f$, $\forall g$ dans cette classe, applications d'un même ouvert D dans les espaces respectifs B et C, l'application (f, g) de D dans $B \times C$ appartienne à cette classe;

4º toute application affine appartienne à cette classe;

5º $\forall f$ dans cette classe et définie dans un ouvert D, les restrictions de f aux ouverts non vides inclus dans D appartiennent à cette classe.

b. Les propriétés 1° à 5° sont vérifiées par la classe de toutes les applications analytiques au sens du n° 24 *b* (cas où l'on n'impose aucune condition supplémentaire).

Elles sont aussi vérifiées (cas extrême opposé) par la classe des restrictions des applications *affines* à des ouverts non vides.

(Remarquons que la classe des applications continûment différentiables vérifie 2°, 3°, 4°, 5°, mais non 1°.)

c. Les propriétés 1° à 5° sont vérifiées par la classe des restrictions des applications *polynomiales* (dont un exemple, Φ_p, a été considéré au n° 25 *c*) à des ouverts non vides.

d. Elles le sont aussi par la classe des restrictions des applications *rationnelles* à des ouverts non vides (où les dénominateurs ne s'annulent pas).

27. Applications de rang constant (étude locale). — *a*. Soient A, de dimension m, et B, de dimension n (m et n entiers $\geqq 1$), deux *espaces vectoriels* sur K. Soit φ une *application linéaire* de A dans B, de rang p ($\geqq 0$, $\leqq m$ et $\leqq n$), de noyau N et d'image M; soit $\overline{\mathrm{A}}$ (resp. $\overline{\mathrm{B}}$) un sous-espace vectoriel complémentaire de N (resp. M) dans A (resp. B). Soit f une application *continûment différentiable de rang constant* p, définie dans un *voisinage ouvert* D *de* o *dans* A, à valeurs dans B, et tangente à φ au point o. On considèrera B comme produit $\mathrm{M}\times\overline{\mathrm{B}}$, d'où $f=(f_1, f_2)$, où f_1 est une application de D dans M, et f_2 dans $\overline{\mathrm{B}}$. L'application linéaire φ peut être considérée comme une application de A sur M; on appellera ψ la restriction de φ à $\overline{\mathrm{A}}$ (c'est un isomorphisme de $\overline{\mathrm{A}}$ sur M); φ est l'application linéaire tangente à f_1 au point o.

b. On veut étudier f au voisinage de o. Comme f_1 est de rang p (dimension de M) au point $0\in\mathrm{A}$, elle reste de rang p au voisinage de o, et *nous supposerons* D *assez petit* pour que l'application continûment différentiable f_1 *soit de rang constant* p, et que par suite, $\forall x\in\mathrm{D}$, on ait

$$\overline{\mathrm{B}}\cap f'_x(\mathrm{A})=\{0\}.$$

c. Considérons A comme produit $\mathrm{N}\times\overline{\mathrm{A}}$, et à tout $x=(\xi, \bar{x})\in\mathrm{D}$, avec $\xi\in\mathrm{N}$ et $\bar{x}\in\overline{\mathrm{A}}$, associons le point $[\xi, f_1(x)]\in\mathrm{N}\times\mathrm{M}$. On a ainsi une application continûment différentiable g (analytique si f l'est) de l'ouvert D de l'espace vectoriel $\mathrm{N}\times\overline{\mathrm{A}}$ dans l'espace isomorphe $\mathrm{N}\times\mathrm{M}$, et l'application linéaire g'_0 tangente à g au point o se compose de l'application identique dans N et de l'isomorphisme ψ de $\overline{\mathrm{A}}$ sur M; comme g'_0 est de rang m, il existe des voisinages de o dans lesquels g *est de rang constant* m, et *nous supposerons* D *assez petit* pour être l'un de ces voisinages.

d. Nous nous appuierons sur le théorème (classique) que voici :

Soient : D *un voisinage ouvert de* o *dans un espace vectoriel* A, *de dimension m sur* K*; et g une application continûment différentiable, constamment de rang m, de* D *dans un espace affine* E *sur* K *de dimension m. Alors :*

1° $g(D)$ *est un ouvert de* E (l'application g est *ouverte*);

2° *il existe des voisinages ouverts* Δ *de* o *dans* D, *tels que la restriction de g à* Δ *soit injective;*

3° *pour tout* Δ *vérifiant* 2°, *la restriction* $g^\star$ *de g à* Δ *est un homéomorphisme de* Δ *sur l'ouvert* $g(\Delta)$ *de* E*;*

4° *l'homéomorphisme* $g^{\star -1}$ *de* $g(\Delta)$ *sur* Δ, *réciproque de* $g^\star$, *est continûment différentiable et constamment de rang m;*

5° *si, en outre, g est analytique, alors* $g^{\star -1}$ *est analytique.*

(*Voir* les chapitres relatifs aux fonctions implicites de variables réelles ou complexes dans les traités d'analyse, par exemple G. Valiron [12] et [13]; *cf.* pour le cas analytique H. Cartan [7], p. 27, 138, 175, 178; et C. Chevalley [11], p. 71.)

On peut ajouter que si, en outre, g est la restriction à D d'une application affine de A dans E, alors $g^{\star -1}$ est évidemment la restriction à $g(\Delta)$ d'une application affine de E sur A, inverse de la première.

e. Par contre, si g est restriction d'une application polynomiale (*a fortiori* rationnelle), $g^{\star -1}$ n'est pas en général restriction d'une application rationnelle (*a fortiori* d'une application polynomiale).

Appelons *difféomorphisme* d'un ouvert D d'un espace affine de dimension m (sur K) sur un ouvert D′ d'un second espace affine (sur K) de même dimension, tout homéomorphisme continûment différentiable, partout de rang m, de D sur D′. Les assertions 4° et 5° de d signifient que l'inverse d'un difféomorphisme est un difféomorphisme, et que l'inverse d'un difféomorphisme analytique est analytique; d'ailleurs deux homéomorphismes continûment différentiables inverses l'un de l'autre sont nécessairement des difféomorphismes (d'où la définition usuelle : *cf.* [6], p. 80).

Nous pouvons alors dire, d'après ce qui précède, que, pour une classe d'applications *analytiques* (au sens du n° 24 *b*), les propriétés 1°, 2°, 3°, 4°, 5° du n° 26 *a* n'impliquent pas toujours (conjointement) celle-ci :

6° de deux difféomorphismes inverses l'un de l'autre, si l'un appartient à cette classe, alors l'autre aussi.

f. Après cette digression, reprenons le raisonnement commencé en *a*, *b*, *c*, et appliquons à g le théorème d'inversion énoncé en d; *nous supposerons* D *assez petit pour que g soit un difféomorphisme* (afin de ne pas multiplier les notations). Nous noterons g^{-1} le difféomorphisme inverse, de $g(D)$ sur $D \subset A$ (analytique si f est analytique).

Posons $D' = g(D)$; l'application composée $h = f \circ g^{-1}$, de D' dans B, est continûment différentiable (analytique si f l'est) et de rang p. Pour tout $x \in D$, si $z = g(x)$, on a

$$h'_z = f'_x \circ (g^{-1})'_z \qquad \text{et} \qquad h'_z(N \times M) = f'_x(A),$$

donc, d'après b,

$$\overline{B} \cap h'_z(N \times M) = \{0\}.$$

Or, si $z = (\xi, \eta)$, on a

$$h(z) = [\eta, f_2(x)], \qquad \text{d'où} \qquad h'_z(N \times \{0\}) \subset \overline{B},$$

et donc $h'_z(N \times \{0\}) = \{0\}$: autrement dit, $h(\xi, \eta)$ ne dépend pas localement de ξ, mais seulement de η.

g. Prenons alors un voisinage Δ de $0 \in A$ assez petit pour que l'ouvert $g(\Delta)$ de $N \times M$ soit inclus dans un domaine convexe, lui-même inclus dans D'. Dans ces conditions, $h(\xi, \eta)$ ne dépend dans $g(\Delta)$ que de η (et non de ξ). Soit π la projection $(\xi, \eta) \to \eta$ de $N \times M$ sur M, et soit θ la projection $(\eta, \overline{y}) \to \eta$ de $B = M \times \overline{B}$ sur M. Alors la restriction f_1^* à Δ de $f_1 = \pi \circ g$ est une application continûment différentiable (analytique si f l'est) et *ouverte*, toujours de rang p, de Δ dans M, dont l'image est un voisinage ouvert $\overline{\Delta}$ de 0 dans M; et la restriction à Δ de f est $f^* = k \circ f_1^*$, où k désigne une application continûment différentiable (analytique si f l'est) et *injective*, toujours de rang p, de $\overline{\Delta}$ dans B, telle que $\theta \circ k$ soit l'application identique dans $\overline{\Delta}$ (*cf.* [6] et [11]). Remarquons que $f(\Delta)$ est une partie *localement fermée* de B.

28. Applications de rang constant (*suite*). — *a*. De l'étude qui vient d'être faite résulte immédiatement ce théorème:

Soient A, B *deux espaces affines sur* K (i. e. *sur* **R** *ou sur* **C**), *de dimensions respectives* m, n (*entiers* $\geqq 1$). *Soit* f *une application, continûment différentiable et de rang constant* p, *d'un ouvert* D *de* A *dans* B. *Alors on peut recouvrir* D *par des ouverts partiels, et associer à chaque ouvert* Δ *de ce recouvrement un difféomorphisme* g *de* Δ *sur un ouvert de* $K^m = K^{m-p} \times K^p$, *un ouvert* $\overline{\Delta}$ *de* K^p, *une application* k *continûment différentiable et injective, toujours de rang* p, *de* $\overline{\Delta}$ *dans* B, *et une application affine* θ *de* B *sur* K^p, *de telle sorte que* $\theta \circ k$ *soit l'application identique dans* $\overline{\Delta}$, *et que la restriction de* f *à* Δ *soit* $k \circ \pi \circ g$, *si* π *désigne la projection de* K^m *sur* K^p. En outre, si f est *analytique*, k et $\pi \circ g$ sont alors nécessairement *analytiques*, et l'on peut choisir g *analytique*.

On peut ajouter : pour que f soit *ouverte*, il *faut et suffit* que $p = n$; pour que f soit *localement injective*, il *faut et suffit* que $p = m$ (*cf.* [11]).

b. Soient A, B comme en *a*. Soit f une application *continûment différentiable* dans B d'un ouvert D de A. On dit que f est *régulière* au point $a \in A$ si (et seulement si) elle est de rang m ($=$ dim A) en a; elle est alors régulière en tout point assez voisin de a dans A, et par conséquent *injective* dans un voisinage de a. En outre, si ce voisinage Δ est pris assez petit, l'application *continue*, restriction de f, de Δ sur *le sous-espace* $f(\Delta)$ *de* B est un *homéomorphisme* de Δ sur $f(\Delta)$; l'injection partout régulière (ou *immersion*) ne suffirait pas (*cf*. [6], p. 118) et l'on a là un cas particulier d'immersion qu'on appelle *plongement* (immersion qui est un homéomorphisme sur un sous-espace de B).

L'image d'un ouvert D de A par un plongement dans B est une partie *localement fermée* de B (*cf*. fin du n° 27).

SECTION II : VARIÉTÉS.

29. Notion intrinsèque de variété. — *a*. K désigne encore le corps $\mathbf{R}$ ou le corps $\mathbf{C}$.

E désigne un espace topologique *séparé* (connexe ou non).

Un *atlas* de E, de dimension p (entier $\geqq 1$) sur K, est par définition une famille d'*homéomorphismes* h_α (appelés *cartes*) d'*ouverts* E_α de E sur des ouverts D_α de K^p, assujettie aux deux conditions suivantes :

(1) la famille des E_α *recouvre* E;

(2) si $E_{\alpha\beta} = E_\alpha \cap E_\beta$ n'est pas vide, l'homéomorphisme $h_\beta \circ h_\alpha^{-1}$ de $h_\alpha(E_{\alpha\beta})$ sur $h_\beta(E_{\alpha\beta})$ est un *difféomorphisme* (n° 27 *e*).

[Une autre terminologie usuelle définit un « atlas » par la condition (1), à l'exclusion de (2); avec (2), on a alors un « atlas de classe C^1 ».]

Si, en outre, ce difféomorphisme est toujours *analytique*, on a un *atlas analytique*. (*Cf*. pour tout ceci J. Lelong-Ferrand [6], p. 112.)

b. Deux atlas (resp. atlas analytiques) de E, de dimension p sur K, sont dits *équivalents* (resp. analytiquement équivalents) si leur réunion est encore un atlas (resp. atlas analytique) de E.

Une structure de *variété* (resp. *variété analytique*) de dimension p (sur K) est définie sur E par un atlas (resp. atlas analytique) de E, de dimension p sur K, et la donnée de cette structure équivaut à celle de l'ensemble des atlas (resp. atlas analytiques) équivalents (resp. analytiquement équivalents) à celui-là. Toute carte appartenant à un de ces atlas est, par définition, *compatible* avec chacun d'eux et *admissible* pour la structure de variété. L'espace E est appelé le *support* de la variété.

30. Applications d'une variété dans une autre. Différentielles. — *a*. Soient V, de dimension m sur K, et W, de dimension n sur K, deux variétés (resp. variétés analytiques), et soit f une application continue

de V dans W. Soient h_1, h_2 deux cartes admissibles d'un même voisinage E de $a \in V$; soient k_1, k_2 deux cartes admissibles d'un même voisinage F de $b = f(a) \in W$, tel que $f(E) \subset F$. Alors $k_2 \circ f \circ h_2^{-1}$ est transmuée de $k_1 \circ f \circ h_1^{-1}$ par les difféomorphismes $h_2 \circ h_1^{-1}$, $k_2 \circ k_1^{-1}$; de ces deux applications continues de K^m dans K^n, il suffit donc que l'une soit continûment différentiable (resp. analytique) pour que l'autre le soit aussi; on dit dans ce cas que f est *continûment différentiable* (resp. *analytique*) dans E (pour $E = V$, on peut omettre de dire « dans V »). Si $m = n$, on définit de même un difféomorphisme. [Si V et W sont analytiques, le *principe du prolongement analytique* (n° 24 *c*) est valable.]

b. On définit de même le *rang*, en un point a de V, d'une application continûment différentiable f de V dans W. Pour la différentielle (n° 23 *c*), on peut procéder comme C. Chevalley [11], p. 76-81 (*cf.* aussi [6], p. 120), ou encore comme suit (*cf.* G. Papy [10]).

On dira qu'une application continûment différentiable g de V dans W est *tangente* à f en a, s'il existe une carte admissible h d'un voisinage E de a et une carte admissible k d'un voisinage F de $b = f(a)$, telles que $k \circ f \circ h^{-1}$ et $k \circ g \circ h^{-1}$ soient définies dans $h(E)$, et tangentes l'une à l'autre au point $h(a)$; alors cette dernière condition est vérifiée pour toutes cartes h, k qui vérifient les autres conditions. *Les points $a \in V$ et $b \in W$ étant fixés*, on a ainsi une *relation d'équivalence* dans l'ensemble des applications continûment différentiables f d'ouverts de V dans W, telles que $f(a) = b$ (relation de contact); c'est la classe d'équivalence de f (ensemble des applications continûment différentiables tangentes à f en a) que nous appellerons la *différentielle de f en a*, et que nous désignerons par f'_a. C'est un élément d'un espace vectoriel $\mathcal{L}_a^b(V; W)$ de dimension mn sur K; on peut supprimer dans la notation $\mathcal{L}_a^b$ l'indice a (resp. b) si V (resp. W) est un ouvert d'espace vectoriel. L'espace vectoriel $\mathcal{L}_a^b(V; W)$ est canoniquement isomorphe à $\mathcal{L}[\mathcal{L}^a(K; V); \mathcal{L}^b(K; W)]$ et lui est assimilable, de sorte que dans le cas d'espaces affines la nouvelle définition de la différentielle concorde avec l'ancienne (n° 23 *c*); en effet, si V est un espace vectoriel, $\mathcal{L}(K; V)$ est canoniquement isomorphe à V (*ibid.*).

L'espace vectoriel $\mathcal{L}^a(K; V)$, de dimension m sur K, est assimilable au dual de $\mathcal{L}_a(V; K)$, et s'appelle *espace linéaire tangent* à V en a; ses éléments sont les *vecteurs tangents à* V (ou *vecteurs de* V) en a.

Dans tout ce paragraphe b et en maint autre endroit, l'adverbe « continûment » peut être omis, moyennant une définition préalable (qui ne présente pas de difficulté, mais nous serait peu utile).

c. On peut composer les applications continûment différentiables ou analytiques, et leurs différentielles, comme au n° 25 a : $(g \circ f)'_a = g'_b \circ f'_a$.

Les résultats du n° 25, c et d, restent valables ici, dans la mesure où ils conservent un sens.

De même, la définition et les propriétés d'une application *régulière*, d'une *immersion*, d'un *plongement* (n° 28 b).

L'énoncé du théorème du n° 28 a est à remplacer ici par le suivant :

Soient V, W *deux variétés de dimensions respectives* m, n (*entiers* $\geqq 1$) sur K ($=$ **R** ou **C**). *Soit* f *une application de* V *dans* W, *continûment différentiable et de rang constant* p. *Alors on peut recouvrir* V *par des ouverts, et associer à chaque ouvert* Δ *de ce recouvrement un difféomorphisme* g *de* Δ *sur un ouvert de* K^m, *un ouvert* Δ' *de* K^n, *et un difféomorphisme* h *de* Δ' *sur un ouvert de* W, *de telle sorte que la restriction de* f *à* Δ *soit* $h \circ \varphi \circ g$, *si* φ *désigne l'application linéaire de rang* p : $(\xi, x) \to (x, 0)$, *de* $K^{m-p} \times K^p$ *dans* $K^p \times K^{n-p}$. *En outre, si* V, W, f *sont analytiques, on peut choisir* g *et* h *analytiques*. Et, pour que f soit *ouverte* (resp. *localement injective*), il faut et suffit que $p = n$ (resp. $p = m$).

Ce nouvel énoncé résulte du fait qu'au n° 27 g l'application k de $\bar{\Delta}$ dans B peut être étendue à $\bar{\Delta} \times \bar{B}$, pour donner un difféomorphisme de cet ouvert sur lui-même, par exemple $(\eta, \bar{y}) \to (0, \bar{y}) + k(\eta)$: difféomorphisme analytique si k est analytique. En outre, on peut faire en sorte que $f(\Delta)$ soit une partie *localement fermée* de W.

31. Sous-variétés. — a. Au n° 29 nous avons supposé $p \geqq 1$. Mais nous pouvons aussi prendre $p = 0$. La notion de *variété de dimension* 0 coïncide avec celle d'*espace discret*. Toute application continue d'un autre espace dans cette variété est localement constante, et toute application de cette variété dans une autre est continue et localement constante. En chaque point de cette variété l'unique vecteur tangent est nul. (En fait, le cas d'une variété à un seul point était déjà implicitement considéré au n° 27, où la valeur 0 de p n'était pas exclue.)

b. Soit V une variété de dimension m sur K. Nous appellerons *sous-variété* de dimension p ($0 \leqq p \leqq m$) (de V) toute variété W, de dimension p sur K, dont le support soit un sous-espace de V, et telle que l'application identique de W dans V soit un *plongement* (n°s 28 b et 30 c) : *cf.* [6], p. 118 (dans [11], p. 85, au contraire, on ne suppose pas que la topologie de W soit la topologie induite par l'application identique dans V, et l'on a seulement une *immersion*). Nous pourrons d'ailleurs dire variété au lieu de sous-variété quand il n'y aura pas à craindre d'ambiguïté. Toute sous-variété de V est localement fermée dans V (*cf.* fin du n° 30).

Si V, W et le plongement sont analytiques, on a une *sous-variété analytique* (ou variété analytique s'il n'y a pas à craindre de confusion).

c. Toute sous-variété de dimension q ($0 \leqq q \leqq p$) de la variété W est aussi une sous-variété de dimension q de V.

Réciproquement, soit W′ une sous-variété de dimension q ($0 \leqq q \leqq m$) de V, dont le support soit inclus dans celui de W. Localement, l'application identique de W dans V est transmuée en application linéaire par un difféomorphisme d'un ouvert de V sur un ouvert Δ' de K^m, induisant un difféomorphisme d'un ouvert de W sur un ouvert Δ de K^p, sous-espace de Δ' (n^os 28 *a* et 30 *c*) et image de Δ' par la projection de K^m sur K^p. En utilisant la transmuée de cette projection par le difféomorphisme inverse (de Δ' dans V), on réalise un plongement de W′ dans W : on a donc $q \leqq p$, et W′ est une sous-variété de W.

Les résultats ainsi obtenus restent valables quand il s'agit de sous-variétés analytiques.

Il résulte de là que toute sous-variété de V est déterminée par son support, et peut donc lui être assimilée, quand la structure de V est donnée.

d. Les sous-variétés de dimension p de V sont les éléments d'un ensemble $\mathcal{C}_p$ *saturé* (n° 9 *b*) engendré par les plongements dans V d'ouverts de K^p. S'il s'agit de sous-variétés analytiques, cet ensemble saturé est *lâche* (n° 9 *d*; *cf.* n° 24 *c*), comme il résulte du fait que *toute sous-variété analytique connexe de* K^m *dont un ouvert est inclus dans le sous-espace* $K^p \subset K^m$ *est elle-même incluse dans* K^p. Les $m+1$ parties $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_m$ de $\mathfrak{P}(V)$ (ensemble des parties de la *variété analytique* V de dimension m sur K) sont alors les éléments d'un ensemble Γ *simplement ordonné* (n° 10 *b*) isomorphe à l'ensemble ordonné I des $m+1$ entiers $0, 1, \ldots, m$ (*cf.* n^os 22 *a* et 31 *c*); en particulier, $\mathcal{C}_0$ est l'ensemble des parties discrètes non vides de V, et $\mathcal{C}_m$ l'ensemble des ouverts non vides.

e. D'après une remarque que nous avons faite en *c*, toute sous-variété W, de dimension p, de la variété V (de dimension m sur K), peut être considérée comme une réunion de parties ouvertes de W, à chacune desquelles, soit Δ, on peut associer un ouvert Δ' de V et une application continûment différentiable f, partout de rang $m-p$, de Δ' sur un voisinage ouvert de 0 dans K^{m-p}, de telle sorte que $\Delta = f^{-1}(0)$.

En outre, si V et W sont analytiques, on peut choisir f analytique.

SECTION III : ENSEMBLES ANALYTIQUES.

32. Définition d'un ensemble analytique. — *a*. K désigne toujours le corps **R** ou le corps **C**.

V désigne une *variété analytique* de dimension m sur K (m entier $\geqq 1$).

Soit a un point de V. Les *germes* en a d'*applications analytiques, à valeurs dans* K et définies chacune dans un voisinage (non précisé) de a, forment un *anneau* H_a (qui est le même à un isomorphisme près pour tous les points de toutes les variétés analytiques de dimension m sur K), somme directe du sous-anneau K_a des germes d'applications constantes et de l'*idéal* I_a des germes nuls en a, idéal qui est l'*unique idéal maximal* de H_a, et qui inclut tous les idéaux distincts de H_a lui-même.

Soit E une partie de V dont le germe E_a au point a ne soit pas vide. La restriction à E_a de H_a est un *anneau* $H(E_a)$, *quotient* de $H_a = H(V_a)$ par l'*idéal* $I(E_a)$ des éléments de H_a qui *s'annulent sur* E_a [on a $I_a = I(\{a\}_a)$, $I(V_a) = \{0\}$].

b. Or l'anneau H_a est *nœthérien*, i. e. ([2], p. 238 ou Bourbaki [14], p. 24-25) : *tout idéal admet un système fini de générateurs*. Parmi les germes en a (de parties de V) où s'annulent les éléments d'un idéal donné strictement inclus dans H_a, il y en a donc un qui est *le plus grand*, et que nous *associerons* à cet idéal; ce germe associé est nécessairement *fermé*.

Soit alors E_a comme ci-dessus (en a). Nous dirons que le germe E_a est *analytique* si (et seulement si) il coïncide avec le *germe associé* (comme il vient d'être dit) *à l'idéal* $I(E_a)$.

Pour qu'un germe E_a soit analytique, il faut et suffit qu'il existe un idéal J (strictement inclus dans H_a) auquel E_a soit associé. En effet, on a alors $J \subset I(E_a)$, donc le germe associé à $I(E_a)$ est inclus dans le germe E_a associé à J, et par conséquent coïncide avec E_a.

Pour qu'un germe E_a soit analytique, il faut et suffit qu'il existe un entier $n \geqq 0$, et une application analytique f dans K^n d'un voisinage de a, tels que $f(a) = 0$, et que E ait même germe en a que $f^{-1}(0)$. Cette condition est en particulier satisfaite quand E est une *sous-variété analytique* de V passant par a (nº 31 *e*), de dimension p ($\leqq m$); le germe analytique E_a est alors dit *régulier et de dimension p*.

Pour tout ceci, *voir* par exemple J. Frenkel [15], F. Bruhat [16], H. Cartan [17] ou P. Samuel [18].

Tout germe analytique est *fermé*.

c. Soit E une partie de V. Nous dirons que E est un *sous-ensemble analytique de* V (ou simplement un *ensemble analytique*) si (et seulement si), $\forall x \in E$, *le germe* E_x *est analytique;* E est alors *localement fermé*.

D'après cette définition, la partie vide de V et les sous-variétés analytiques de V sont des ensembles analytiques.

Les ensembles analytiques non vides sont les éléments d'une partie *saturée* (nº 9 *b*) de $\mathfrak{P}(V)$, que nous appellerons $\mathcal{A}$, et qui inclut les $m + 1$ parties $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_m$ (saturées et lâches) définies nº 31 *d*, éléments de l'ensemble simplement ordonné Γ.

Nous allons voir que Γ et $\mathcal{A}$ déterminent sur V une *structure analyticoïde* (nº 15 *a*), nécessairement *séparée* (nºs 17 *b* et 29 *a*) et *fermée* (nº 17 *e*);

dans le cas où V est un espace affine sur K, il s'agira alors évidemment d'une *structure analyticoïde affine* (n° 22 *b*).

33. Vérification des axiomes. — *a*. Les *axiomes* 1 *et* 2 du n° 15 *a* sont déjà vérifiés : *cf.* n° 31 *d*, à la fin.

Axiome 3 : résulte de la caractérisation ci-dessus (n° 32 *b*) d'un germe analytique; soit, en effet, $\varphi = (f, g)$ une application (analytique ou non) dans $K^n \times K^q$ d'un voisinage de a; on a

$$\varphi^{-1}(o) = f^{-1}(o) \cap g^{-1}(o).$$

Axiome 4 : résulte de la correspondance biunivoque strictement décroissante entre les germes analytiques E_a au point a et les idéaux $I(E_a)$ (n° 32 *b*), et de la propriété caractéristique (appliquée à H_a) d'un *anneau nœthérien*, suivant laquelle *l'ensemble ordonné des idéaux satisfait à la condition maximale* ([14], p. 24-25, ou [2], p. 238-239).

Axiome 6 : résulte du *principe du prolongement analytique* (n^os^ 24 *c* et 30 *a*).

b. Reste à vérifier l'*axiome* 5_1 (n° 15 *c*), c'est-à-dire : associer à tout germe analytique E_x une *dimension* $p = \dim E_x$, entier $\geqq o$ et $\leqq m$, de telle sorte que *dans* E_x *soit inclus un germe non vide de sous-variété analytique de dimension p, le complément dans* E_x *de ce germe étant le germe vide ou un germe analytique de dimension* $< p$.

c. Notons d'abord une propriété très importante de l'ensemble des germes analytiques en un point a (propriété qui ne résulte pas des axiomes du n° 15, comme le montre l'exemple de la structure linéaire, n° 22 *a*) :

La réunion $E_a \cup F_a$ *de deux germes analytiques en a est un germe analytique*, associé (n° 32 *b*) à l'idéal-produit de $I(E_a)$ et $I(F_a)$.

Il en résulte (n° 12 *f*) que *tout germe analytique est réunion finie de germes analytiques irréductibles*, bien déterminés si aucun d'eux n'est superflu (i. e. inclus dans un autre), et alors appelés *composants irréductibles* de leur réunion (*cf.* [16] et [18]).

34. Structure d'un germe analytique. — *a*. Nous supposerons, comme il est loisible, que V est un *espace vectoriel* (de dimension m sur K), et qu'on étudie un germe E_0 analytique au point $o \in V$. Désignons par V^* le *dual* de V. Supposons d'abord E_0 (pour fixer les idées) distinct de $\{o\}_0$ et de V_0 (ce qui exige $m \geqq 2$). Pour tout entier $p > o$ et $< m$, considérons l'espace vectoriel, de dimension $\binom{m}{p} = \frac{m!}{p!(m-p)!}$, *puissance extérieure* $p^{\text{ième}}$ de V^*, puis l'*espace projectif* Π_p de dimension $\binom{m}{p} - 1$, qui s'en déduit; aux sous-espaces vectoriels de dimension p de V^* correspondent dans Π_p les points d'une *variété* connexe et compacte Φ_p (définis-

sable par des équations algébriques) de dimension (sur K) $p(m-p)$: (*cf.* Bourbaki [19], p. 63, et [20], p. 52 et 119), c'est la *grassmannienne.*

Soit W^* un tel sous-espace vectoriel, ensemble des éléments de V^* (formes linéaires dans V) qui s'annulent sur un sous-espace W' de V, de dimension $m-p$. Nous désignerons par $H'(W^*)$ le sous-anneau de H_0 *analytiquement engendré* par les éléments de W^*, i. e. l'ensemble des germes au point o des fonctions analytiques scalaires invariantes par les translations de W'. Nous dirons que W^* est *libre sur* E_0 si (et seulement si)

$$H'(W^*)\cap I(E_0)=\{0\}.$$

Nous dirons que W^* est *générateur* pour $H(E_0)$ si (et seulement si) tout élément de $H(E_0)$ est *algébrique* et *entier* sur le sous-anneau de $H(E_0)=H_0/I(E_0)$ image de $H'(W^*)$ (sous-anneau de H_0) par l'application canonique; $H(E_0)$ est alors inclus dans l'anneau des entiers d'une *extension algébrique finie* de ce sous-anneau. *Cf.* H. Cartan [21].

b. Voici alors des résultats essentiels, pour la démonstration desquels nous renvoyons à S. Bochner et W. T. Martin [22], chap. 10; H. Cartan [21], [23], [17]; P. Samuel [18]; B. Malgrange [24].

1° *Soit* E_0 *un germe analytique au point* o *de l'espace vectoriel* V (de dimension m sur K). *Il existe un entier p et un seul tel que ne soit pas vide l'ensemble des sous-espaces vectoriels de* V^* *de dimension p, libres sur* E_0 *et générateurs pour* $H(E_0)$. *On pose alors* $p=\dim E_0$ (définition de la dimension).

2° *Cet ensemble a alors dans* Φ_p *une image ouverte partout dense.*

3° *Dans le cas complexe* ($K=\mathbf{C}$), *pour qu'un sous-espace vectoriel* W^* *de* V^* *soit générateur pour* $H(E_0)$, *il faut et suffit que* $(E\cap W')_0=\{0\}_0$. W' *désigne le sous-espace orthogonal à* W^* *dans* V.

4° *Soit* W^* *un sous-espace vectoriel de* V^* (de dimension p) *libre sur* E_0 *et générateur pour* $H(E_0)$. *Soit* $p<m$, *de sorte qu'on peut considérer l'ensemble des sous-espaces vectoriels de* V^* *de dimension* $p+1$ *qui incluent* W^* *comme un espace projectif* de dimension $m-p-1$ sur K. *Il existe alors un ouvert partout dense de cet espace, et pour chaque élément* U^* *de cet ouvert un élément non nul* Δ *de* $H'(W^*)$, *tels que l'image dans* $H(E_0)$ *de* ΔH_0 *soit incluse dans celle de* $H'(U^*)$. Un tel élément Δ sera appelé *dénominateur universel.*

5° *La dimension p de* E_0 *est la plus grande des dimensions de ses composants irréductibles.*

6° *Dans le cas où tous les composants irréductibles de* E_0 *ont même dimension* $p<m$, *et dans les conditions de* 4°, *l'intersection* $H'(U^*)\cap I(E_0)$ *est un idéal principal de* $H'(U^*)$ *engendré par un élément de la forme* $P(f)$, *où* P *désigne un polynome distingué à coefficients dans* $H'(W^*)$, *premier avec sa dérivée, et f le germe d'un élément de* U^* (indépendant de W^*).

Comme dénominateur universel Δ on peut alors prendre le *discriminant* de P.

Remarquons que les auteurs cités n'ont pas tous la même terminologie, et que les résultats sont présentés dans un ordre et sous une forme variable; les ouverts partout denses de 2° et 4° ne sont d'ailleurs pas explicitement signalés (*cf.* toutefois une remarque de B. Malgrange [24], p. 121), mais leur existence se déduit de la démonstration des autres résultats, notamment, pour l'ouvert de 4°, de la démonstration du *théorème de l'élément primitif* pour une extension algébrique séparable et finie d'un corps commutatif (*cf.* [2], p. 366).

Autre remarque : certains résultats ne sont démontrés d'abord que dans le cas où E_0 est *irréductible*, i. e. où $I(E_0)$ est un *idéal premier* de H_0, i. e. où $H(E_0)$ est *intègre*. Ils sont ensuite étendus au cas général : *cf.* H. Cartan [23], exposé 10. La propriété 5 de la dimension est souvent prise comme définition pour un germe décomposable.

En outre : certains auteurs ne considèrent que le cas complexe. H. Cartan considère d'abord le cas complexe, [21] et [23], puis le cas réel [17]. Mais les deux cas peuvent être traités d'une manière presque identique : *cf.* [24]; on s'appuie notamment, pour cela, sur la théorie de la *dimension d'un anneau local nœthérien* ([24], p. 116, et [18]).

Signalons enfin qu'on pourrait s'inspirer, pour une autre démonstration, des méthodes de S. Łojasiewicz [25] (*cf.* notamment l'appendice de [25]).

35. Vérification de l'axiome de la dimension. — *a.* Reste à vérifier que E_0 et la dimension p définie n° 34 *b*, 1° satisfont bien à la condition énoncée n° 33 *b* (axiome 5_1). Nous pouvons éliminer les cas $p = m\,(E_0 = V_0)$ et $p = 0\,(E_0 = \{0\}_0)$, où la condition est trivialement satisfaite. Soit donc $0 < p < m$, et plaçons-nous dans les conditions du n° 34 *b*, 4°.

Soit F_0 le germe (inclus dans E_0) défini comme suit : F_0 est le germe vide si $\Delta \notin I_0$; sinon, F_0 est le germe (analytique) associé à l'idéal $\Delta . H_0 + I(E_0)$. Dans ce dernier cas, d'après le *théorème de préparation* de Weierstrass (*cf.* [15]), on peut remplacer Δ par un élément de la forme $Q(g)$, où Q désigne un *polynome distingué* à coefficients dans $H'(Z^*)$, avec Z^* sous-espace vectoriel de dimension $p-1$ de W^*, et où g est le germe d'un élément de W^* indépendant de Z^*. Alors Z^* est générateur pour $H(F_0)$; et l'existence d'un sous-espace Z^* (de dimension $p-1$) générateur pour $H(F_0)$ résulte ainsi seulement de ce que W^* est générateur pour $H(F_0)$ sans être libre sur F_0 (*cf.* [21]). De proche en proche on finira (en répétant au besoin l'opération qui fait passer de W^* à Z^*) par trouver un sous-espace à la fois générateur pour $H(F_0)$ et libre sur F_0, de dimension $\leqq p-1$ (et $\geqq 0$). Donc $\dim F_0 < p$.

b. Le complémentaire E'_0 de F_0 dans E_0 n'est donc pas vide, et il suffit de montrer que E'_0 est un germe de variété analytique de dimension p, si l'on a préalablement, comme il est loisible et comme nous le supposerons, choisi pour Δ un élément de $H'(W^\star)$ qui *s'annule sur les composants* de E_0 *de dimension* $< p$ (s'il y en a), et *admet comme facteur le discriminant d'un polynome distingué* P *construit comme en* 6° (n° 34 *b*) *à partir de la réunion des composants irréductibles de dimension* p de E_0. Il est donc loisible de supposer que *cette réunion coïncide avec* E_0, et nous le ferons pour éviter un abus de notations.

c. Soit $f = f_0$ comme en 6° (n° 34 *b*), et soient $f_1, \ldots, f_{m-p-1}$ les germes de $m - p - 1$ formes linéaires sur V, qui, avec $U^\star$, engendrent $V^\star$. Soit P_i le polynome distingué minimal, à coefficients dans $H'(W^\star)$, tel que $P_i(f_i) \in I(E_0)$: en particulier, $P_0 = P$; soit $n_i + 1$ le degré ($\geqq 1$) de P_i, et soit $s = \sum_{i \geqq 1} n_i$ (on a $s = 0$ si $p = m - 1$). On a $\Delta . f_i - R_i(f) \in I(E_0)$, avec R_i polynome de degré $< n_0$, à coefficients dans $H'(W^\star)$ (ou éventuellement $R_i = 0$). Soit J l'idéal [inclus dans $I(E_0)$] engendré par les $2m - 2p - 1$ éléments :

$P_i(f_i)$, pour $i = 0, \ldots, m - p - 1$; et $\Delta . f_i - R_i(f)$ pour $i = 1, \ldots, m - p - 1$.

Alors, dans H_0/J, l'image de $\Delta^s . H_0$ est incluse dans celle de $H'(U^\star)$. Donc $\Delta^s . I(E_0) \subset J$, puisque

$$H'(U^\star) \cap I(E_0) \subset P(f) . H_0 \subset J.$$

(*Cf.* [24], p. 116 et 120.)

Le germe E'_0 est donc inclus et ouvert dans le germe (analytique) G_0 associé à J (et qui inclut donc E_0), le complémentaire $G_0 - E'_0$ étant l'intersection de G_0 et du germe associé à l'idéal principal $\Delta . H_0$.

D'autre part, si $1 \leqq i \leqq m - p - 1$, l'élément $\Delta^{n_i+1} P_i(f_i)$ appartient à l'idéal engendré par $\Delta f_i - R_i(f)$ et $P(f)$, de sorte que la conclusion qui vient d'être énoncée reste valable quand on y remplace J par l'idéal $\bar{J}$ (inclus dans J) engendré par les $m - p$ éléments :

$$\Delta . f_i - R_i(f) \quad \text{pour } i = 1, \ldots, m - p - 1; \qquad \text{et} \qquad P(f).$$

(Au lieu de G_0 on a alors un germe analytique $\bar{G}_0 \supset G_0 \supset E_0$.)

d. D'après cela, pour la vérification proposée, il suffit de considérer l'image de E'_0 dans le dual de $U^\star$; autrement dit, *nous sommes ramenés au cas* $p = m - 1$, dans lequel nous nous placerons : on a alors $U^\star = V^\star$, et

$$\bar{J} = J = I(E_0) = P(f) . H_0$$

Or Δ appartient à l'idéal engendré par $P(f)$ et $P'(f)$, si P' désigne le polynome dérivé de P. On a donc dans un voisinage ouvert de 0 dans V une fonction analytique scalaire [dont le germe en o est $P(f)$], de rang 1 en tout point de l'ouvert partiel X où ne s'annule aucune de deux certaines fonctions [dont les germes en o sont Δ et $P'(f)$] : le lieu E' des points de X où la première de ces trois fonctions s'annule est bien une *variété analytique de dimension* $m-1$ (*cf.* n° 30 *c*; la propriété des applications analytiques utilisée ici est une réciproque de celle du n° 31 *e*).

e. En conclusion, sur une variété analytique V, les sous-variétés analytiques des différentes dimensions et les sous-ensembles analytiques déterminent bien une structure analyticoïde, que nous appellerons la *structure analytique*.

36. Germe analytique associé a une application. Dimension analytique. — *a.* Soit encore V une variété analytique de dimension m sur K. Soit A un espace topologique. Soit f une application de A dans V, continue en un point $a \in A$; soit $b = f(a)$. Relativement à la structure analytique de V (n° 35 *e*), le germe analyticoïde associé à f et a (n° 17 *b*) est tout naturellement appelé *le germe analytique associé à f et a*; sa dimension (n^{os} 33 *b* et 34 *b*, 1°) est appelée la *dimension analytique de f en a*; si $p = \dim.\mathrm{an}.f_a$ est cette dimension, $\mathcal{C}_p$ (n° 31 *d*) est ce que nous désignions au n° 18 *b* par $d_a(f)$.

b. Par exemple, si A est lui-même une variété analytique, et *si f est une application analytique de rang constant p* au voisinage de a, *la dimension analytique de f est constamment p* dans tout un voisinage de a (dans tout A si le rang est constant dans tout A) : *cf.* n° 30 *c*; *et le germe analytique associé est régulier.*

c. Par contre, la dimension analytique d'une application analytique f de rang non constant peut fort bien prendre en certains points des valeurs strictement supérieures à toutes les valeurs du rang, et même à la dimension de la variété de départ A (*cf.* W. F. Osgood [26], p. 155), si $\dim A \geqq 2$. Exemple : l'application $(t, x) \to (x, xt, xe^t)$ de K^2 dans K^3 a pour dim. an. le nombre 3 en tout point où $x = 0$ (elle y est de rang 1; et son rang est 2, comme sa dim. an., partout ailleurs). On peut dire toutefois que de tels points sont exceptionnels : *cf.* n° 25 *d*, en accord avec le n° 18 *g*.

En outre, le germe analytique associé à f (pour tout point de A) est irréductible : *cf.* [21], exp. 14, th. 5.

d. Soit maintenant A une partie de la variété analytique V. Soit a un point de V adhérent à A. On définit de même *le germe analytique associé à* A *et a* (n° 17 *c*); sa dimension est appelée la *dimension analytique de* A *en a*, ce germe est le germe associé (n° 32 *b*) à l'idéal $I(A_a)$ des éléments de H_a qui s'annulent sur le germe A_a (n° 32 *a*).

37. Lemme concernant le rang de certaines applications analytiques surjectives. — *Soit* V *une variété analytique connexe de dimension* m *sur* K (m *entier* $\geqq 1$). *Soit* g *une application analytique de* V *sur une variété analytique* $\mathrm{U} = g(\mathrm{V})$, *de dimension* q. *Supposons qu'il existe une injection continue* f *de* U *dans* V, *dont la dimension analytique soit partout* m, *et telle que* $g \circ f$ *soit l'application identique dans* U. *Alors* g *est de rang* q *en tout point d'un ouvert partout dense de* V, *incluant l'image par* f *d'un ouvert partout dense de* U.

Soit, en effet, q' le maximum du rang de g dans V. Puisque V est connexe, le rang de g est q' en tout point d'un ouvert partout dense V' de V, dont le complément dans V est un ensemble analytique de dimension $< m$ en chacun de ses points (n° 25 d). Posons $\mathrm{W} = \mathrm{V}' \cap f(\mathrm{U})$; alors W est ouvert dans $f(\mathrm{U})$; et il y est partout dense puisque dim. an. $f = m$ partout, et que par suite le germe de $f(\mathrm{U})$ en un de ses points ne peut être inclus dans celui de $\mathrm{V} - \mathrm{V}'$. Soit $v \in \mathrm{W}$; la dimension analytique de g en v est q' (n° 36 b), tandis que celle de sa restriction à $f(\mathrm{U})$ [*homéomorphisme* f^{-1} de $f(\mathrm{U})$ sur U] est $q \geqq q'$; on a, par suite, $q' \geqq q$, et donc $q' = q$.

En outre, puisque W est partout dense et ouvert dans $f(\mathrm{U})$, l'ouvert V' de V inclut bien l'image W par f de l'ouvert partout dense $f^{-1}(\mathrm{W})$ de U.

38. Application continue d'une variété analytique dans une autre. — *a*. Soient U, X des variétés *analytiques* de dimensions respectives q, l sur K. Soit f une application *continue* de U dans X; soit f_1 l'application $u \to f_1(u) = [u, f(u)]$ de U dans $\mathrm{U} \times \mathrm{X}$; soit π l'application *analytique* $(u, x) \to \pi(u, x) = u$ de $\mathrm{U} \times \mathrm{X}$ sur U.

Appliquons à f_1 le résultat du n° 18 g. *On a : dans* U *un ensemble d'ouverts dont la réunion est partout dense*; *et pour tout ouvert* W, *élément de cet ensemble, une sous-variété analytique* V *de* $\mathrm{U} \times \mathrm{X}$, *incluant* $f_1(\mathrm{W})$, *de telle sorte que la dim. an. de* f_1 *en tout point de* W *soit* dim V. *Nous préciserons :* $\mathrm{V} \subset \mathrm{W} \times \mathrm{X}$. [On peut, en effet, prendre $\mathrm{V} \cap (\mathrm{W} \times \mathrm{X})$.]

Nous supposerons, comme il est loisible, W *et* V *connexes*.

b. Appliquons alors le lemme du n° 37 à la restriction de π à V, et à la restriction à W de l'injection continue f_1.

Le résultat est que *la restriction de* π *à* V *est de rang* q *en tout point d'un ouvert partout dense de* V, *incluant l'image par* f_1 *d'un ouvert partout dense de* W.

c. Combinons a et b : *il existe un ensemble d'ouverts de* U *dont la réunion est partout dense, et, pour tout élément* W *de cet ensemble, une sous-variété analytique* V *de* $\mathrm{W} \times \mathrm{X}$, *incluant* $f_1(\mathrm{W})$, *de telle sorte que la dim. an. de* f_1

en tout point de W *soit* dim V, *et que la restriction à* V *de* π *soit partout de rang* q.

Et il est loisible de préciser : W et V connexes.

39. Germes algébriques. — *a*. Soit B un *espace affine* de dimension m ($\geqq 1$) sur K. Soit (B, Γ, $\mathcal{A}$) la structure analytique (n° 35 *e*) sur B, avec $\Gamma = \{\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_m\}$.

Tout *germe analytique* E_a (en un point $a \in B$) associé (n° 32 *b*) à un idéal de $H_a = H(B_a)$ engendré par des germes *d'applications polynomiales* (de B dans K) est dit *algébrique*.

Soit $\overline{\mathcal{A}}$ l'ensemble dont les éléments sont ceux des éléments de $\mathcal{A}$ dont les germes analytiques sont algébriques; soit $\overline{\mathcal{C}}_p = \overline{\mathcal{A}} \cap \mathcal{C}_p$. Alors $\overline{\Gamma} = \{\overline{\mathcal{C}}_0, \overline{\mathcal{C}}_1, \ldots, \overline{\mathcal{C}}_m\}$ est un ensemble simplement ordonné (n° 10) de parties saturées et lâches (n° 9) de $\mathfrak{T}$ (B), incluses dans la partie saturée $\overline{\mathcal{A}}$; on a $\overline{\mathcal{C}}_0 = \mathcal{C}_0$ et $\overline{\mathcal{C}}_m = \mathcal{C}_m$. Pour vérifier que $\overline{\Gamma}$ et $\overline{\mathcal{A}}$ déterminent sur B une structure analyticoïde affine, que nous appellerons la *structure algébrique*, il suffit donc de vérifier l'axiome de la dimension (n° 33 *b*), ce qui résulte des remarques que voici :

b. Au n° 34 *b*, supposons E_0 algébrique; alors la dimension p définie en 1° à partir de l'anneau H_0 est égale à celle qu'on définirait pareillement à partir du sous-anneau $\overline{H}_0$ formé des germes d'applications polynomiales (de V dans K); et les sous-espaces vectoriels libres sur E_0 (n° 34 *a*) restent les mêmes si on les définit à partir de $\overline{H}_0$ au lieu de H_0. De même, soit $\overline{I}(E_0) = \overline{H}_0 \cap I(E_0)$, et soit $\overline{H}(E_0) = \overline{H}_0/\overline{I}(E_0)$; un sous-espace vectoriel « générateur » (suivant la définition à partir de $\overline{H}_0$) pour $\overline{H}(E_0)$ est aussi générateur (suivant l'ancienne définition) pour $H(E_0)$. La réciproque n'est pas vraie (à cause des directions asymptotiques), mais la propriété 2° du n° 34 *b* reste vraie pour la nouvelle définition (la propriété 3°, elle, ne reste pas vraie), ainsi que 4° et 5° et les propriétés du n° 33 *c*. De même, la propriété 6°, à condition de remplacer « distingué » par « unitaire » (ce qu'il convient de faire aussi au n° 35). L'irréductibilité doit, bien entendu, être prise alors au sens algébrique : un germe algébrique (algébriquement) irréductible peut avoir plusieurs composants analytiques irréductibles, et même de dimensions différentes, comme le montre l'exemple du point triple d'une surface quartique de Steiner ($K = \mathbf{R}$, $m = 3$, $p = 2$) dont une seule droite de points doubles est réelle (toutefois, les composants analytiques sont de même dimension dans le cas complexe; *cf.*, par exemple, S. Lefschetz [27], p. 90).

Les relations que nous venons de signaler entre $\overline{H}_0$ et H_0 sont liées au fait que *le* $\overline{H}_0$*-module* H_0 *est plat*, i. e. (Bourbaki [28], p. 43) : toute relation linéaire, *à coefficients dans* H_0, entre éléments de $\overline{H}_0$, est combinaison linéaire de relations linéaires, *à coefficients dans* $\overline{H}_0$, entre ces mêmes éléments. Cela résulte de l'étude du module des relations linéaires entre des éléments donnés de H_0; *cf.* H. Cartan [29], p. 38-41.

c. Soit f une application dans B d'un espace topologique A; supposons f continue en un point $a \in A$, et soit $b = f(a)$. Relativement à la structure algébrique de B, le germe analyticoïde associé à f et a (n° 17 *b*) est naturellement appelé le *germe algébrique associé à f et a*; il inclut le germe analytique associé, et sa dimension, appelée *dimension algébrique de f en a*, est donc au moins égale à la dimension analytique de f en a.

d. Supposons en outre que A soit une *variété analytique* (sur K), et que f soit *analytique*. Pour tout $a \in A$, le germe algébrique associé à f et a est algébriquement irréductible (*cf.* remarque finale du n° 36 *c*). C'est le germe en b associé à un *idéal premier* de fonctions polynomiales scalaires, idéal indépendant du point *a si A est connexe*, d'après le principe du prolongement analytique (les fonctions polynomiales étant définies et analytiques dans tout l'espace B). *Dans ce cas*, soit E l'ensemble algébrique défini dans B par cet idéal, et soit E′ le lieu des points $y \in E$ tels que cet idéal coïncide avec celui défini par le germe E_y (au lieu d'y être strictement inclus, comme il peut arriver en certains points de E si $K = \mathbf{R}$). Alors $f(A) \subset E'$, et, pour tout $a \in A$, le *germe algébrique associé* à f et a est E_b, si $b = f(a)$. Et *la dimension de ce germe est constante* quand a varie (*cf.* [27], p. 90-93 pour $K = \mathbf{C}$; pour $K = \mathbf{R}$ on considère les germes *complexifiés*, *cf.* [17]).

SECTION IV : DÉCOMPOSITION D'UN GERME ANALYTIQUE EN GERMES CONNEXES DE VARIÉTÉS.

(Les résultats de cette section ne seront utilisés que dans la dernière section du chapitre IV.)

40. Décompositions normales d'un germe analytique. — *a.* Soit toujours $K = \mathbf{R}$ ou $K = \mathbf{C}$, et soit V *une variété analytique* de dimension m sur K (m entier $\geqq 1$). Soit a un point de V, et soit E_a *un germe analytique en a, de dimension* $p \geqq 1$ ($p \leqq m$).

D'après les résultats précédents (n° 35), on peut toujours trouver en a au moins *un germe analytique* F_a *de dimension* $< p$ (on peut prendre $F = \{a\}$ si le germe E_a est régulier), inclus dans E_a et dont le complément dans E_a soit le germe en a (non vide) d'une *sous-variété analytique* S *de dimension* p (le point a adhère à S, mais $a \notin S$). Toute *décomposition* $E_a = F_a \cup S_a$ satisfaisant aux conditions qui viennent d'être rappelées sera dite *normale* (notons bien que $F_a \cap S_a$ est vide). Il n'y en a qu'une si $p = 1$, avec $F_a = \{a\}_a$.

Si, au contraire, $p \geqq 2$, nous verrons qu'il existe pour E_a une infinité de décompositions normales. Il est loisible pour cela de supposer que V est un espace vectoriel et que $a = 0$, mais l'existence de ces décompositions en nombre infini résultera d'une étude préalable du germe S_0. Nous supposerons, en outre, que *tous les composants analytiques irréductibles de* E_0 *sont de dimension p* (les autres, quand il y en a, étant nécessairement inclus dans F_0) : on dit alors que E_0 est *purement de dimension p*.

b. Soient donc comme au n° 34 l'espace vectoriel V, le germe *pur* E_0 de dimension $p \geqq 1$, et le sous-espace vectoriel $W^\star$ (de dimension p dans le dual $V^\star$ de V) libre sur E_0 et générateur pour $H(E_0)$. Soit une décomposition normale $E_0 = F_0 \cup S_0$ comme ci-dessus. $W^\star$ est générateur pour $H(F_0)$, mais non libre sur F_0, puisque $\dim F_0 < p$ (par contre, il est libre sur chaque composant analytique irréductible de E_0).

L'idéal $H'(W^\star) \cap I(F_0)$ de $H'(W^\star)$ n'est donc pas $\{0\}$. Soit F'_0 le germe intersection de E_0 et du germe associé à l'idéal principal engendré dans H_0 par un élément non nul de $H'(W^\star) \cap I(F_0)$ qui, si $p < m$, admette comme facteur (pour un choix de f au n° 34 *b*, 6°) le discriminant du polynome distingué P (*loc. cit.*).

Alors F'_0 est de dimension $< p$, et $F_0 \subset F'_0 \subset E_0$; on a donc une décomposition normale $E_0 = F'_0 \cup S'_0$, avec $S'_0 \subset S_0$. En outre, aucun germe non vide inclus dans F'_0 ne peut être le germe d'une variété de dimension p, et en particulier ne peut être inclus et ouvert dans S_0; donc S_0 est inclus dans l'adhérence de S'_0 : ce n'est d'ailleurs là qu'un cas particulier de la propriété signalée au n° 14 *e*.

41. Cas complexe. — *a.* Plaçons-nous d'abord dans le cas complexe : $K = \mathbf{C}$.

Il est alors classique qu'est *connexe* (n° 5 *d*) le complément, dans un germe analytique irréductible, d'un germe analytique qui y est strictement inclus (et qui est donc de dimension strictement inférieure, *cf.* [21], exp. 14, théor. 4). C'est le cas pour le complément, dans un composant irréductible de E_0, de l'intersection de ce composant avec F_0.

b. Or deux composants irréductibles distincts quelconques de E_0 sont les germes en 0 de deux ensembles analytiques tels que les composants irréductibles des germes de l'un quelconque de ces deux ensembles en ses différents points soient tous de dimension p, et qu'aucun de ces composants ne soit commun aux deux ensembles. En conséquence, l'intersection de deux composants (distincts) de E_0 est disjointe de S_0.

c. En combinant ces deux résultats, on voit que S_0 *est la réunion disjointe de germes connexes en nombre fini, égal à celui des composants irréductibles de* E_0.

d. Considérons un élément de I_0 qui ne s'annule sur aucun des composants irréductibles de E_0, et l'idéal engendré par cet élément et par $I(E_0)$. Alors le germe (analytique) associé à cet idéal a tous ses composants irréductibles de dimension $p-1$ (*cf.* [21], exp. 14, p. 16), et il est loisible de l'adjoindre à F_0. Il y a donc bien, *si* $p \geqq 2$, *une infinité de décompositions normales* de E_0, comme nous l'avions annoncé (n° 40 *a*).

42. Cas réel. — *a.* Désormais nous nous plaçons dans le cas réel ($K = \mathbf{R}$), où les choses sont loin d'être aussi simples que dans le cas complexe.

Il peut alors se faire que, E_0 étant donné, même irréductible, S_0 ne soit connexe pour aucune décomposition normale (exemple : point de rebroussement d'une courbe plane). D'autre part, le plan peut être décomposé, quel que soit l'entier $n > 0$, en la réunion de n droites issues de o, et $2n$ ouverts connexes disjoints, auxquels o adhère.

b. Autre différence : il n'est plus vrai que les composants irréductibles des germes de E aux points de E voisins de o soient tous de dimension p, ni par suite que l'intersection de deux composants de E_0 (distincts) soit toujours disjointe de S_0; exemple : $m = 3$, E est la réunion d'un plan Π issu de o et d'un cône cubique de sommet o, ayant une génératrice double isolée L située dans Π et recoupant Π suivant une génératrice simple F; on a alors $L \subset S \cup \{o\}$, si $E = F \cup S$.

c. Enfin, un cône de sommet o ($m = 3$, $p = 2$) peut fort bien être coupé par un plan suivant le seul point o, ce qui empêche de refaire ici le raisonnement du n° 41 *d.* Mais nous aboutirons à la même conclusion finale (*infinité de décompositions normales si* $p \geqq 2$) en adjoignant à F_0 ou à F'_0 (n° 40 *b*) le germe analytique associé à un *arc analytique* issu de o et inclus dans $S' \cup \{o\}$. Pour voir l'existence d'un tel arc, il suffit de se reporter au raisonnement par lequel F. Bruhat et H. Cartan [30] montrent l'existence d'un arc issu de o et inclus dans $S' \cup \{o\}$ (ils considèrent un germe E_0 irréductible, ce qui revient au même, puisque par construction F'_0 inclut l'intersection de deux composants irréductibles s'ils sont distincts); c'est un raisonnement par récurrence, et l'on constate qu'à chaque stade on peut choisir un arc *analytique*.

43. Décomposition en germes connexes de variétés. — *a.* Il résulte encore de la Note citée [30] de F. Bruhat et H. Cartan [ce qu'ils disent du discriminant de P s'applique évidemment à tout multiple non nul de ce discriminant dans $H'(W^\star)$, et l'hypothèse d'irréductibilité de E_0 n'inter-

vient pas en fait, pour la raison déjà indiquée ci-dessus] qu'existent des voisinages de o dans S' (aussi petits qu'on veut, puisqu'il s'agit d'une propriété du germe E_0) dont chacun est la réunion d'un *nombre fini de composantes connexes* (ouverts de S') *auxquelles le point* o *adhère par arcs*, et même par arcs *analytiques*, d'après la remarque du n° 42 *c*.

b. D'autre part, *la majoration indiquée* (*ibid.*) pour ce nombre fini *ne dépend que du germe* E_0 (elle fait intervenir le degré du polynome P, puis celui du polynome Q du n° 35 *a*, etc.), et reste donc la même pour tous les voisinages considérés, aussi petits qu'ils soient. Le nombre de composantes connexes, qui ne peut décroître quand on restreint le voisinage, puisque o adhère à chacune d'elles, reste donc *fixe* dès que les voisinages considérés sont assez petits.

c. Ainsi S'_0 *est réunion finie de germes connexes, ouverts dans* S'_0, *dont chacun inclut le germe d'un arc analytique issu de* o.

Il en est *a fortiori* de même pour S_0, qui est compris entre S'_0 et l'adhérence de S'_0 (n° 40 *b*). Et aussi pour le germe en o de l'ensemble des points x où E_x est régulier de dimension p (la raison en est la même), comme le remarquent F. Bruhat et H. Cartan [30].

d. Par application répétée du résultat précédent, on voit que *tout germe analytique est réunion finie et disjointe de germes connexes de variétés analytiques*, de dimensions $\geqq 0$ et $\leqq p$ (dimension du germe analytique donné).

Ce résultat se trouve chez S. Łojasiewicz [25], assorti de précisions intéressantes. (Nous attendons d'ailleurs la publication par cet auteur, d'après [31], d'un travail dont les résultats, semble-t-il, impliqueraient *c*).

44. Lemme concernant une variété analytique ouverte dans un ensemble analytique. — Le résultat du n° 43 *c* entraîne celui-ci :

Soit V *une variété analytique-réelle de dimension m; soit* E *un sous-ensemble analytique de* V*; soit* S *une sous-variété analytique de* V, *de dimension p, incluse et ouverte dans* E*; soit* F *la frontière de* S *dans* E*; soit a un point de* F *tel que le germe analytique* F'_a *associé à* F_a *soit disjoint de* S_a.

Alors : 1° S_a *est réunion disjointe et finie de germes connexes* ouverts dans S_a; 2° *le point a adhère à chacun de ces germes par un arc analytique.*

Nous supposerons, comme il est loisible, que E_a est le germe analytique associé à S_a. Alors E_a est de dimension p, et même chaque composant analytique irréductible de E_a est de dimension p. Chacun de ces composants rencontre S_a, donc aucun n'est inclus dans F'_a, donc $\dim F'_a < p$, puisque $F'_a \subset E_a$.

Il existe alors une décomposition normale $E_a = F''_a \cup S'_a$, avec $F''_a \supset F'_a$, donc S'_a disjoint de $F_a \subset F'_a$. Cette propriété de S'_a entraîne que tout composant connexe de S'_a qui rencontre S_a est inclus dans S_a; or, à tout composant connexe de S'_a qui ne rencontre pas S_a, le germe S_a est extérieur; et d'autre part, S_a est inclus dans l'adhérence de S'_a.

Le résultat annoncé résulte donc bien de celui du n° 43 *c* : chaque composant connexe de S_a est compris entre un composant connexe de S'_a et l'adhérence de ce composant de S'_a.

45. Lemme concernant une application continue d'une variété analytique dans une autre. — *Soient* W, *de dimension* p, *et* Z, *de dimension* n, *deux variétés analytiques-réelles. Soit* h *une application continue de* W *dans* Z, *telle que l'ouvert* W′ *lieu des points de* W *où* h *est analytique soit partout dense dans* W. *Pour tout* $w \in W$, *on pose* $h_1(w) = [w, h(w)]$, *élément de* $W \times Z$; *on pose* $G = h_1(W)$. *On suppose* G *inclus dans un sous-ensemble analytique* E *de* $W \times Z$, *tel que l'intérieur* G′ *de* G *dans* E *soit partout dense dans* G. *On pose*

$$G'' = h_1(W'') = G' \cap h_1(W').$$

Alors, pour tout $c \in W$ *et* $a = h_1(c)$:

1° G_a *est réunion disjointe et finie de germes connexes inclus et ouverts dans* G''_a *et éventuellement de l'intersection de* G_a *avec un germe analytique de dimension* $< p$;

2° W''_c *est réunion finie de germes connexes ouverts.*

L'assertion 2° équivaut, h_1 étant un homéomorphisme de W sur G, à l'assertion analogue concernant G''_a. Or, d'après l'assertion 1°, G''_a est compris entre une réunion finie de germes connexes et l'adhérence G_a de cette réunion. Nous sommes donc ramenés à démontrer 1°.

Admettons d'abord qu'il existe un germe analytique F_a, inclus dans E_a et de dimension $< p$, tel que $G_a \subset (F_a \cup G''_a)$. Alors le complément de $G_a \cap F_a$ dans G_a est un germe de variété, inclus et ouvert dans E_a, dont l'adhérence est G_a, et dont la frontière est incluse dans le germe analytique F_a (disjoint de ce germe de variété). L'assertion 1° résulte alors du lemme du n° 44. Nous sommes donc ramenés à montrer l'existence de F_a satisfaisant aux conditions indiquées, c'est-à-dire à prouver que p est strictement supérieur à dim. an. $(G_a - G''_a)$.

Nous supposerons, comme au n° 44, que chaque composant analytique irréductible de E_a est de dimension p, dimension de la variété analytique $h_1(W') \supset G''$, et que E_a est le germe analytique associé à G''_a (et aussi à G_a). Remarquons que tout point $x \in G$ tel que E_x soit régulier de dimension p appartient à G′, puisque toute injection continue dans $\mathbf{R}^p$ d'un ouvert de $\mathbf{R}^p$ est ouverte.

Soit alors $E_a = F'_a \cup S'_a$ une décomposition normale de E_a; on a

$$G_a \cap S'_a \subset G'_a, \qquad \text{donc} \quad G_a - G'_a \subset F'_a.$$

Reste à montrer que dim. an. $[S' \cap h_1(W - W')]_a < p$, si la décomposition normale $E_a = F'_a \cup S'_a$ est définie comme au n° 40 *b*, au moyen d'un élément non nul Δ de H_a, et si l'on suppose, comme il est loisible, que W et Z sont des ouverts d'espaces vectoriels, et donc $W \times Z$ un ouvert d'un espace vectoriel V, de dimension $m = p + n$. On pourra prendre $a = 0$, et considérer comme au n° 35 *c* le sous-espace W^* (de dimension p) du dual V^* de V, et les germes $f_0, \ldots, f_{n-1}$ de n formes qui, avec W^*, engendrent V^* ; et aussi les polynomes P_i tels que $P_i(f_i) \in I(E_0)$, et dont les coefficients, de même que Δ, appartiennent à l'anneau analytique $H'(W^*)$.

Soit $\overline{W}$ le sous-espace de V^* (de dimension p lui aussi) orthogonal au second sous-espace facteur de V (celui dont Z est un ouvert), et donc assimilable au dual du premier (celui dont W est un ouvert). En un point $x \in G \cap S'$, la condition nécessaire et suffisante pour que $x \in h_1(W')$ est que $\overline{W}$ possède p éléments dont les différentielles en x sur la variété S' soient linéairement indépendantes, c'est-à-dire (si x est assez voisin de 0) dont les différentielles en x sur V soient linéairement indépendantes de celles de n fonctions qui ont en 0 les germes $P_i(f_i)$ $(i = 0, \ldots, n-1)$. En annulant le produit extérieur de ces $m = p + n$ différentielles, on a bien une équation analytique en 0, qui n'est une identité sur aucun des composants analytiques irréductibles de E_0 (sinon la réunion des autres inclurait déjà G''_0 et donc G_0), et qui détermine donc dans E_0 un germe analytique de dimension $< p$.

C. Q. F. D.

Remarquons enfin que l'hypothèse (dans l'énoncé du lemme) de l'existence de l'ensemble E n'est pas superflue, comme le montre l'exemple que voici :

$$W = \mathbf{R}, \qquad Z = \mathbf{R}, \qquad h(0) = 0, \qquad \frac{1}{w} h(w) = \left| \sin \frac{1}{w} \right| \qquad \text{pour } w \neq 0, \qquad c = 0;$$

aucune des deux parties de la conclusion, où W'' désigne une partie de W' et où $G'' = h_1(W'')$, n'est alors vraie.

CHAPITRE III.

Compléments sur les éléments dérivés et la différentielle dépendant d'un paramètre.

SECTION I : ÉLÉMENTS DÉRIVÉS.

46. Espace vectoriel achevé. — *a*. Soit I un *intervalle* de $\mathbf{R}$, que nous supposerons *ouvert* pour plus de commodité. Soit X un *espace affine réel* de dimension m (entier ≥ 1) et soit X^* *l'espace vectoriel* associé. Nous aurons besoin d'étendre au cas d'une *application f de* I *dans* X

certaines propriétés des *nombres dérivés d'une fonction numérique*, qui apparaissent dans H. Lebesgue ([32], p. 72 et suiv.), puis dans A. Denjoy ([33], p. 175 et suiv.), comme conséquences immédiates ou cas particuliers d'autres résultats, et qu'on pourra voir dans P. Montel ([34], p. 69 et 73), qui s'en sert pour l'étude d'une équation fonctionnelle. Nous allons pour cela adjoindre à $X^\star$ des éléments, dits *éléments à l'infini*, de manière à obtenir un espace compact $\overline{X}$ (qui n'est ni l'espace projectif ni celui de la géométrie des sphères, le rôle des éléments à l'infini dans $\overline{X}$ étant essentiellement différent de celui des points de X); pour $X = \mathbf{R}$, l'espace $\overline{X}$ se réduira à ce que Bourbaki ([35], p. 86) appelle la *droite achevée* $\overline{\mathbf{R}}$, obtenue en adjoignant à $\mathbf{R}$ les deux éléments $+\infty$ et $-\infty$ (notons cependant que, dans [6], c'est la droite projective, avec un seul élément infini, qui est appelée « droite achevée », mais nous suivrons Bourbaki).

b. Nous appellerons *demi-droite vectorielle* engendrée par le vecteur c non nul de $X^\star$ la partie $\mathbf{R}^+c$ de la droite vectorielle $\mathbf{R}c$ engendrée par c, si $\mathbf{R}^+$ désigne l'ensemble des réels $\geqq 0$.

Toute demi-droite vectorielle est d'ailleurs engendrée par l'un quelconque c de ses éléments non nuls; nous adjoindrons à cette demi-droite un élément que nous appellerons son élément à l'infini et que nous désignerons par ∞c. L'ensemble $\overline{X}$ est construit (à partir de $X^\star$) en adjoignant à $X^\star$ les éléments à l'infini des diverses demi-droites vectorielles de $X^\star$; sur l'*espace vectoriel achevé* $\overline{X}$ ainsi obtenu on définit comme suit une topologie (qui induit sur $X^\star$ la topologie usuelle d'espace vectoriel réel de dimension m, et sur chaque demi-droite vectorielle *achevée* sa topologie de demi-droite achevée).

c. Soit H une *variété linéaire* dans $X^\star$, obtenue par translation à partir d'un sous-espace vectoriel $H^\star$ de $X^\star$. En adjoignant à H les éléments à l'infini des demi-droites vectorielles de $H^\star$, on obtient une partie $\overline{H}$ de $\overline{X}$, que nous appellerons *variété linéaire achevée*. Supposons, en particulier, que H soit un *hyperplan* (i. e., $\dim H^\star = m - 1$), et donc $\overline{H}$ un *hyperplan achevé*. La partition en deux demi-espaces (ouverts) de la partie complémentaire de H dans $X^\star$ peut être prolongée en une partition en deux classes U, U' de la partie complémentaire de $\overline{H}$ dans $\overline{X}$, en convenant que l'appartenance à U ou U' d'un élément à l'infini ∞c implique l'inclusion dans cette même classe d'une partie non bornée de $\mathbf{R}^+c$. La topologie de $\overline{X}$ est alors définie comme la topologie engendrée par les parties U, U' déterminées dans $\overline{X}$ par les divers hyperplans, autrement dit celle dont une base est constituée par les intersections finies de telles parties (il suffit, comme pour $X^\star$, des intersections de $m + 1$ de ces parties); une autre base est constituée par les intersections de m de ces parties (non précisées) et les ouverts de $X^\star$.

d. Il est clair que l'espace vectoriel achevé $\overline{X}$ est ainsi un espace *compact.* D'ailleurs, considérons $X^\star$ comme espace euclidien (donc normé); l'application

$$x \to h(x) = \frac{x}{1 + \| x \|}$$

est un homéomorphisme de $X^\star$ sur la boule ouverte B de centre O et rayon 1, et on peut l'étendre à $\overline{X}$ de manière à avoir un homéomorphisme h de $\overline{X}$ sur la boule fermée $\overline{B}$, adhérence de B, en posant

$$h(\infty c) = c \qquad \text{si} \quad \| c \| = 1.$$

47. Enveloppe fermée convexe. Application linéaire achevée. — *a.* Nous dirons d'une partie E de l'espace vectoriel achevé $\overline{X}$ qu'elle est *convexe* si (et seulement si) :

1° *l'intersection de* E *et de toute droite achevée est connexe;*

2° *est aussi connexe, pour tout demi-plan fermé, l'intersection de* E *et de l'ensemble des éléments à l'infini du demi-plan* (achevé).

(Quand E est fermée et possède au moins un élément dans $X^\star$, la condition 1° entraîne 2°).

Toute partie convexe distincte de $\overline{X}$ n'a au plus qu'un des deux éléments à l'infini d'une même droite.

b. Toute intersection de parties convexes est convexe. L'adhérence d'une partie convexe n'est pas nécessairement convexe; ainsi le demi-espace ouvert U (n° 46 *c*) est convexe, mais non le demi-espace fermé $U \cup \overline{H}$ (*ibid.*) si $m \geqq 2$ (pour $m = 1$, l'adhérence d'une partie convexe est encore convexe). Mais, soit E une partie quelconque de $\overline{X}$; l'intersection des parties *convexes* (resp. *fermées convexes*) qui incluent E est une partie convexe (resp. fermée convexe), dite *enveloppe convexe* (resp. *enveloppe fermée convexe*) de E.

c. Soit E une partie fermée convexe de $\overline{X}$, non vide et distincte de $\overline{X}$. La partie complémentaire de E dans $\overline{X}$ rencontre $X^\star$ suivant un ouvert non vide; soit c un point de cet ouvert; autrement dit, $c \in X^\star$ et $c \notin E$.

La réunion F des demi-droites achevées d'origine c qui rencontrent E est convexe et fermée : c'est un *cône saillant* (achevé) *fermé.* Dans ces conditions, il existe un hyperplan achevé $\overline{H}$ tel que $\overline{H} \cap F = \{c\}$, et E *est incluse dans un demi-espace ouvert* U *dont* $\overline{H}$ *est la frontière* (démonstration analogue à celle du théorème de Hahn-Banach dans Bourbaki [36], p. 69-70 : on remarque que si $m \geqq 2$, il existe une droite dont l'intersection avec F est $\{c\}$, et qu'en projetant parallèlement à cette droite on est ramené à la même question pour la dimension $m - 1$ à la place de m). Tout hyperplan parallèle à $\overline{H}$ rencontre F et E suivant des parties fermées convexes bornées, dont la seconde est vide si l'hyperplan est assez voisin de $\overline{H}$. Il existe sur $X^\star$ une forme linéaire θ telle que $\inf\limits_{x \in E} [\theta(x) - \theta(c)] > 0$, en convenant d'étendre par continuité la définition de la fonction θ aux éléments à l'infini de $\overline{X} - \overline{H}$ (la fonction n'est pas définie pour les éléments à l'infini de $\overline{H}$), de manière à avoir une application dans $\overline{\mathbf{R}}$ de $\overline{X}$, privé des éléments à l'infini de $\overline{H}$; on a

$$\theta(x) = \theta(c) \quad \text{pour } x \in \overline{H} \cap X^\star, \qquad \text{et} \qquad \theta(x) = +\infty \quad \text{si } x \in U \quad \text{et} \quad x \notin X^\star.$$

d. Plus généralement, toute application linéaire (homogène) φ de $X^\star$ dans un espace vectoriel Y de dimension n (entier $\geqq 1$) admet comme extension une application continue, dans l'espace achevé $\overline{Y}$ (construit à partir de Y), de l'espace $\overline{X}$ privé des éléments à l'infini du noyau de φ (i. e. qui adhèrent à ce noyau).

48. Éléments dérivés. — Revenons à la situation du n° 46 *a*, avec les notations alors introduites : f est une application de l'*intervalle ouvert* $I \subset \mathbf{R}$ dans l'*espace affine* X de dimension m sur $\mathbf{R}$.

Soit J la partie complémentaire de la diagonale dans le carré $I \times I$. Pour tout $(u, v) \in J$ on pose

$$r(u, v) = \frac{f(u) - f(v)}{u - v},$$

c'est le *quotient incrémentiel*, élément de l'*espace vectoriel* $X^\star$ associé à X.

Soit $a \in I$, et posons $r_a(u) = r(u, a)$, de sorte que r_a est une application dans $X^\star$ de l'ensemble des points de I autres que a, i. e. des points u de I situés, soit *à gauche* de a $(u < a)$, soit *à droite* de a $(u > a)$. Considérons r_a comme une application de cet ensemble (de points de I) dans l'espace achevé $\overline{X}$; nous considérerons d'ailleurs aussi r comme une application de J dans $\overline{X}$. Alors r_a possède, au point a qui adhère des deux côtés à l'ensemble où r_a est définie, des *valeurs d'adhérence* à gauche (resp. à droite), éléments de $\overline{X}$ qu'on appelle *éléments dérivés gauches* (resp. *droits*) de f en a.

Dans le cas $X = \mathbf{R}$ les éléments dérivés sont d'ordinaire appelés *nombres dérivés*.

Soit I′ un ouvert (non vide) inclus dans I, et soit $J' = J \cap (I' \times I')$. Il résulte de la définition que tout élément dérivé (gauche ou droit) de f en un point de I′ adhère à $r(J')$.

49. Choix d'un élément dérivé en chaque point pour une application continue. — Inversement, choisissons, pour tout $u \in \mathrm{I}$, un élément dérivé $f^{\star}(u)$, toujours gauche ou toujours droit, de f en u. Soit E l'image par $f^{\star}$ de l'ouvert $\mathrm{I}' \subset \mathrm{I}$, et soit $\overline{\mathrm{E}}$ l'enveloppe fermée convexe de E (n° 47 *b*); soit $\mathrm{J}' = \mathrm{J} \cap (\mathrm{I}' \times \mathrm{I}')$. (X sera assimilé à $\mathrm{X}^{\star}$.)

Alors, si f est continue et si I' *est un intervalle, on a* $r(\mathrm{J}') \subset \overline{\mathrm{E}}$.

C'est évident si $\overline{\mathrm{E}} = \overline{\mathrm{X}}$; démontrons-le donc en supposant $\overline{\mathrm{E}} \neq \overline{\mathrm{X}}$, et nous reportant au n° 47 *c*, où $\overline{\mathrm{E}}$ doit être mis à la place de E, et où, raisonnant par l'absurde, nous supposons $c \in r(\mathrm{J}')$; nous y définissons l'hyperplan achevé $\overline{\mathrm{H}}$, la forme linéaire achevée θ et le demi-espace ouvert U.

Soit $\varphi(u) \in \mathbf{R}$ l'image par θ du vecteur $f(u) - uc \in \mathrm{X}^{\star}$, pour $u \in \mathrm{I}'$. L'application φ de I' dans $\mathbf{R}$ est continue. Au quotient incrémentiel $r(u, v)$ relatif à f correspond le quotient incrémentiel $\rho(u, v) = \theta[r(u, v) - c]$ relatif à φ, et l'on a $0 \in \rho(\mathrm{J}')$; l'application ρ de J' dans $\mathbf{R}$ est continue, comme l'application r de J dans $\mathrm{X}^{\star}$.

Cependant, à l'élément dérivé $f^{\star}(u)$ de f en $u \in \mathrm{I}'$ correspond l'élément dérivé

$$\varphi^{\star}(u) = \theta[f^{\star}(u)] - \theta(c)$$

de φ en u, même si $f^{\star}(u)$ est infini, puisque

$$f^{\star}(u) \in \mathrm{E} \subset \overline{\mathrm{E}} \subset \mathrm{U};$$

et la borne inférieure de $\varphi^{\star}$ est strictement positive. Nous allons montrer que ce dernier résultat est incompatible avec le résultat ci-dessus $0 \in \rho(\mathrm{J}')$, c'est-à-dire avec

$$\varphi(a) = \varphi(b), \qquad a \in \mathrm{I}', \qquad b \in \mathrm{I}', \qquad a < b;$$

nous pouvons supposer (en prenant au besoin $-u$ comme variable à la place de u) que $\varphi^{\star}(u)$ est un nombre dérivé *droit*.

Il suffit de remarquer que la borne supérieure de la fonction continue φ dans l'intervalle fermé $[a, b]$ est atteinte en au moins un point, qu'on peut prendre distinct de b puisque $\varphi(b) = \varphi(a)$; en un tel point u on ne peut avoir $\varphi^{\star}(u) > 0$, d'où la contradiction annoncée. On a donc bien $r(\mathrm{J}') \subset \overline{\mathrm{E}}$.

Il en résulte que $f^{\star}(\mathrm{I}')$ *et* $r(\mathrm{J}')$ *ont même enveloppe fermée convexe dans* $\overline{\mathrm{X}}$ (dans les hypothèses ci-dessus : f continue, et I' sous-intervalle ouvert de I).

Cette enveloppe fermée convexe est donc alors indépendante du choix de $f^{\star}$; en particulier elle est la même, qu'on prenne un élément dérivé toujours gauche ou toujours droit.

50. Condition suffisante pour l'existence d'une dérivée. — Conformément à la définition usuelle, nous disons qu'une application f de I dans X (n° 48) admet en $a \in \mathrm{I}$ *une dérivée*, et que cette dérivée est

l'élément $f'_a \in \overline{X}$, si (et seulement si) tous les éléments dérivés (gauches et droits) de f en a sont égaux à l'unique élément f'_a.

Théorème. — *Pour que f admette en $a \in I$ une dérivée, il suffit que f soit continue dans* I, *et qu'il existe une application $f^\star$ de* I *dans* $\overline{X}$, *continue en a, et telle que,* $\forall u \in I$, *l'élément $f^\star(u)$ soit un élément dérivé de f en u, toujours gauche ou toujours droit.*

Il suffit de remarquer que le voisinage ouvert connexe I′ de a peut être choisi assez petit pour que $f^\star(I')$ soit inclus dans tel *voisinage fermé convexe* de $f^\star(a)$ donné à l'avance *aussi petit qu'on veut;* à ce dernier appartiennent alors tous les éléments dérivés de f en a, d'après les résultats du n° 49. L'espace $\overline{X}$ étant *séparé*, le théorème en résulte (nous avons utilisé aussi la propriété de *convexité locale* de $X^\star$, qui s'étend à $\overline{X}$).

51. Cas où existe une fonction dérivée partout continue. — *a.* Soit f une application *continue* de I dans X. D'après ce qu'on vient de voir, *pour que f admette une dérivée en tout point de* I, *il suffit qu'il existe une application continue $f^\star$ de* I *dans* $\overline{X}$, *dont la valeur $f^\star(u)$, pour tout* $u \in I$, *soit un élément dérivé de f en u, toujours gauche ou toujours droit.*

b. Supposons cette condition satisfaite, et soient I′ un sous-intervalle ouvert de I, et J′ l'intersection $J \cap (I' \times I')$, complémentaire de la diagonale dans le carré de I′. L'enveloppe fermée convexe $\overline{E}$ de $E = f^\star(I')$ inclut $r(J')$ (n° 49), donc $\overline{E} \cap X^\star$ n'est pas vide; il en résulte que $E \cap X^\star$ n'est pas vide si I′ (donc E) est assez petit pour que $\overline{E} \neq \overline{X}$, et par suite aussi quel que soit I′.

Donc : *l'ensemble des points* $u \in I$ *où* $f^\star(u) \in X^\star$ *est un ouvert partout dense de* I. (Rappelons que la fonction dérivée $f^\star$ est supposée continue.)

c. Supposons, en outre, que $f^\star$ soit *constante*, $f^\star(u) = c$. D'après *b*, on a $c \in X^\star$. On a d'ailleurs $r(u, v) = c$ pour tout $(u, v) \in J$, donc, $\forall u \in I$, on a $f(u) - uc = d$, point fixe de X.

52. Application composée. — Soit toujours f une application de I dans X, continue en $a \in I$.

Soit ψ une application, différentiable au point $b = f(a)$, d'un voisinage de b incluant $f(I)$ dans un espace affine réel Y de dimension n (entier $\geqq 1$).

Alors $g = \psi \circ f$ est une application de I dans Y, continue en a.

A tout élément dérivé droit (resp. gauche) c de f en a, pourvu que ce ne soit pas un élément infini adhérent au noyau de la différentielle ψ'_b de ψ en b, correspond un élément dérivé droit (resp. gauche) de g en a, fini ou infini en même temps que c, et égal à $\psi'_b(c)$, si l'on convient de désigner encore par ψ'_b l'application linéaire *achevée* (nº 47 *d*) définie par la différentielle.

Cette correspondance ne s'étend pas aux éléments infinis qui adhèrent au noyau de la différentielle ψ'_b.

SECTION II : DIFFÉRENTIELLE DÉPENDANT D'UN PARAMÈTRE.

53. Fonctions dépendant d'un paramètre; noyaux des différentielles en un point. — *a*. On désigne de nouveau par K le corps $\mathbf{R}$ ou le corps $\mathbf{C}$.

Soient l, m, n des entiers $\geqq 1$. Soient X, Y, Z des variétés de dimensions respectives l, m, n sur K. Soit A un ouvert de la variété produit $X \times Y$; on désignera par $A(y)$, si $y \in Y$, l'ensemble (ouvert de X) des $x \in X$ tels que $(x, y) \in A$, et par $A'(x)$, si $x \in X$, l'ensemble (ouvert de Y) des $y \in Y$ tels que $(x, y) \in A$.

Soit f une application de A dans Z. Pour tout $y \in Y$ tel que $A(y)$ ne soit pas vide, on désignera par f^y l'application partielle $x \to f^y(x) = f(x, y)$ de $A(y)$ dans Z. Nous supposerons f *continue* et les f^y *différentiables*.

b. Soit $a \in X$ tel que $A'(a)$ ne soit pas vide. A tout $y \in A'(a)$ on peut, dans l'espace des vecteurs tangents à X en a, associer le noyau $N^y(a)$ de la différentielle $(f^y)'_a$ de f^y en a. Plus généralement, pour toute partie V de $A'(a)$, posons

$$N^V(a) = \bigcap_{y \in V} N^y(a),$$

de sorte que N^y est la même chose que $N^{\{y\}}$.

Soit $\mathcal{F}$ un filtre sur $A'(a)$. Alors il existe des $V \in \mathcal{F}$ telles que, $\forall W \in \mathcal{F}$, on ait $N^V(a) \supset N^W(a)$.

c. En particulier, soit $b \in A'(a)$. Il existe des voisinages V de b dans $A'(a)$ (donc dans Y) tels que, pour tout voisinage W de b, on ait $N^V(a) \supset N^W(a)$. Le sous-espace vectoriel $N^V(a)$, qui est la réunion des $N^W(a)$ relatifs à tous les voisinages W de b, sera désigné par $M^b(a)$. Pour qu'un vecteur tangent à X en a appartienne à $M^b(a)$, il faut et suffit que l'ensemble des y tels que ce vecteur appartienne à $N^y(a)$ soit un voisinage de b. On a $M^b(a) \subset N^y(a)$ pour tout y assez voisin de b.

Il en résulte que $M^b(a) \subset M^y(a)$ *pour tout* y *assez voisin de* b.

Autrement dit, l'application $y \to M^y(a)$, de $A'(a)$ dans l'ensemble des sous-espaces vectoriels de l'espace linéaire tangent à X en a, admet en chaque point un *minimum local*; et puisque toute chaîne est finie dans cet ensemble ordonné, il en résulte que l'application $y \to M^y(a)$ est *localement constante dans un ouvert partout dense* de $A'(a)$ (situation analogue à celle du n° 8), qui est aussi le lieu des points y au voisinage desquels est constant l'entier $r^y(a)$, codimension de $M^y(a)$ dans l'espace linéaire tangent à X en a.

54. Cas analytique. — Nous supposons désormais que f est *analytique* (et d'abord que X, Y, Z sont des variétés *analytiques*).

Pour exprimer l'appartenance à $N^y(a)$ d'un vecteur donné tangent à X en a, on annule l'image de ce vecteur par la différentielle $(f^y)'_a$, ce qui donne alors des *équations analytiques* dans $A'(a)$. D'après le principe du prolongement analytique, si ces équations sont vérifiées en tous les points d'un domaine, elles le sont partout dans la composante connexe de $A'(a)$ où se trouve ce domaine.

Si donc V *désigne une composante connexe de* $A'(a)$, et b un point de V, on a $M^b(a) \subset N^y(a)$ pour tout $y \in V$. Donc $M^b(a) \subset M^y(a)$ pour tout $y \in V$; pour la même raison, $M^y(a) \subset M^b(a)$, *donc* $M^y(a)$ *ne dépend pas de* y *dans* V, *ni par suite* $r^y(a)$. Et l'on a

$$M^y(a) = N^V(a) \quad (cf.\ n^o\ 53\ c).$$

55. Fonction auxiliaire dépendant de plusieurs paramètres qui varient dans un domaine. — *a.* Nous ne considérerons provisoirement qu'une partie de A qui soit le *produit* $U \times V$ d'un ouvert U de X et d'un *domaine* V de Y. Alors $M^y(x)$ et $r^y(x)$ ne dépendent pas de $y \in V$, mais seulement de $x \in U$, et nous les noterons simplement $M(x)$ et $r(x)$; l'entier $r(x)$ est $\geqq 0$ et $\leqq l\ (= \dim X)$. Et l'on a

$$M(x) = N^V(x) \quad (cf.\ n^o\ 54).$$

Il existe des entiers q (il suffit que $q \geqq l$) tels que, $\forall x \in U$, le sous-espace $M(x)$ soit l'intersection des $N^y(x)$ relatifs à une famille de q points $y \in V$, dépendant de x.

On est donc amené à considérer, q étant un tel entier, l'application (*analytique*) F de $U \times V^q$ dans Z^q définie par l'égalité

$$F(x, y_1, \ldots, y_q) = [f(x, y_1), \ldots, f(x, y_q)]$$

dont le premier membre, si l'on pose $\eta = (y_1, \ldots, y_q) \in V^q$, sera encore noté $F^\eta(x)$, ce qui définit l'application (*analytique*) F^η de U dans Z^q.

b. Le noyau $L^\eta(x)$ de la différentielle $(F^\eta)'_x$ est l'intersection de $N^{y_1}(x), \ldots, N^{y_q}(x)$. On a donc $M(x) = L^\eta(x)$ pour un point convenable η de V^q, dépendant de x; et $r(x)$ est alors le rang $\rho^\eta(x)$ de F^η en x.

Pour tout $\eta \in V^q$, on a

$$M(x) \subset L^\eta(x) \qquad \text{et} \qquad r(x) \geqq \rho^\eta(x).$$

Comme, pour x donné, la condition $r(x) > \rho^\eta(x)$ s'exprime par des *équations analytiques* dans V^q, on a $M(x) = L^\eta(x)$ pour tout η dans un *ouvert partout dense* de V^q (dépendant de x), dont le complémentaire est analytique, et cette égalité équivaut à $r(x) = \rho^{\eta}(x)$.

c. Faisons varier aussi x, en supposant que U soit un *domaine* de X. Soit p le maximum de r dans U; c'est aussi, d'après *b*, le maximum de ρ dans $U \times V^q$, si l'on pose $\rho(x, \eta) = \rho^{\eta}(x)$.

La condition $\rho^{\eta}(x) < p$ s'exprime par des *équations analytiques* dans $U \times V^q$. On a donc $\rho^{\eta}(x) = p$ pour tout (x, η) d'un *ouvert partout dense* de $U \times V^q$, dont le complémentaire H est analytique, et qui se projette dans U suivant un ouvert partout dense de U, lequel, d'après *b*, est le lieu des points x de U tels que $r(x) = p$; le complémentaire dans U de ce lieu est une partie fermée E de U, ensemble des points x de U tels que $r(x) < p$. La partie $E \times V^q$ de $U \times V^q$ est incluse dans l'ensemble analytique H, fermé dans $U \times V^q$, et elle est le plus grand V^q-*cylindre* inclus dans H, si l'on appelle V^q-cylindre toute partie de $U \times V^q$ qui soit le produit d'une partie de U et de V^q; H n'inclut même aucun ouvert de $\{x\} \times V^q$ si $x \notin E$; donc H n'inclut aucune partie *localement* V^q-*cylindrique* (cette notion étant définie à partir de celle de V^q-cylindre comme au n° 19 *b*) qui ne soit pas incluse déjà dans $E \times V^q$.

Or le germe analytique associé à l'ensemble $E \times V^q$ en un de ses points est, d'une part, inclus dans le germe de H en ce point, d'autre part V^q-cylindrique d'après le théorème du n° 22 *c*, applicable ici si l'on assimile, comme il est loisible, de petits ouverts des variétés U, V à des ouverts d'espaces affines. D'après la remarque qu'on vient de faire, ce germe est donc inclus dans le germe de $E \times V^q$, donc lui est identique. L'ensemble $E \times V^q$ est donc analytique.

Donc, *l'ensemble* E, *lieu de* $x \in U$ *tel que* $r(x) < p \left(= \max\limits_{x \in U} r(x)\right)$, *est analytique* (et fermé dans le domaine U).

d. Signalons en passant une autre conséquence des remarques ci-dessus. Soit $a \in U$, $a \notin E$. Soit W un espace topologique. Soit g une application continue de W dans V, de dimension analytique m $(= \dim V)$ partout. Alors H n'inclut l'image d'aucun ouvert de W^q par l'application

$$(w_1, \ldots, w_q) \to [a, g(w_1), \ldots, g(w_q)]$$

de W^q dans $\{a\} \times V^q$.

56. Conclusion. — Revenons à l'ouvert A de $X \times Y$. En posant

$$r(x, y) = r^y(x),$$

nous définissons dans A une fonction r à valeurs entières $\geqq 0$ et $\leqq l$.

D'après l'étude qui vient d'être faite, la fonction r est localement constante en tout point d'un ouvert partout dense de A, dont le complémentaire dans A est analytique et localement Y-cylindrique, et la restriction de r à cet ouvert est constante au voisinage de tout point de A; la fonction r admet en tout point un *minimum local.*

Supposons que A soit un *domaine* dans $X \times Y$, et soit p le *maximum* de r dans A. Alors r *prend la valeur* p *en tout point d'un ouvert partout dense de* A, *dont le complémentaire dans* A *est analytique et localement* Y-*cylindrique.*

57. VARIABLE RÉDUITE. — *a.* Reprenons l'étude d'un domaine de la forme $U \times V^q$ comme au n° 55 *c*, en supposant que r ait dans U la valeur *constante* p (i. e. que E soit vide).

Soit $a \in U$. Il existe $\eta \in V^q$, et un voisinage ouvert connexe U' de a dans U, tels que $\rho(x, \eta) = p$ pour tout $x \in U'$. Autrement dit, la restriction à U' de F^η est partout de rang p; rappelons qu'on a alors $M(x) = L^\eta(x)$, avec les notations du n° 55 *b*, et d'autre part

$$M(x) \subset N^y(x) \quad \text{pour tout } y \in V \quad (\text{n}^\circ\ 54) \qquad \text{et} \qquad M(x) = N^V(x).$$

Il résulte de là que, si F^η est constante sur une sous-variété connexe de U', alors, $\forall y \in V$, la fonction f^y est aussi constante sur cette sous-variété. Réciproquement si les fonctions f^y sont toutes constantes sur une sous-variété connexe de U', alors F^η y est aussi constante (cela pour tout $\eta \in V^q$).

b. On peut appliquer à la fonction analytique F^η, définie dans U', à valeurs dans Z^q, le résultat énoncé au n° 30 *c*.

Il existe donc : un voisinage ouvert U'' de a dans U'; un difféomorphisme analytique g de U'' sur un ouvert Δ de K^m; et un difféomorphisme analytique h d'un ouvert de K^{qn} sur un ouvert de Z^q, tels que la restriction de F^η à U'' soit $h \circ \varphi \circ g$, si φ désigne l'application linéaire de rang p :

$$(\xi, \overline{x}) \to (\overline{x}, 0) \quad \text{de } K^{m-p} \times K^p \text{ dans } K^p \times K^{qn-p}.$$

Nous supposerons, en outre (comme il est loisible), que $g(a) = 0$ et que Δ *est convexe.*

F^η est constante sur chaque sous-variété de U'' image par g^{-1} de l'intersection (convexe) de Δ par une variété linéaire de l'espace produit $K^{m-p} \times K^p$ déduite du premier des deux facteurs par translation. Donc, d'après *a*, les f^y y sont aussi constantes; donc, $\forall y \in V$, l'application (analytique) $f^y \circ g^{-1}$ de Δ dans Z se réduit à $\overline{f}^y \circ \varphi$, où φ est mis pour la restriction de φ à Δ, et où $\overline{f}^y$ est une application analytique de l'ouvert $\overline{U} = \varphi(\Delta)$ de K^p dans Z.

c. La restriction à U'' de f^y est donc $\overline{f}^y \circ \varphi \circ g$.

La restriction à $U'' \times V$ de f résulte donc de l'application analytique $\varphi \circ g$, de rang p, de U'' sur $\overline{U}$, et de l'application analytique $\overline{f}$ de $\overline{U} \times V$ dans Z définie par l'égalité $\overline{f}(\overline{x}, y) = \overline{f}^y(\overline{x})$.

Le rang de $\overline{f}^y$ au point $\overline{x}$, image de $x \in U''$ par $\varphi \circ g$, est le même que celui de f^y en x. Il en résulte que l'analogue, pour $\overline{U}$, de la fonction r définie dans U (*cf. a*) *a* encore *la valeur constante p, qui est précisément la dimension de* $\overline{U}$.

Donc, *quel que soit l'ouvert* W de V, et quel que soit $\overline{x} \in \overline{U}$, *les noyaux* $\overline{N}^y(\overline{x})$ *des différentielles en* $\overline{x}$ *des* $\overline{f}^y$ *relatives aux* $y \in W$ *n'ont aucun vecteur commun non nul.* Autrement dit, étant donné dans K^p un vecteur non nul, les $y \in V$ tels que l'image de ce vecteur par la différentielle $(\overline{f}^y)'_{\overline{x}}$ (où $\overline{x}$ est donné) ne soit pas nulle forment un ouvert partout dense de V (un ouvert parce que le complémentaire est défini par des équations analytiques).

d. Disons qu'une application linéaire (homogène) d'un espace vectoriel, tel que K^p, dans un autre espace vectoriel sur K est *dégénérée* quand elle *n'est pas injective* (i. e. régulière), c'est-à-dire quand son noyau ne se réduit pas à $\{0\}$.

Disons que des applications linéaires de K^p dans des espaces vectoriels de dimension n sur K sont *uniformément dégénérées* quand *l'intersection de leurs noyaux ne se réduit pas à* $\{0\}$.

Avec cette locution, la remarque faite en fin de *c* peut s'exprimer ainsi : soient donnés l'ouvert $W \subset V$ et le point $\overline{x} \in \overline{U}$; alors les différentielles en $\overline{x}$ des $\overline{f}^y$ relatives aux $y \in W$ ne sont pas uniformément dégénérées.

58. Conclusion. — Soit A un *domaine* de $X \times Y$, comme à la fin du n° 56, et soit p le maximum de r dans A. Soit B l'ouvert partout dense de A où r prend la valeur p (*ibid.*). L'étude que nous venons de faire permet de compléter l'énoncé de la fin du n° 56, comme suit :

L'ouvert B *est la réunion de domaines dont chacun est le produit* $U \times V$ *d'un domaine* U *de* X *et d'un domaine* V *de* Y, *auxquels on peut associer une application analytique* $\overline{g}$, *partout de rang p, de* U *sur un ouvert* $\overline{U}$ *de* K^p, *et une application analytique* $\overline{f}$ *de* $\overline{U} \times V$ *dans* Z, *de telle sorte que :*

1° $\forall (x, y) \in U \times V$, *on ait* $f(x, y) = \overline{f}(\overline{x}, y)$ *avec* $\overline{x} = \overline{g}(x)$;

2° $\forall \overline{a} \in \overline{U}$, *et quel que soit l'ouvert* $W \subset V$, *les différentielles en* $\overline{a}$ *des fonctions* $\overline{f}^y$, *relatives aux* $y \in W$ *et telles que* $\overline{f}^y(\overline{x}) = \overline{f}(\overline{x}, y)$ *pour tout* $\overline{x} \in \overline{U}$, *ne soient pas uniformément dégénérées.*

59. Échange des rôles de la variable et du paramètre. — Dans ce qui précède (depuis le n° 53) on peut échanger les rôles de X et de Y. A la place de $r(x, y)$ on a alors un entier $r^*(x, y) \geqq 0$ (et $\leqq m$).

En combinant le résultat du n° 56 avec celui qui s'en déduit ainsi, on obtient ceci :

Soit A *un domaine de* $X\times Y$*; soit* p *le maximum de* r *dans* A, *et soit* $p^\star$ *celui de* $r^\star$. *Alors* r *et* $r^\star$ *prennent les valeurs respectives* p *et* $p^\star$ *en tout point d'un ouvert partout dense* B *de* A, *dont le complémentaire dans* A *est un ensemble analytique, réunion d'un ensemble localement* X*-cylindrique et d'un ensemble localement* Y*-cylindrique.*

b. En combinant le résultat du n° 58 avec celui qui s'en déduit par échange des rôles de X et de Y, on complète comme suit celui qui vient d'être énoncé :

L'ouvert B *est la réunion de domaines dont chacun est le produit* $U\times V$ *d'un domaine* U *de* X *et d'un domaine* V *de* Y, *auxquels on peut associer : une application analytique* $\bar g$, *partout de rang* p, *de* U *sur un ouvert* $\overline{U}$ *de* K^p*; une application analytique* $\bar g^\star$, *partout de rang* $p^\star$, *de* V *sur un ouvert* $\overline{V}$ *de* $K^{p^\star}$*; et une application analytique* $\bar f$ *de* $\overline{U}\times\overline{V}$ *dans* Z, *de telle sorte que :*

1° $\forall(x,\, y)\in U\times V$, *on ait* $f(x,\, y)=\bar f(\bar x,\, \bar y)$, *avec* $\bar x=\bar g(x)$ *et* $\bar y=\bar g^\star(y)$,

2° $\forall a\in\overline{U}$ (resp. $\forall b\in\overline{V}$), *et quel que soit l'ouvert* $W\subset\overline{V}$ (resp. $W\subset\overline{U}$), *les différentielles en* a (*resp.* b) *des fonctions* $\bar f^{\bar y}$ (*resp.* $\bar f^{\star\bar x}$), *relatives aux* $\bar y\in W$ (*resp.* $\bar x\in W$) *et telles que* $\bar f^{\bar y}(\bar x)=\bar f(\bar x,\bar y)$ *pour tout* $\bar x\in\overline{U}$ [*resp.* $\bar f^{\star\bar x}(\bar y)=\bar f(\bar x,\bar y)$ *pour tout* $\bar y\in\overline{V}$], *ne soient pas uniformément dégénérées.*

CHAPITRE IV.

L'équation fonctionnelle $f[x(u),\, y(v),\, z(u+v)]=0$.

SECTION I : CAS EXPLICITE ; RÉDUCTION.

60. Notations. Position du problème. — *a.* Nous désignons :

par q, l, m, n quatre entiers $\geqq 1$;

par ρ, σ, τ les applications linéaires de $\mathbf{R}^q\times\mathbf{R}^q=\mathbf{R}^{2q}$ sur $\mathbf{R}^q$ qui, à $(u,\, v)$, associent respectivement u, v, $u+v$;

par Δ un ouvert de $\mathbf{R}^q\times\mathbf{R}^q$;

par U, V, W les ouverts de $\mathbf{R}^q$ images de Δ respectivement par ρ, σ, τ;

par X, Y, Z des *variétés analytiques* de dimensions l, m, n respectivement sur $\mathbf{R}$;

par x, y, z des applications *continues* respectivement de U dans X, de V dans Y, de W dans Z;

par $x_1(u)$, pour tout $u\in U$, le point $[u,\, x(u)]\in U\times X$;

par $y_1(v)$, pour tout $v \in V$, le point $[v, y(v)] \in V \times Y$;
par π l'application $(u, \xi) \to u$ de $\mathbf{R}^q \times X$ sur $\mathbf{R}^q$;
par ψ l'application $(v, \eta) \to v$ de $\mathbf{R}^q \times Y$ sur $\mathbf{R}^q$;
par D un ouvert de $X \times Y$, tel que $[x(u), y(v)] \in D$ pour tout $(u, v) \in \Delta$;
par φ une application *analytique* de D dans Z.

b. Nous supposons vérifiée, pour tout $(u, v) \in \Delta$, *l'égalité*

$$(\alpha) \qquad \varphi[x(u), y(v)] = z(u+v).$$

Et nous nous proposons d'en tirer des conséquences concernant la nature des fonctions φ, x, y et surtout z. Nous démontrerons notamment que z *est analytique dans* W. Dans la présente section nous montrerons que pour cela nous pouvons nous ramener à un cas particulier, que nous appellerons *cas réduit*. Dans les sections II et III nous étudierons ce cas réduit : c'est alors que sera démontrée l'analyticité de z, avec d'autres résultats particuliers à ce cas.

61. Régularisation locale au moyen de graphes. — *a.* Nous voulons démontrer l'analyticité de z en un point arbitraire c de W. Pour cela, nous considérons la partie $\Gamma = \Delta \cap \tau^{-1}(c)$ de $\mathbf{R}^q \times \mathbf{R}^q$, qui est un ouvert de la variété linéaire $\tau^{-1}(c)$ de dimension q; les restrictions de ρ et de σ à cette variété sont des applications affines bijectives; en particulier $\rho(\Gamma)$ est un ouvert de U, et $\sigma(\Gamma)$ un ouvert de V.

b. Or l'application continue x de U dans X, et par conséquent aussi sa restriction à $\rho(\Gamma)$, vérifie les hypothèses du n° 38, et donc aussi les conclusions, dans lesquelles on peut faire intervenir des ouverts de Γ (dont la réunion est partout dense dans Γ), en remarquant que tout ouvert de $\rho(\Gamma)$ est l'image par ρ d'un ouvert de Γ.

Il en est de même de la restriction à $\sigma(\Gamma)$ de l'application continue y de V dans Y. On utilise ainsi les *graphes* $x_1(U)$ de x et $y_1(V)$ de y.

c. En combinant les deux résultats ainsi obtenus, on a celui-ci :

Il existe un ensemble d'ouverts de Γ *dont la réunion est partout dense et, pour tout élément* Γ' *de cet ensemble, une sous-variété analytique connexe* X' *de* $\rho(\Gamma') \times X$, *incluant* $x_1[\rho(\Gamma')]$, *et une sous-variété analytique connexe* Y' *de* $\sigma(\Gamma') \times Y$, *incluant* $y_1[\sigma(\Gamma')]$, *de telle sorte que la dim. an. de* x_1 (*resp.* y_1) *en tout point de* $\rho(\Gamma')$ [*resp.* $\sigma(\Gamma')$] *soit* $\dim X'$ (*resp.* $\dim Y'$), *et que la restriction à* X' (*resp.* Y') *de* π (*resp.* ψ) *soit partout de rang* q.

Et l'on peut évidemment prendre les Γ' assez petits pour que $\rho(\Gamma') \times \sigma(\Gamma')$ soit *un domaine* $U' \times V'$ *de* Δ, et supposer $x_1(U') \times y_1(V')$ inclus dans une composante connexe D' de l'ouvert de la variété $X' \times Y'$, intersection de cette variété, dans l'espace $(U \times X) \times (V \times Y)$, avec le lieu des points $[(u, \xi), (v, \eta)]$ tels que $(\xi, \eta) \in D$.

d. Considérons désormais un des domaines Γ' de Γ ainsi définis.

L'égalité $\varphi_1[(u, \xi), (v, \eta)] = \varphi(\xi, \eta)$ définit une application analytique φ_1 de D' dans Z.

Les conditions du n° 60 (mises à part celles qui concernaient x_1, y_1, π, ψ) sont alors vérifiées quand on y remplace :

X par X', Y par Y', l par $l' = \dim X'$, m par $m' = \dim Y'$;

Δ par $\Delta' = U' \times V'$, U par U', V par V', W par $U' + V'$;

x, y, z par les restrictions de x_1 à U', de y_1 à V', de z à $U' + V'$ resp.;

D par D', et φ par φ_1.

Pour tout $(u, v) \in \Delta'$, on a

$$(\alpha') \qquad \varphi_1[x_1(u), y_1(v)] = z(u + v).$$

Nous sommes donc ramenés à une situation analogue, mais en un sens plus régulière, d'après les conditions énoncées en *c*.

62. Régularisation relative a la fonction analytique de deux variables. — *a*. La fonction analytique φ_1, à valeurs dans Z, est définie dans le domaine D' de la variété-produit $X' \times Y'$. On peut donc lui appliquer les résultats du n° 59, et d'abord du n° 59 *a*.

Rappelons qu'il s'agit des différentielles, en un point a (resp. b) de X' (resp. Y'), des fonctions partielles obtenues en ne faisant varier que le point de X' (resp. Y'), un point fixe étant choisi arbitrairement dans un voisinage connexe d'un point donné b (resp. a) de Y' (resp. X'), et de la codimension $r(a, b)$ [resp. $r^\star(a, b)$], dans l'espace des vecteurs tangents à X' (resp. Y') en a (resp. b), de l'intersection des noyaux de ces différentielles. On désigne par p (resp. $p^\star$) le maximum dans D' de la fonction r (resp. $r^\star$) à valeurs entières $\geqq 0$. Nous verrons, au n° 72, que $p = p^\star$.

Alors r et $r^\star$ prennent les valeurs respectives p et $p^\star$ en tout point d'un ouvert partout dense E de D', dont le complémentaire dans D' est un ensemble *analytique*, réunion d'un ensemble localement X'-cylindrique et d'un ensemble localement Y'-cylindrique. L'intersection $E \cap [x_1(U') \times y_1(V')]$ est l'image par (x_1, y_1) d'un ouvert de Δ' qui est *partout dense dans* Δ' (puisque les dimensions analytiques de x_1 et y_1, resp. dans U' et dans V', sont partout resp. les dimensions de X' et Y', *cf.* n° 61 *c*), et dont le complémentaire dans Δ' est la réunion d'un ensemble localement U-cylindrique et d'un ensemble localement V-cylindrique (Δ' étant considéré comme partie de $U \times V$); l'intersection avec Γ' de cet ouvert est, par suite, *partout dense dans* Γ' (raisonnement analogue à celui du n° 61).

b. Nous pouvons donc choisir dans Γ' (et même dans tel ouvert de Γ' que nous voulons) un domaine Γ'' tel que, si l'on pose

$$U'' = \rho(\Gamma''), \qquad V'' = \sigma(\Gamma''), \qquad \Delta'' = U'' \times V'', \qquad X'' = X' \cap (U'' \times X), \qquad Y'' = Y' \cap (V'' \times Y),$$

on ait

$$x_1(\mathrm{U}'') \times y_1(\mathrm{V}'') \subset \mathrm{E},$$

les conditions précédentes étant par ailleurs vérifiées encore quand on remplace Γ', Δ', U', V', X', Y' par Γ'', Δ'', U'', V'', X'', Y'', et D' par la composante connexe D'' de $\mathrm{E} \cap (\mathrm{X}'' \times \mathrm{Y}'')$ qui inclut $x_1(\mathrm{U}'') \times y_1(\mathrm{V}'')$.

Dans D'' les fonctions r et $r^\star$ ont donc les valeurs *constantes* p et $p^\star$ respectivement. Cette régularisation complète celle du n° 61.

63. Réduction. — *a*. Nous appliquons maintenant le résultat du n° 59 *b* à la restriction de φ_1 à D''.

Soit $(\alpha, \beta) \in \Gamma''$; soit $a = x_1(\alpha)$ et $b = y_1(\beta)$. Il existe alors : un voisinage ouvert connexe de (a, b) dans D'', de la forme $\mathrm{X}''' \times \mathrm{Y}'''$; une application analytique g (resp. $g^\star$), partout de rang p (resp. $p^\star$), de X''' (resp. Y''') sur un ouvert $\overline{\mathrm{X}}$ (resp. $\overline{\mathrm{Y}}$) de $\mathbf{R}^p$ (resp. $\mathbf{R}^{p^\star}$); et une application analytique $\overline{\varphi}$ de $\overline{\mathrm{X}} \times \overline{\mathrm{Y}}$ dans Z, de telle sorte que :

1° $\forall\, (\xi_1, \eta_1) \in \mathrm{X}''' \times \mathrm{Y}'''$, on ait

$$\varphi_1(\xi_1, \eta_1) = \overline{\varphi}(\overline{\xi}, \overline{\eta}), \qquad \text{avec } \overline{\xi} = g(\xi_1) \text{ et } \overline{\eta} = g^\star(\eta_1);$$

2° $\forall \overline{a} \in \overline{\mathrm{X}}$, et quel que soit l'ouvert $\overline{\mathrm{Y}}'$ de $\overline{\mathrm{Y}}$, les différentielles en $\overline{a}$ des fonctions partielles $\overline{\varphi}^{\overline{\eta}}$, relatives aux $\overline{\eta} \in \overline{\mathrm{Y}}'$ et telles que $\overline{\varphi}^{\overline{\eta}}(\overline{\xi}) = \overline{\varphi}(\overline{\xi}, \overline{\eta})$ pour tout $\overline{\xi} \in \overline{\mathrm{X}}$, ne soient pas uniformément dégénérées;

2°* $\forall \overline{b} \in \overline{\mathrm{Y}}$, et quelque soit l'ouvert $\overline{\mathrm{X}}'$ de $\overline{\mathrm{X}}$, les différentielles en $\overline{b}$ des fonctions partielles $\overline{\varphi}^{\star\overline{\xi}}$, relatives aux $\overline{\xi} \in \overline{\mathrm{X}}'$ et telles que

$$\overline{\varphi}^{\star\overline{\xi}}(\overline{\eta}) = \overline{\varphi}(\overline{\xi}, \overline{\eta}) \quad \text{pour tout } \overline{\eta} \in \overline{\mathrm{Y}},$$

ne soient pas uniformément dégénérées.

b. Nous choisirons, comme il est loisible, X''' stable par $x_1 \circ \pi$, et Y''' stable par $y_1 \circ \psi$. Alors $\overline{x} = g \circ x_1$ est une application continue de $\mathrm{U}''' = \pi(\mathrm{X}''')$ dans $\overline{\mathrm{X}}$, partout de dimension analytique p; et $\overline{y} = g^\star \circ y_1$ est une application continue de $\mathrm{V}''' = \psi(\mathrm{Y}''')$ dans $\overline{\mathrm{Y}}$, partout de dimension analytique $p^\star$.

c. Dans ces conditions, la remarque du n° 55 *d* montre que :

3° l'énoncé 2° ci-dessus est encore valable quand on y remplace $\overline{\mathrm{Y}}'$ par l'image par $\overline{y}$ d'un ouvert de V''';

3°* l'énoncé 2°* ci-dessus est encore valable quand on y remplace $\overline{\mathrm{X}}'$ par l'image par $\overline{x}$ d'un ouvert de U'''.

d. Les conditions du n° 60 (à part celles qui concernent x_1, y_1, π, ψ) sont vérifiées quand on y remplace :

X par $\overline{\mathrm{X}}$, Y par $\overline{\mathrm{Y}}$, l par p, m par $p^\star$;

Δ par $\Delta''' = \mathrm{U}''' \times \mathrm{V}'''$, U par U''', V par V''', W par $\mathrm{U}''' + \mathrm{V}'''$;

x par $\bar{x}$, y par $\bar{y}$, z par sa restriction à $U''' + V'''$;

D par $\overline{X} \times \overline{Y}$, et φ par $\bar{\varphi}$.

Pour tout $(u, v) \in \Delta'''$, on a

$$\bar{\varphi}[\bar{x}(u), \bar{y}(v)] = z(u+v).$$

e. Nous sommes donc, puisque $(\alpha, \beta) \in \Delta'''$ et $\alpha + \beta = c$, ramenés à une situation où, en plus des conditions du n° 60, nous avons les propriétés 3° et 3°* de c, propriétés que nous n'utiliserons d'ailleurs que pour $\bar{a} \in \bar{x}(U''')$ et $\bar{b} \in \bar{y}(V''')$. C'est par ces propriétés ainsi restreintes que nous caractériserons le *cas réduit* auquel nous avons fait allusion n° 60 *b*, et que nous allons étudier dans les sections II et III en faisant abstraction de la manière dont nous avons opéré la *réduction*, et revenant aux notations du n° 60; toutefois, il nous sera commode de tenir compte du fait que nous avons abouti à des ouverts $\overline{X}$, $\overline{Y}$ d'espaces vectoriels, ce qui a été rendu possible par le caractère local de notre étude; et pour la même raison nous prendrons pour Z un espace affine.

f. C'est dans la section III que nous montrerons l'*analyticité* de z. Dans la section II nous montrerons que z est *continûment différentiable*, en utilisant seulement 3° à l'exclusion de 3°*, et nous plaçant donc dans un cas que nous appellerons *semi-réduit.*

SECTION II : CAS SEMI-RÉDUIT ; THÉORÈME DE DIFFÉRENTIABILITÉ CONTINUE.

64. Hypothèses et énoncé du théorème. — *a.* Nous conservons les notations et les hypothèses du n° 60. En outre, nous supposons que X, Y, Z sont des *espaces affines*, et nous ajoutons l'hypothèse :

(β) $\forall a \in U$, *et quel que soit l'ouvert* V' *de* V *tel que* $\{a\} \times V' \subset \Delta$, *les différentielles au point* $x(a)$ *des fonctions partielles* φ^{η}, *relatives aux* $\eta \in y(V')$ *et telles que* $\varphi^{\eta}(\xi) = \varphi(\xi, \eta)$ [*pour tout* ξ *tel que* $(\xi, \eta) \in D$], *ne sont pas uniformément dégénérées.*

b. Rappelons que cette propriété des différentielles signifie que l'intersection de leurs noyaux est $\{o\}$. Autrement dit, dans l'espace vectoriel X^* associé à X, soit α un vecteur $\neq o$; alors il existe $v \in V'$ tel que l'image de α par la différentielle, au point $x(a)$, de $\varphi^{y(v)}$ ne soit pas nulle; d'ailleurs, ces v forment évidemment un ouvert de V'. Et la propriété reste vraie pour des parties finies convenables de V'.

c. Dans cette section nous démontrerons, au moyen de l'hypothèse (β), le théorème que voici :

Les fonctions x et z sont continûment différentiables, dans U et W respectivement.

d. Nous le démontrerons d'abord pour z, et ensuite pour x, chaque fois en montrant l'*existence et la continuité* (dans W et U respectivement) *des dérivées partielles* par rapport aux coordonnées du point variable (*cf*. n° 24 *a*). Nous aurons donc à considérer des fonctions partielles, définies dans des intervalles de $\mathbf{R}$, et nous leur appliquerons les résultats du chapitre III, section I. Nous commencerons par montrer que *ces fonctions partielles n'ont pas d'élément dérivé infini.*

65. Impossibilité d'un élément dérivé infini pour x. — *a*. Soient $a \in \mathrm{U}$ et $e \in \mathbf{R}^q$; soit I un voisinage ouvert de o dans $\mathbf{R}$ tel que $a+\lambda e \in \mathrm{U}$ pour tout $\lambda \in \mathrm{I}$, et posons alors $x(a+\lambda e) = g(\lambda)$. Nous allons montrer *par l'absurde* que g *n'a pas en* o *d'élément dérivé droit infini.*

Supposons, en effet, que $\infty\,\alpha$ ($\alpha \in \mathrm{X}^\star$, $\alpha \neq 0$) soit élément dérivé *droit* de g en o. Soit V′ un ouvert de V (*cf*. n° 64 *b*) tel que $\{a\} \times \mathrm{V}' \subset \Delta$ et que, pour tout $\eta = y(\nu)$, avec $\nu \in \mathrm{V}'$, l'image $\gamma(\nu)$ de α par la différentielle de φ^η au point $x(a)$ soit non nulle. L'application $\lambda \to z(a+\nu+\lambda e)$ dans Z, d'un voisinage $\mathrm{I}'(\nu)$ de $0 \in \mathrm{I}$, qui est la restriction à $\mathrm{I}'(\nu) \subset \mathrm{I}$ de $\varphi^\eta \circ g$, a alors (n° 52) l'élément dérivé *droit* $\infty\,\gamma(\nu)$ au point $0 \in \mathrm{I}$.

b. Soit $\nu = b + \mu e$, avec $b \in \mathrm{V}'$ et $\mu \in \mathbf{R}$. Alors $\infty\,\gamma(\nu)$ est aussi élément dérivé *droit*, au point μ, de l'application $h : \lambda \to z(a+b+\lambda e)$, définie dans un voisinage de o dans $\mathbf{R}$. Et l'on peut donner à μ toute valeur d'un intervalle ouvert convenable J de $\mathbf{R}$, auquel o appartient.

D'autre part, μ variant dans J, $\nu = b+\mu e$ en dépend linéairement, donc $\eta = y(\nu)$ continûment, et $\gamma(\nu)$ s'exprime en fonction analytique de η [puisque la fonction φ, le point $x(a)$ et le vecteur α sont donnés]. Donc $\gamma(\nu)$ dépend continûment de μ, et par suite aussi $\infty\,\gamma(\nu)$; la fonction h admet donc en tout point de J un élément dérivé *droit* $\infty\,\gamma(\nu)$ qui dépend continûment de ce point, et qui est toujours infini. Il y a là une *impossibilité* d'après le n° 51 *b*.

C. Q. F. D.

66. Existence de dérivées partielles finies pour z. Différentiabilité continue de z. — *a*. Soient $c \in \mathrm{W}$ et $e \in \mathbf{R}^q$. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$, tel que $0 \in \mathrm{I}$ et que $c+\lambda e \in \mathrm{W}$ pour tout $\lambda \in \mathrm{I}$. Posons alors $z(c+\lambda e) = h(\lambda)$. Nous allons d'abord montrer que h *admet en* o *une dérivée finie.*

Soit $(a, b) \in \Delta \cap \tau^{-1}(c)$ (n° 60), donc $a+b=c$. En posant

$$x(a+\lambda e) = g(\lambda),$$

on définit une application continue g dans X d'un voisinage de o dans $\mathbf{R}$; soit α un élément dérivé *droit* de g en o, nécessairement fini d'après le résultat du n° 65 (peu nous importe que α soit nul ou non).

b. Pour tout v assez voisin de b dans V, i. e. pour tout $w = a + v$ assez voisin de c dans W, l'application $\lambda \to z(w + \lambda e)$ dans Z d'un voisinage assez petit de o dans **R** coïncide avec la restriction à ce voisinage de $\varphi^{\eta} \circ g$, si $\eta = y(v)$, et admet donc en o l'élément dérivé *droit* $\gamma(v)$, image de α par la différentielle de φ^{η} au point $x(a)$ (*cf.* n° 52), et *qui dépend donc analytiquement de* η quand on donne a et α.

c. On peut prendre en particulier $v = b + \mu e$, i. e. $w = c + \mu e$, où μ, réel, est assez voisin de o et peut varier arbitrairement dans un intervalle ouvert J tel que $0 \in J$. Alors $\gamma(v)$ est aussi élément dérivé *droit* de h au point μ; or $\gamma(v)$ dépend continûment de v, donc de μ; d'après le résultat du n° 51 *a*, la fonction *h admet en tout point* μ *de* J *une dérivée finie* $\gamma(v)$, *qui dépend continûment de ce point.* L'affirmation de *a* est donc justifiée.

d. Si e est un des q vecteurs de base dans $\mathbf{R}^q$, la dérivée partielle correspondante de z existe en tout point de W d'après le résultat précédent, et vaut $\gamma(w - b)$ en tout point w d'un voisinage convenable de c. *Elle dépend analytiquement de* $\eta = y(w - b)$ (*cf.* *b*), *donc continûment de* w.

La fonction z est donc continûment différentiable dans W.

67. Existence de dérivées partielles pour x. Différentiabilité continue de x. — *a.* Soient a, e, g, I comme au n° 65 *a*. Nous allons montrer d'abord que *g admet en* o *une dérivée* (finie, d'après le résultat du n° 65).

Soit V′ un domaine de V tel que $\{a\} \times V' \subset \Delta$, et supposons que g admette en o les éléments dérivés α et α' (d'un même côté ou non). Alors, pour tout $v \in V'$, si $\eta = y(v)$, la fonction $\varphi^{\eta} \circ g$ admet en o pour éléments dérivés les images de α et α' par la différentielle de φ^{η} au point $x(a)$ (*cf.* n° 66 *b*). D'après le résultat du n° 66 *c*, ces images coïncident, donc $\alpha' - \alpha$ appartient au noyau de φ^{η} au point $x(a)$, pour tout $v \in V'$, et par suite est nul (n° 64 *b*). Autrement dit, $\alpha' = \alpha$.

C. Q. F. D.

b. Si e est un des q vecteurs de base dans $\mathbf{R}^q$, on a ainsi montré l'existence de la dérivée partielle correspondante de x en tout point de U. Montrons maintenant que *cette fonction dérivée partielle* (application de U dans X*) *est continue au point a*; nous désignerons cette fonction par x^*.

Soit V″ une partie finie de V telle que $\{a\} \times V'' \subset \Delta$, et que les différentielles au point $x(a)$ des φ^{η}, pour les $\eta = y(v)$ relatifs aux $v \in V''$, ne soient pas uniformément dégénérées (n° 64 *b*). Alors il en est de même au point $x(u)$, si $\{u\} \times V'' \subset \Delta$ et si u est assez voisin de a; et l'image de $x^*(u)$ par la différentielle au point $\xi = x(u)$ de φ^{η} est la dérivée partielle $z^*(u + v)$ de z au point $u + v$, correspondant au même vecteur de base e.

c. Considérons les $\varphi^{\eta}(\xi)$ (en nombre r égal à celui des points de V''), pour $\xi = x(u)$, comme les coordonnées d'un point $\Phi(\xi) \in Z^r$ (*cf.* nº 55). Alors la différentielle Φ'_{ξ} est de rang l ($=$ dim X) et dépend analytiquement de ξ et de $(\eta_1, \ldots, \eta^r) \in Y^r$, où

$$\eta_i = y(v_i) \qquad \text{et} \qquad \{v_1, \ldots, v_r\} = V''.$$

Et $\Phi'_{\xi}[x^\star(u)] = [z^\star(u+v_1), \ldots, z^\star(u+v_r)]$ dépend continûment de u, d'après le résultat du nº 66 *d*.

Si α est une valeur d'adhérence de $x^\star$ en a, on a à la limite, le noyau de Φ'_{ξ} étant $\{0\}$:

$$\Phi'_{x(a)}(\alpha) = [z^\star(a+v_1), \quad \ldots, \quad z^\star(a+v_r)] = \Phi'_{x(a)}[x^\star(a)],$$

donc $\alpha = x^\star(a)$.

C. Q. F. D.

d. En conclusion, *la fonction x est* bien, comme il a été annoncé, *continûment différentiable dans* U.

68. Noyaux des différentielles de x et z. — *a*. Soit $(u, v) \in \Delta$, avec $u + v = w$, et soient

$$\xi = x(u), \qquad \eta = y(v).$$

Alors on a

$$z'_w = (\varphi^{\eta})'_{\xi} \circ x'_u.$$

De cette égalité nous allons déduire des propriétés des noyaux des différentielles x'_u et z'_w.

b. On en déduit d'abord que *le noyau de x'_u est inclus dans celui de z'_w*.

c. Le point u restant fixe, faisons varier (u, v) dans Δ de façon que w décrive *un ouvert* W′ *de* W. La différentielle z'_w dépend alors linéairement de $(\varphi^{\eta})'_{\xi}$; et l'image par x'_u du noyau de z'_w est le noyau de $(\varphi^{\eta})'_{\xi}$. Donc l'image par x'_u de l'*intersection des noyaux des z'_w* (*relatifs aux* $w \in W'$) est $\{0\}$, d'après l'hypothèse (β) du nº 64 *a*; autrement dit, cette intersection *est incluse dans le noyau de x'_u*.

d. De *b* et *c* on conclut que *le noyau de x'_u est identique à l'intersection des noyaux des z'_w relatifs aux points w de tout ouvert de* W *inclus dans* $\tau[\rho^{-1}(u) \cap \Delta]$.

e. Il en résulte, *si Δ est connexe*, que :

1º *il existe un sous-espace vectoriel* B *de* $\mathbf{R}^q$, *tel que, quel que soit l'ouvert* W′ *de* W, *l'intersection des noyaux des z'_w relatifs aux $w \in W'$ soit* B;

2º *quel que soit $u \in U$, le noyau de x'_u est* B.

Nous désignerons par $\bar{q}$ la dimension de l'espace vectoriel quotient de $\mathbf{R}^q$ par B, et par χ l'application canonique de $\mathbf{R}^q$ sur le quotient. On a

$0 \leqq \bar{q} \leqq \inf(q, l)$, et x est partout de rang $\bar{q}$, et z de rang $\leqq \bar{q}$: le cas $\bar{q} = 0$ est celui où x et z sont des constantes.

f. Supposons, en outre, que dans $\mathbf{R}^q$ toute B-variété ait une intersection connexe avec U, et aussi avec W (c'est notamment le cas *si* U *et* W *sont convexes*).

Alors on a $x = \bar{x} \circ \chi$ et $z = \bar{z} \circ \chi$, où $\bar{x}$ (resp. $\bar{z}$) est une application continûment différentiable de $\overline{\mathrm{U}} = \chi(\mathrm{U})$ dans X [resp. de $\overline{\mathrm{W}} = \chi(\mathrm{W})$ dans Z]. En outre, *$\bar{x}$ est régulière*, et les différentielles de $\bar{z}$ aux points d'un ouvert quelconque de $\overline{\mathrm{W}}$ ne sont pas uniformément dégénérées (n° 57 *d*).

SECTION III : CAS RÉDUIT ; THÉORÈME D'ANALYTICITÉ.

69. HYPOTHÈSES. ÉNONCÉ DES PREMIÈRES CONSÉQUENCES. — *a*. Nous conservons les notations et les hypothèses des n^{os} 60 et 64 *a*, en ajoutant l'hypothèse (γ) déduite de (β) par échange des rôles de U et V :

(γ) $\forall b \in \mathrm{V}$, *et quel que soit l'ouvert* U' *de* U *tel que* $\mathrm{U}' \times \{ b \} \in \Delta$, *les différentielles au point* $y(b)$ *des fonctions partielles* $\bar{\varphi}^{\xi}$, *relatives aux* $\xi \in x(\mathrm{U}')$ *et telles que* $\bar{\varphi}^{\xi}(\eta) = \varphi(\xi, \eta)$ [*pour tout* η *tel que* $(\xi, \eta) \in \mathrm{D}$], *ne sont pas uniformément dégénérées.*

b. Dans ces conditions, *les trois applications x, y, z sont continûment différentiables*, dans U, V, W respectivement, d'après le résultat de la section II.

c. Nous allons d'abord montrer que *la différentielle x'_u s'exprime analytiquement au moyen de* $x(u)$ [i. e., est la valeur au point $x(u)$ d'une application analytique d'un ouvert de X dans $\mathcal{L}(\mathbf{R}^q; \mathrm{X}^\star)$] *quand u décrit un voisinage assez petit d'un point donné* $a \in \mathrm{U}$; et que, de même, *la différentielle y'_v, dans un voisinage assez petit, décrit par v, d'un point donné* $b \in \mathrm{V}$, *s'exprime analytiquement au moyen de* $y(v)$. Il suffit de le montrer pour x'_u, puisque x et y jouent maintenant le même rôle.

70. ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENTIELLES TOTALES SATISFAITES PAR x ET y. DÉRIVÉES PARTIELLES D'ORDRES SUPÉRIEURS. — *a*. Il suffira de montrer que, dans les conditions du n° 67, $x^\star(u)$ s'exprime analytiquement au moyen de ξ, ou encore qu'il en est ainsi de $\Phi'_\xi[x^\star(u)]$, ce qui revient au même puisque Φ'_ξ est injective et dépend analytiquement de ξ (n° 67 *c*). Or

$$\Phi'_\xi[x^\star(u)] = [z^\star(u+v_1), \ldots, z^\star(u+v_r)] \qquad \text{et} \qquad z^\star(u+v_i) = (\bar{\varphi}^\xi)'_{\eta_i}[y^\star(v_i)],$$

si l'on désigne par $y^\star$ la fonction dérivée partielle de y correspondant au même vecteur de base e que $x^\star$ et $z^\star$. La dépendance analytique en question résulte alors de celle de la différentielle de $\bar{\varphi}^\xi$ en chacun des r points $\eta_1, \ldots, \eta_r$ de Y.

b. Il existe donc bien un voisinage ouvert U′ de a dans U, tel que, quand le point u de $\mathbf{R}^q$ décrit U′, chacune des q dérivées partielles de x en u (et par conséquent, comme il a été annoncé nº 68 *c*, la différentielle x'_u) *s'exprime analytiquement au moyen de* $x(u)$. *Il en est de même des dérivées partielles de tout ordre* (et non pas seulement d'ordre 1), dont l'existence et l'expression analytique se déduisent par récurrence de celles des dérivées partielles du premier ordre.

De même, il existe un voisinage ouvert V′ de b dans V (nº 68 *c*), tel que, quand le point v de $\mathbf{R}^q$ décrit V′, *les dérivées partielles de tout ordre de* y *en* v *existent, et s'expriment analytiquement au moyen de* $y(v)$.

c. Enfin, de là et de l'équation fonctionnelle (α) du nº 60 *b*, résulte que tout point $c \in \mathrm{W}$ admet un voisinage ouvert W′ tel que, quand le point w de $\mathbf{R}^q$ décrit W′, *les dérivées partielles de tout ordre de* z *en* w *existent*, et s'expriment analytiquement au moyen de $[x(u), y(v)] \in \mathrm{D}$, le point (u, v), tel que $u + v = w$, décrivant un ouvert convenable de Δ.

En effet, si $x(u) = \xi$ et $y(v) = \eta$, on a

$$z(u+v) = \varphi^{\eta}(\xi) = \bar{\varphi}^{\xi}(\eta), \qquad \text{d'où} \qquad z'_w = (\varphi^{\eta})'_{\xi} \circ x'_u = (\bar{\varphi}^{\xi})'_{\eta} \circ y'_v,$$

ce qui permet, de plusieurs manières, d'arriver à une expression analytique des dérivées partielles (d'abord du premier ordre, puis du second, etc.) de z en w au moyen de (ξ, η), puisque x'_u s'exprime analytiquement au moyen de ξ, et y'_v au moyen de η.

71. Analyticité de x, y et z. — *a.* Rappelons un résultat classique (*cf.*, dans les traités d'analyse, les chapitres relatifs aux équations aux différentielles totales et aux systèmes de telles équations; par exemple, G. Valiron [13]) :

Soit U *un ouvert de* $\mathbf{R}^q$. *Soit* x *une application différentiable de* U *dans un espace affine* X, *de dimension* l *sur* $\mathbf{R}$. *Soient :* x'_u *la différentielle de* x *en* u, *pour tout* $u \in \mathrm{U}$; *et* $\mathrm{X}^{\star}$ *l'espace vectoriel associé à* X. *Soit* F *une application analytique d'un ouvert de* $\mathrm{U} \times \mathrm{X}$ *dans l'espace* $\mathcal{L}(\mathbf{R}^q\ ;\ \mathrm{X}^{\star})$ (*dont* x'_u *est un élément*). *Si, pour tout* $u \in \mathrm{U}$, *le point* $[u, x(u)]$ *appartient à cet ouvert, et si son image par* F *est* x'_u, *alors* x *est analytique dans* U.

Nous appliquons ce théorème dans le cas particulier où $\mathrm{F}(u, \xi)$ ne dépend pas explicitement de u, mais seulement de ξ.

b. Ce théorème (où U doit être remplacé par U′) s'applique en effet à la restriction à U′ de la fonction x au nº 69 *b*. Et pour la même raison à la restriction à V′ de y (*ibid.*).

Or a et b étaient choisis (aux nºs 68 et 69) arbitrairement dans U et V respectivement. Donc *les fonctions* x *et* y *sont analytiques, dans* U *et* V *respectivement.*

c. D'après l'équation fonctionnelle (α) du n° 60, il en résulte immédiatement que *la fonction z est analytique dans* W.

72. Noyau des différentielles de x et y. Variables réduites. — *a. Supposons* Δ *connexe* [hypothèse (δ)].

Alors, aux assertions 1° et 2° du n° 68 *e*, on peut maintenant (puisque x et y jouent le même rôle) ajouter :

3° *quel que soit* $v \in V$, *le noyau de* y'_v *est* B.

On a $0 \leqq \bar{q} \leqq \inf(q, l, m)$, et y est partout de rang $\bar{q}$.

b. Supposons, en outre, que dans $\mathbf{R}^q$ toute B-variété ait une intersection connexe aussi bien avec U qu'avec V ou avec W (c'est notamment le cas *si* Δ *est convexe*).

Alors, on a, non seulement (n° 68 *f*) $x = \bar{x} \circ \chi$ et $z = \bar{z} \circ \chi$, mais aussi $y = \bar{y} \circ \chi$, où $\bar{y}$ est une application *régulière* de $\overline{V} = \chi(V)$ dans Y; et $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ sont *analytiques* (puisque x, y, z le sont).

c. L'équation fonctionnelle (α) du n° 60 se réduit alors à

$$(\bar{\alpha}) \qquad \bar{z}(\bar{u} + \bar{v}) = \varphi[\bar{x}(\bar{u}), \bar{y}(\bar{v})] \quad \text{pour tout } (\bar{u}, \bar{v}) \in \overline{\Delta},$$

où $\overline{\Delta}$ désigne l'image de Δ dans $\overline{U} \times \overline{V}$ par l'application

$$(u, v) \rightarrow [\chi(u), \chi(v)].$$

[Rappelons que $\overline{U}$ désigne $\chi(U)$, *cf.* n° 68 *f.*]

d. Si $\overline{U}'$, $\overline{V}'$ sont des domaines de $\overline{U}$, $\overline{V}$ respectivement assez petits pour que $\bar{x}$ et $\bar{y}$ soient *injectives* dans $\overline{U}'$, $\overline{V}'$ respectivement, et que $\overline{X} = \bar{x}(\overline{U}')$ et $\overline{Y} = \bar{y}(\overline{V}')$ soient des sous-variétés analytiques (de dimension $\bar{q}$) de X, Y respectivement, la restriction de $(\bar{\alpha})$ à $\overline{\Delta} \cap \overline{U}' \times \overline{V}'$ équivaut à

$$\bar{z}[\bar{x}^{-1}(\xi) + \bar{y}^{-1}(\eta)] = \varphi(\xi, \eta) \quad \text{pour tout } (\xi, \eta) \in \overline{X} \times \overline{Y}$$

tel que

$$[\bar{x}^{-1}(\xi), \bar{y}^{-1}(\eta)] \in \overline{\Delta}.$$

e. Les dimensions analytiques de x et y, dans l'hypothèse (δ) de *a*, i. e. Δ *connexe*, sont partout égales au rang constant $\bar{q}$ (et, en particulier, *sont égales entre elles*). (Nous abandonnons ici l'hypothèse faite en *b.*)

Supposons alors qu'à cette condition, à celles du n° 60, ainsi qu'à (β), n° 64, et (γ), n° 69, on ajoute celles-ci :

(ε) *la dim. an. de x, en tout point de* U, *est la dimension l de* X;

(ε') *la dim. an. de y, en tout point de* V, *est la dimension m de* Y.

Cette adjonction revient à la double condition $\bar{q} = l = m$.

On peut alors conclure :

X *et* Y *ont la même dimension* $\bar{q} \leqq q$. (Il en résulte que $p = p^\star$ aux nos 62-63).

Et ce résultat est évidemment *indépendant de l'hypothèse* (δ) : dans toute composante connexe de Δ, (ε) et (ε') impliquent $\bar{q} = l = m$.

73. Récapitulation des principaux résultats des sections I, II et III. — Dans tous les cas nous faisons au moins les hypothèses du no 60.

a. La fonction z est analytique dans W.

b. Dans l'hypothèse (δ), i. e. Δ connexe, il existe un sous-espace vectoriel B de $\mathbf{R}^q$, tel que, pour tout ouvert W′ de W, l'intersection des noyaux des z'_w relatifs aux $w \in W'$ soit B. Si χ désigne l'application canonique de $\mathbf{R}^q$ sur l'espace-quotient $\mathbf{R}^q/B$, de dimension $\bar{q}$, et si l'on suppose en outre $\bar{q} = 0$, ou $\bar{q} = q$, ou W convexe, alors $z = \bar{z} \circ \chi$, où $\bar{z}$ est une application analytique de $\overline{W} = \chi(W)$ dans Z, dont les différentielles aux points d'un ouvert quelconque de $\overline{W}$ ne sont pas uniformément dégénérées.

c. Dans l'hypothèse (β) du no 64, la fonction x est continûment différentiable dans U. [De même, y dans V dans l'hypothèse (γ), no 69.]

d. Dans les hypothèses conjointes (β) et (δ), le noyau de x'_u est B, pour tout $u \in U$.

Si l'on suppose, en outre, $\bar{q} = 0$, ou $\bar{q} = q$, ou U convexe, alors $x = \bar{x} \circ \chi$, où x est une application continûment différentiable et régulière de $\overline{U} = \chi(U)$ dans X.

e. Dans les hypothèses conjointes (β) et (γ) (no 69), les fonctions x et y sont analytiques, dans U et V respectivement.

f. Dans les hypothèses conjointes (β), (δ) et (γ), le noyau de y'_v est B pour tout $v \in V$, comme celui de x'_u pour tout $u \in U$.

Si l'on suppose, en outre, $\bar{q} = 0$, ou $\bar{q} = q$, ou U et V convexes, alors $\bar{x}$ est analytique, et $y = \bar{y} \circ \chi$, où $\bar{y}$ est une application analytique régulière de $\overline{V} = \chi(V)$ dans Y. Si l'on suppose $\bar{q} = 0$, ou $\bar{q} = q$, ou U, V et W convexes, alors

$$\bar{z}(\bar{u} + \bar{v}) = \varphi[\bar{x}(\bar{u}), \bar{y}(\bar{v})] \qquad \text{pour} \quad \bar{u} = \chi(u), \quad \bar{v} = \chi(v), \quad (u, v) \in \Delta.$$

g. Dans les hypothèses conjointes (β), (γ), (ε) et (ε') (no 72 *e*), les dimensions l de X et m de Y sont égales; et dans toute composante connexe de Δ on a $\bar{q} = l = m \leqq q$.

h. Dans l'hypothèse (ε'), la validité de (β) est impliquée (nos 55 *d* et 63 *c*) par celle de l'hypothèse $(\bar{\beta})$ que voici (et qui ne concerne que la fonction φ) :

$(\bar{\beta})$ $\forall \xi_0 \in X$, *et quel que soit l'ouvert* Y′ *de* Y *tel que* $\{\xi_0\} \times Y' \subset D$, *les différentielles au point* ξ_0 *des fonctions partielles* φ^η (no 64) *relatives aux* $\eta \in Y'$ *ne sont pas uniformément dégénérées.*

[De même, dans l'hypothèse (ε), la validité de (γ) est impliquée par celle de l'hypothèse $(\bar{\gamma})$ déduite de $(\bar{\beta})$ par échange des rôles de X et Y.]

i. Sans hypothèse supplémentaire, sont inclus dans Δ des domaines produits $\Delta' = U' \times V'$, dont la réunion est partout dense dans Δ (et même inclut une partie partout dense de toute intersection de Δ par une variété image réciproque par τ d'un point de W), et qui ont les propriétés que voici, où X' désigne une sous-variété analytique convenable de $U' \times X$, incluant $x_1(U')$, et Y' une sous-variété analytique convenable de $V' \times Y$, incluant $y_1(V')$:

1° la dim. an. de x_1 (resp. y_1) en tout point de U' (resp. V') est dim. X' (resp. dim. Y') :

2° les restrictions de π à X' et de ψ à Y' sont partout de rang q;

3° la partie $X' \times Y'$ de $(U' \times X) \times (V' \times Y)$ est connexe, et sa projection dans $X \times Y$ est incluse dans D;

4° il existe un entier $\bar{q}$, des applications analytiques g, $g^\star$, de rang constant égal à $\bar{q}$, de X', Y' respectivement sur des ouverts $\overline{X}$, $\overline{Y}$ respectivement de $\mathbf{R}^{\bar{q}}$, et une application analytique $\bar{\varphi}$ de $\overline{X} \times \overline{Y}$ dans Z, vérifiant les conditions 2° et 2°* du n° 63 *a*, de telle sorte que

$$\bar{\varphi}[g(\xi_1), g^\star(\eta_1)] = \varphi(\xi, \eta) \qquad \text{pour} \quad \xi_1 = (u, \xi) \in X' \quad \text{et} \quad \eta_1 = (v, \eta) \in Y'.$$

On a alors, en posant $x_2 = g \circ x_1$ et $y_2 = g^\star \circ y_1$ (où x_1 et y_1 sont restreintes à U' et V' respectivement) :

$$\bar{\varphi}[x_2(u), y_2(v)] = z(u+v) \quad \text{pour tout} \ (u, v) \in \Delta'.$$

Pour cette équation fonctionnelle et Δ' [mis à la place de l'équation (α) et de Δ], les conditions $(\bar{\beta})$, $(\bar{\gamma})$, (ε), (ε') [et donc (β) et (γ)] et (δ) sont toutes vérifiées. Les fonctions x_2 et y_2 ont donc les propriétés qu'on en a tirées en *d*, *e*, *f*, *g*; notamment, *elles sont analytiques*, et le noyau de leurs différentielles est le sous-espace vectoriel B, de dimension $q - \bar{q}$, associé (*cf. b*) à la composante connexe de Δ où se trouve Δ'.

SECTION IV : CAS IMPLICITE.

74. Notations et hypothèses. — *a.* Nous gardons les notations et hypothèses du n° 60 *a* en ce qui concerne q, l, m, n, ρ, σ, τ, Δ, U, V, W, X, Y, Z, x, y, z, x_1, y_1, π, ψ.

Mais nous désignons maintenant :

par D un ouvert de $X \times Y \times Z$, tel que $[x(u), y(v), z(u+v)] \in D$ pour tout $(u, v) \in \Delta$;

par p un entier $\geqq n$;

par f une application *analytique* de D dans $\mathbf{R}^p$;

par $f^{\xi,\eta}$, pour tout $(\xi, \eta) \in X \times Y$ tel que l'ensemble des $\zeta \in Z$ satisfaisant à la condition $(\xi, \eta, \zeta) \in D$ ne soit pas vide, l'application partielle $\zeta \rightarrow f(\xi, \eta, \zeta)$ de cet ensemble dans $\mathbf{R}^p$;

par $z_1(w)$, pour tout $w \in W$, le point $[w, z(w)] \in W \times Z$;

par θ l'application $(w, \zeta) \rightarrow w$ de $\mathbf{R}^q \times Z$ sur $\mathbf{R}^q$;

par ϖ l'application $[(u, \xi), (v, \eta), \zeta] \rightarrow (u + v, \zeta)$ de $(U \times X) \times (V \times Y) \times Z$ dans $\mathbf{R}^q \times Z$;

par A le lieu (*ouvert*) des points de W où z est *analytique*;

par $D^\star$ le lieu (*ouvert*) des points $(\xi, \eta, \zeta) \in D$ tels que $f^{\xi,\eta}$ soit *régulière* (i. e. de rang n) au point ζ;

par $\Delta^\star$ le lieu (*ouvert*) des points $(u, v) \in \Delta$ tels que

$$[x(u), y(v), z(u+v)] \in D^\star.$$

b. Nous faisons les *deux hypothèses* que voici :

(α_1) $f[x(u), y(v), z(u + v)] = 0$ *pour tout* $(u, v) \in \Delta$;

(α_2) $\Delta^\star$ *est partout dense dans* Δ.

c. Le cas explicite (section I) est celui où $f(\xi, \eta, \zeta)$ est de la forme : $\varphi(\xi, \eta) - \zeta$.

75. Lieu des points d'analyticité de z. — *a.* De (α_2) résulte d'abord que l'ouvert $\tau(\Delta^\star)$ de W est partout dense dans W. Nous allons en déduire le théorème que voici :

A *est partout dense dans* W.

Pour cela, il suffit de démontrer l'inclusion : $\tau(\Delta^\star) \subset A$.

b. Soit donc $(a, b) \in \Delta^\star$, et soit $c = a + b$. Soient

$$\xi_0 = x(a), \qquad \eta_0 = y(b), \qquad \zeta_0 = z(c).$$

On a

$$(\xi_0, \eta_0, \zeta_0) \in D^\star \qquad \text{et} \qquad f(\xi_0, \eta_0, \zeta_0) = 0.$$

D'après la théorie des fonctions implicites, et la définition de l'ouvert $D^\star$ de $X \times Y \times Z$, il existe un voisinage D' ouvert de (ξ_0, η_0, ζ_0) dans $D^\star$, de la forme $D' = X' \times Y' \times Z'$, et une application analytique φ de $X' \times Y'$ dans Z', tels que dans D' l'équation $f(\xi, \eta, \zeta) = 0$ équivale à l'équation $\zeta = \varphi(\xi, \eta)$, jointe éventuellement (si $p > n$) à une équation analytique en (ξ, η) seulement.

c. Soit Δ' le lieu (ouvert) des points (u, v) de $\Delta^\star$ tels que

$$[x(u), y(v), z(u+v)] \in D'.$$

Nous avons, pour tout $(u, v) \in \Delta'$,

$$z(u+v) = \varphi[x(u), y(v)],$$

comme dans la section I. D'après le résultat démontré dans ce cas, concernant z, la fonction z est analytique en tout point de $\tau(\Delta')$, et en particulier au point c, puisque $(a, b) \in \Delta'$.

C. Q. F. D.

76. Cas d'un point où z n'est pas supposée analytique. — a. Soit $c \in W$. Nous considérons comme au n° 61 l'intersection $\Gamma = \Delta \cap \tau^{-1}(c)$, et nous en extrayons une partie ouverte et connexe Γ' telle que le domaine

$$\Delta' = U' \times V' = \rho(\Gamma') \times \sigma(\Gamma')$$

soit inclus dans Δ, et que $x_1(U')$ [resp. $y_1(V')$] soit incluse dans une sous-variété analytique connexe X_1 (resp. Y_1) de $U' \times X$ (resp. $V' \times Y$), de telle sorte que la dim. an. de x_1 (resp. y_1) en tout point de U' (resp. V') soit dim X_1 (resp. dim Y_1), que la restriction de π à X_1 (resp. de ψ à Y_1) soit partout de rang q, et que, pour tout point $[(u, \xi), (v, \eta), \zeta]$ de $D_1 = X_1 \times Y_1 \times Z'$, où Z' est un domaine convenable de Z, incluant $z[\tau(\Delta')]$, on ait $(\xi, \eta, \zeta) \in D$.

b. Posons

$$f_1(\xi_1, \eta_1, \zeta) = f(\xi, \eta, \zeta) \qquad \text{pour} \quad \xi_1 = (u, \xi) \in X_1 \quad \text{et} \quad \eta_1 = (v, \eta) \in Y_1.$$

On a ainsi une application analytique f_1 de D_1 dans $\mathbf{R}^p$, telle que, pour tout $(u, v) \in \Delta'$, on ait

$$f_1[x_1(u), y_1(v), z(u+v)] = 0.$$

Nous appellerons $D_1^\star$ le lieu (ouvert) des points $[(u, \xi), (v, \eta), \zeta]$ de D_1 tels que $(\xi, \eta, \zeta) \in D^\star$, i. e. tels que l'application partielle obtenue à partir de f_1 en fixant $\xi_1 = (u, \xi)$ et $\eta_1 = (v, \eta)$ soit régulière au point ζ. Et nous poserons $\Delta^{\star\prime} = \Delta^\star \cap \Delta'$: c'est l'ouvert, partout dense dans Δ', lieu des points $(u, v) \in \Delta'$ tels que

$$[x_1(u), y_1(v), z(u+v)] \in D_1^\star.$$

c. Nous avons là une situation analogue à la situation initiale, mais qui nous permettra d'étudier plus aisément la fonction z au voisinage de la valeur c de la variable, d'après les hypothèses de a.

Notamment, l'hypothèse sur les dimensions analytiques de x_1 et y_1 empêche qu'une même relation analytique entre ξ_1 et η_1 soit vérifiée par

$$\xi_1 = x_1(u) \qquad \text{et} \qquad \eta_1 = y_1(v)$$

pour tout (u, v) d'un ouvert de Δ' (entendons une relation non identique, i. e. qui n'est pas vérifiée dans tout un ouvert de $X_1 \times Y_1$). Il en résulte (*cf.* n° 75 b) que, si (u_0, v_0) désigne un point de $\Delta^{\star\prime}$, l'équation $f_1(\xi_1, \eta_1, \zeta) = 0$ *équivaut*, dans un voisinage convenable du point

$$[x_1(u_0), y_1(v_0), z(u_0+v_0)] \in D_1^\star,$$

à une équation de la forme $\zeta = \varphi_1(\xi_1, \eta_1)$, où φ_1 est analytique. Et, pour la même raison, cette équation analytique, en ce point de $D_1^\star$, est celle du germe analytique associé, au point $(u_0, v_0) \in \Delta^{\star\prime}$, à l'application

$$(u, v) \to [x_1(u), y_1(v), z(u+v)] \quad \text{de } \Delta' \text{ dans } D_1;$$

nous désignerons cette application par F, de sorte que $\varpi \circ F$ est la restriction à Δ' de $z_1 \circ \tau$.

d. Nous allons déduire de ce qui précède une propriété du germe analytique associé à F, d'abord en un point (u_0, v_0) de $\Delta^{\star\prime}$, puis en un point arbitraire de Δ' (en utilisant le fait que $\Delta^{\star\prime}$ est partout dense dans Δ'); et de là une propriété du germe analytique associé au graphe de z, au point $z_1(c)$ de ce graphe, et en même temps une propriété du germe de l'ouvert A de W au point c (qui adhère à A) : A_c *est réunion finie de germes connexes*.

77. Cylindricité des germes analytiques associés a l'application F. — *a.* Dans les conditions du n° 76 *c*, l'équation *analytique*

$$\varphi_1(\xi_1, \eta_1) = z[\pi(\xi_1) + \psi(\eta_1)]$$

(analytique parce que z est analytique au point $u_0 + v_0$) est vérifiée par $\xi_1 = x_1(u)$ et $\eta_1 = y_1(v)$ pour tout (u, v) d'un voisinage de (u_0, v_0) dans Δ'. Cette équation est donc (d'après la propriété des dimensions analytiques de x_1 et y_1) une identité dans $X_1 \times Y_1$.

b. L'équation du germe analytique associé à F et au point (u_0, v_0) est donc

$$\zeta = z(u+v), \qquad \text{où} \quad u = \pi(\xi_1) \quad \text{et} \quad v = \psi(\eta_1).$$

Cette équation ne fait intervenir un point (ξ_1, η_1, ζ) d'un ouvert de D_1 que par son image $(u + v, \zeta)$ par l'application analytique ϖ de rang constant $q + n$; nous dirons (dans cette section), d'une équation qui a cette propriété, qu'elle est *cylindrique*, et nous qualifierons de même le germe représenté par cette équation.

c. Ainsi *le germe analytique associé à* F *et à un point choisi arbitrairement dans* $\Delta^{\star\prime}$ *est cylindrique.*

Nous allons voir qu'*il en est de même pour tout point de* Δ'.

Soit, en effet, $(a, b) \in \Delta'$. Le germe analytique associé à F et au point (a, b) est le germe analytique associé au point $F(a, b)$ à $F(\Delta')$, puisque F réalise un homéomorphisme de Δ' sur $F(\Delta')$. C'est aussi, pour la même raison et puisque $\Delta^{\star\prime}$ est partout dense dans Δ', le germe analytique associé au point $F(a, b)$ à $F(\Delta^{\star\prime})$.

Or, un voisinage ouvert assez petit de $F(a, b)$ dans D_1 peut être assimilé à un ouvert d'espace affine, où $q + n$ des coordonnées d'un point seraient celles du point correspondant de $\varpi(D_1)$. Dans ces conditions, le théorème du n° 22 *e* est applicable, et il en résulte bien que le germe analytique en question est cylindrique, puisque le germe analytique associé à $F(\Delta^{\star\prime})$ en chacun de ses points est cylindrique.

78. GERMES DU GRAPHE DE z ET DU LIEU DES POINTS D'ANALYTICITÉ. — *a*. Soit encore $(a, b) \in \Delta'$, et plus précisément $(a, b) \in \Gamma'$, donc $a + b = c$ (*cf.* n° 76 *a*).

D'après le résultat du n° 77 *c*, il existe dans D_1 un ensemble analytique E localement cylindrique (i. e. son germe en chacun de ses points est cylindrique), dont le germe au point $F(a, b)$ est le germe analytique associé en ce point à $F(\Delta^{\star\prime})$ [et aussi à $F(\Delta')$], et en chaque point duquel s'annule la fonction analytique f_1.

b. D'après le résultat des n^os^ 76 *c* et 77 *b*, le germe de E en tout point de $E \cap F(\Delta^{\star\prime})$ est celui de l'ensemble des points où f_1 s'annule, et l'équation de E au voisinage de $E \cap F(\Delta^{\star\prime})$ est cylindrique, et coïncide avec l'équation de l'image de $E \cap F(\Delta^{\star\prime})$ par ϖ, ou, ce qui revient au même, par $z_1 \circ \tau \circ F^{-1}$. Cette image est le graphe de la restriction de z à un ouvert $W^{\star\prime}$ de $\tau(\Delta^{\star\prime})$, partout dense dans un voisinage ouvert W' de c; c'est une sous-variété analytique $Z_1^\star$ de $W \times Z$, de dimension q (la restriction considérée de z est analytique), *ouverte dans l'ensemble analytique* $\varpi(E)$, et partout dense dans $Z_1 = z_1(W')$. Nous supposerons $Z_1 = \varpi[E \cap F(\Delta')]$, ce qui est loisible, puisqu'on peut toujours remplacer E par son intersection avec $\varpi^{-1}(W' \times Z)$, quel que soit le voisinage ouvert W' de c; et pour la même raison $\varpi(E) \subset W' \times Z$.

c. Nous pouvons alors appliquer le lemme du n° 45, où W est à remplacer par W', p par q, h par la restriction de z à W', W' par $W' \cap A$, h_1 par z_1, G par Z_1, E par $\varpi(E)$; la variété $Z_1^\star$ actuelle est partout dense dans la variété G'' du n° 45.

Comme le point c a été choisi arbitrairement dans W, il en résulte ce théorème :

Soit c un point de W. *Alors le germe W_c est réunion disjointe et finie de germes ouverts connexes inclus dans A_c, et éventuellement d'un germe dont l'image par z_1 est de dimension analytique $< q$, et qui plus précisément est l'image par θ de l'intersection du germe, au point $z_1(c)$, du graphe de z, et d'un germe analytique de dimension $< q$.*

Il en résulte notamment que A_c *est réunion disjointe et finie de germes ouverts connexes.*

(En effet, au voisinage de c, les propriétés en question sont vraies pour A dès qu'elles le sont pour un ouvert partout dense dans A.)

APPENDICE.

Un cas particulier d'analyticité par morceaux en nombre fini pour des fonctions d'une variable réelle.

79. Que deviennent les résultats du chapitre IV, lorsque les arguments des fonctions x, y, z sont des variables réelles, autrement dit lorsque $q = 1$?

Δ est alors un ouvert de $\mathbf{R}^2$, et U, V, W sont des ouverts de $\mathbf{R}$, ainsi que A (n° 74). Le résultat du n° 78 implique alors que, *dans tout intervalle compact inclus dans* W, z *est « analytique par morceaux en nombre fini »*, de telle sorte que, même au voisinage d'un point où se raccordent deux des morceaux, il y ait entre w et $z(w)$ une relation analytique dont le graphe est de dimension 1 (relation qui est donc vérifiée aussi bien par la fonction analytique du morceau gauche que par celle du morceau droit).

80. Mais *le nombre total des morceaux* dans W *peut être infini*, même dans le cas simple où Δ est un domaine triangulaire, où les entiers l, m, n, p (n^os^ 60 et 74) sont tous égaux à 1, et où f est un polynome dans $\mathbf{R}^3$ (il s'agit de la fonction f du n° 74), comme le montre l'exemple que voici, où π désigne la longueur du demi-cercle de rayon 1 :

Le triangle Δ est défini par les inégalités :

$$v < u < 2v, \qquad u + v < 2\pi,$$

de sorte que W, U, V sont les intervalles ouverts $(0, 2\pi)$, $\left(0, \dfrac{4\pi}{3}\right)$, $(0, \pi)$. Pour tout entier $i \geqq 0$, et tout w tel que $2^{-i}\pi \leqq w < 2^{1-i}\pi$, on pose

$$z(w) = \sin(2^i w).$$

On prend pour x et y les restrictions de z à U et V resp.

Le polynome $f(\xi, \eta, \zeta)$ est le produit de trois polynomes irréductibles, dont l'un,

$$4\zeta^2(\xi\eta + 1 - \zeta^2) - (\xi + \eta)^2,$$

s'annule pour

$$\xi = \sin 2u, \qquad \eta = \sin 2v, \qquad \zeta = \sin(u + v);$$

un autre polynome facteur s'annule pour

$$\xi = \sin 2u, \qquad \eta = \sin 4v, \qquad \zeta = \sin(u + v);$$

et le troisième facteur pour

$$\xi = \sin u, \qquad \eta = \sin 2v, \qquad \zeta = \sin(u + v).$$

81. Il existe cependant des cas où l'on peut être certain *a priori* que le nombre des morceaux de W (dans chacun desquels z est analytique) est fini. Supposons, comme dans l'exemple qui précède, Δ connexe, les entiers l, m, n, p tous égaux à 1, et f polynome dans $\mathbf{R}^3$; mais cette fois, supposons que le *polynome* f soit *irréductible*. La *dérivée* $g(\xi, \eta, \zeta)$ de $f(\xi, \eta, \zeta)$ relative à l'indéterminée ζ est un polynome en (ξ, η, ζ), et

$$g[x(u), y(v), z(u+v)] \neq 0 \quad \text{pour tout } (u, v) \in \Delta' \quad (\text{n}^\text{o}\ 74).$$

Nous supposerons que $f(\xi, \eta, \zeta)$ ne se réduit pas à un polynome (du 1er degré) en ζ seul (z serait alors constante dans W).

Alors, si $z \circ \tau$ est constante dans un ouvert de Δ', l'une au moins des fonctions $x \circ \rho$ et $y \circ \sigma$ est constante dans un ouvert partiel. Réciproquement, $z \circ \tau$ est constante dans tout domaine de Δ' où $x \circ \rho$ ou $y \circ \sigma$ est constante. Il résulte de là, puisque Δ' est partout dense dans Δ, qu'il ne peut pas y avoir deux morceaux consécutifs de l'intervalle W dans l'un seulement desquels z serait constante. Autrement dit, *si z est constante dans un intervalle partiel, elle est constante dans tout* W.

Supposons alors maintenant que z ne soit constante dans aucun intervalle partiel. Autrement dit, l'entier $\overline{q}$ (n° 72) relatif à chaque intervalle de $\tau(\Delta')$ est toujours 1. Alors, non seulement x (resp. y) n'est constante dans aucun intervalle partiel de U (resp. V), mais la dérivée par rapport à ξ (resp. η) de $f(\xi, \eta, \zeta)$, pour

$$\xi = x(u), \qquad \eta = y(v), \qquad \zeta = z(u+v),$$

n'est pas nulle pour tous les points (u, v) d'un domaine de Δ' (ni par conséquent pour tous ceux d'un ouvert de Δ). Ainsi les trois fonctions x, y, z jouent à peu près le même rôle (pour une symétrie plus apparente, il suffirait de prendre $-w$ comme abscisse dans W à la place de w); en particulier, *x et y, comme z, sont analytiques par morceaux* (en nombre fini dans tout intervalle compact inclus dans l'intervalle de définition), et nous voulons montrer que le nombre total des morceaux est fini, *si Δ est borné*, ce que nous supposerons.

82. D'après P. Kœbe (*Mathematische Abhandlungen H. A. Schwarz zu seinem 50-jährigen Doktorjubiläum gewidmet*, Springer, Berlin, 1914, p. 192-214; ou *Dissertation*, Berlin, 1905), généralisant un théorème de Weierstrass (*cf.* aussi E. Phragmén, *Acta Mathematica*, t. 7, 1885, p. 33-42), *les différentes fonctions analytiques ainsi obtenues* (dans tous les morceaux) *dépendent algébriquement d'une fonction méromorphe unique* (la même pour x, y, z) *qui, dans le cas général, est une fonction elliptique, et dans les cas spéciaux une exponentielle* $u \to \exp \alpha u$ (α, constante non nulle, réelle ou imaginaire) *ou la fonction* $u \to u$. En outre, un raisonnement de

P. Kœbe, et celui qu'en a tiré J. F. Ritt [37], permettent, en vertu de l'irréductibilité de f, de comparer les fonctions analytiques avec lesquelles coïncident $x \circ \rho$, $y \circ \sigma$ et $z \circ \tau$ dans un certain domaine de Δ avec les prolongements analytiques (dans le champ complexe) de celles qui sont relatives à un autre domaine partiel, les prolongements étant tels que les deux systèmes de fonctions aient les mêmes valeurs; les variables (complexes) u', v' pour le second système sont liées aux variables (en principe réelles) u, v du premier par des relations linéaires $u' = \varepsilon u + a$, $v' = \varepsilon v + b$, avec un même coefficient ε. *Ce coefficient* ε *est une racine de l'unité*, en raison du fait qu'on peut passer dans Δ d'un domaine partiel à un autre, par un nombre fini de passages d'un domaine à un domaine adjacent (où l'une seulement des fonctions analytiques qui coïncident avec x, y, z est changée), et du fait que les fonctions analytiques du type considéré n'admettent pas de transformation linéaire (laissant la fonction invariante) à coefficient distinct d'une racine de l'unité, puisqu'elles n'ont (à distance finie) que des points singuliers de caractère algébrique.

Choisissons une fois pour toutes le domaine de Δ à partir duquel nous faisons le prolongement analytique, de z par exemple. Supposons que dans W, à partir d'un point a_0, nous ayons une infinité de morceaux (non prolongeables) $a_0 a_1$, $a_1 a_2$, ..., $a_j a_{j+1}$, ..., où z est analytique; alors $a_{j+1} - a_j$ tend vers zéro (pour $j \to \infty$) sans être nul, et la fonction analytique prolongée prend les valeurs $z(a_j)$ et $z(a_{j+1})$ pour deux valeurs de la variable dont la distance (en valeur absolue) est $a_{j+1} - a_j$. Ceci est contradictoire (étant donné le type de fonction analytique considéré) avec le fait que voici : *les valeurs* $z(a_j)$ *sont en nombre fini*, puisque $f[\xi, \eta, z(a_j)]$ et $g[\xi, \eta, z(a_j)]$ sont des polynomes en ξ, η qui ont un facteur commun, car ils s'annulent simultanément pour

$$\xi = x(u), \qquad \eta = y(v), \qquad (u, v) \in \Delta \cap \tau^{-1}(a_j).$$

L'irréductibilité de f entraîne donc bien que *le nombre des morceaux de* W *est fini*, pourvu que Δ soit connexe et borné.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] N. Bourbaki, *Éléments de Mathématique, Topologie générale*, chap. 1 et 2, 3e édition, Hermann, Paris, 1961.

[2] P. Dubreil et M.-L. Dubreil-Jacotin, *Leçons d'algèbre moderne*, Dunod, Paris, 1961.

[3] R. Sikorski, *Boolean algebras*, Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1960.

[4] M. H. Stone, *The theory of representations for Boolean algebras* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 40, 1936, p. 37-111).

[5] N. Bourbaki, *Éléments de Mathématique, Théorie des ensembles*, chap. 3, Hermann, Paris, 1956.

[6] J. Lelong-Ferrand, *Géométrie différentielle*, Masson, Paris, 1963.

[7] H. Cartan, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques...*, Hermann, Paris, 1961.

[8] M. Fréchet, *Sur la notion de différentielle* (*J. Math. pures et appl.*, t. 16, 1937, p. 233-250).

[9] R. de Possel, *Cours de calcul différentiel et intégral*, Alger, 1942.

[10] G. Papy, *Variétés différentielles* (*Bull. Soc. Math. France*, t. 85, 1957, p. 1-14).

[11] C. Chevalley, *Theory of Lie Groups*, Princeton University Press, Princeton, 1946.

[12] G. Valiron, *Cours d'Analyse mathématique, Théorie des fonctions*, Masson, Paris, 1942.

[13] G. Valiron, *Cours d'Analyse mathématique, Équations fonctionnelles...*, Masson, Paris, 1945.

[14] N. Bourbaki, *Éléments de Mathématique, Algèbre*, chap. 8, Hermann, Paris, 1958.

[15] J. Frenkel, *Séminaire H. Cartan*, 1951-1952, exposé n° 10.

[16] F. Bruhat, *Séminaire H. Cartan*, 1951-1952, exposés nos 11 et 12.

[17] H. Cartan, *Variétés analytiques...* (*Bull. Soc. Math. France*, t. 85, 1957, p. 77-99).

[18] P. Samuel, *Séminaire d'Analyse* (*P. Lelong*), 1re année (1957-1958), Secrétariat mathématique, Paris, 1959, exposé n° 2.

[19] N. Bourbaki, *Éléments de Mathématique, Algèbre*, chap. 3, Hermann, Paris, 1948.

[20] N. Bourbaki, *Éléments de Mathématique, Topologie générale*, chap. 5 à 8, Hermann, Paris, 1947.

[21] H. Cartan, *Séminaire H. Cartan*, 1951-1952, exposés nos 13 et 14.

[22] S. Bochner et W. T. Martin, *Several complex variables*, Princeton University Press, Princeton, 1948.

[23] H. Cartan, *Séminaire de l'École Normale Supérieure* (*H. Cartan*), 1953-1954, exposés nos 6 à 11.

[24] B. Malgrange, *Sur les fonctions différentiables et les ensembles analytiques* (*Bull. Soc. Math. France*, t. 91, 1963, p. 113-127).

[25] S. Łojasiewicz, *Sur le problème de la division* (*Studia Mathematica*, t. 18, 1959, p. 87-136).

[26] W. F. Osgood, *Lehrbuch der Funktionentheorie*, 2ter Bd, Leipzig, 1929.

[27] S. Lefschetz, *Algebraic Geometry*, Princeton University Press, Princeton, 1953.

[28] N. Bourbaki, *Éléments de Mathématique, Algèbre commutative*, chap. 1 et 2, Hermann, Paris, 1961.

[29] H. Cartan, *Idéaux et modules de fonctions analytiques...* (*Bull. Soc. Math. France*, t. 78, 1950, p. 29-64).

[30] F. Bruhat et H. Cartan, *C. R. Acad. Sc.*, t. 244, 1957, p. 988.

[31] S. Łojasiewicz, *Une propriété topologique des sous-ensembles analytiques réels* (*Colloque international du C. N. R. S. sur les équations aux dérivées partielles*, Paris, 1962).

[32] H. Lebesgue, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, Gauthier-Villars, Paris, 1904.

[33] A. Denjoy, *Sur les nombres dérivés des fonctions continues* (*J. Math. pures et appl.*, 7e série, t. 1, 1915).

[34] P. Montel, *Sur les fonctions d'une variable réelle qui admettent un théorème d'addition algébrique* (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 3e série, t. 48, 1931, p. 65-94).

[35] N. Bourbaki, *Éléments de Mathématique, Topologie générale*, chap. 3 et 4, Hermann, Paris, 1942.

[36] N. Bourbaki, *Éléments de Mathématique, Espaces vectoriels topologiques*, chap. 1 et 2, Hermann, Paris, 1953.

[37] J. F. Ritt, *Real functions with algebraic addition theorems* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 29, 1927, p. 361-368).

[38] P. J. Myrberg, *Ueber stetige Funktionen einer reellen Variablen, welche ein algebraisches Additionstheorem besitzen* (*J. für die r. u. a. Mathematik*, Bd 170, 1934, p. 107-122).

[39] T. Pentikäinen, *Ueber stetige Funktionensysteme mit einem algebraischen Additionstheorem* (*Ann. Ac. Scient. Fennicæ*, série A, I, t. 38, 1947).

[40] R. Meynieux, *C. R. Acad. Sc.*, t. 200, 1935, p. 202.

[41] R. Meynieux, *C. R. Acad. Sc.*, 200, 1935, p. 892.

[42] P. Montel, *Sur deux systèmes d'équations fonctionnelles* (*Mathematica*, Cluj-Timisoara, t. 21, 1945, p. 10-11).

[43] J. Aczél, *Vorlesungen über Funktionalgleichungen...*, *Birkhäuser* V., Basel und Stuttgart, 1961.