ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

CHARLES EHRESMANN

Catégories structurées

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 80, nº 4 (1963), p. 349-426
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1963_3_80_4_349_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
3e série, t. 80, 1963, p. 349 à 426.

CATÉGORIES STRUCTURÉES

PAR M. CHARLES EHRESMANN.

INTRODUCTION.

Cet article est la première partie d'un travail sur la notion de catégories structurées et d'espèces de structures structurées. Les principaux résultats sont résumés dans une série de Notes à l'Académie des Sciences [3 *e*].

Le premier paragraphe débute par un court rappel sur les notions d'espèces de structures et de catégories d'homomorphismes. Soit $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$ une catégorie d'homomorphismes au-dessus de $\mathcal{C}$ telle que $\mathcal{S}$ contienne le groupoïde des éléments inversibles de la catégorie $\mathcal{H}$ et que $\mathcal{C}$ soit, de plus, munie d'une structure de catégorie inductive. Nous définissons les sous-structures d'une structure de $\mathcal{H}$. Cette notion précise celle de sous-objet d'un objet d'une catégorie quelconque, en utilisant le fait que $\mathcal{H}$ est une catégorie d'homomorphismes et $\mathcal{C}$ une catégorie inductive; elle conduit à munir $\mathcal{H}$ d'une structure de catégorie ordonnée, à laquelle se rattachent les principaux résultats de ce paragraphe.

Soit $(\mathcal{M}, p, \mathcal{H}, \Gamma)$ une catégorie d'homomorphismes à produits finis, au-dessus d'une catégorie $\mathcal{M}$ d'applications; nous définissons au début du paragraphe II les catégories $\mathcal{H}$-structurées [ou plus précisément $\mathcal{H}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')$-structurées]. Ensuite nous donnons un certain nombre d'exemples : catégories topologiques et catégories différentiables [3 *b*]; catégories doubles qui interviennent en particulier dans la théorie des transformations naturelles entre foncteurs [3 *d*]; catégories structurées par des ordres, plus spécialement catégories et groupoïdes inductifs [3 *c*], etc. Ces exemples, que j'ai été amené à considérer dans l'étude des espaces fibrés, des espaces feuilletés, des prolongements de variétés différentiables, des structures locales en général, sont à l'origine de ce travail. La fin du paragraphe II contient une série de théorèmes généraux :

Les foncteurs $\mathcal{H}$-structurés forment une catégorie d'homomorphismes au-dessus d'une catégorie de foncteurs, et au-dessus de $\mathcal{M}$; elle est à produits finis et résolvante à droite.

Soit $(\mathcal{C}^{\cdot}, s)$ une catégorie $\mathcal{H}$-structurée; si $\overline{\mathcal{C}}^{\cdot}$ est une sous-catégorie de $\mathcal{C}^{\cdot}$ et $\bar{s}$ une sous-structure de s telle que $p(\bar{s}) = \overline{\mathcal{C}}$, alors $(\overline{\mathcal{C}}^{\cdot}, \bar{s})$ est une catégorie $\mathcal{H}$-structurée.

Si $(\mathcal{C}^{\cdot}, s)$ est une catégorie $\mathcal{H}$-structurée, les catégories des trios et des quatuors de $\mathcal{C}^{\cdot}$ sont des catégories $\mathcal{H}$-structurées.

Tous ces théorèmes utilisent l'hypothèse supplémentaire : $(\mathcal{M}, p, \mathcal{H}, \Gamma)$ est une catégorie d'homomorphismes résolvante à droite (c'est-à-dire $\mathcal{H}$ contient « assez » de sous-structures).

La deuxième partie de cet article (à paraître prochainement) contiendra la théorie des espèces de structures structurées; nous montrerons comment le procédé d'élargissement complet d'un groupoïde inductif peut être généralisé à des espèces de structures structurées. Ensuite nous donnerons des applications de toutes ces notions à des problèmes plus particuliers.

I. — Catégories d'homomorphismes et sous-structures.

1. Conventions. — Une catégorie sera en général représentée par le symbole désignant la classe support de la catégorie en y adjoignant en haut à droite le symbole de la loi de composition faisant de cette classe une catégorie. Par exemple : $\mathcal{C}^{\perp}$, $\mathcal{C}_1^{\perp}$, $\overline{\mathcal{C}}^{\top}$ (resp. $\mathcal{C}^{\cdot}$, $\mathcal{C}_1^{\cdot}$, $\overline{\mathcal{C}}^{\cdot}$), ..., désigneront les catégories obtenues en munissant la classe $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_1$, $\overline{\mathcal{C}}$, ... de la loi de composition $\perp$ (resp. .). La classe des unités d'une catégorie sera désignée par le symbole représentant la catégorie, en y adjoignant en bas et à droite l'indice $_0$; par exemple : $\mathcal{C}_0^{\perp}$, $(\mathcal{C}_1^{\perp})_0$, $\overline{\mathcal{C}}_0^{\perp}$, ... Si une classe d'objets est associée naturellement à la catégorie (par exemple les classes dans une catégorie d'applications de classe dans classe), nous identifierons les unités aux objets correspondants sans le mentionner.

Soit $\mathcal{C}^{\perp}$ une catégorie. Les applications source et but qui associent à un élément f de $\mathcal{C}^{\perp}$ son unité à droite et son unité à gauche respectivement seront notées $\alpha^{\perp}$ et $\beta^{\perp}$. La classe des couples (g, f) tels que le composé $g \perp f$ soit défini $[$c'est-à-dire tels que $\alpha^{\perp}(g) = \beta^{\perp}(f)]$ sera désignée par le symbole $\mathcal{C}^{\perp} \star \mathcal{C}^{\perp}$; l'application

$$(g, f) \to g \perp f, \qquad \text{où} \quad (g, f) \in \mathcal{C}^{\perp} \star \mathcal{C}^{\perp},$$

par le symbole $\varkappa^{\perp}$.

Pour simplifier les notations et si aucune confusion n'est possible, nous représenterons une catégorie par le même symbole que la classe support; dans ce cas, il sera sous-entendu que la loi de composition est désignée par . ; ainsi on écrira $\mathcal{C}$ au lieu de $\mathcal{C}^{\cdot}_{.}$. De même, on écrira aussi $\mathcal{C}_0$, α et β au lieu de $\mathcal{C}^{\cdot}_0$, $\alpha^{\cdot}$ et $\beta^{\cdot}$.

Soient $\overline{\mathcal{C}}^{\perp}$ et $\mathcal{C}^{\perp}$ deux catégories; le mot foncteur signifiera toujours foncteur covariant. Un foncteur de $\mathcal{C}^{\perp}$ vers $\overline{\mathcal{C}}^{\perp}$ sera désigné, soit par un triplet $(\overline{\mathcal{C}}^{\perp}, \mathrm{F}, \mathcal{C}^{\perp})$, où F est l'application correspondante, soit par la seule lettre F. La restriction de F à la classe $\mathcal{C}^{\perp}_0$, considérée comme application de $\mathcal{C}^{\perp}_0$ dans $\overline{\mathcal{C}}^{\perp}_0$, sera notée F_0.

2. Rappel sur les espèces de structures [3 *a*]. — La notion d'espèce de structures étant essentielle dans cet article, nous allons en rappeler la définition et les principales propriétés.

Définition 1. — *On dit qu'une catégorie $\mathcal{C}$ est* une catégorie d'opérateurs *sur une classe Σ_0 si l'on a défini une loi de composition : $(f, z) \to fz$ pour certains couples $(f, z) \in \mathcal{C} \times \Sigma_0$ telle que $fz \in \Sigma_0$ et que les axiomes suivants soient vérifiés :*

(1) *Associativité : Si $g(fz)$ ou $(g.f)z$ est défini, ces deux éléments sont définis et égaux :*

$$g(fz) = (g.f)\,z;$$

(2) *Si $g.f$ et fz sont définis, alors $g(fz)$ est défini;*

(3) *Soit $e \in \mathcal{C}_0$; si ez est défini, on a $ez = z$;*

(4) *a. Pour tout $z \in \Sigma_0$, il existe au moins un $f \in \mathcal{C}$ tel que fz soit défini;* *b. Pour tout $f \in \mathcal{C}$, il existe au moins un $z \in \Sigma_0$ tel que fz soit défini.*

Ces axiomes entraînent que, pour tout $z \in \Sigma_0$, il existe un et un seul $e \in \mathcal{C}_0$ tel que ez soit défini; on obtient ainsi une application $p_0 : z \to e$ de Σ_0 dans $\mathcal{C}_0$; on dira que z est une *structure* sur $p_0(z)$.

Définition 2. — *Soient Σ_0 une classe et $\mathcal{C}$ une catégorie; on dit que Σ_0 est une* espèce de structures au-dessus de $\mathcal{C}$ *si l'on s'est donné une sous-catégorie $\mathcal{C}_1$ de $\mathcal{C}$ qui soit une catégorie d'opérateurs sur Σ_0; soit p_0 l'application correspondante de Σ_0 dans $\mathcal{C}_0$; on dira aussi que* $(\mathcal{C}, p_0, \Sigma_0)$ est une espèce de structures. *Si, de plus, $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}$, on dira que* $[\mathcal{C}, p_0, \Sigma_0]$ *est* une espèce de structures sur $\mathcal{C}$.

Soit $(\mathcal{C}, p_0, \Sigma_0)$ une espèce de structures. Soit Σ la classe des couples $(f, z) \in \mathcal{C} \times \Sigma_0$ tels que fz soit défini, c'est-à-dire tels que $\alpha(f) = p_0(z)$. Munie de la loi de composition :

$$(f', z').(f, z) = (f'.f, z) \quad \text{si, et seulement si,} \quad z' = fz,$$

Σ est une catégorie, appelée *catégorie des hypermorphismes associée* à l'espèce de structures $(\mathcal{C}, p_0, \Sigma_0)$. La classe des unités de Σ s'identifie à Σ_0 en identifiant (e, z) à z. L'application p_0 se prolonge en un foncteur $(\mathcal{C}, p, \Sigma)$ vérifiant la propriété suivante :

(E) Pour tout $h \in \Sigma$ et tout $z \in \Sigma_0$ tel que

$$p_0(z) = p_0(\alpha(h)),$$

il existe un et un seul $h' \in \Sigma$ tel que

$$p(h') = p(h) \quad \text{et} \quad \alpha(h') = z.$$

L'espèce de structures $(\mathcal{C}, p_0, \Sigma_0)$ sera aussi désignée par le symbole $(\mathcal{C}, p, \Sigma)$.

Inversement, soient $\mathcal{C}$ et Σ deux catégories. Soit $(\mathcal{C}, p, \Sigma)$ un foncteur vérifiant la condition (E); on dira que Σ est une *catégorie au-dessus de* $\mathcal{C}$ *relativement à* p. On montre [3 *a*] que $p(\Sigma)$ est une sous-catégorie de $\mathcal{C}$ et que l'application

$$h \to (p(h), \alpha(h))$$

permet d'identifier Σ à la catégorie des hypermorphismes associée à l'espèce de structures $(\mathcal{C}, p_0, \Sigma_0)$ dans laquelle la loi de composition est définie par

$$(f, z) \to \beta(h)$$

si, et seulement si, il existe

$$h \in \Sigma, \quad f = p(h) \quad \text{et} \quad z = \alpha(h).$$

3. Espèces de structures dominées par une catégorie. — Nous désignerons par $\mathcal{M}_0$ une classe de classes contenant avec une classe toutes ses sous-classes. $\mathcal{M}_0$ s'identifie à la classe des unités de la catégorie $\mathcal{M}$ dont les éléments sont les triplets (M', f, M) tels que $M \in \mathcal{M}_0$, $M' \in \mathcal{M}_0$ et que f soit une surjection de M sur une sous-classe de M', la loi de composition étant définie par

$$(M'', f', M'_1).(M', f, M) = (M'', f'f, M) \quad \text{si, et seulement si,} \quad M'_1 = M',$$

où $f'f$ désigne la surjection :

$$x \to f'(f(x)) \quad \text{pour tout } x \in M.$$

Si $\bar{f} = (M', f, M)$, nous noterons aussi $f(x)$ par $\bar{f}(x)$.

Soit $(\mathcal{C}, p, \Sigma)$ une espèce de structures telle que $\overset{-1}{p}(e)$ appartienne à $\mathcal{M}_0$ pour tout $e \in p_0(\Sigma_0)$. Soit

$$f \in p(\Sigma), \quad e = \alpha(f) \quad \text{et} \quad e' = \beta(f).$$

Posons

$$F(f) = (\overset{-1}{p}(e'), \tilde{f}, \overset{-1}{p}(e)) \in \mathcal{M},$$

où

$$\tilde{f}(z) = fz \qquad \text{pour tout } z \text{ tel que} \quad p(z) = e;$$

$F(e)$ sera identifié avec $\overset{-1}{p}(e)$. Si f est un élément inversible de $p(\Sigma)$, l'application $\tilde{f}$ est une bijection de $F(e)$ sur $F(e')$. L'application $F : f \to F(f)$ pour tout $f \in p(\Sigma)$ est un foncteur de $\alpha(F) = p(\Sigma)$ vers $\mathcal{M}$ vérifiant l'axiome :

(A) Soient $e \in \alpha(F)_0$ et $e' \in \alpha(F)_0$; on a

$$F(e) \neq \emptyset \quad \text{(ensemble vide)};$$

si $e \neq e'$, on a

$$F(e) \cap F(e') = \emptyset.$$

De plus, le couple $(\mathcal{C}, F)$ détermine entièrement $(\mathcal{C}, p, \Sigma)$.

Inversement, soit $(\mathcal{C}, F)$ un couple tel que F soit un foncteur d'une sous-catégorie $\alpha(F)$ de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{M}$ vérifiant l'axiome (A). On montre [3 *a*] que la classe Σ_0 réunion des classes $F(e)$, où $e \in \alpha(F)_0$, est une espèce de structures au-dessus de $\mathcal{C}$, dans laquelle la loi de composition est définie par

$$(f, z) \to F(f)(z) \qquad \text{si, et seulement si,} \quad z \in F(\alpha(f)).$$

Nous dirons que $(\mathcal{C}, F)$ *est un couple définissant une espèce de structures*, à savoir l'espèce de structures Σ_0 ainsi construite.

Remarques. — 1° Soient $\mathcal{C}$ une catégorie, $\alpha(F)$ une sous-catégorie et $(\mathcal{M}, F, \alpha(F))$ un foncteur. Soit $\overline{F}$ le foncteur qui associe à $f \in \alpha(F)$ l'application

$$(\alpha(f), z) \to (\beta(f), F(f)(z)), \qquad \text{où} \quad z \in F(\alpha(f)).$$

Le couple $(\mathcal{C}, \overline{F})$ définit l'espèce de structures $(\mathcal{C}, p_0, \Sigma_0)$, où Σ_0 est la classe des couples (e, z) tels que $e \in \alpha(F)_0$ et $z \in F(e)$, et

$$p_0(e, z) = e.$$

2° Soit $(\mathcal{C}, F)$ un couple définissant une espèce de structures $(\mathcal{C}, p, \Sigma)$ tel que $\alpha(F)$ contienne $f \in \mathcal{C}$ si $\alpha(f) \in \alpha(F)$; ceci équivaut à dire qu'on s'est donné une loi de composition entre la catégorie $\mathcal{C}$ et la classe Σ_0 vérifiant les axiomes 1, 2, 3, 4 *a*, de la définition 1. On peut prolonger F en un foncteur $(\mathcal{M}, \overline{F}, \mathcal{C})$ défini par

$$\begin{array}{lll} \overline{F}(f) = F(f) & \text{pour tout} & f \in \alpha(F), \\ \overline{F}(e) = \emptyset & \text{pour tout} & e \in \mathcal{C}_0, \quad e \notin \alpha(F)_0, \\ \overline{F}(f') = \big(\overline{F}(\beta(f')), \emptyset, \emptyset\big) & \text{pour tout} & f' \notin \alpha(F). \end{array}$$

3° Soit $\mathcal{C}^{\bullet}$ une catégorie; le triplet $[\mathcal{C}^{\bullet}, \beta, \mathcal{C}]$ est une espèce de structures pour la loi de composition . ; soit $e \in \mathcal{C}^{\bullet}_0$; le triplet $\big(\mathcal{C}^{\bullet}, \beta, \overset{-1}{\alpha}(e)\big)$ est une sous-espèce de structures [3 *a*] de $[\mathcal{C}^{\bullet}, \beta, \mathcal{C}]$.

Soient $(\mathcal{C}^{\cdot}, F_e)$ le couple définissant l'espèce de structures $(\mathcal{C}^{\cdot}, \beta, \overset{-1}{\alpha}(e))$ et $\overline{F}_e$ le foncteur associé à F_e par la remarque 2. Un foncteur $(\mathcal{M}, G, \mathcal{C}^{\cdot})$ est dit représentable [2] s'il existe un $e \in \mathcal{C}^{\cdot}_0$ tel que G et $\overline{F}_e$ se déduisent l'un de l'autre par une équivalence naturelle. A tout couple $(\mathcal{C}, F)$ définissant une espèce de structures $[\mathcal{C}, p, \Sigma]$, on peut associer un foncteur représentable $\overline{F}$ de la manière suivante :

Soit a un élément quelconque n'appartenant pas à $\mathcal{C}$. Soit $\mathcal{C}'_1$ la classe des couples (z, a), où $z \in \Sigma_0$. Soit $\mathcal{C}'$ la classe réunion de $\mathcal{C}$, $\{a\}$ et $\mathcal{C}'_1$. Cette classe est une catégorie pour la loi de composition

$$(\gamma', \gamma) \to \gamma' \cdot \gamma$$

si, et seulement si, une des conditions suivantes est vérifiée :

(1) $\gamma \in \mathcal{C}$, $\gamma' \in \mathcal{C}$, $\alpha(\gamma') = \beta(\gamma)$. Alors $\gamma' . \gamma$ est le composé de γ' et γ dans $\mathcal{C}$;

(2) $\gamma' \in \mathcal{C}$, $\gamma = (z, a)$, $z \in F(\alpha(\gamma'))$; alors

$$\gamma' \cdot \gamma = (\gamma' z, a);$$

(3) $\gamma' = (z, a)$ et $\gamma = a$; alors

$$\gamma' \cdot \gamma = (z, a).$$

La remarque 2 permet de prolonger F en un foncteur $(\mathcal{M}, \overline{F}, \mathcal{C}')$; ce foncteur $\overline{F}$, identique à $(\mathcal{M}, \overline{F}_a, \mathcal{C}')$, est représentable.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et $(\mathcal{M}, \gamma, \mathcal{K})$ un foncteur.

Définition 3. — *On appellera* espèce de structures dominée par $(\gamma, \mathcal{K})$ *un couple* $(\mathcal{C}, F)$ *tel que* $(\mathcal{K}, F, \alpha(F))$ *soit un foncteur et que* $(\mathcal{C}, \gamma F)$ *définisse une espèce de structures; l'espèce de structures définie par* $(\mathcal{C}, \gamma F)$ *sera appelée* espèce de structures sous $(\mathcal{C}, F)$.

Nous reviendrons plus tard sur la notion d'espèce de structures dominée par une catégorie (§ III et IV). Pour l'instant, nous allons seulement en indiquer des cas particuliers.

Soit $\mathcal{F}$ la catégorie de tous les foncteurs $(\overline{\mathcal{S}}^{\cdot}, G, \mathcal{S}^{\cdot})$ tels que $(\overline{\mathcal{S}}, G, \mathcal{S}) \in \mathcal{M}$; soit $(\mathcal{M}, p_{\mathcal{F}}, \mathcal{F})$ le foncteur défini par

$$p_{\mathcal{F}}: \ (\overline{\mathcal{S}}^{\cdot}, G, \mathcal{S}^{\cdot}) \to (\overline{\mathcal{S}}, G, \mathcal{S}).$$

Définition 4. — *Une espèce de structures dominée par* $(p_{\mathcal{F}}, \mathcal{F})$ *sera appelée* espèce de morphismes.

Soit $(\mathcal{C}, p, \Sigma)$ une espèce de structures. Considérons les conditions suivantes :

a. $(\mathcal{C}, p, \Sigma)$ est l'espèce de structures sous une espèce de morphismes $(\mathcal{C}, F)$.

b. b_1 : Pour tout $e \in p(\Sigma_0)$, la classe $\overset{-1}{p}(e)$ est munie d'une structure de catégorie $(\overset{-1}{p}(e))^{\perp}$, que nous noterons $F(e)$;

b_2 : Soit $f \in p(\Sigma)$, $e = \alpha(f)$ et $e' = \beta(f')$; alors $(F(e'), \tilde{f}, F(e))$ est un foncteur $F(f)$.

c. c_1 : $(\Sigma_0)^{\perp}$ est une catégorie;

c_2 : Les conditions $(z', z) \in (\Sigma_0)^{\perp} \star (\Sigma_0)^{\perp}$ et $(f, z' \perp z) \in \Sigma$ entraînent

$$(f, z) \in \Sigma, \qquad (f, z') \in \Sigma \qquad \text{et} \qquad f(z' \perp z) = fz' \perp fz;$$

c_3 : Si $z_0 \in (\Sigma_0)^{\perp}_0$ et $(f, z_0) \in \Sigma$, on a

$$fz_0 \in (\Sigma_0)^{\perp}_0.$$

Proposition 1. — *Les conditions a, b et c sont équivalentes.*

Démonstration. — Les conditions *a* et *b* sont équivalentes par définition. Si elles sont vérifiées, la catégorie $(\Sigma_0)^{\perp}$ somme des catégories $F(e)$, où $e \in p(\Sigma_0)$, vérifie la condition *c*. Inversement, supposons la condition *c* vérifiée. Soient $z \in \Sigma_0$ et $z' \in \Sigma_0$. Si $z' \perp z$ est défini, $p(z' \perp z)\,(z' \perp z)$ est défini et, d'après c_2, on a

$$p(z' \perp z) = p(z') = p(z);$$

en particulier,

$$p(\alpha^{\perp}(z)) = p(\beta^{\perp}(z)) = p(z);$$

donc $\overset{-1}{p}(e)$ est une sous-catégorie de $(\Sigma_0)^{\perp}$ pour tout $e \in p(\Sigma_0)$. Soit $f \in p(\Sigma)$ tel que $\alpha(f) = e$; les conditions c_2 et c_3 signifient que l'application $\tilde{f}$ est un foncteur de $\overset{-1}{p}(e)$ vers $\overset{-1}{p}(\beta(f))$. Par suite, *b* est vérifié.

Corollaire. — *Si l'on suppose les conditions c_1 et c_2 vérifiées et si $p(\Sigma)$ (resp. $\Sigma^{\perp}_0$) est un groupoïde, la condition c_3 est aussi satisfaite.*

Démonstration. — Les conditions $(f, z_0) \in \Sigma$ et $z_0 \in (\Sigma_0)^{\perp}_0$ entraînent

$$fz_0 = f(z_0 \perp z_0) = fz_0 \perp fz_0.$$

Si $(\Sigma_0)^{\perp}$ est un groupoïde, il en résulte $fz_0 \in (\Sigma_0)^{\perp}_0$. Supposons que $p(\Sigma)$ soit un groupoïde; de la suite d'égalités

$$f^{-1}(fz_0) = f^{-1}(fz_0 \perp \alpha^{\perp}(fz_0)) = (f^{-1}.f)\,z_0 \perp f^{-1}(\alpha^{\perp}(fz_0)) = f^{-1}(\alpha^{\perp}(fz_0))$$

on déduit

$$fz_0 = \alpha^{\perp}(fz_0) \in (\Sigma_0)^{\perp}_0,$$

donc c_3 est vérifié.

Soit A une classe munie d'une relation d'ordre $<$; la classe des couples (z', z), où $z < z'$, est une catégorie pour la loi de composition entre couples

$$(z'', z'_1) \perp (z', z) = (z'', z) \qquad \text{si, et seulement si,} \quad z'_1 = z'.$$

Inversement, si $\mathcal{C}$ est une catégorie telle que deux éléments f et f' de $\mathcal{C}$ ayant même ensemble d'unités dans $\mathcal{C}$ soient identiques, la donnée de $\mathcal{C}$ définit sur $\mathcal{C}_0$ la relation d'ordre :

$z < z'$ si, et seulement si, il existe $f \in \mathcal{C}$ tel que

$$z = \alpha(f) \quad \text{et} \quad z' = \beta(f).$$

Nous dirons que la catégorie $\mathcal{C}$ *définit* alors *un ordre* sur $\mathcal{C}_0$.

Soit Ω_0 la classe des classes ordonnées $(A, <)$, où $A \in \mathcal{M}_0$; soit $\tilde{\Omega}$ la catégorie des triplets $((A', <), h, (A, <))$, où

$$(A, <) \in \Omega_0, \qquad (A', <) \in \Omega_0$$

et où h est une application de A dans A′ compatible avec les ordres de A et A′. Soit ω l'application

$$((A', <), h, (A, <)) \to (A', h, A);$$

$(\mathcal{M}, \omega, \tilde{\Omega})$ est un foncteur.

Définition 5. — *Une espèce de structures* $(\mathcal{C}, F)$ *dominée par* $(\omega, \tilde{\Omega})$ *sera appelée* espèce de structures ordonnée; *si de plus* $\mathcal{C}$ *définit un ordre sur* $\mathcal{C}_0$, *nous dirons que* $(\mathcal{C}, F)$ *est une* espèce de structures bi-ordonnée.

Soit $((\overline{A}, <), h, (A, <)) \in \tilde{\Omega}$; soit $\mathcal{A}$ (resp. $\overline{\mathcal{A}}$) la catégorie de couples définissant l'ordre de A (resp. de $\overline{A}$); soit $\bar{h}$ l'application

$$(z', z) \to (h(z'), h(z)), \qquad \text{où} \quad (z', z) \in \mathcal{A};$$

$(\overline{\mathcal{A}}, \bar{h}, \mathcal{A})$ est un foncteur et l'application η :

$$((\overline{A}, <), h, (A, <)) \to (\overline{\mathcal{A}}, \bar{h}, \mathcal{A})$$

est une équivalence de $\tilde{\Omega}$ sur une sous-catégorie pleine $\hat{\Omega}$ de $\mathcal{F}$ dont les unités sont des catégories $\mathcal{S}$ définissant un ordre sur $\mathcal{S}_0$. L'application

$$(\mathcal{C}, F) \to (\mathcal{C}, (\mathcal{F}, \eta, \tilde{\Omega}) F),$$

où $(\mathcal{C}, F)$ est une espèce de structures ordonnée, est une bijection de la classe des espèces de structures ordonnées sur la classe des espèces de morphismes $(\mathcal{C}, \hat{F})$ telles que

$$\hat{F}(\alpha(\hat{F})) \subset \hat{\Omega} \subset \mathcal{F}.$$

4. Rappel sur les catégories d'homomorphismes.

Définition 6. — *Soient* $\mathcal{C}$ *et* $\mathcal{H}$ *deux catégories; on dit* [3a] *que* $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$ *est une* catégorie d'homomorphismes *si les conditions suivantes sont vérifiées:*

(1) $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H})$ *est un foncteur;*

(2) *$\mathcal{S}$ est une sous-catégorie de $\mathcal{H}$ contenant $\mathcal{H}_0$;*

(3) *$(\mathcal{C}, p', \mathcal{S})$ est une espèce de structures, où p' désigne la restriction de p à $\mathcal{S}$;*

(4) *Soient $h \in \mathcal{H}$ et $h' \in \mathcal{H}$; les relations*

$$\alpha(h) = \alpha(h'), \qquad \beta(h) = \beta(h') \qquad \text{et} \qquad p(h) = p(h')$$

entraînent $h = h'$.

Soit $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$ une catégorie d'homomorphismes. Un élément h de $\mathcal{H}$ s'identifie, en vertu de la condition (4), à un triplet (S', f, S), où

$$S = \alpha(h) \in \mathcal{H}_0, \qquad S' = \beta(h) \in \mathcal{H}_0 \qquad \text{et} \qquad f = p(h) \in \mathcal{C}.$$

C'est le plus souvent sous la forme d'un tel triplet que nous représenterons un élément de $\mathcal{H}$. Remarquons que nous identifions ainsi $\mathcal{H}$ à une sous-catégorie de la catégorie induite $p_0^*(\mathcal{C})$ dont les éléments sont les triplets (S', f, S) tels que

$$S \in \mathcal{H}_0, \qquad S' \in \mathcal{H}_0, \qquad f \in \mathcal{C}, \qquad \alpha(f) = p(S) \qquad \text{et} \qquad \beta(f) = p(S').$$

Un élément de $\mathcal{S}$ étant entièrement déterminé par la donnée de $\alpha(h)$ et de $p(h)$, nous le représenterons, soit sous la forme $(\beta(h), p(h), \alpha(h))$, soit sous la forme $(p(h), \alpha(h))$. Si $\mathcal{S}$ est le groupoïde des éléments inversibles de $\mathcal{H}$, alors $\mathcal{H}$ est une espèce de structures au-dessus de $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ pour la loi de composition

$$((\bar{f}', \bar{f})), h) \rightarrow \bar{f}'.h.\bar{f}^{-1}$$

si, et seulement si,

$$\alpha(\bar{f}) = \alpha(h) \quad \text{et} \quad \alpha(\bar{f}') = \beta(h), \qquad \text{où} \quad h \in \mathcal{H}, \qquad \bar{f} \in \mathcal{S}, \quad \bar{f}' \in \mathcal{S}.$$

Soit $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$ une catégorie d'homomorphismes; soient $\mathcal{S}_\gamma$ et $\mathcal{C}_\gamma$ les groupoïdes des éléments inversibles de $\mathcal{S}$ et de $\mathcal{C}$ respectivement. Si $p(\mathcal{S}_\gamma)$ est un sous-groupoïde saturé [3 *a*] de $\mathcal{C}$, c'est-à-dire si les conditions

$$f \in \mathcal{C}_\gamma \quad \text{et} \quad \alpha(f) \in p(\mathcal{S}_\gamma) \qquad \text{entraînent} \quad f \in p(\mathcal{S}_\gamma),$$

nous dirons que $\mathcal{H}$ est *saturé au-dessus de $\mathcal{C}$*.

En particulier, soit $(\mathcal{M}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$ une catégorie d'homomorphismes telle que $\mathcal{M}$ soit la catégorie définie au nº 2. Soit $h \in \mathcal{H}$; l'élément $p(h)$ est, par définition, une application $(p(\beta(h)), g, p(\alpha(h)))$, où g est une surjection. Comme la donnée de $\alpha(h)$, de $\beta(h)$ et de g détermine entièrement $p(h)$, nous représenterons simplement h par le triplet $(\beta(h), g, \alpha(h))$ [au lieu de $(\beta(h), p(h), \alpha(h))$]. Si h est tel que

$$p(\alpha(h)) \subset p(\beta(h))$$

et si $p(h)$ est l'injection canonique de $p(\alpha(h))$ dans $p(\beta(h))$ nous écrirons h sous la forme $(\beta(h), \iota, \alpha(h))$, c'est-à-dire ι désigne l'application identique de $p(\alpha(h))$.

Exemples. — 1° Soit $(\mathcal{M}, p_{\mathcal{F}}, \mathcal{F})$ le foncteur défini au n° 2; soit $\mathcal{F}_\gamma$ le groupoïde des éléments inversibles de $\mathcal{F}$ (équivalences de foncteurs); $(\mathcal{M}, p_{\mathcal{F}}, \mathcal{F}, \mathcal{F}_\gamma)$ est une catégorie d'homomorphismes.

2° Soit $\mathcal{T}_0$ la classe des topologies (ou métatopologies avec la terminologie de [3 *b*]) sur les classes $M \in \mathcal{M}_0$; soit $\tilde{\mathcal{T}}$ la catégorie des applications continues (S', f, S) de S dans S′, où S est une topologie sur la classe M et S′ une topologie sur M′. Soit θ le foncteur

$$(S', f, S) \to (M', f, M).$$

Soit $\mathcal{T}$ le groupoïde des éléments inversibles de $\tilde{\mathcal{T}}$ (homéomorphismes); $(\mathcal{M}, \theta, \tilde{\mathcal{T}}, \mathcal{T})$ est une catégorie d'homomorphismes.

3° Soit $(\mathcal{M}, \omega, \tilde{\Omega})$ le foncteur défini au n° 2; soit Ω le groupoïde des éléments inversibles de $\tilde{\Omega}$ (isomorphismes entre classes ordonnées); $(\mathcal{M}, \omega, \tilde{\Omega}, \Omega)$ est une catégorie d'homomorphismes.

4° A toute catégorie $\mathcal{C}$ correspond la catégorie d'homomorphismes $(\mathcal{C}, \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}, \mathcal{C}, \mathcal{C})$, où $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ désigne le foncteur identique de $\mathcal{C}$.

5. Sous-structures. — Soit $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$ une catégorie d'homomorphismes telle que $\mathcal{S}$ contienne le groupoïde Γ des éléments inversibles de $\mathcal{H}$.

Dans $\mathcal{H}_0$, considérons la relation

$$s \rho s' \quad \text{si, et seulement si,} \quad (s', p(s), s) \in \mathcal{H}.$$

Cette relation entraîne évidemment $p(s) = p(s')$.

Proposition 2. — *ρ est une relation d'ordre dans $\mathcal{H}_0$ et $(\mathcal{C}, p, \Gamma)$ est l'espèce de structures sous l'espèce de structures ordonnée $(\mathcal{C}, F)$ telle que*

$$F(e) = (\overset{-1}{p}(e), \rho_e) \quad \textit{pour tout} \quad e \in \alpha(F)_0,$$

où ρ_e est la relation d'ordre induite par ρ sur $\overset{-1}{p}(e)$.

Démonstration. — Les conditions $s \rho s'$ et $s' \rho s''$ entraînent

$$(s'', p(s'), s') \cdot (s', p(s), s) = (s'', p(s), s) \in \mathcal{H}, \qquad \text{d'où} \qquad s \rho s''.$$

Supposons $s \rho s'$ et $s' \rho s$; on a

$$(s, p(s'), s') \cdot (s', p(s), s) = (s, p(s), s) = s$$

et

$$(s', p(s), s) \cdot (s, p(s'), s') = s';$$

par suite,

$$(s', p(s), s) \in \Gamma.$$

Comme $(\mathcal{C}, p, \Gamma)$ est une espèce de structures, des égalités

$$\alpha(s', p(s), s) = s \quad \text{et} \quad p(s', p(s), s) = p(s)$$

on déduit $(s', p(s), s) = s$; donc $s' = s$ et ρ est une relation d'ordre; la catégorie de couples définissant ρ s'identifie à la sous-catégorie $\mathcal{H}_\rho$ de $\mathcal{H}$ formée des éléments $(s', p(s), s)$ en identifiant (s', s) avec $(s', p(s), s)$. Les relations

$$(s', p(s), s) \in \mathcal{H}_\rho, \qquad f \in p(\Gamma) \qquad \text{et} \qquad \alpha(f) = p(s)$$

assurent l'existence de $(\bar{s}, f, s) \in \Gamma$ et de $(\bar{s}', f, s') \in \Gamma$; on a

$$(\bar{s}', f, s').(s', p(s), s).(s, f^{-1}, \bar{s}) = (\bar{s}', f.p(s).f^{-1}, \bar{s}) = (\bar{s}', p(\bar{s}), \bar{s}) \in \mathcal{H}.$$

Par conséquent, $p(\Gamma)$ opère sur $\mathcal{H}_\rho$, la loi de composition étant

$$(f, (s', p(s), s)) \to (\bar{s}', p(\bar{s}), \bar{s}) \qquad \text{si, et seulement si,} \quad \alpha(f) = p(s).$$

$(p(\Gamma), p, \mathcal{H}_\rho)$ est l'espèce de structures sous une espèce de morphismes et la proposition résulte de la fin du n° 2.

Supposons désormais que $\mathcal{C}$ soit une catégorie inductive (au sens du paragraphe II, n° 6, sens un peu plus général que celui défini dans [3 c]). Si $g \in \mathcal{C}$ et $f \in \mathcal{C}$, le pseudo-produit dans $\mathcal{C}$ des éléments g et f qui est toujours défini (*voir* § II, prop. 22) sera désigné par gf.

Considérons dans $\mathcal{H}_0$ la relation

$$s \bar{\rho} S \qquad \text{si, et seulement si,} \quad p(s) < p(S) \quad \text{et} \quad (S, p(S)\, p(s), s) \in \mathcal{H};$$

les relations induites par $\bar{\rho}$ et ρ sur $\overset{-1}{p}(e)$ sont identiques, pour tout $e \in p(\mathcal{H}_0)$. La relation $p(s) < p(S)$ entraîne

$$\alpha(p(S)\, p(s)) = p(s);$$

si, de plus, $(S, p(S)\, p(s), s) \in \mathcal{H}$, alors on a aussi

$$\beta(p(S)\, p(s)) = p(S).$$

Proposition 3. — *$\bar{\rho}$ est une relation d'ordre dans $\mathcal{H}_0$; si $s\, \bar{\rho}\, S$, s est un sous-objet* [5] *de* S *dans $\mathcal{H}$.*

Démonstration. — Nous supposerons $s\, \bar{\rho}\, S$. Si, de plus, $S\, \bar{\rho}\, s$, alors

$$p(S) = p(s), \qquad \text{d'où} \qquad s \rho S \text{ et } S \rho s,$$

c'est-à-dire $s = S$, d'après la proposition 2. Supposons $s'\, \bar{\rho}\, s$; des relations

$$k = (p(S)\, p(s)).(p(s)\, p(s')) < p(S)\, p(s'),$$
$$\alpha(k) = p(s') \qquad \text{et} \qquad \beta(k) = p(S)$$

résulte

$$k = p(S)\, p(s'), \qquad (S, p(S)\, p(s'), s') \in \mathcal{H} \qquad \text{et} \qquad s'\, \bar{\rho}\, S.$$

Soient $\bar{g} = (s, g, S')$ et $\bar{g}' = (s, g', S')$ tels que

$$(S, p(S)\, p(s), s) . \bar{g} = (S, p(S)\, p(s), s) . \bar{g}'.$$

Des relations

$$(p(S)\, p(s)) . g = (p(S)\, p(s)) . g',$$
$$g < (p(S)\, p(s)) . g, \qquad g' < (p(S)\, p(s)) . g', \qquad \alpha(g) = \alpha(g'), \qquad \beta(g) = \beta(g')$$

on déduit $g = g'$. Par suite, $\bar{g} = \bar{g}'$, ce qui signifie que s est un sous-objet de S dans $\mathcal{H}$.

La notion de sous-structure que nous allons maintenant définir précise la notion de sous-objet d'une catégorie.

Définition 7. — *Soit* $S \in \mathcal{H}_0$; *on dira que* $s \in \mathcal{H}_0$ *est une* sous-structure de S dans $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$, *et l'on écrira* $s \underset{p}{\propto} S$, *si les conditions suivantes sont vérifiées :*

(1) *On a* $p(s) < p(S)$ *et* $(S, p(S)\, p(s), s) \in \mathcal{H}$;

(2) *Soit* $(S, g, S') \in \mathcal{H}$ *tel que*

$$\alpha(p(s)\, g) = \alpha(g) \quad \text{et} \quad \beta(p(s)\, g) = p(s).$$

Alors on a

$$(s, p(s)\, g, S') \in \mathcal{H}.$$

Si $s \underset{p}{\propto} S$, *on écrira aussi*

$$(S, p(S)\, p(s), s) = S \underset{p}{\infty} s$$

et l'on dira que $S \underset{p}{\infty} s$ *est une* p-injection. *Soit* $H_{\underset{p}{\propto}}$ *la classe des* p-*injections.*

Si aucune confusion n'est possible, on dira seulement que s est une sous-structure de S dans $\mathcal{H}$ et l'on écrira $s \propto S$ et $S \infty s$ au lieu de $s \underset{p}{\propto} S$ et $S \underset{p}{\infty} s$.

Proposition 4. — *Soient* $s \in \mathcal{H}_0$ *et* $S \in \mathcal{H}_0$; *on a* $s \underset{p}{\propto} S$ *si, et seulement si, les conditions suivantes sont vérifiées :*

(1′) $s\, \bar{\rho}\, S$ *dans* $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$;

(2′) *La condition* $(S, (p(S)\, p(s)) . g', S') \in \mathcal{H}$ *entraîne* $(s, g', S') \in \mathcal{H}$.

Démonstration. — Supposons $s \underset{p}{\propto} S$; la condition (1) de la définition 7 signifie $s\, \bar{\rho}\, S$ dans $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$. Soit

$$(S, p(S)\, p(s) . g', S') \in \mathcal{H}.$$

Montrons que les éléments g' et $g'_1 = p(s)\, (p(S)\, p(s) . g')$ sont égaux. En effet, on a

$$p(s) < p(S)\, p(s), \qquad g' = p(s) . g' < (p(S)\, p(s))\, g'$$

et

$$g' = p(s) . g' < p(s)\, (p(S)\, p(s)\; g');$$

par ailleurs,

$$\alpha(g'_1) < \alpha(g') \quad \text{et} \quad \beta(g'_1) < p(s) = \beta(g'),$$

d'où

$$\alpha(g'_1) = \alpha(g') = p(S') \quad \text{et} \quad \beta(g'_1) = \beta(g') = p(s).$$

Puisque $(\mathcal{C}, <)$ est une catégorie inductive, les relations

$$g' < g'_1, \quad \alpha(g') = \alpha(g'_1) \quad \text{et} \quad \beta(g') = \beta(g'_1)$$

entraînent $g' = g'_1$. Il résulte alors de la condition (2) de la définition 7 qu'on a $(s, g', S') \in \mathcal{H}$, donc (2') est vérifiée. Inversement, supposons les conditions (1') et (2') vérifiées; soit $(S, g, S') \in \mathcal{H}$ tel que

$$\alpha(p(s)g) = \alpha(g) \quad \text{et} \quad \beta(p(s)g) = p(s).$$

On obtient $g = (p(S)\,p(s)).(p(s)\,g)$, en utilisant les relations

$$(p(S)\,p(s)).(p(s)\,g) < g, \quad \alpha((p(S)\,p(s)).(p(s)\,g)) = \alpha(g)$$

et

$$\beta(g) = \beta((p(S)\,p(s)).(p(s)\,g)) = p(S).$$

De la condition (2') on déduit donc

$$(s, p(s)g, S') \in \mathcal{H}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad s \underset{p}{\propto} S.$$

Exemples. — 1° Les sous-structures de S dans $(\mathfrak{M}, \theta, \tilde{\mathfrak{T}}, \mathfrak{T})$ sont les topologies induites par S sur les sous-classes de $\theta(S)$. Soit $\tilde{\mathfrak{T}}_u$ la sous-catégorie de $\tilde{\mathfrak{T}}$ formée des applications continues ouvertes d'un espace topologique dans un autre; soit θ_u la restriction de θ à $\tilde{\mathfrak{T}}_u$; $(\mathfrak{M}, \theta_u, \tilde{\mathfrak{T}}_u, \mathfrak{T})$ est une catégorie d'homomorphismes. Les sous-structures de S dans $(\mathfrak{M}, \theta_u, \tilde{\mathfrak{T}}_u, \mathfrak{T})$ sont les topologies induites par S sur un ouvert de S, c'est-à-dire les éléments plus petits que S pour la relation d'ordre considérée dans [3 *c*] sur $\tilde{\mathfrak{T}}$.

2° Les sous-structures de $\mathcal{C}^{\perp}$ dans $(\mathfrak{M}, p_{\mathfrak{F}}, \mathfrak{F}, \mathfrak{F}_{\gamma})$ sont les sous-catégories de $\mathcal{C}^{\perp}$ (*voir* § II, prop. 9).

3° Les sous-structures de $(A, <)$ dans $(\mathfrak{M}, \omega, \tilde{\Omega}, \Omega)$ sont les sous-classes de A munies de l'ordre induit par $<$.

4° Dans $(\mathcal{C}, \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}, \mathcal{C}, \mathcal{C})$, on a

$$s \propto S \quad \text{si, et seulement si,} \quad s < S \text{ dans } \mathcal{C} \quad \text{et} \quad \beta(Ss) = S.$$

Si les relations $s < S$ et $s \propto S$ sont équivalentes, $\mathcal{C}$ est une catégorie *inductive complètement régulière à droite.* Dans ce cas, la condition $s < \alpha(f)$ entraîne $\beta(fs) = \beta(f)$.

5° Si $s \underset{p}{\propto} S$, on a $p(s) \propto p(S)$ dans $(\mathcal{C}, \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}, \mathcal{C}, \mathcal{C})$.

THÉORÈME 1. — *Dans* $\mathcal{H}_0$ *la relation* $s \underset{p}{\propto} \mathrm{S}$ *est une relation d'ordre. Soient* $s \in \mathcal{H}_0$, $s' \in \mathcal{H}_0$ *et* $\mathrm{S} \in \mathcal{H}_0$; *les conditions*

$$s \underset{p}{\propto} \mathrm{S}, \qquad s' \underset{p}{\propto} \mathrm{S} \quad (\textit{resp.}\ s' \bar{\rho}\, \mathrm{S})$$

et

$$p(s') \propto p(s) \quad \textit{dans}\ (\mathcal{C}, \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}, \mathcal{C}, \mathcal{C})$$

entraînent

$$s' \underset{p}{\propto} s \quad (\textit{resp.}\ s' \bar{\rho}\, s).$$

Démonstration. — $\bar{\rho}$ étant une relation d'ordre, si $s \propto \mathrm{S}$ et $\mathrm{S} \propto s$, on a $s = \mathrm{S}$. Supposons $s_1 \propto s$ et $s \propto \mathrm{S}$; alors $s_1 \bar{\rho}\, \mathrm{S}$. Montrons que le couple (S, s_1) vérifie la condition (2′) de la proposition 4. Soit

$$\bar{g} = (\mathrm{S}, p(\mathrm{S})\, p(s_1) . g', \mathrm{S}') \in \mathcal{H}.$$

Les éléments $p(\mathrm{S})\, p(s_1)$ et $(p(\mathrm{S})\, p(s)) . (p(s)\, p(s_1))$ sont égaux, car ils sont majorés par $p(\mathrm{S})$, ont même source $p(s_1)$ et même but $p(\mathrm{S})$; par suite

$$\bar{g} = (\mathrm{S}, (p(\mathrm{S})\, p(s)) . (p(s)\, p(s_1) . g'), \mathrm{S}') \in \mathcal{H}$$

et, puisque $s \propto \mathrm{S}$,

$$\bar{g}' = (s, (p(s)\, p(s_1)) . g', \mathrm{S}') \in \mathcal{H};$$

comme $s_1 \propto s$, il en résulte

$$(s_1, g', \mathrm{S}) \in \mathcal{H}, \qquad \text{c'est-à-dire} \quad s_1 \propto \mathrm{S}.$$

Supposons $s \propto \mathrm{S}$, $s' \bar{\rho}\, \mathrm{S}$ et $p(s') \propto p(s)$ dans $(\mathcal{C}, \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}, \mathcal{C}, \mathcal{C})$. On a

$$j = (\mathrm{S}, p(\mathrm{S})\, p(s'), s') \in \mathcal{H};$$

des relations

$$p(s') < p(s) \qquad \text{et} \qquad \beta(p(s)\, p(s')) = p(s),$$

on déduit que les éléments $p(\mathrm{S})\, p(s')$ et $(p(\mathrm{S})\, p(s)) . (p(s)\, p(s'))$ sont égaux, car ils sont majorés par $p(\mathrm{S})$, ont même source $p(s')$ et même but $p(\mathrm{S})$. Par conséquent,

$$j = (\mathrm{S}, (p(\mathrm{S})\, p(s)) . (p(s)\, p(s')), s')$$

et, en vertu de la proposition 4,

$$(s, p(s)\, p(s'), s') \in \mathcal{H}, \qquad \text{d'où} \qquad s' \bar{\rho}\, s.$$

Supposons, de plus, $s' \propto \mathrm{S}$; soit

$$\bar{g}' = (s, p(s)\, p(s') . g', \mathrm{S}') \in \mathcal{H}.$$

On trouve

$$\begin{aligned} \bar{g} = (\mathrm{S}, p(\mathrm{S})\, p(s), s) . \bar{g}' &= (\mathrm{S}, (p(\mathrm{S})\, p(s)) . (p(s)\, p(s')) . g', \mathrm{S}') \\ &= (\mathrm{S}, (p(\mathrm{S})\, p(s')) . g', \mathrm{S}') \in \mathcal{H}. \end{aligned}$$

La proposition 4 entraîne donc

$$(s', g', S') \in \mathcal{H} \quad \text{et} \quad s' \propto S.$$

Corollaire 1. — *Les conditions* $s \underset{p}{\propto} S$, $s' \underset{p}{\propto} S$ *et* $p(s) = p(s')$ *entraînent* $s = s'$.

En effet, d'après le théorème 1, ces conditions entraînent

$$s \propto s' \quad \text{et} \quad s' \propto s, \qquad \text{d'où} \qquad s = s'.$$

Corollaire 2. — *Soit* $s \underset{p}{\propto} S$; *alors, pour la relation* ρ, *s est le plus grand élément de la classe des structures* s' *telles qu'on ait*

$$s' \bar{\rho} S \qquad et \qquad p(s') = p(s).$$

Définition 8. — *Soient* $\bar{h} \in \mathcal{H}$ *et* $\bar{h}' \in \mathcal{H}$; *on dira que* $\bar{h}'$ *est* un sous-homomorphisme de $\bar{h}$ dans $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$, *et l'on écrira* $\bar{h}' \underset{p}{\propto} \bar{h}$ *ou* $\bar{h}' \propto \bar{h}$, *si les conditions suivantes sont vérifiées :*

$$\alpha(\bar{h}') \propto \alpha(\bar{h}), \qquad \beta(\bar{h}') \propto \beta(\bar{h}) \qquad et \qquad p(\bar{h}') < p(\bar{h}).$$

Proposition 5. — *Dans* $\mathcal{H}$, *la relation* $\bar{h}' \propto \bar{h}$ *est une relation d'ordre vérifiant les conditions suivantes :*

(1) *Si* $\bar{h}' \propto \bar{h}$, $\alpha(\bar{h}') = \alpha(\bar{h})$ *et* $\beta(\bar{h}') = \beta(\bar{h})$, *alors* $\bar{h} = \bar{h}'$;

(2) $\bar{h}' \propto \bar{h}$ *entraîne* $p(\bar{h}') \propto p(\bar{h})$ *dans* $(\mathcal{C}, \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}, \mathcal{C}, \mathcal{C})$; *si de plus,* $p(\bar{h}) = p(\bar{h}')$, *alors* $\bar{h} = \bar{h}'$;

(3) *Les conditions* $(\bar{h}_1, \bar{h}) \in \mathcal{H} \star \mathcal{H}$, $(\bar{h}'_1, \bar{h}') \in \mathcal{H} \star \mathcal{H}$, $\bar{h}' \propto \bar{h}$ *et* $\bar{h}'_1 \propto \bar{h}_1$ *entraînent* $\bar{h}'_1 . \bar{h}' \propto \bar{h}_1 . \bar{h}$;

(4) *Les conditions :* $\bar{h}' \underset{p}{\propto} \bar{h}$, $\bar{h}'' \underset{p}{\propto} \bar{h}$ *et* $p(\bar{h}'') \propto p(\bar{h}')$ *dans* $(\mathcal{C}, \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}, \mathcal{C}, \mathcal{C})$ *entraînent* $\bar{h}'' \underset{p}{\propto} \bar{h}'$.

Les conditions (1) et (3) signifient que $(\mathcal{H}, \propto)$ est une catégorie ordonnée (*voir* § II, définition 18). La condition (2) signifie que p appartient à $\tilde{\Omega}'$ (*voir* § II, n° 6), c'est-à-dire (§ IV) que $(\mathcal{H}, \propto)$ est une catégorie ordonnée au-dessus de $(\mathcal{C}, <)$.

Corollaire. — *Si* $\mathcal{C}$ *est complètement régulière à droite et si pour tout* $s \in \mathcal{H}_0$ *la classe des éléments* $p(s')$, *où* $s' \underset{p}{\propto} s$, *est une sous-classe inductive de* $\mathcal{C}_0$, *alors* $(\mathcal{H}, \propto)$ *est une catégorie inductive au-dessus de* $(\mathcal{C}, <)$.

Proposition 6. — *Supposons*

$$\bar{h} \in \Gamma, \qquad \bar{h}' \in \Gamma, \qquad \alpha(\bar{h}') \underset{p}{\propto} \alpha(\bar{h}) \qquad et \qquad p(\bar{h}') < p(\bar{h});$$

alors on a aussi $\beta(\bar{h}') \underset{p}{\propto} \beta(\bar{h})$ *et, par suite,* $\bar{h}' \underset{p}{\propto} \bar{h}$.

Démonstration. — Soient

$$\bar{h} = (S_1, h, S) \in \Gamma \quad \text{et} \quad \bar{h}' = (s_1, h', s) \in \Gamma$$

tels que $h' < h$ et $j = (S, p(S)\, p(s), s) \in \mathcal{H}$; on a

$$p(\bar{h}.j.\bar{h}'^{-1}) = h.(p(S)\, p(s)).h'^{-1} < p(S_1)\, p(s_1),$$
$$\alpha(p(\bar{h}.j.\bar{h}'^{-1})) = p(s_1) \quad \text{et} \quad \beta(p(\bar{h}.j.\bar{h}'^{-1})) = p(S_1),$$

d'où

$$p(\bar{h}.j.\bar{h}'^{-1}) = p(S_1)\, p(s_1) \quad \text{et} \quad (S_1, p(S_1)\, p(s_1), s_1) \in \mathcal{H}.$$

Supposons, de plus, $s \propto S$; soit

$$\bar{g} = (S_1, (p(S_1)\, p(s_1)).g', S') \in \mathcal{H}.$$

Les éléments $h^{-1}.(p(S_1)\, p(s_1))$ et $(p(S)\, p(s)).h'^{-1}$ sont égaux, car ils sont majorés par h^{-1}, ont même source $p(s_1)$ et même but $p(S)$. Par suite,

$$\bar{h}^{-1}.\bar{g} = (S, (p(S)\, p(s)).(h'^{-1}.g'), S') \in \mathcal{H}$$

et il résulte de la proposition 4 qu'on a

$$\bar{g}' = (s, h'^{-1}.g', S') \in \mathcal{H};$$

par conséquent,

$$\bar{h}'.\bar{g}' = (s_1, g', S') \in \mathcal{H} \quad \text{et} \quad s_1 \propto S_1.$$

Proposition 7. — *Soient*

$$\bar{h} = (s_1, h, s) \in \mathcal{H}, \quad s' \underset{p}{\propto} s \quad et \quad s'_1 \underset{p}{\propto} s_1.$$

S'il existe $h' \in \mathcal{C}$ tel que

$$h' < h, \quad \alpha(h') = p(s') \quad et \quad \beta(h') = p(s'_1),$$

on a

$$\bar{h}' = (s'_1, h', s') \in \mathcal{H} \quad et \quad \bar{h}' \underset{p}{\propto} \bar{h}.$$

Si de plus $\bar{h}$ et h' sont inversibles, alors $\bar{h}' \in \Gamma$.

Démonstration. — On a

$$\bar{h}.\left(s \underset{p}{\infty} s'\right) = (s_1, h.(p(s)\, p(s')), s') \in \mathcal{H};$$

les éléments $h.(p(s)\, p(s'))$ et $p(s_1)\, p(s'_1).h'$ sont égaux, car ils sont majorés par h, ont même source $p(s')$ et même but $p(s_1)$; par suite,

$$\bar{h}.\left(s \underset{p}{\infty} s'\right) = (s_1, (p(s_1)\, p(s'_1)).h', s') \in \mathcal{H}$$

et, en vertu de la proposition 4, on trouve

$$\bar{h}' = (s'_1, h', s') \in \mathcal{H}.$$

Si, de plus, $\bar{h} \in \Gamma$ et h' est inversible, on a aussi $(s', h'^{-1}, s'_1) \in \mathcal{H}$, d'où

$$\bar{h}' \in \Gamma.$$

Soit $\boxdot\mathcal{C}$ la catégorie longitudinale des quatuors de $\mathcal{C}$ (*voir* § II, nº 5), c'est-à-dire la classe des quadruplets $(g_1, f_1, f, g) \in \mathcal{C}^4$ tels que $g_1.f = f_1.g$, munie de la multiplication

$$(g'_1, f'_1, f', g') \boxdot (g_1, f_1, f, g) = (g'_1, f'_1.f_1, f'.f, g)$$

si, et seulement si, $g' = g_1$.

Proposition 8. — *Soient*

$$h \in \mathcal{C}, \quad h' \in \mathcal{C}, \quad \alpha(h) = s, \quad \alpha(h') = s', \quad \beta(h) = s_1 \quad \textit{et} \quad \beta(h') = s'_1;$$

les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) *$h' \propto h$ dans $(\mathcal{C}, \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}, \mathcal{C}, \mathcal{C})$;*

(2) *$h' < h$ dans $\mathcal{C}$, $\beta(ss') = s$ et $\beta(s_1 s'_1) = s_1$;*

(3) *$s' < s$, $s'_1 < s_1$ et $(h, s_1 s'_1, ss', h') \in \boxdot\mathcal{C}$.*

En effet, les conditions (1) et (2) sont équivalentes d'après ce qui précède. Si (2) est vérifié, les éléments $h.ss'$ et $s_1 s'_1.h'$ sont égaux, car ils sont majorés par h, ont même source s' et même but s_1; par suite, (3) est vérifié. Si la condition (3) est satisfaite, on a

$$s' \propto s \quad \text{et} \quad s'_1 \propto s_1 \qquad \text{puisque} \quad \beta(ss') = s \quad \text{et} \quad \beta(s_1 s'_1) = s_1.$$

De plus,

$$s'_1 < s_1 s'_1 \quad \text{et} \quad ss' < s, \qquad \text{d'où} \qquad h' < s_1 s'_1.h' = h.ss' < h.$$

Si $h' \propto h$ dans $(\mathcal{C}, \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}, \mathcal{C}, \mathcal{C})$, nous désignerons par $h \boxed{\propto} h'$ le quatuor $(h, \beta(h)\beta(h'), \alpha(h)\alpha(h'), h')$. La classe $\mathcal{U}$ des quatuors $h \boxed{\propto} h'$ est une sous-catégorie de $\boxdot\mathcal{C}$; soit $\mathcal{U}'$ la sous-catégorie de $\mathcal{U}$ formée des quatuors $h \boxed{\propto} h'$ tels que h' et h soient inversibles.

Soit $\boxdot\mathcal{H}$ la catégorie longitudinale des quatuors de $\mathcal{H}$ et $\square p$ le foncteur

$$(g_1, f_1, f, g) \rightarrow (p(g_1), p(f_1), p(f), p(g)) \quad \text{de } \boxdot\mathcal{H} \text{ vers } \boxdot\mathcal{C};$$

$(\boxdot\mathcal{C}, \square p, \boxdot\mathcal{H}, \bar{\Gamma}')$ est une catégorie d'homomorphismes, où $\bar{\Gamma}'$ est le groupoïde des éléments inversibles de $\boxdot\mathcal{H}$. Pour qu'un quadruplet $\bar{G} = (\bar{g}_1, \bar{f}_1, \bar{f}, \bar{g})$ appartienne à $\boxdot\mathcal{H}$, il faut et il suffit qu'on ait

$$\alpha(\bar{f}) = \alpha(\bar{g}), \qquad \beta(\bar{f}) = \alpha(\bar{g}_1), \qquad \alpha(\bar{f}_1) = \beta(\bar{g}) \qquad \text{et} \qquad \beta(\bar{f}_1) = \beta(\bar{g}_1)$$

et que $\square p(\bar{G})$ soit un quatuor; en effet, les éléments $\bar{g}_1.\bar{f}$ et $\bar{f}_1.\bar{g}$ sont alors égaux, puisqu'ils ont même image par p, même source et même but.

Soit $\overline{\mathcal{U}}$ la sous-catégorie de $\square\square\,\overline{\mathcal{H}}$ formée des quatuors

$$\overline{\mathrm{H}} = \left(\overline{h},\ s_1 \underset{p}{\infty} s'_1,\ s \underset{p}{\infty} s',\ \overline{h}'\right)$$

tels que $s' \underset{p}{\propto} s$ et $s'_1 \underset{p}{\propto} s_1$. Soit $\overline{\mathcal{U}}'$ la sous-catégorie de $\overline{\mathcal{U}}$ formée des quatuors de $\overline{\mathcal{U}}$ tels que $\overline{h} \in \Gamma$ et $\overline{h}' \in \Gamma$.

Proposition 9. — *On a $\overline{h}' \propto \overline{h}$ dans $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$ si, et seulement si, il existe*

$$\overline{\mathrm{H}} = \left(\overline{h},\ \beta(\overline{h}) \underset{p}{\infty} \beta(\overline{h}'),\ \alpha(\overline{h}) \underset{p}{\infty} \alpha(\overline{h}'),\ \overline{h}'\right) \in \overline{\mathcal{U}};$$

dans ce cas, $\square\, p\left(\overline{\mathrm{H}}\right) \in \mathcal{U}$.

Démonstration. — Si $\overline{h}' \underset{p}{\propto} \overline{h}$, on a

$$\alpha(\overline{h}') \propto \alpha(\overline{h}), \qquad \beta(\overline{h}') \propto \beta(\overline{h}) \qquad \text{et} \qquad p(\overline{h}') < p(\overline{h}),$$

par suite, $\square\, p\left(\overline{\mathrm{H}}\right)$ est un quatuor et $\overline{\mathrm{H}} \in \overline{\mathcal{U}}$. Inversement, si $\overline{\mathrm{H}} \in \overline{\mathcal{U}}$, on trouve $\square\, p\left(\overline{\mathrm{H}}\right) \in \mathcal{U}$ en vertu de la condition (3) de la proposition 8; il en résulte $p\left(\overline{h}'\right) < p\left(\overline{h}\right)$, donc $\overline{h}' \propto \overline{h}$ dans $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$.

Si $\overline{h}' \propto \overline{h}$ dans $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$, le quatuor $\overline{\mathrm{H}}$ correspondant sera représenté par la notation $\overline{h}\boxed{\infty}\overline{h}'$. Dans $\mathcal{H}$ (resp. dans $\mathcal{C}$) on dira qu'un triplet (g_1, f_1, f) est *inclus dans un quatuor* s'il existe un quatuor (g_1, f_1, f, g). La proposition 7 est équivalente à :

Proposition 7 *bis*. — *Pour qu'un triplet*

$$\mathrm{T} = \left(\overline{h},\ s_1 \underset{p}{\infty} s'_1,\ s \underset{p}{\infty} s'\right), \qquad \text{où} \quad \overline{h} \in \mathcal{H},$$

soit inclus dans un quatuor $\overline{\mathrm{H}}$, *il faut et il suffit que*

$$s = \alpha(\overline{h}), \qquad s_1 = \beta(\overline{h})$$

et que

$$p^3(\mathrm{T}) = \left(p(\overline{h}),\ p(s_1)\, p(s'_1),\ p(s)\, p(s')\right)$$

soit inclus dans un quatuor H; *dans ce cas, on a* $\overline{\mathrm{H}} \in \overline{\mathcal{U}}$ *et* $\mathrm{H} \in \mathcal{U}$. *Si, de plus,* $\mathrm{H} \in \mathcal{U}'$ *et* $\overline{h} \in \Gamma$, *alors* $\overline{\mathrm{H}} \in \overline{\mathcal{U}}'$.

Si $\mathrm{T} = \left(\overline{h},\ s_1 \underset{p}{\infty} s'_1,\ s \underset{p}{\infty} s'\right)$ est inclus dans un quatuor, les quatuors $\overline{\mathrm{H}}$ et H dans lesquels sont inclus T et $p^3(\mathrm{T})$ sont uniques; par conséquent, on a

$$\mathrm{H} = p(\overline{h}) \boxed{\infty}\, h' \qquad \text{et} \qquad \overline{\mathrm{H}} = \overline{h} \underset{p}{\boxed{\infty}} \overline{h}',$$

où h' et $\bar{h}'$ sont déterminés par T. L'élément $\bar{h}'$ peut être considéré comme le composé de $\bar{h}$ par (s'_1, s'); ce composé sera noté $\bar{h} \underset{p}{\vdash} (s'_1, s')$ et appelé *p-restriction* de $\bar{h}$ à (s'_1, s').

Remarquons que le composé $\bar{h}'$ est aussi déterminé par la donnée du triplet $(\bar{h}, (p(s'_1), p(s')))$.

En particulier,

— si $s'_1 = \beta(\bar{h})$, $s' \propto \alpha(\bar{h})$, il existe une p-restriction $\bar{h} \underset{p}{\vdash} (s'_1, s')$ et

$$\bar{h} \underset{p}{\vdash} (s'_1, s') = \bar{h} \cdot \big(s \underset{p}{\infty} s'\big);$$

— si $s'_1 \propto \beta(\bar{h})$ et $s' = \alpha(\bar{h})$, il existe une p-restriction $\bar{h} \underset{p}{\vdash} (s'_1, s')$ si, et seulement si,

$$\alpha(p(s'_1)\, p(\bar{h})) = p(s') \qquad \text{et} \qquad \beta(p(s'_1)\, p(\bar{h})) = p(s'_1);$$

alors

$$\bar{h} \underset{p}{\vdash} (s'_1, s') = (s'_1, p(s'_1)\, p(\bar{h}), s').$$

Soit $\mathcal{H}'$ une sous-catégorie de $\mathcal{H}$ contenant $\mathcal{H}_0$; soit p' la restriction de p à $\mathcal{H}'$. Supposons que $(\mathcal{C}, p', \mathcal{H}', \mathcal{H}' \cap \Gamma)$ soit une catégorie d'homomorphismes.

Proposition 10. — *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(σ) $s \underset{p}{\propto} \mathrm{S}$ *dans* $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$ *entraîne* $s \underset{p'}{\propto} \mathrm{S}$ *dans* $(\mathcal{C}, p', \mathcal{H}', \mathcal{H}' \cap \Gamma)$;

(σ_1) *On a* $\mathcal{H}' \underset{p}{\vdash} (\mathcal{H}_0 \times \mathcal{H}_0) \subset \mathcal{H}'$, *c'est-à-dire si* $\bar{h}' \in \mathcal{H}'$, *toute p-restriction de* $\bar{h}'$ *appartient à* $\mathcal{H}'$.

Démonstration. — Si (σ) est vérifié, la catégorie des p'-injections contient $\mathcal{H}_{\underset{p}{\propto}}$ et (σ_1) est vérifié. Inversement, supposons (σ_1) vérifié et soit $s \propto \mathrm{S}$ dans $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$. Les relations $\mathrm{S} \in \mathcal{H}'$ et $s \underset{p}{\propto} \mathrm{S}$ entraînent

$$\mathrm{S} \underset{p}{\vdash} (\mathrm{S}, s) = (\mathrm{S}, p(\mathrm{S})\, p(s), s) \in \mathcal{H}'.$$

Soit $(\mathrm{S}, g, \mathrm{S}') \in \mathcal{H}'$ tel que

$$\alpha(p(s)\, g) = \alpha(g) \qquad \text{et} \qquad \beta(p(s)\, g) = p(s);$$

le composé $(\mathrm{S}, g, \mathrm{S}') \underset{p}{\vdash} (s, \mathrm{S}') = (s, p(s)\, g, \mathrm{S}')$ étant défini, il appartient à $\mathcal{H}'$. Par suite, on a $s \underset{p'}{\propto} \mathrm{S}$ dans $(\mathcal{C}, p', \mathcal{H}', \mathcal{H}' \cap \Gamma)$.

Nous verrons plus loin (§ II, théorème 16) que $\square\, \mathcal{C}$ est une catégorie inductive pour la relation d'ordre

$$(g'_1, f'_1, f', g') < (g_1, f_1, f, g)$$

si, et seulement si,

$$g' < g, \quad g'_1 < g_1, \quad f'_1 < f_1 \quad \text{et} \quad f' < f.$$

Dans le théorème suivant, nous poserons

$$[\bar{h}] = (\bar{h}, \beta(\bar{h}), \alpha(\bar{h}), \bar{h}) \in (\square\mathcal{H})_0 \quad \text{pour tout} \quad \bar{h} \in \mathcal{H};$$

et

$$[h] = (h, \beta(h), \alpha(h), h) \in (\square\mathcal{C})_0, \quad \text{pour tout} \quad h \in \mathcal{C}.$$

Théorème 2. — *Les relations suivantes sont équivalentes :*

(1) *On a*

$$[\bar{h}'] \underset{\square p}{\propto} [\bar{h}] \quad et \quad [\beta(\bar{h}')] \underset{\square p}{\propto} [\beta(\bar{h})] \quad dans\ (\square\mathcal{C}, \square p, \square\mathcal{H}, \Gamma');$$

(2) $\bar{h}'$ *est un sous-homomorphisme de* $\bar{h}$ *dans* $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$.

Démonstration. — Soient

$$\bar{h} = (s_1, h, s) \in \mathcal{H} \quad \text{et} \quad \bar{h}' = (s'_1, h', s') \in \mathcal{H}.$$

Supposons $\bar{h}' \underset{p}{\propto} \bar{h}$; de la proposition 5, il résulte $h' \propto h$ dans $(\mathcal{C}, \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}, \mathcal{C}, \mathcal{C})$, d'où $(h, \beta(h)\,\beta(h'), \alpha(h)\,\alpha(h'), h') \in \mathcal{U}$; de plus, ce quatuor est le pseudo-produit $[h]\,[h']$ dans $\square\mathcal{C}$. Comme le quadruplet $\left(\bar{h}, s_1 \underset{p}{\infty} s'_1, s \underset{p}{\infty} s', \bar{h}'\right)$ est un quatuor de $\mathcal{H}$ et admet $[h]\,[h']$ pour image par $\square p$, on en déduit $[\bar{h}'] \,\bar{\rho}\, [\bar{h}]$ dans $(\square\mathcal{C}, \square p, \square\mathcal{H}, \Gamma')$. Soit $\bar{G} = (\bar{h}, \bar{f}_1, \bar{f}, \bar{k}) \in \square\mathcal{H}$ tel que

$$\alpha([p(\bar{h}')]\square p(\bar{G})) = [p(\bar{k})] \quad \text{et} \quad \beta([p(\bar{h}')]\square p(\bar{G})) = [p(\bar{h}')] = [h'];$$

on a

$$\square p([\bar{h}']) = [p(\bar{h}')] \quad \text{et} \quad [p(\bar{h}')]\square p(\bar{G}) = (h', p(s'_1)\,p(\bar{f}_1), p(s')\,p(\bar{f}), p(\bar{k})),$$

d'où

$$\alpha(p(s')\,p(\bar{f})) = \alpha(p(\bar{f})) \quad \text{et} \quad \beta(p(s')\,p(\bar{f})) = p(s').$$

Il en résulte

$$\bar{f}' = (s', p(s')\,p(\bar{f}), \alpha(\bar{f})) \in \mathcal{H};$$

de même,

$$\bar{f}'_1 = (s'_1, p(s'_1)\,p(\bar{f}_1), \beta(\bar{f}_1)) \in \mathcal{H}.$$

Soit $\bar{G}' = (\bar{h}', \bar{f}'_1, \bar{f}', k)$; puisque la projection par $\square p$ de $\bar{G}'$ est le quatuor $[p(\bar{h}')]\square p(\bar{G})$, on a $\bar{G}' \in \square\mathcal{H}$. Par suite, $[\bar{h}'] \underset{\square p}{\propto} [\bar{h}]$. De plus, $s'_1 \underset{p}{\propto} s_1$ entraîne de même $[s'_1] \underset{\square p}{\propto} [s_1]$ et (1) est vérifié. — Inversement, supposons $[\bar{h}'] \propto [\bar{h}]$ dans $(\square\mathcal{C}, \square p, \square\mathcal{H}, \Gamma')$. Alors, on a

$$h' < h \quad \text{et} \quad [h]\,[h'] = (h, \beta(h)\,\beta(h'), \alpha(h)\,\alpha(h'), h');$$

on en déduit

$$(s, p(s)\,p(s'), s') \in \mathcal{H} \qquad \text{et} \qquad (s_1, p(s_1)\,p(s'_1), s'_1) \in \mathcal{H}.$$

Soit

$$\bar{g} = (s, g, S') \in \mathcal{H}, \qquad \text{où} \quad g = (p(s)\,p(s')).g'.$$

On a

$$\overline{G} = (\bar{h}, \bar{h}.\bar{g}, \bar{g}, S') \in \square\mathcal{H}$$

et

$$\square p(\overline{G}) = (h, h.g, g, p(S')) = [h][h'].(h', h'.g', g', p(S'));$$

il en résulte

$$(\bar{h}', \bar{h}'.\bar{g}', \bar{g}', S') \in \overline{\mathcal{U}}, \qquad \text{c'est-à-dire} \quad (s', g', S') \in \mathcal{H}.$$

Ceci prouve que s' est une sous-structure de s dans $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$. Si, de plus, $[s'_1] \underset{\square p}{\propto} [s_1]$, on a de même $s'_1 \underset{p}{\propto} s_1$, donc $\bar{h}' \propto \bar{h}$ dans $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$.

Corollaire 1. — *Soient $\bar{h} \in \Gamma$ et $\bar{h}' \in \Gamma$. On a $\bar{h}' \underset{p}{\propto} \bar{h}$ si, et seulement si, $[\bar{h}'] \underset{\square p}{\propto} [\bar{h}]$.*

En effet, si $[\bar{h}'] \underset{\square p}{\propto} [\bar{h}]$, la démonstration du théorème prouve qu'on a $\alpha(\bar{h}') \underset{p}{\propto} \alpha(\bar{h})$ et il résulte de la proposition 6 que $\bar{h}' \underset{p}{\propto} \bar{h}$.

Corollaire 2. — *$\overline{\mathcal{U}}$ est une sous-catégorie de la catégorie des $\square p$-injections.*

Définition 9. — *On dira que* $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$ est une catégorie d'homomorphismes résolvante à droite *si l'axiome suivant est vérifié :*

(R) *Soient $h \in \mathcal{H}$ et $h' \in \mathcal{H}$ tels que*

$$\alpha(h) = \alpha(h') \qquad \textit{et} \qquad \beta(h) = \beta(h');$$

alors il existe

$$s \underset{p}{\propto} \alpha(h), \qquad \textit{avec} \quad p(s) = \alpha(p(h) \cap p(h')).$$

*La sous-structure s de $\alpha(h)$ sera appelée p-*noyau *de (h, h').*

On définit de même la notion de catégorie d'homomorphismes $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$ *résolvante à gauche* en remplaçant dans cette définition α par β.

Exemples. — 1° $(\mathcal{M}, p_{\mathcal{F}}, \mathcal{F}, \mathcal{F}_{\cdot})$ est résolvante à droite.

2° Si pour tout $e \in \mathcal{C}_0$ et tout $E \in \mathcal{C}_0$ tels que $e < E$, on a $\beta(Ee) = E$, alors $(\mathcal{C}, \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}, \mathcal{C}, \mathcal{C})$ est résolvante à droite et à gauche.

3° Si pour tout $S \in \mathcal{H}_0$ et pour tout $e < p(S)$ il existe $s \underset{p}{\propto} S$ tel que $p(s) = e$, alors $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$ est résolvante à droite et à gauche. Il en est ainsi en particulier pour $(\mathcal{M}, \omega, \tilde{\Omega}, \Omega)$ et $(\mathcal{M}, \theta, \tilde{\mathcal{T}}, \mathcal{T})$.

4° $(\mathfrak{M}, \theta, \tilde{\mathfrak{T}}_u, \mathfrak{T})$ n'est pas résolvante à droite.

PROPOSITION 11. — *Si* $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$ *est une catégorie d'homomorphismes résolvante à droite et si* $e < \mathrm{E}$ *dans* $\mathcal{C}_0$ *entraîne* $\beta(\mathrm{E}e) = \mathrm{E}$, *les conditions*

$$h \in \mathcal{H}, \qquad h' \in \mathcal{H}, \qquad \alpha(h) = \alpha(h') \qquad \textit{et} \qquad \beta(h) = \beta(h')$$

entraînent

$$h \underset{p}{\vdash} (\beta(h), s) = h' \underset{p}{\vdash} (\beta(h), s),$$

où s *est le* p*-noyau de* (h, h').

Démonstration. — Posons

$$p(h) \cap p(h') = f, \qquad e = \beta(f) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{E} = \beta(p(h));$$

on a

$$\mathrm{E}e.f < p(h) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{E}e.f < p(h'),$$

d'où

$$p(h) \cap p(h') = f < \mathrm{E}e.f < p(h) \cap p(h');$$

il en résulte $f = \mathrm{E}e.f$ et $\mathrm{E} = e$. Les éléments

$$f \text{ et } p(h)\,p(s) = p(h)\,p\big(\alpha(h) \underset{p}{\propto} s\big)$$

sont égaux, car ils sont majorés par $p(h)$, ont même source $p(s)$ et même but E. Donc $f = p(h)\,p(s)$. De même, $f = p(h')\,p(s)$. Comme

$$h \underset{p}{\vdash} (\beta(h), s) = (\beta(h), p(h)\,p(s), s) = (\beta(h), f, s)$$

et

$$h' \underset{p}{\vdash} (\beta(h), s) = (\beta(h), f, s),$$

on a

$$h \underset{p}{\vdash} (\beta(h), s) = h' \underset{p}{\vdash} (\beta(h), s).$$

Nous supposerons de plus dans la suite que $\mathcal{H}$ est muni d'une relation d'ordre $<$ telle que $(\mathcal{H}, <)$ soit une catégorie inductive et que p soit une application inductive stricte de $(\mathcal{H}, <)$ dans $(\mathcal{C}, <)$, c'est-à-dire que $(\mathcal{H}, <)$ est une catégorie inductive au-dessus de $(\mathcal{C}, <)$ relativement à p (*voir* § IV).

THÉORÈME 3. — *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(*c*) $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$ *est résolvante à droite et l'on a* $h' \underset{p}{\propto} h$ *dans* $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$ *si, et seulement si,* $h' < h$ *dans* $\mathcal{H}$.

(*c'*) *Soient* $s \in \mathcal{H}_0$ *et* $s' \in \mathcal{H}_0$; *on a* $s' \underset{p}{\propto} s$ *dans* $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$ *si, et seulement si,* $s' < s$ *dans* $\mathcal{H}$ *et dans ce cas* $\beta(ss') = s$; *de plus, les conditions*

$$h \in \mathcal{H}, \qquad h' \in \mathcal{H}, \qquad \alpha(h) = \alpha(h') \qquad \textit{et} \qquad \beta(h) = \beta(h')$$

entraînent

$$p(h \cap h') = p(h) \cap p(h').$$

Démonstration. — Supposons la condition (*c*) vérifiée; alors on a

$$s' \propto s \quad \text{dans } (\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S}) \qquad \text{si, et seulement si,} \quad s' < s;$$

dans ce cas, $(s, p(s)\,p(s'), s')$ est un sous-homomorphisme de s, donc

$$(s, p(s)\,p(s'), s') = s \underset{p}{\bowtie} s' = ss' \qquad \text{et} \qquad \beta(ss') = s.$$

On en déduit que les conditions suivantes sont équivalentes :

(*a*) $h' < h$ dans $\mathcal{H}$;
(*b*) $\alpha(h') < \alpha(h)$, $\beta(h') < \beta(h)$ et $p(h) < p(h')$;
(*c*) $h' \propto h$ dans $(\mathcal{H}, \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}, \mathcal{H}, \mathcal{H})$.

Soient $h \in \mathcal{H}$ et $h' \in \mathcal{H}$ tels que

$$\alpha(h) = \alpha(h') \qquad \text{et} \qquad \beta(h) = \beta(h');$$

comme la catégorie d'homomorphismes $(\mathcal{H}, \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}, \mathcal{H}, \mathcal{H})$ est résolvante à droite et que $\alpha(h \cap h')$ est le $\mathrm{Id}_{\mathcal{H}}$-noyau de (h, h'), on a

$$\beta(h \cap h') = \beta(h),$$

d'après la proposition 11; par conséquent, on a aussi

$$\beta(p(h) \cap p(h')) = p(\beta(h)).$$

Soit s le p-noyau de (h, h'); les éléments $p(h) \cap p(h')$ et $p(h)\,p(s)$ sont égaux car ils sont majorés par $p(h)$, ont même source $p(s)$ et même but $\beta(p(h))$; de même,

$$p(h) \cap p(h') = p(h')\,p(s).$$

Par suite,

$$h \underset{p}{\vdash} (\beta(h), s) = (\beta(h), p(h)\,p(s), s) = (\beta(h), p(h) \cap p(h'), s) = h' \underset{p}{\vdash} (\beta(h), s)$$

et

$$h \underset{p}{\vdash} (\beta(h), s) < h \cap h'.$$

Les relations

$$\alpha(h \cap h') < \alpha(h), \qquad s < \alpha(h) \qquad \text{et} \qquad p(\alpha(h \cap h')) = \alpha(p(h) \cap p(h')) = p(s)$$

entraînent

$$\alpha(h \cap h') < s.$$

Donc

$$s = \alpha(h \cap h') \qquad \text{et} \qquad h \cap h' = h \underset{p}{\vdash} (\beta(h), s);$$

ainsi

$$p(h \cap h') = p(h) \cap p(h').$$

— Inversement supposons la condition (c') vérifiée; si $h' < h$, on a

$$\alpha(h') \propto \alpha(h), \quad \beta(h') \propto \beta(h) \quad \text{et} \quad p(h') < p(h), \quad \text{d'où} \quad h' \underset{p}{\propto} h.$$

Soient h et h' deux éléments tels que

$$\alpha(h) = \alpha(h') \quad \text{et} \quad \beta(h) = \beta(h');$$

puisque

$$\alpha(h \cap h') < \alpha(h)$$

et

$$p(\alpha(h \cap h')) = \alpha(p(h \cap h')) = \alpha(p(h) \cap p(h')),$$

la catégorie d'homomorphismes $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$ est résolvante à droite. Supposons $h' \underset{p}{\propto} h$; posons

$$\alpha(h) = s, \quad \alpha(h') = s', \quad \beta(h) = s_1 \quad \text{et} \quad \beta(h') = s'_1.$$

Comme $s' \propto s$ et $s'_1 \propto s_1$, les éléments

$$hs' = h.ss' \quad \text{et} \quad s_1 h' = s_1 s'_1 . h'$$

ont même source s' et même but s_1. Démontrons qu'ils sont égaux; en effet,

$$p(hs') = p(h).p(ss') \quad \text{et} \quad p(s_1 h') = p(s_1 s'_1).p(h')$$

sont majorés par $p(h)$, et ont même source $p(s')$ et même but $p(s_1)$, donc $p(hs') = p(s_1 h')$. On en déduit $hs' = s_1 h'$, d'où

$$h' = s'_1 . h' < (s_1 s'_1).h' = hs' < h.$$

Ainsi l'axiome (c) est vérifié.

Remarque. — Le théorème 3 est encore vrai (sans modification de la démonstration) en remplaçant l'hypothèse : $(\mathcal{H}, <)$ est une catégorie inductive, par l'hypothèse : $(\mathcal{H} <)$ est une catégorie ordonnée (§ II, n° 6) dans laquelle deux éléments ont une intersection.

Exemple. — Soit $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$ une catégorie d'homomorphismes résolvante à droite telle que $\mathcal{H}_0$ soit une classe inductive [3 *a*] pour la relation $\propto$; si l'on munit $\mathcal{H}$ de la relation $\propto$, $\mathcal{H}$ devient une catégorie inductive et la condition (c) du théorème 3 est vérifiée. Il en est ainsi dans les catégories d'homomorphismes $(\mathcal{M}, p_{\mathcal{F}}, \mathcal{F}, \mathcal{F}_{\gamma})$ et $(\mathcal{M}, \theta_u, \tilde{\mathcal{T}}_u, \mathcal{T})$ lorsque $\mathcal{F}$ et $\tilde{\mathcal{T}}_u$ sont munis de leur relation d'ordre usuelle. Par contre, $(\mathcal{M}, \theta, \tilde{\mathcal{T}}, \mathcal{T})$ ne vérifie pas la condition (c).

Soit $(\mathcal{H}, \bar{p}, \overline{\mathcal{H}}, \overline{\mathcal{S}})$ une catégorie d'homomorphismes telle que $\overline{\mathcal{S}}$ contienne le groupoïde $\bar{\Gamma}$ des éléments inversibles de $\overline{\mathcal{H}}$ et que $(\mathcal{H}, \bar{p}, \overline{\mathcal{S}})$ soit une espèce de superstructures [3 *a*] au-dessus de $(\mathcal{C}, p, \mathcal{S})$. Ces conditions entraînent que $(\mathcal{C}, p\,\bar{p}, \overline{\mathcal{H}}, \overline{\mathcal{S}})$ est une catégorie d'homomorphismes. Un élément $\bar{h}$ de $\overline{\mathcal{H}}$ sera représenté, soit par le triplet $(\beta(\bar{h}), \bar{p}(\bar{h}), \alpha(\bar{h}))$, soit par le triplet $(\beta(\bar{h}), p\,\bar{p}(\bar{h}), \alpha(\bar{h}))$.

Remarquons que les conditions

$$s \in \overline{\mathcal{H}}_0, \qquad \mathrm{S} \in \overline{\mathcal{H}}_0 \qquad \text{et} \qquad s \underset{p\bar{p}}{\propto} \mathrm{S}$$

entraînent $\bar{p}(s)\, \bar{\rho}\, \bar{p}(\mathrm{S})$ dans $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$ mais, en général, elles n'entraînent pas $\bar{p}(s) \underset{p}{\propto} \bar{p}(\mathrm{S})$.

Proposition 12. — *Soient* $s \in \overline{\mathcal{H}}_0$ *et* $\mathrm{S} \in \overline{\mathcal{H}}_0$. *Les conditions*

$$s \underset{p\bar{p}}{\propto} \mathrm{S}, \qquad \bar{p}(s) < \bar{p}(\mathrm{S}) \qquad \textit{et} \qquad \beta(\bar{p}(\mathrm{S})\,\bar{p}(s)) = \bar{p}(\mathrm{S})$$

entraînent $s \underset{\bar{p}}{\propto} \mathrm{S}$.

Démonstration. — Soit

$$\bar{j} = (\mathrm{S}, p\,\bar{p}(\mathrm{S})\, p\,\bar{p}(s), s) \in \overline{\mathcal{H}};$$

on a

$$p\,\bar{p}(\bar{j}) = p(\bar{p}(\mathrm{S})\,\bar{p}(s)) = p\,\bar{p}(\mathrm{S})\, p\,\bar{p}(s),$$

car

$$p(\bar{p}(\mathrm{S})\,\bar{p}(s)) < p\,\bar{p}(\mathrm{S})\, p\,\bar{p}(s),$$

$$\alpha(\bar{p}(\mathrm{S})\,\bar{p}(s)) = \bar{p}(s) \qquad \text{et} \qquad \beta(\bar{p}(\mathrm{S})\,\bar{p}(s)) = \bar{p}(\mathrm{S}).$$

Donc

$$\bar{p}(\bar{j}) = (\bar{p}(\mathrm{S}), p\,\bar{p}(\mathrm{S})\, p\,\bar{p}(s), \bar{p}(s)) = \bar{p}(\mathrm{S})\,\bar{p}(s) \qquad \text{et} \qquad \bar{j} = (\mathrm{S}, \bar{p}(\mathrm{S})\,\bar{p}(s), s).$$

Soit

$$\bar{g} = (\mathrm{S}, \bar{p}(\mathrm{S})\,\bar{p}(s).g', \mathrm{S}') \in \overline{\mathcal{H}}, \qquad \text{où} \quad g' \in \mathcal{H}.$$

On a

$$\bar{p}(\bar{g}) = (\bar{p}(\mathrm{S}), p(\bar{p}(\mathrm{S})\,\bar{p}(s)).\,p(g'), \bar{p}(\mathrm{S}')) = (\bar{p}(\mathrm{S}), (p\,\bar{p}(\mathrm{S})\, p\,\bar{p}(s)).p(g'), \bar{p}(\mathrm{S}')),$$

d'où

$$\bar{g} = (\mathrm{S}, p\,\bar{p}(\mathrm{S})\, p\,\bar{p}(s).p(g'), \mathrm{S}').$$

De la condition $s \underset{p\bar{p}}{\propto} \mathrm{S}$ et de la proposition 4, il résulte

$$\bar{g}' = (s, p(g'), \mathrm{S}') \in \overline{\mathcal{H}}.$$

Comme $g' = (\bar{p}(s), p(g'), \bar{p}(\mathrm{S}'))$, on en déduit

$$\bar{p}(\bar{g}') = g' \qquad \text{et} \qquad \bar{g}' = (s, g', \mathrm{S}') \in \overline{\mathcal{H}}.$$

Par suite, $s \underset{\bar{p}}{\propto} \mathrm{S}$, d'après la proposition 4.

Corollaire 1. — *Les conditions*

$$h \in \overline{\mathcal{H}}, \qquad h' \in \overline{\mathcal{H}}, \qquad h' \underset{p\overline{p}}{\propto} h, \qquad \overline{p}(h') < \overline{p}(h),$$
$$\beta(\overline{p}(\alpha(h)\,\alpha(h'))) = \overline{p}(\alpha(h)) \qquad et \qquad \beta(\overline{p}(\beta(h)\,\beta(h'))) = \overline{p}(\beta(h))$$

entraînent $h' \underset{\overline{p}}{\propto} h$.

Corollaire 2. — *Supposons que* p *vérifie de plus la condition*

$$p(hs) = p(h)\,p(s) \qquad lorsque \quad s < \alpha(h).$$

Alors les conditions $s \underset{p\overline{p}}{\propto} \mathrm{S}$ *et* $\overline{p}(s) < \overline{p}(\mathrm{S})$ *entraînent* $s \underset{\overline{p}}{\propto} \mathrm{S}$.

En effet, de ces conditions il résulte

$$p(\overline{p}(\mathrm{S})\,\overline{p}(s)) = p\overline{p}(\mathrm{S})\,p\overline{p}(s),$$
$$\alpha(p\overline{p}(\mathrm{S})\,p\overline{p}(s)) = p\overline{p}(s), \qquad \beta(p\overline{p}(\mathrm{S})\,p\overline{p}(s)) = p\overline{p}(\mathrm{S}),$$

d'où

$$\overline{p}(\mathrm{S}) = \beta(\overline{p}(\mathrm{S})\,\overline{p}(s))$$

puisque

$$\beta(\overline{p}(\mathrm{S})\,\overline{p}(s)) < \overline{p}(\mathrm{S}) \qquad \text{et} \qquad p(\beta(\overline{p}(\mathrm{S})\,\overline{p}(s))) = p\overline{p}(\mathrm{S}).$$

On est ainsi ramené aux hypothèses de la proposition 12.

Désormais, nous supposerons de plus que les conditions

$$h \in \mathcal{H}, \qquad s \in \mathcal{H}_0 \qquad \text{et} \qquad s < \beta(h)$$

entraînent $p(sh) = p(s)\,p(h)$.

Proposition 13. — *Soient* $s \in \overline{\mathcal{H}}_0$ *et* $\mathrm{S} \in \overline{\mathcal{H}}_0$; *la relation* $s \underset{\overline{p}}{\propto} \mathrm{S}$ *dans* $(\mathcal{H}, \overline{p}, \overline{\mathcal{H}}, \overline{\mathcal{S}})$ *entraîne* $s \underset{p\overline{p}}{\propto} \mathrm{S}$ *dans* $(\mathcal{C}, p\overline{p}, \overline{\mathcal{H}}, \overline{\mathcal{S}})$.

Démonstration. — Posons $\overline{j} = (\mathrm{S}, \overline{p}(\mathrm{S})\,\overline{p}(s), s) \in \overline{\mathcal{H}}$; on a

$$\overline{j} = (\mathrm{S}, p\overline{p}(\mathrm{S})\,p\overline{p}(s), s),$$

car on obtient l'égalité $p\overline{p}(\overline{j}) = p\overline{p}(\mathrm{S})\,p\overline{p}(s)$ en utilisant les relations

$$p\overline{p}(\overline{j}) = p(\overline{p}(\mathrm{S})\,\overline{p}(s)) < p\overline{p}(\mathrm{S})\,p\overline{p}(s),$$
$$p\overline{p}(s) = \alpha(p\overline{p}(\overline{j})) < \alpha(p\overline{p}(\mathrm{S})\,p\overline{p}(s)) < p\overline{p}(s)$$

et

$$p\overline{p}(\mathrm{S}) = \beta(p\overline{p}(\overline{j})) < \beta(p\overline{p}(\mathrm{S})\,p\overline{p}(s)) < p\overline{p}(\mathrm{S}).$$

Soit $\overline{g} = (\mathrm{S}, g, \mathrm{S}') \in \overline{\mathcal{H}}$, où $g \in \mathcal{C}$, tel que

$$\alpha(p\overline{p}(s)\,g) = \alpha(g) \qquad \text{et} \qquad \beta(p\overline{p}(s)\,g) = p\overline{p}(s).$$

Montrons qu'on a

$$(s, p\overline{p}(s)\,g, \mathrm{S}') \in \overline{\mathcal{H}}.$$

En effet, puisque $\overline{p}(s) < \overline{p}(\beta(\overline{g}))$, on a

$$p(\overline{p}(s)\overline{p}(\overline{g})) = p\overline{p}(s)\,p\overline{p}(g) = p\overline{p}(s)\,g;$$

des relations

$$\alpha(\overline{p}(s)\overline{p}(\overline{g})) < \overline{p}(S'), \qquad \beta(\overline{p}(s)\overline{p}(\overline{g})) < \overline{p}(s),$$
$$p(\alpha(\overline{p}(s)\overline{p}(\overline{g}))) = p(\overline{p}(S')) \quad \text{et} \quad p(\beta(\overline{p}(s)\overline{p}(\overline{g}))) = p(\overline{p}(s)),$$

il résulte

$$\alpha(\overline{p}(s)\overline{p}(\overline{g})) = \overline{p}(S') \quad \text{et} \quad \beta(\overline{p}(s)\overline{p}(\overline{g})) = \overline{p}(s).$$

Comme $s \propto S$ dans $(\mathcal{H}, \overline{p}, \overline{\mathcal{H}}, \overline{\mathcal{S}})$, on en déduit

$$(s, \overline{p}(s)\overline{p}(\overline{g}), S') = (s, p\overline{p}(s)\,g, S') \in \mathcal{H}.$$

Ceci prouve qu'on a $s \underset{p\overline{p}}{\propto} S$ dans $(\mathcal{C}, p\overline{p}, \overline{\mathcal{H}}, \overline{\mathcal{S}})$.

Corollaire 1. — *Les conditions* $h \in \overline{\mathcal{H}}$, $h' \in \overline{\mathcal{H}}$ *et* $h' \underset{\overline{p}}{\propto} h$ *entraînent* $h' \underset{p\overline{p}}{\propto} h$.

Corollaire 2. — *Si, pour tout* $s \in \mathcal{H}_0$ *et tout* $S \in \mathcal{H}_0$ *tels que* $s < S$, *on a* $\beta(Ss) = S$, *alors* $s < S$ *entraîne* $s \propto S$ *dans* $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$.

En effet, ces conditions signifient qu'on a $s \propto S$ dans $(\mathcal{H}, \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}, \mathcal{H}, \mathcal{H})$ et le corollaire résulte de la proposition.

Corollaire 3. — *Si* $(\mathcal{H}, \overline{p}, \overline{\mathcal{H}}, \overline{\mathcal{S}})$ *est résolvante à droite et si la condition suivante est vérifiée :*

Pour $h \in \mathcal{H}$ *et* $h' \in \mathcal{H}$ *tels que*

$$\alpha(h) = \alpha(h') \quad \textit{et} \quad \beta(h) = \beta(h'),$$

on a

$$p(h \cap h') = p(h) \cap p(h'),$$

alors $(\mathcal{C}, p\overline{p}, \overline{\mathcal{H}}, \overline{\mathcal{S}})$ *est résolvante à droite.*

Démonstration. — Soient $\overline{h} \in \overline{\mathcal{H}}$ et $\overline{h}' \in \overline{\mathcal{H}}$ tels que $\alpha(\overline{h}) = \alpha(\overline{h}')$ et $\beta(\overline{h}) = \beta(\overline{h}')$; soit s le $\overline{p}$-noyau de $(\overline{h}, \overline{h}')$; d'après la proposition, on a $s \propto S$ dans $(\mathcal{C}, p\overline{p}, \overline{\mathcal{H}}, \overline{\mathcal{S}})$. Les relations

$$\overline{p}(s) = \alpha(\overline{p}(\overline{h}) \cap \overline{p}(\overline{h}')) \quad \text{et} \quad p(\overline{p}(\overline{h}) \cap \overline{p}(\overline{h}')) = p\overline{p}(\overline{h}) \cap p\overline{p}(\overline{h}')$$

entraînent $p\overline{p}(s) = \alpha(p\overline{p}(\overline{h}) \cap p\overline{p}(\overline{h}'))$, donc $(\overline{h}, \overline{h}')$ admet s pour $p\overline{p}$-noyau et $(\mathcal{C}, p\overline{p}, \overline{\mathcal{H}}, \overline{\mathcal{S}})$ est résolvante à droite.

Corollaire 4. — *Supposons que* $s \,\overline{\rho}\, S$ *dans* $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$ *entraîne* $s < S$ *dans* $\mathcal{H}_0$ *et* $\beta(Ss) = S$; *alors* $\overline{s} \underset{p\overline{p}}{\propto} \overline{S}$ *dans* $(\mathcal{C}, p\overline{p}, \overline{\mathcal{H}}, \overline{\mathcal{S}})$ *est équivalent à* $\overline{s} \underset{\overline{p}}{\propto} \overline{S}$ *dans* $(\mathcal{H}, \overline{p}, \overline{\mathcal{H}}, \overline{\mathcal{S}})$.

En effet, $\bar{s} \underset{\bar{p}}{\propto} \bar{\mathrm{S}}$ entraîne $\bar{s} \underset{p\bar{p}}{\propto} \bar{\mathrm{S}}$ d'après la proposition 13. Supposons $\bar{s} \underset{p\bar{p}}{\propto} \bar{\mathrm{S}}$; comme

$$\bar{j} = (\bar{\mathrm{S}}, p\bar{p}(\bar{\mathrm{S}})p\bar{p}(\bar{s}), \bar{s}) \in \bar{\mathcal{H}},$$

on a

$$\bar{p}(\bar{j}) = (\bar{p}(\bar{\mathrm{S}}), p\bar{p}(\bar{\mathrm{S}})p\bar{p}(\bar{s}), \bar{p}(\bar{s})) \in \mathcal{H} \quad \text{et} \quad p\bar{p}(\bar{s}) < p\bar{p}(\bar{\mathrm{S}}),$$

d'où $\bar{p}(\bar{s}) \,\bar{\rho}\, \bar{p}(\bar{\mathrm{S}})$. Par suite,

$$\bar{p}(\bar{s}) < \bar{p}(\mathrm{S}) \text{ dans } \mathcal{H} \quad \text{et} \quad \beta(\bar{p}(\bar{\mathrm{S}})\bar{p}(\bar{s})) = \bar{p}(\bar{\mathrm{S}}).$$

La proposition 12 entraîne alors $\bar{s} \underset{\bar{p}}{\propto} \bar{\mathrm{S}}$.

Proposition 14. — *Supposons que* $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$ *vérifie la condition* (c) *du théorème* 3 *et que* $s \,\bar{\rho}\, \mathrm{S}$ *dans* $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$ *entraîne* $s < \mathrm{S}$ *dans* $\mathcal{H}$; *alors* $(\mathcal{H}, \bar{p}, \bar{\mathcal{H}}, \bar{\mathcal{S}})$ *est résolvante à droite si, et seulement si,* $(\mathcal{C}, p\bar{p}, \bar{\mathcal{H}}, \bar{\mathcal{S}})$ *est résolvante à droite.*

Démonstration. — Si $(\mathcal{H}, \bar{p}, \bar{\mathcal{H}}, \bar{\mathcal{S}})$ est résolvante à droite, $(\mathcal{C}, p\bar{p}, \bar{\mathcal{H}}, \bar{\mathcal{S}})$ est résolvante à droite d'après le corollaire 3 de la proposition 13. Inversement, supposons que $(\mathcal{C}, p\bar{p}, \bar{\mathcal{H}}, \bar{\mathcal{S}})$ soit résolvante à droite; soient $\bar{h} \in \bar{\mathcal{H}}$ et $\bar{h}' \in \bar{\mathcal{H}}$ tels que

$$\alpha(\bar{h}) = \alpha(\bar{h}') \quad \text{et} \quad \beta(\bar{h}) = \beta(\bar{h}');$$

soit $\bar{s}$ le $p\bar{p}$-noyau de $(\bar{h}, \bar{h}')$. D'après l'axiome (c), $s < \mathrm{S}$ dans $\mathcal{H}$ entraîne $s \propto \mathrm{S}$ dans $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$, donc $\beta(\mathrm{S}s) = \mathrm{S}$; du corollaire 4 de la proposition 13, il résulte qu'on a $\bar{s} \underset{\bar{p}}{\propto} \alpha(\bar{h})$. De plus, les relations

$$\bar{p}(\bar{s}) < \alpha(\bar{p}(\bar{h}) \cap \bar{p}(\bar{h}')), \qquad p(\bar{p}(\bar{h}) \cap \bar{p}(\bar{h}')) = p\bar{p}(\bar{h}) \cap p\bar{p}(\bar{h}')$$

et

$$p\bar{p}(\bar{s}) = \alpha(p\bar{p}(\bar{h}) \cap p\bar{p}(\bar{h}')) = p(\alpha(\bar{p}(\bar{h}) \cap \bar{p}(\bar{h}')))$$

entraînent $\bar{p}(\bar{s}) = \alpha(\bar{p}(\bar{h}) \cap \bar{p}(\bar{h}'))$. Donc $\bar{s}$ est le $\bar{p}$-noyau de $(\bar{h}, \bar{h}')$ et $(\mathcal{H}, \bar{p}, \bar{\mathcal{H}}, \bar{\mathcal{S}})$ est résolvante à droite.

Théorème 4. — *Supposons vérifiées les conditions suivantes :*

(1) $(\mathcal{C}, <)$ *est une catégorie* $(\mathcal{J}, \mathcal{J}', \mathcal{J}'')$*-structurée* (*voir* § II, n° 6) *complètement régulière à droite et le groupoïde* $\mathcal{C}_\gamma$ *des éléments inversibles de* $\mathcal{C}$ *est un groupoïde inductif* (§ II, n° 6).

(2) $(\mathcal{H}, <)$ *est complètement régulière à droite.*

(3) $\mathcal{H}$ *est saturé au-dessus de* $\mathcal{C}$ *et les conditions*

$$h \in \Gamma, \quad h' \in \Gamma, \quad \alpha(h') < \alpha(h) \quad \textit{et} \quad p(h') < p(h)$$

entraînent $h' < h$.

Alors il existe une sous-catégorie $\mathcal{H}_u$ de $\mathcal{H}$ contenant Γ telle qu'on ait $s' < s$ dans $\mathcal{H}_0$ si, et seulement si, $s' \underset{p_u}{\propto} s$ dans $(\mathcal{C}, p_u, \mathcal{H}_u, \Gamma)$, où p_u est la restriction de p à $\mathcal{H}_u$.

Démonstration. — Soit $\mathcal{H}_u$ la classe de tous les éléments $h \in \mathcal{H}$ vérifiant la condition suivante :

Soit $s \in \mathcal{H}_0$ et $s < \alpha(h)$; soit $p(h)^{>}.p(s)$ la classe de tous les éléments $g \in \mathcal{C}$ tels que $g < p(h)$ et $\alpha(g) = p(s)$. Posons

$$p(h)\,|\,p(s) = \bigcap (p(h)^{>}.p(s)).$$

Alors il existe $h\,|\,s \in \mathcal{H}$ tel que

$$h\,|\,s < h, \qquad \alpha(h\,|\,s) = s \qquad \text{et} \qquad p(h\,|\,s) = p(h)\,|\,p(s).$$

Montrons que $\mathcal{H}_u$ contient Γ. En effet, supposons $h \in \Gamma$ et $s < \alpha(h)$. Soit $g \in \mathcal{C}_\gamma$ l'élément inversible induit par $p(h) \in \mathcal{C}_\gamma$ sur $p(s)$, dont l'existence est assurée par le fait que $\mathcal{C}_\gamma$ est un groupoïde inductif. Nous allons montrer : $g = p(h)\,|\,p(s)$. On a

$$p(h)\,|\,p(s) < g.$$

Soit $g' \in p(h)^{>}.p(s)$ tel que $g' < g$. Comme $g'.g^{-1} < \beta(g)$ et que $\mathcal{C}$ est complètement régulière à droite, on a

$$(\beta(g)\,\beta(g')).(g'.g^{-1}) = \beta(g) \qquad \text{et} \qquad (g'.g^{-1}).(\beta(g)\,\beta(g')) = \beta(g'),$$

d'où $g'.g^{-1} \in \mathcal{C}_\gamma$. Puisque $\mathcal{C}_\gamma$ est un groupoïde inductif, il en résulte

$$g'.g^{-1} \in \mathcal{C}_0, \qquad \text{c'est-à-dire} \quad \beta(g) = \beta(g');$$

en tenant compte des relations $g' < g$ et $\alpha(g) = \alpha(g')$, on trouve $g = g'$. Ainsi $p(h)\,|\,p(s) = g$ et, en vertu de la condition (3), il existe

$$(s_1, g, s) \in \Gamma \qquad \text{et} \qquad (s_1, g, s) < h.$$

Donc

$$h\,|\,s = (s_1, g, s) \in \mathcal{H} \qquad \text{et} \qquad h \in \mathcal{H}_u.$$

Montrons que $\mathcal{H}_u$ est une sous-catégorie de $\mathcal{H}$. Soient

$$h \in \mathcal{H}_u \quad \text{et} \quad h_1 \in \mathcal{H}_u \qquad \text{tels que} \quad \alpha(h_1) = \beta(h).$$

Soit $s < \alpha(h)$ et $s_1 = \beta(h\,|\,s)$; nous allons démontrer l'égalité

$$(h_1.h)\,|\,s = (h_1\,|\,s_1).(h\,|\,s);$$

en effet, si $k < p(h_1.h)$ et $\alpha(k) = p(s)$, on a

$$k = g'_1.g', \qquad \text{où} \quad g'_1 < p(h_1) \quad \text{et} \quad g' < (h),$$

puisque $(\mathcal{C}, <)$ est $(\mathcal{J}, \mathcal{J}', \mathcal{J}'')$-structurée. Comme $\alpha(g') = p(s)$, on a

$$p(h) \mid p(s) < g', \qquad \text{d'où} \qquad p(s_1) < \alpha(g'_1);$$

par conséquent,

$$p(h_1) \mid p(s_1) < g'_1 . (\alpha(g'_1)\, p(s_1)) \qquad \text{et} \qquad (p(h_1) \mid p(s_1)) . (p(h) \mid p(s)) < k,$$

ce qui prouve

$$(p(h_1) \mid p(s_1)) . (p(h) \mid p(s)) = \bigcap (p(h_1 . h)^{>} . p(s)).$$

On en déduit

$$(h_1 . h) \mid s = (h_1 \mid s_1) . (h \mid s) \qquad \text{et finalement} \qquad h_1 . h \in \mathcal{H}_u.$$

De plus, $\mathcal{H}_u$ est saturé par induction dans $\mathcal{H}$, car les relations

$$h \in \mathcal{H}_u, \qquad h' < h \qquad \text{et} \qquad s' < \alpha(h')$$

entraînent

$$s' < \alpha(h) \qquad \text{et} \qquad p(h \mid s') < p(h' . (\alpha(h')\, s')),$$

c'est-à-dire

$$h \mid s' < h' . (\alpha(h')\, s') < h', \qquad \text{d'où} \qquad h \mid s' = h' \mid s' \quad \text{et} \quad h' \in \mathcal{H}_u.$$

Il en résulte que si $h \in \mathcal{H}_u$ et $s'_1 < \beta(h)$, on a $s'_1 h \in \mathcal{H}_u$, donc

$$p_u(s'_1\, h) = p(s'_1\, h) = p_u(s'_1)\, p_u(h).$$

Par suite, on peut appliquer le corollaire 2 de la proposition 13 et l'on a :

$$s' < s \quad \text{dans } \mathcal{H}_0 \qquad \text{entraîne} \qquad s' \underset{p_u}{\propto} s \quad \text{dans } (\mathcal{C}, p_u, \mathcal{H}_u, \Gamma).$$

— Inversement, montrons que si $s' \underset{p_u}{\propto} s$, on a $s' < s$ dans $\mathcal{H}_0$. Posons

$$j = (s, p(s)\, p(s'), s') \in \mathcal{H}_u;$$

on a $p(s') \in p(j)^{>} . p(s')$; soit

$$g \in p(j)^{>} . p(s') \qquad \text{tel que} \qquad g < p(s').$$

En utilisant les relations

$$\alpha(g) = p(s'), \qquad (p(s')\, \beta(g)) . g = p(s') \qquad \text{et} \qquad g . (p(s')\, \beta(g)) = \beta(g),$$

on obtient $g = (p(s')\, \beta(g))^{-1}$ et, puisque $\mathcal{C}_\gamma$ est un groupoïde inductif, $g = p(s')$. Par conséquent, $p(s') = p(j) \mid p(s')$ et il existe

$$j \mid s' = (s_1, p(s'), s') \in \mathcal{H}, \qquad \text{avec} \quad s_1 < s \qquad \text{et} \qquad p(s_1) = p(s').$$

D'après ce qui précède, on a alors $s_1 \underset{p_u}{\propto} s$, donc $s' = s_1 < s$ en vertu du corollaire 1, th. 1.

DÉFINITION 10. — *Avec les notations du théorème 4, un élément de $\mathcal{H}_u$ sera appelé* homomorphisme p-ouvert.

Exemples. — 1° Dans la catégorie d'homomorphismes $(\mathcal{M}, \theta, \tilde{\mathcal{C}}, \mathcal{C})$, un homomorphisme θ-ouvert est une application continue ouverte.

2° Dans $(\mathcal{M}, p_{\mathcal{F}}, \mathcal{F}, \mathcal{F}_{\gamma})$, un foncteur F est $p_{\mathcal{F}}$-ouvert si, et seulement si, $F(\mathcal{C})$ est une sous-catégorie de $\beta(F)$ pour toute sous-catégorie $\mathcal{C}$ de $\alpha(F)$. En particulier, tout foncteur F tel que F_0 soit une injection est $p_{\mathcal{F}}$-ouvert. A l'aide de la décomposition canonique d'un foncteur (*voir* [3 *a*]) tout foncteur est donc le composé d'un foncteur ouvert et d'un foncteur fidèle. Remarquons que la sous-catégorie $\mathcal{F}_u$ de $\mathcal{F}$ vérifie la condition (σ) de la proposition 10.

Cas particulier. — Dans ce qui suit intervient, le plus souvent, le cas d'une catégorie d'homomorphismes $(\mathcal{M}, p, \mathcal{H}, \Gamma)$, où $\mathcal{M}$ est la catégorie d'applications construite au n° 5 et où Γ est le groupoïde des éléments inversibles de $\mathcal{H}$. Nous supposerons $\mathcal{M}$ muni de la relation d'ordre

$$(E', f, E) < (E'_1, f_1, E_1)$$

si, et seulement si, $E \subset E_1$, $E' \subset E'_1$ et si f est une restriction de f_1.

Alors $\mathcal{M}$ est une catégorie inductive telle que $\beta(Ee) = E$ pour tout $e \in \mathcal{M}_0$, $E \in \mathcal{M}_0$ et $e < E$; par suite, les relations

$$e < E \quad \text{dans } \mathcal{M}_0 \qquad \text{et} \qquad e \propto E \quad \text{dans } (\mathcal{M}, \mathrm{Id}_{\mathcal{M}}, \mathcal{M}, \mathcal{M})$$

sont équivalentes.

Dans $(\mathcal{M}, p, \mathcal{H}, \Gamma)$, on a $s \,\bar{\underset{p}{\circ}}\, S$ si, et seulement si,

$$p(s) \subset p(S) \qquad \text{et} \qquad (S, \iota, s) \in \mathcal{H}.$$

Pour que s soit une sous-structure de S dans $(\mathcal{M}, p, \mathcal{H}, \Gamma)$, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :

(1) On a $p(s) \subset p(S)$ et $(S, \iota, s) \in \mathcal{H}$;

(2) Les conditions $(S, g, S') \in \mathcal{H}$ et $g(p(S)) \subset p(s)$ entraînent

$$(s, g, S') \in \mathcal{H}.$$

PROPOSITION 15. — *Si $\mathcal{H}$ est saturé au-dessus de $\mathcal{M}$, alors $(p(\Gamma), p\beta, \mathcal{H}_{\alpha})$ est une espèce de structures, où $\mathcal{H}_{\alpha}$ désigne la classe des p-injections.*

Démonstration. — Supposons

$$s \propto S, \qquad g \in p(\Gamma) \qquad \text{et} \qquad \alpha(g) = p(S);$$

puisque $p(\Gamma)$ est saturé dans $\mathcal{H}$, on a $g' \in p(\Gamma)$, où g' est la bijection induite par g sur $p(s)$; les relations $g' < g$ et $\alpha(g', s) = s \propto \alpha(g, S)$ entraînent $(g', s) \propto (g, S)$ d'après la proposition 6, donc

$$\beta(g', s) \underset{p}{\propto} \beta(g, S).$$

Des définitions, il résulte que $p(\Gamma)$ opère sur $\mathcal{H}_\alpha$ pour la loi de composition

$$\left(g, \mathrm{S} \underset{p}{\infty} s\right) \to \left(\beta(g, \mathrm{S}) \underset{p}{\infty} \beta(g', s)\right) \qquad \text{si, et seulement si,} \quad \alpha(g) = p(\mathrm{S}).$$

Soient

$$\bar{h} = (\mathrm{S}_1, h, \mathrm{S}) \in \mathcal{H} \quad \text{et} \quad \bar{h}' = (\mathrm{S}_1, h', \mathrm{S}) \in \mathcal{H};$$

pour qu'une sous-structure s de S soit le p-noyau de (h, h'), il faut et il suffit que $p(s)$ soit la classe formée des x tels que $h(x) = h'(x)$.

Proposition 16. — *Si* $(\mathcal{M}, p, \mathcal{H}, \Gamma)$ *est résolvante à droite,* Γ *opère sur la classe* $\mathcal{H}_n$ *des p-injections* $\mathrm{S} \underset{p}{\infty} s$ *telles que s soit le p-noyau d'un couple* (h, h'), *où* $\alpha(h) = \mathrm{S}$.

En effet, soit $(\mathrm{S}_1, g, \mathrm{S}) = \bar{g} \in \Gamma$ et s le p-noyau de (h, h'), où $\alpha(h) = \mathrm{S}$. D'après l'axiome (R), le couple $(\bar{g}^{-1}.h, \bar{g}^{-1}.h')$ admet un p-noyau $s_1 \propto \mathrm{S}_1$; comme $p(s_1) = g(p(s))$, il résulte de la proposition 7 qu'on a

$$\bar{g}' = (s_1, g\iota, s) \in \Gamma.$$

Ainsi Γ opère sur $\mathcal{H}_n$ par la loi de composition

$$(\bar{g}, \mathrm{S} \infty s) \to \mathrm{S}_1 \infty s_1 \qquad \text{si, et seulement si,} \quad \mathrm{S} = \alpha(\bar{g}).$$

Nous munirons $\mathcal{F}$ de la relation d'ordre :

$\left(\mathrm{G}_1^\perp, \mathrm{F}, \mathrm{G}^\perp\right) < \left(\bar{\mathrm{G}}_1^\perp, \bar{\mathrm{F}}, \bar{\mathrm{G}}^\perp\right)$ si, et seulement si, $\mathrm{G}^\perp$ (resp. $\mathrm{G}_1^\perp$) est une sous-catégorie de $\bar{\mathrm{G}}^\perp$ (resp. de $\bar{\mathrm{G}}_1^\perp$) et si F est une restriction de $\bar{\mathrm{F}}$.

Alors $\mathcal{F}$ est une catégorie inductive suprarégulière au-dessus de $\mathcal{M}$ relativement à $p_{\mathcal{F}}$ au sens de [3 c]. De plus, $(\mathcal{M}, p_{\mathcal{F}}, \mathcal{F}, \mathcal{F}_\gamma)$ vérifie la condition (c) du théorème 3. Les trois conditions

$$\mathrm{G}^\perp \,\bar{\rho}\, \bar{\mathrm{G}}^\perp, \quad \mathrm{G}^\perp \propto \bar{\mathrm{G}}^\top \quad \text{et} \quad \mathrm{G}^\perp < \bar{\mathrm{G}}^\perp$$

sont équivalentes (*voir* § II, prop. 9). Soit $\left(\mathcal{F}, \bar{p}, \bar{\mathcal{H}}, \bar{\Gamma}\right)$ une catégorie d'homomorphismes telle que $\bar{\Gamma}$ soit le groupoïde des éléments inversibles de $\bar{\mathcal{H}}$. Du corollaire 2 de la proposition 12 et de la proposition 14, il résulte :

Proposition. — *Les conditions* $s \propto \mathrm{S}$ *dans* $\left(\mathcal{F}, \bar{p}, \bar{\mathcal{H}}, \bar{\Gamma}\right)$ *et* $s \propto \mathrm{S}$ *dans* $\left(\mathcal{M}, p_{\mathcal{F}}\,\bar{p}, \bar{\mathcal{H}}, \bar{\Gamma}\right)$ *sont équivalentes.* $\left(\mathcal{F}, \bar{p}, \bar{\mathcal{H}}, \bar{\Gamma}\right)$ *est résolvante à droite si, et seulement si,* $\left(\mathcal{M}, p_{\mathcal{F}}\,\bar{p}, \bar{\mathcal{H}}, \bar{\Gamma}\right)$ *est résolvante à droite.*

Remarque. — Soit $(\mathcal{M}, p, \mathcal{H}, \Gamma)$ une catégorie d'homomorphismes. Pour que (S, ι, s) soit un monomorphisme strict [2] de $\mathcal{H}$, il suffit que s soit une sous-structure de S et qu'il existe une famille d'éléments $(\mathrm{S}', h_i, \mathrm{S})$, où $i \in \mathrm{I}$, telle que $p(s)$ soit la classe des x pour lesquels on a $h_i(x) = h_j(x)$, pour tout $i \in \mathrm{I}$ et $j \in \mathrm{I}$. Soient $h \in \mathcal{H}$ et $h' \in \mathcal{H}$; si (h, h')

admet un p-noyau s, alors s est un noyau de (h, h') dans $\mathcal{H}$ [2]. Si $\mathcal{H}$ est saturé au-dessus de $\mathcal{M}$, pour tout monomorphisme strict (S, g, S') de $\mathcal{H}$ tel que g soit injective, il existe une sous-structure s de S telle que $(s, \gamma, S') \in \Gamma$; mais un noyau d'un couple (h, h') n'est pas toujours isomorphe à un p-noyau de (h, h').

II. — **Catégories structurées.**

1. Catégories d'homomorphismes a produits finis. — Soit $\mathcal{M}_0$ une classe de classes contenant avec une classe toutes ses sous-classes, avec deux classes leur produit. Soit $\mathcal{M}$ la catégorie de toutes les applications de $M \in \mathcal{M}_0$ dans $M' \in \mathcal{M}_0$.

Définition 1. — *Nous dirons que $(\mathcal{M}, p, \mathcal{H}, \Gamma)$ est une catégorie d'homomorphismes* à produits finis *si $(\mathcal{M}, p, \mathcal{H}, \Gamma)$ est une catégorie d'homomorphismes telle que Γ soit le groupoïde des éléments inversibles de $\mathcal{H}$ et que, pour tout couple $(s_1, s_2) \in \mathcal{H}_0 \times \mathcal{H}_0$, il existe une unité $s_1 \times s_2$ de $\mathcal{H}$ vérifiant les conditions suivantes :*

(1)
$$p(s_1 \times s_2) = p(s_1) \times p(s_2).$$

(2) *Soit p_i la projection canonique de $p(s_1) \times p(s_2)$ sur $p(s_i)$, où $i = 1, 2$:*

$$p_i(x_1, x_2) = x_i \quad \textit{pour tout} \quad (x_1, x_2) \in p(s_1) \times p(s_2).$$

Alors on a

$$\overline{p}_i = (s_i, p_i, s_1 \times s_2) \in \mathcal{H}.$$

(3) *Les relations $(s_i, h_i, s) \in \mathcal{H}$, $i = 1, 2$, entraînent*

$$(s_1 \times s_2, [h_1, h_2], s) \in \mathcal{H} \quad \textit{où} \quad [h_1, h_2](z) = (h_1(z), h_2(z)) \quad \textit{pour tout} \quad z \in p(s).$$

Ces conditions signifient que le couple (s_1, s_2) admet $(s_1 \times s_2; \overline{p}_1, \overline{p}_2)$ pour produit [4] dans $\mathcal{H}$.

Proposition 1. — *Le produit $s_1 \times s_2$ est complètement déterminé par les conditions de la définition.*

En effet si S est un autre produit de (s_1, s_2) vérifiant les conditions (1), (2) et (3), on a

$$(S, \gamma, s_1 \times s_2) \in \Gamma \quad \text{avec} \quad \gamma = p(s_1) \times p(s_2),$$

d'où $S = s_1 \times s_2$, puisque $(\mathcal{C}, p, \Gamma)$ est une espèce de structures.

Nous supposerons désormais que $(\mathcal{M}, p, \mathcal{H}, \Gamma)$ est une catégorie d'homomorphismes à produits finis.

Proposition 2. — *Soient $\overline{f}_i = (s'_i, f_i, s_i) \in \mathcal{H}$, où $i = 1, 2$. Alors on a*

$$(s'_1 \times s'_2, f_1 \times f_2, s_1 \times s_2) \in \mathcal{H},$$

avec

$$(f_1 \times f_2)\,(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2)) \qquad \textit{pour tout} \quad (x_1, x_2) \in p(s_1) \times p(s_2).$$

Avec les notations de la proposition 2, nous poserons

$$\bar{f}_1 \times \bar{f}_2 = (s'_1 \times s'_2, f_1 \times f_2, s_1 \times s_2).$$

PROPOSITION 3. — *Les relations*

$$s'_1 \propto s_1 \quad \textit{et} \quad s'_2 \propto s_2, \qquad s_i \in \mathcal{H}_0, \qquad s'_i \in \mathcal{H}_0,$$

entraînent

$$s'_1 \times s'_2 \quad \propto \quad s_1 \times s_2.$$

En effet, on a

$$(s_1 \times s_2, \iota \times \iota, s'_1 \times s'_2) \in \mathcal{H};$$

soit $(s_1 \times s_2, g, \mathrm{S}) \in \mathcal{H}$ tel que $g(p(\mathrm{S})) \subset p(s'_1) \times p(s'_2)$. Comme $(s_i, p_i g, \mathrm{S}) \in \mathcal{H}$ et $p_i g(p(\mathrm{S})) \subset p(s'_i)$, où $i = 1, 2$, on a aussi $(s'_i, p_i g, \mathrm{S}) \in \mathcal{H}$, d'où

$$(s'_1 \times s'_2, [p_1 g, p_2 g], \mathrm{S}) = (s'_1 \times s'_2, g, \mathrm{S}) \in \mathcal{H}.$$

Donc

$$(s'_1 \times s'_2) \quad \propto \quad (s_1 \times s_2).$$

PROPOSITION 4. — *Les applications*

$$(\bar{f}_1, \bar{f}_2) \;\to\; \bar{f}_1 \times \bar{f}_2 \qquad \textit{et} \qquad (\bar{f}_1, \bar{f}_2) \;\to\; \bar{f}_2 \times \bar{f}_1$$

sont deux foncteurs équivalents de $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ *vers* $\mathcal{H}$. *Les applications*

$$(\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3) \;\to\; (\bar{f}_1 \times \bar{f}_2) \times \bar{f}_3 \qquad \textit{et} \qquad (\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3) \;\to\; \bar{f}_1 \times (\bar{f}_2 \times \bar{f}_3)$$

sont deux foncteurs équivalents de $\mathcal{H} \times \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ *vers* $\mathcal{H}$.

Ceci résulte des propriétés du foncteur-produit [3 *d*] dans $\mathcal{M}$:

$$(f_1, f_2) \;\to\; f_1 \times f_2.$$

La première équivalence associe à $(s_1, s_2) \in \mathcal{H}_0 \times \mathcal{H}_0$ le triplet $(s_2 \times s_1, \gamma, s_1 \times s_2)$ où $\gamma(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$. La deuxième équivalence associe à (s_1, s_2, s_3) le triplet $(s_1 \times (s_2 \times s_3), \gamma', (s_1 \times s_2) \times s_3)$, où

$$\gamma'((x_1, x_2), x_3) = (x_1, (x_2, x_3)), \qquad x_i \in p(s_i).$$

DÉFINITION 2. — *On appellera* sous-catégorie de $\mathcal{H}$ stable par produit *une sous-catégorie* $\mathcal{H}'$ *de* $\mathcal{H}$ *telle que, si* $\bar{f}_i \in \mathcal{H}'$, *où* $i = 1, 2$, *on ait*

$$\bar{f}_1 \times \bar{f}_2 \in \mathcal{H}'.$$

Remarquons que, même si Γ est contenu dans $\mathcal{H}'$, cette définition n'entraîne pas que $(\mathcal{M}, p, \mathcal{H}', \Gamma)$ soit une catégorie d'homomorphismes à produits finis.

Exemple. — Γ est une sous-catégorie de $\mathcal{H}$ stable par produit, l'inverse de $f_1 \times f_2$, où $f_1 \in \Gamma$ et $f_2 \in \Gamma$, étant $(f_1^{-1} \times f_2^{-1})$.

2. Définition des catégories et groupoïdes structurés. — Nous désignerons encore par $(\mathcal{M}, p_{\mathcal{F}}, \mathcal{F}, \mathcal{F}_\gamma)$ la catégorie d'homomorphismes (§ I, n° 3) dans laquelle $\mathcal{F}$ est la catégorie des foncteurs $(\overline{\mathcal{C}}^\perp, \mathrm{F}, \mathcal{C}^\perp)$ tels que $(\overline{\mathcal{C}}, \mathrm{F}, \mathcal{C}) \in \mathcal{M}$, et $p_{\overline{\mathcal{F}}}$ le foncteur

$$(\overline{\mathcal{C}}^\perp, \mathrm{F}, \mathcal{C}^\perp) \to (\overline{\mathcal{C}}, \mathrm{F}, \mathcal{C}).$$

Nous désignerons par $\mathcal{H}'$ et $\mathcal{H}''$ deux sous-catégories de $\mathcal{H}$ contenant Γ.

Définition 3. — *Nous appellerons* catégorie $\mathcal{H}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')$-structurée [*resp.* $\mathcal{H}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H}'')$-structurée] *un couple* $(\mathcal{C}^\cdot, s)$, *où* $\mathcal{C}^\cdot \in \mathcal{F}_0$, $s \in \mathcal{H}_0$ *et* $p(s) = \mathcal{C}$, *vérifiant les conditions suivantes :*

(1) *Il existe* $s_0 \in \mathcal{H}_0$ *tel que* $p(s_0) = \mathcal{C}_0^\cdot$, $(s, \iota, s_0) \in \mathcal{H}$ *et* $(s_0 \times s_0, [\beta, \alpha], s) \in \mathcal{H}'$ [*resp.* $(s_0, \alpha, s) \in \mathcal{H}'$ *et* $(s_0, \beta, s) \in \mathcal{H}'$].

(2) *Soit* $\mathcal{C}^\cdot \star \mathcal{C}^\cdot$ *la classe des couples* $(f', f) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ *tels que* $f'.f$ *soit défini et* $\varkappa^\cdot$ *l'application* $(f', f) \to f'.f$, *où* $(f', f) \in \mathcal{C}^\cdot \star \mathcal{C}^\cdot$. *Il existe* $s' \underset{p}{\propto} s \times s$ *tel que* $p(s') = \mathcal{C}^\cdot \star \mathcal{C}^\cdot$ *et l'on a*

$$(s, \varkappa^\cdot, s') \in \mathcal{H}''.$$

En particulier une catégorie $\mathcal{H}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$-structurée sera appelée *catégorie $\mathcal{H}$-structurée.*

Proposition 5. — *Pour que* $(\mathcal{C}^\cdot, s)$ *soit une catégorie* $\mathcal{H}(\mathcal{H}, \mathcal{H}'')$-*structurée, il faut et il suffit que* $(\mathcal{C}^\cdot, s)$ *soit une catégorie* $\mathcal{H}((\mathcal{H}, \mathcal{H}), \mathcal{H}'')$-*structurée.*

En effet, si $(\mathcal{C}^\cdot, s)$ est $\mathcal{H}((\mathcal{H}, \mathcal{H}), \mathcal{H}'')$-structurée, on a

$$((s_0 \times s_0), [\beta, \alpha], s) \in \mathcal{H}$$

par définition du produit dans $\mathcal{H}$. Inversement, la relation

$$(s_0 \times s_0, [\beta, \alpha], s) \in \mathcal{H}$$

entraîne

$$(s_0, p_1[\beta, \alpha], s) = (s_0, \alpha, s) \in \mathcal{H} \quad \text{et} \quad (s_0, \beta, s) \in \mathcal{H}.$$

Une catégorie $\mathcal{H}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')$-structurée [resp. $\mathcal{H}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H}'')$-structurée] est aussi une catégorie $\mathcal{H}$-structurée.

Proposition 6. — *Soit* $(\mathcal{C}^\cdot, s)$ *une catégorie* $\mathcal{H}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')$- [*resp.* $\mathcal{H}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H}'')$-] *structurée*; *l'élément* s_0 *défini par la condition* (1) *est une sous-structure de s; par suite il est unique.*

En effet, soit s_0 un élément vérifiant la condition (1). Soit $(s, g, S) \in \mathcal{H}$ tel que $g(p(s)) \subset \mathcal{C}^{\cdot}_0$. Alors on a

$$(s_0, \alpha, s).(s, g, S) = (s_0, \alpha g, S) \in \mathcal{H} \quad \text{et} \quad \alpha g(x) = g(x) \quad \text{pour tout} \quad x \in p(S).$$

Donc

$$(s_0, g, S) \in \mathcal{H} \quad \text{et} \quad s_0 \underset{p}{\propto} s.$$

Il résulte du corollaire du théorème 1 (§ I) que s_0 est unique.

Définition 4. — *Nous appellerons* groupoïde $\mathcal{H}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')$-structuré [*resp.* groupoïde $\mathcal{H}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H}'')$-structuré] *un couple* $(G^{\cdot}, s)$ *vérifiant les conditions suivantes :*

(1) $G^{\cdot}$ *est un groupoïde.*

(2) $(G^{\cdot}, s)$ *est une catégorie* $\mathcal{H}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')$- [*resp.* $\mathcal{H}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H}'')$-] *structurée.*

(3) *On a* $(s, j, s) \in \mathcal{H}$, *où* $j(g) = g^{-1}$ *pour tout* $g \in G$.

De la condition (3) résulte $(s, j, s) \in \Gamma$.

Définition 5. — *On appellera* foncteur $\mathcal{H}(\mathcal{H}', \mathcal{H}')$-structuré [*resp.* $\mathcal{H}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H}'')$-structuré] *un triplet* $((\mathcal{C}^{\cdot}_1, s_1), F, (\mathcal{C}^{\cdot}, s))$ *vérifiant les conditions suivantes :*

$(\mathcal{C}^{\cdot}, s)$ *et* $(\mathcal{C}^{\cdot}_1, s_1)$ *sont des catégories* $\mathcal{H}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')$*-structurées* [*resp.* $\mathcal{H}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H}'')$*-structurées*].

On a

$$(\mathcal{C}^{\cdot}_1, \mathcal{F}, \mathcal{C}^{\cdot}) \in \mathcal{F} \quad \text{et} \quad (s_1, F, s) \in \mathcal{H}.$$

Soit $\overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')_0$ la classe de toutes les catégories $\mathcal{H}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')$-structurées et $\overline{\mathcal{G}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')_0$ la classe de tous les groupoïdes $\mathcal{H}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')$-structurés. Soit $\overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')$ la catégorie de tous les foncteurs structurés, dont la classe des unités est identifiée à $\overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')_0$. Désignons par :

$\overline{p}$ l'application $((\mathcal{C}^{\cdot}_1, s_1), F, (\mathcal{C}^{\cdot}, s)) \to (\mathcal{C}^{\cdot}_1, F, \mathcal{C}^{\cdot})$ de $\overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')$ dans $\mathcal{F}$;

$\overline{p}_{\mathcal{H}}$ l'application $((\mathcal{C}^{\cdot}_1, s_1), F, (\mathcal{C}^{\cdot}, s)) \to (s_1, F, s)$ de $\overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')$ dans $\mathcal{H}$.

Soit $\overline{\Gamma}$ le groupoïde des éléments inversibles de $\mathcal{H}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')$. Appelons $\overline{\mathcal{G}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')$ (resp. $\overline{\Gamma}_{\mathcal{G}}$) la sous-catégorie pleine de $\overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')$ (resp. de $\overline{\Gamma}$) admettant $\overline{\mathcal{G}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')_0$ pour classe de ses unités.

On définit d'une manière analogue,

$$\overline{\mathcal{H}}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H}'') \quad [\text{resp. } \overline{\mathcal{G}}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H}'')]$$

dont le groupoïde des éléments inversibles sera noté $\overline{\Gamma}'$ (resp. $\overline{\Gamma}'_{\mathcal{G}}$).

En particulier, nous écrirons

$$\overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}, \mathcal{H}) = \overline{\mathcal{H}} = \overline{\mathcal{H}}((\mathcal{H}, \mathcal{H}), \mathcal{H}).$$

Remarque. — Les deux foncteurs p et $p_{\mathcal{F}}$ déterminent la catégorie induite $p^\star(\mathcal{F}, p_{\mathcal{F}})$, équivalente à $p^\star_{\mathcal{F}}(\mathcal{H}, p)$, dont les éléments (*voir* [3 *a*]) sont les couples $(\overline{\mathrm{F}}, \bar{h}) \in \mathcal{F} \times \mathcal{H}$ tels que $p_{\mathcal{F}}(\overline{\mathrm{F}}) = p(\bar{h})$. On peut identifier $\overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')$ à la sous-catégorie pleine de $p^\star(\mathcal{F}, p_{\mathcal{F}})$ ayant pour unités les catégories $\mathcal{H}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')$-structurées. Nous allons démontrer que $\overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')$ est une sous-catégorie d'homomorphismes de la catégorie d'homomorphismes $p^\star(\mathcal{F}, p_{\mathcal{F}})$ au-dessus de $\mathcal{F}$. Un élément quelconque de $p^\star(\mathcal{F}, p_{\mathcal{F}})$ pourrait être appelé foncteur structuré dans $\mathcal{H}$, au sens vague.

Théorème 1. — *$(\mathcal{F}, \bar{p}, \overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}''), \overline{\Gamma})$ est une catégorie d'homomorphismes dont $(\mathcal{F}, \bar{p}, \overline{\mathcal{G}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}''), \overline{\Gamma}_{\mathcal{G}})$ est une sous-catégorie d'homomorphismes.*

Démonstration. — Le seul point à démontrer est que les conditions

$$\overline{\mathrm{F}} = ((\mathcal{C}^\cdot_1, s_1), \mathrm{F}, (\mathcal{C}^\cdot, s)) \in \overline{\Gamma} \qquad \text{et} \qquad (\mathcal{C}^\cdot, \bar{s}) \in \overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')_0$$

entraînent l'existence de $(\mathcal{C}^\cdot_1, \bar{s}_1) \in \overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')_0$ tel que $(\bar{s}_1, \mathrm{F}, \bar{s}) \in \mathcal{H}$. Puisque $(\mathcal{M}, p, \Gamma)$ est une espèce de structures, il existe $(\bar{s}_1, \mathrm{F}, \bar{s}) \in \Gamma$. Montrons qu'on a $(\mathcal{C}^\cdot_1, \bar{s}_1) \in \overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')_0$. Soient $s_0 \propto s$ et $s^1_0 \propto s_1$ tels que $p(s_0) = \mathcal{C}^\cdot_0$ et $p(s^1_0) = (\mathcal{C}^\cdot_1)_0$. D'après la proposition 6 (§ I), on a

$$(s^1_0, \mathrm{F}\iota, s_0) \in \Gamma \qquad \text{et} \qquad (s^1_0 \times s^1_0, (\mathrm{F} \times \mathrm{F})\iota, s_0 \times s_0) \in \Gamma.$$

Il en résulte l'existence de $\bar{s}^1_0 \in \mathcal{H}_0$ tel que

$$p(\bar{s}^1_0) = (\mathcal{C}^\cdot_1)_0 \qquad \text{et} \qquad (\bar{s}^1_0, \mathrm{F}\iota, \bar{s}_0) \in \Gamma, \qquad \text{où} \quad \bar{s}_0 \propto \bar{s} \qquad \text{et} \qquad p(\bar{s}_0) = \mathcal{C}^\cdot_0.$$

Alors $(\bar{s}^1_0 \times \bar{s}^1_0, (\mathrm{F} \times \mathrm{F})\iota, \bar{s}_0 \times \bar{s}_0) \in \Gamma$ et, d'après la proposition 6 (§ I), $\bar{s}^1_0 \propto \bar{s}_1$. Comme $\mathcal{H}' \supset \Gamma$, on en déduit

$$(\bar{s}^1_0 \times \bar{s}^1_0, [\beta, \alpha], \bar{s}_1) = (\bar{s}^1_0 \times \bar{s}^1_0, (\mathrm{F} \times \mathrm{F})\iota, \bar{s}_0 \times \bar{s}_0) . (\bar{s}_0 \times \bar{s}_0, [\beta, \alpha], \bar{s}) . (\bar{s}, \mathrm{F}^{-1}, \bar{s}_1) \in \mathcal{H}'.$$

Soient $s' \propto s \times s$ tel que $p(s') = \mathcal{C}^\cdot \star \mathcal{C}^\cdot$ et $s'_1 \propto s_1 \times s_1$ tel que $p(s'_1) = \mathcal{C}^\cdot_1 \star \mathcal{C}^\cdot_1$; en vertu de la proposition 7 (§ I), on a

$$(s'_1, (\mathrm{F} \times \mathrm{F})\iota, s') \in \Gamma.$$

Soit $\bar{s}' \propto \bar{s} \times \bar{s}$ tel que $p(\bar{s}') = p(s')$; il existe

$$(\bar{s}'_1, (\mathrm{F} \times \mathrm{F})\iota, \bar{s}') \in \Gamma, \qquad \text{avec} \quad p(\bar{s}'_1) = p(s'_1)$$

et, d'après la proposition 6 (§ I), $\bar{s}'_1 \propto \bar{s}_1 \times \bar{s}_1$. Comme $\mathcal{H}''$ contient Γ :

$$(\bar{s}_1, \varkappa^\cdot_1, \bar{s}'_1) = (\bar{s}_1, \mathrm{F}, \bar{s}) . (\bar{s}, \varkappa^\cdot, \bar{s}') . (\bar{s}'_1, (\mathrm{F} \times \mathrm{F})\iota, \bar{s}')^{-1} \in \mathcal{H}''.$$

Donc

$$(\mathcal{C}^\cdot_1, \bar{s}_1) \in \overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')_0 \qquad \text{et} \qquad ((\mathcal{C}^\cdot_1, \bar{s}_1), \mathrm{F}, (\mathcal{C}^\cdot, \bar{s})) \in \overline{\Gamma}.$$

THÉORÈME 2. — $(\mathcal{F}, \overline{p}, \overline{\mathcal{H}}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H}''), \Gamma')$ *est une catégorie d'homomorphismes.*

La démonstration est analogue à celle du théorème 1.

THÉORÈME 3. — *Si* $\mathcal{H}$ *est saturé au-dessus de* $\mathcal{M}$, *alors* $(\mathcal{F}, \overline{p}, \overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}''), \overline{\Gamma})$, $(\mathcal{M}, p_{\mathcal{F}}, \overline{p}\,\overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}''), \overline{\Gamma})$ *et* $(\mathcal{H}, \overline{p}_{\mathcal{H}}, \overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}''), \overline{\Gamma})$ *sont des catégories d'homomorphismes.*

La démonstration de ce théorème est analogue à celle du théorème 1, après utilisation de la proposition 15 (§ I).

DÉFINITION 6. — *On appellera* sous-catégorie (*resp.* sous-groupoïde) $\mathcal{H}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')$-structuré de $(\mathcal{C}^{\cdot}, s) \in \overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')_0$ *une sous-structure de* $(\mathcal{C}^{\cdot}, s)$ *dans* $(\mathcal{F}, \overline{p}, \overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}''), \overline{\Gamma})$ [*resp. dans* $(\mathcal{F}, \overline{p}, \overline{\mathcal{G}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}''), \overline{\Gamma}_{\mathcal{G}})$]. *On définit de même une* sous-catégorie (*resp. un* sous-groupoïde) $\mathcal{H}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H}'')$-structuré.

Avant d'étudier les propriétés des catégories et groupoïdes structurés nous allons donner quelques exemples.

3. PREMIERS EXEMPLES. — I. Soit $(\mathcal{M}, \theta, \tilde{\mathcal{T}}, \mathcal{T})$ la catégorie d'homomorphismes définie au paragraphe I (n° 3).

DÉFINITION 7. — *Une catégorie* (*resp. un groupoïde*) $\tilde{\mathcal{T}}$*-structuré est appelé* catégorie (*resp.* groupoïde) topologique.

Cette définition coïncide avec celle de [3 *b*]. En effet, si $(\mathcal{C}^{\cdot}, s)$ est une catégorie topologique au sens de [3 *b*], la condition (1) de la définition d'une catégorie $\tilde{\mathcal{T}}$-structurée est vérifiée en prenant pour s_0 la topologie induite sur $\mathcal{C}^{\cdot}_0$ par la topologie donnée sur $\mathcal{C}$. De plus la condition (2) est vérifiée, s' étant la topologie induite par $s \times s$ sur $\mathcal{C}^{\cdot} \star \mathcal{C}^{\cdot}$. Ainsi la définition d'une catégorie topologique peut encore s'exprimer sous la forme :

1° Les applications α et β sont des applications continues de s dans s.

2° L'application $\varkappa^{\cdot}$ est une application continue de s' dans s, où s' est la topologie induite par $s \times s$ sur $\mathcal{C}^{\cdot} \star \mathcal{C}^{\cdot}$.

Nous verrons plus loin que la définition d'une catégorie $\mathcal{H}$-structurée peut toujours être ainsi simplifiée dans le cas où $(\mathcal{M}, p, \mathcal{H}, \Gamma)$ est résolvante à droite.

II. Soit $\tilde{\mathcal{C}}^r$ (resp. $\mathcal{C}^r_1$) la catégorie des applications r fois différentiables d'une variété r fois différentiable dans une autre (resp. sur une autre, de rang localement constant); $\tilde{\mathcal{C}}^r$ sera considéré comme catégorie d'homomorphismes au-dessus de $\tilde{\mathcal{E}}$.

Définition 8. — *Une catégorie (resp. un groupoïde)* $\tilde{\mathcal{C}}^r((\tilde{\mathcal{C}}^r_1, \mathcal{C}^r_1), \tilde{\mathcal{C}}^r)$*-structuré est appelé* catégorie (*resp.* groupoïde) *r* fois différentiable.

Cette définition coïncide avec celle de [3 *b*].

III. Soit $\mathcal{D}_0$ la classe des demi-groupes $D^{\perp}$ (c'est-à-dire D est une classe que nous supposerons appartenir à $\mathcal{M}_0$, munie d'une loi de composition $\perp$ associative). Soit $\mathcal{D}$ la classe des homomorphismes $(D_1^{\perp}, f, D^{\perp})$ entre demi-groupes, c'est-à-dire f est une application de D dans D_1 telle que

$$f(z' \perp z) = f(z') \perp f(z) \qquad \text{quels que soient } z \text{ et } z' \in D.$$

$\mathcal{D}$ est une catégorie d'homomorphismes au-dessus de $\mathcal{M}$ pour la projection $(D_1^{\perp}, f, D^{\perp}) \to (D_1, f, D)$.

Remarquons qu'on a $(D_1^{\perp}, \iota, D^{\perp}) \in \mathcal{D}$ si, et seulement si, $D^{\perp}$ est un sous-demi-groupe de $D_1^{\perp}$ muni de la loi de composition induite par $\perp$.

Proposition 7. — *Pour que* $(\mathcal{C}^{\bullet}, \perp)$ *soit une catégorie* $\mathcal{D}$*-structurée il faut et il suffit que* $\perp$ *soit une loi de composition associative partout définie sur* $\mathcal{C}$ *et que l'application*

$$(g, f) \to g \perp f, \qquad \textit{où} \quad g \in \mathcal{C} \qquad \textit{et} \qquad f \in \mathcal{C},$$

soit un foncteur de $\mathcal{C}^{\bullet} \times \mathcal{C}^{\bullet}$ *vers* $\mathcal{C}^{\bullet}$.

Démonstration. — Soit $(\mathcal{C}^{\bullet}, \perp)$ une catégorie $\mathcal{D}$-structurée; d'après la remarque précédente, $\mathcal{C}^{\bullet}_0$ est un sous-demi-groupe de $\mathcal{C}^{\perp}$, donc

$$e \perp e' \in \mathcal{C}^{\bullet}_0 \quad \text{si} \quad e \in \mathcal{C}^{\bullet}_0 \quad \text{et} \quad e' \in \mathcal{C}^{\bullet}_0.$$

D'après la même remarque, les conditions $(g, f) \in \mathcal{C}^{\bullet} \star \mathcal{C}^{\bullet}$ et $(g', f') \in \mathcal{C}^{\bullet} \star \mathcal{C}^{\bullet}$ entraînent

$$(g' \perp g, f' \perp f) = ((g', f') \perp (g, f)) \in \mathcal{C}^{\bullet} \star \mathcal{C}^{\bullet};$$

de plus, $\kappa^{\bullet}$ étant un homomorphisme du demi-groupe $(\mathcal{C}^{\bullet} \star \mathcal{C}^{\bullet})^{\perp}$ dans $\mathcal{C}^{\perp}$, on a

$$(g' \perp g) \cdot (f' \perp f) = (g' \cdot f') \perp (g \cdot f)$$

et les conditions de la proposition sont vérifiées. Inversement supposons ces conditions remplies; puisque $(g, f) \to g \perp f$ est un foncteur, on a

$$\alpha(g \perp f) = \alpha(g) \perp \alpha(f) \qquad \text{et} \qquad \beta(g \perp f) = \beta(g) \perp \beta(f);$$

les conditions $(g, f) \in \mathcal{C}^{\bullet} \star \mathcal{C}^{\bullet}$ et $(g', f') \in \mathcal{C}^{\bullet} \star \mathcal{C}^{\bullet}$ entraînent

$$(g' \cdot f') \perp (g \cdot f) = (g' \perp g) \cdot (f' \perp f).$$

Donc $(\mathcal{C}^{\bullet}, \perp)$ est $\mathcal{D}$-structurée.

IV. Dans l'exemple III, on peut remplacer $\mathcal{D}$ par la sous-catégorie $\mathcal{D}'$ (resp. $\mathcal{D}''$) de $\mathcal{D}$ formée des triplets $(D_1^{\perp}, f, D^{\perp})$ tels que $D^{\perp}$ et $D_1^{\perp}$ soient des demi-groupes admettant une unité $\mathrm{1}$ (resp. un élément o tel que $z \perp \mathrm{o} = \mathrm{o} \perp z = \mathrm{o}$ pour tout $z \in \mathrm{D}$) et qu'on ait

$$f(1) = 1 \qquad [\text{resp. } f(\mathrm{o}) = \mathrm{o}].$$

Pour que $(\mathcal{C}^{\boldsymbol{\cdot}}, \perp)$ soit $\mathcal{D}'$-(resp. $\mathcal{D}''$)-structurée il faut et il suffit que $(\mathcal{C}^{\boldsymbol{\cdot}}, \perp)$ soit une catégorie $\mathcal{D}$-structurée et que de plus :

$$1 \in \mathcal{C}^{\boldsymbol{\cdot}}_0 \qquad (\text{resp. } \mathrm{o} \in \mathcal{C}^{\boldsymbol{\cdot}}_0).$$

Une catégorie $\mathcal{D}'$-structurée est une catégorie avec multiplication strictement associative au sens de Benabou [1].

V. Soit G un demi-groupe. Soit [G] la catégorie définie de la façon suivante :

Une unité de [G] est un couple (Z, χ), où $\mathrm{Z} \in \mathcal{M}_0$ et χ est une application de $\mathrm{G} \times \mathrm{Z}$ dans Z, c'est-à-dire une loi de composition externe sur Z, le composé $\chi(\gamma, z)$, où $\gamma \in \mathrm{G}$ et $z \in \mathrm{Z}$, étant noté $\gamma \chi z$. On suppose, de plus, vérifié l'axiome

$$(1) \qquad (\gamma'\gamma)\chi z = \gamma'\chi(\gamma\chi z), \qquad \text{où} \quad \gamma \in \mathrm{G}, \qquad \gamma' \in \mathrm{G} \qquad \text{et} \qquad z \in \mathrm{Z}.$$

Un morphisme de [G] est un triplet $((\mathrm{Z}', \chi'), \mathrm{T}, (\mathrm{Z}, \chi))$, où $(\mathrm{Z}, \chi) \in [\mathrm{G}]_0$, $(\mathrm{Z}', \chi') \in [\mathrm{G}]_0$, $(\mathrm{Z}', \mathrm{T}, \mathrm{Z}) \in \mathcal{M}$ et

$$\gamma \chi \mathrm{T}(z) = \mathrm{T}(\gamma \chi z) \qquad \text{pour tout} \quad z \in \mathrm{Z} \qquad \text{et tout} \quad \gamma \in \mathrm{G}.$$

[G] est une catégorie d'homomorphismes au-dessus de $\mathcal{M}$ relativement à la projection

$$((\mathrm{Z}', \chi'), \mathrm{T}, (\mathrm{Z}, \chi)) \to (\mathrm{Z}', \mathrm{T}, \mathrm{Z}).$$

Soit [G, o] la sous-catégorie pleine de [G] ayant pour unités les couples (Z, χ) vérifiant l'axiome supplémentaire :

(2) Il existe $\mathrm{o} \in \mathrm{Z}$ tel que $\gamma \chi \mathrm{o} = \mathrm{o}$ pour tout $\gamma \in \mathrm{G}$.

Si G admet une unité $\mathrm{1}$, soit [G, 1] la sous-catégorie pleine de [G] ayant pour unités les couples (Z, χ) vérifiant la condition

(2′) $1 \chi z = z$ pour tout $z \in \mathrm{Z}$.

Proposition 3. — *Soit $\mathcal{C}^{\boldsymbol{\cdot}}$ une catégorie : pour que $(\mathcal{C}^{\boldsymbol{\cdot}}, \chi)$ soit une catégorie* [G]*-structurée (resp.* [G, o]*-structurée, resp.* [G, 1]*-structurée), il faut et il suffit que les conditions suivantes soient remplies :*

(1) $(\mathcal{C}^{\boldsymbol{\cdot}}, \chi) \in [\mathrm{G}]_0$ *(resp.* $(\mathcal{C}, \chi) \in [\mathrm{G}, \mathrm{o}]_0$, *resp.* $(\mathcal{C}^{\boldsymbol{\cdot}}, \chi) \in [\mathrm{G}, 1]_0$).

(2) $(\gamma \chi \mathcal{C}^{\boldsymbol{\cdot}}_0) \subset \mathcal{C}^{\boldsymbol{\cdot}}_0$ *pour tout* $\gamma \in \mathrm{G}$.

(3) *Si* $(g, f) \in \mathcal{C}^{\boldsymbol{\cdot}} \star \mathcal{C}^{\boldsymbol{\cdot}}$, *on a*

$$(\gamma \chi g, \gamma \chi f) \in \mathcal{C}^{\boldsymbol{\cdot}} \star \mathcal{C}^{\boldsymbol{\cdot}} \qquad \text{pour tout} \quad \gamma \in \mathrm{G}$$

et

$$(\gamma \chi g) \cdot (\gamma \chi f) = \gamma \chi (g \cdot f).$$

DÉFINITION 9. — *Une catégorie* [G]*-structurée sera appelée* catégorie à demi-groupe G d'opérateurs. *Si* G *est un groupe, une catégorie* [G, 1]*-structurée sera appelée* catégorie à groupe G d'opérateurs.

Exemples. — 1° Soit $(\mathcal{C}^+, \chi)$ une catégorie à demi-groupe d'opérateurs G. Si $\mathcal{C}^+$ est un groupe abélien et si $\mathcal{C}^{\cdot} = \mathrm{G}$ est commutatif, alors $(\mathcal{C}^+, \chi)$ est un anneau commutatif.

2° Soit E un espace topologique et G un groupe d'opérateurs sur E tel que, pour tout $\gamma \in \mathrm{G}$, l'application

$$\tilde{\gamma}: \quad x \to \gamma x, \qquad \text{où} \quad x \in \mathrm{E},$$

soit un automorphisme de E. La catégorie des jets locaux des applications continues de E dans E est alors une catégorie à groupe d'opérateurs G, le composé $\gamma j_x^{\lambda} f$ étant $(j_{x'}^{\lambda}\, \tilde{\gamma})\, (j_x^{\lambda} f)\, (j_x^{\lambda}\, \tilde{\gamma})^{-1}$, où $x' = f(x)$.

4. CATÉGORIES DOUBLES. — Soit $(\mathfrak{M}, p_{\mathcal{F}}, \mathcal{F}, \mathcal{F}_{\gamma})$ la catégorie d'homomorphismes définie au paragraphe I.

DÉFINITION 10. — *Une catégorie* $\mathcal{F}$*-structurée sera appelée* catégorie double.

PROPOSITION 9. — *Soit* $\mathcal{C}^{\cdot}$ *une catégorie et* $\mathcal{C}_1$ *une sous-classe de* $\mathcal{C}$. *La relation* $(\mathcal{C}^{\cdot}, \iota, \mathcal{C}_1^{\perp}) \in \mathcal{F}$ *entraîne que* $\mathcal{C}_1^{\perp}$ *est une sous-catégorie de* $\mathcal{C}^{\cdot}$ *munie de la loi de composition induite par celle de* $\mathcal{C}^{\cdot}$.

Démonstration. — Soient $f \in \mathcal{C}_1$ et $f' \in \mathcal{C}_1$; on a $\alpha^{\perp}(f) = \alpha^{\cdot}(f)$ et, si $f' \perp f$ est défini, $f' \perp f = f' . f$ puisque ι est un foncteur. Par suite, si $f'.f$ est défini, on aura

$$\alpha^{\perp}(f') = \alpha^{\cdot}(f') = \beta^{\cdot}(f) = \beta^{\perp}(f),$$

d'où $f' \perp f$ est défini et

$$f' \perp f = f' . f \in \mathcal{C}_1.$$

COROLLAIRE. — *Pour que* $(\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{\perp})$ *soit une catégorie double, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :*

(1) $\mathcal{C}^{\perp}$ *est une catégorie dont* $\mathcal{C}_0^{\cdot}$ *est une sous-catégorie* $(\mathcal{C}_0^{\cdot})^{\perp}$.

(2) $\alpha^{\cdot}$ *et* $\beta^{\cdot}$ *sont des foncteurs de* $\mathcal{C}^{\perp}$ *vers* $(\mathcal{C}_0^{\cdot})^{\perp}$.

(3) $\mathcal{C}^{\cdot} \star \mathcal{C}^{\cdot}$ *est une sous-catégorie* $(\mathcal{C}^{\cdot} \star \mathcal{C}^{\cdot})^{\perp}$ *de* $\mathcal{C}^{\perp} \times \mathcal{C}^{\perp}$ *et* $\varkappa^{\cdot}$ *un foncteur de* $(\mathcal{C}^{\cdot} \star \mathcal{C}^{\cdot})^{\perp}$ *vers* $\mathcal{C}^{\perp}$.

Rappelons que la loi de composition dans la catégorie-produit $\mathcal{C}^{\perp} \times \mathcal{C}^{\perp}$ est définie par

$$((g', g), (f', f)) \to (g' \perp f', g \perp f)$$

si, et seulement si, $g \perp f$ et $g' \perp f'$ sont définis dans $\mathcal{C}^{\perp}$. Dans $\mathcal{C}^{\perp} \times \mathcal{C}^{\perp}$, on a

$$\alpha^{\perp}(g', g) = (\alpha^{\perp}(g'), \alpha^{\perp}(g)) \qquad \text{et} \qquad \beta^{\perp}(g', g) = (\beta^{\perp}(g'), \beta^{\perp}(g)).$$

Théorème 4. — *Soit* $(\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{\perp})$ *une catégorie double; alors* $(\mathcal{C}^{\perp}, \mathcal{C}^{\cdot})$ *est aussi une catégorie double.*

Démonstration. — Soient $z^{\perp} \in \mathcal{C}^{\perp}_0$ et $z'^{\perp} \in \mathcal{C}^{\perp}_0$ tels que $(z'^{\perp}, z^{\perp}) \in \mathcal{C}^{\cdot} \star \mathcal{C}^{\cdot}$. Puisque $(z'^{\perp}, z^{\perp})$ est une unité de $(\mathcal{C}^{\cdot} \star \mathcal{C}^{\cdot})^{\perp}$ et que $\varkappa^{\cdot}$ est un foncteur de $(\mathcal{C}^{\cdot} \star \mathcal{C}^{\cdot})^{\perp}$ vers $\mathcal{C}^{\perp}$, on a $z'^{\perp}.z^{\perp} \in \mathcal{C}^{\perp}_0$. Comme $\alpha^{\cdot}$ est un foncteur de $\mathcal{C}^{\perp}$ vers $(\mathcal{C}^{\cdot}_0)^{\perp}$, $\alpha^{\cdot}(z^{\perp}) \in \mathcal{C}^{\perp}_0$; de même $\beta^{\cdot}(z^{\perp}) \in \mathcal{C}^{\perp}_0$. Donc $\mathcal{C}^{\perp}_0$ est une sous-catégorie $(\mathcal{C}^{\perp}_0)$ de $\mathcal{C}^{\cdot}$. Soient $(f', f) \in \mathcal{C}^{\cdot} \star \mathcal{C}^{\cdot}$; alors $(\alpha^{\perp}(f'), \alpha^{\perp}(f)) \in \mathcal{C}^{\cdot} \star \mathcal{C}^{\cdot}$ puisque $\mathcal{C}^{\cdot} \star \mathcal{C}^{\cdot}$ est une sous-catégorie de $\mathcal{C}^{\perp} \times \mathcal{C}^{\perp}$ et, $\varkappa^{\cdot}$ étant un foncteur, on a

$$\alpha^{\perp}(f').\alpha^{\perp}(f) = \varkappa^{\cdot}(\alpha^{\perp}(f'), \alpha^{\perp}(f)) = \varkappa^{\cdot}(\alpha^{\perp}(f', f)) = \alpha^{\perp}(\varkappa^{\cdot}(f', f)) = \alpha^{\perp}(f'.f).$$

Si $z^{\cdot} \in \mathcal{C}^{\cdot}_0$, on trouve $\alpha^{\perp}(z^{\cdot}) \in \mathcal{C}^{\cdot}_0 \cap \mathcal{C}^{\perp}_0$ puisque $\mathcal{C}^{\cdot}_0$ est une sous-catégorie de $\mathcal{C}^{\perp}$; il en résulte que $\alpha^{\perp}$ est un foncteur de $\mathcal{C}^{\cdot}$ vers $(\mathcal{C}^{\perp}_0)^{\cdot}$; il en est de même pour $\beta^{\perp}$. Soit $\mathcal{C}^{\perp} \star \mathcal{C}^{\perp}$ la classe des couples composables dans $\mathcal{C}^{\perp}$; soit $(g, f) \in \mathcal{C}^{\perp} \star \mathcal{C}^{\perp}$; comme $\alpha^{\cdot}$ est un foncteur de $\mathcal{C}^{\perp}$ vers $(\mathcal{C}^{\cdot}_0)^{\perp}$, on a

$$\alpha^{\cdot}(g \perp f) = \alpha^{\cdot}(g) \perp \alpha^{\cdot}(f) \quad \text{et} \quad (\alpha^{\cdot}(g), \alpha^{\cdot}(f)) \in \mathcal{C}^{\perp} \star \mathcal{C}^{\perp}.$$

Supposons

$$(g, f) \in \mathcal{C}^{\perp} \star \mathcal{C}^{\perp}, \quad (g', f') \in \mathcal{C}^{\perp} \star \mathcal{C}^{\perp}, \quad (g', g) \in \mathcal{C}^{\cdot} \star \mathcal{C}^{\cdot} \quad \text{et} \quad (f', f) \in \mathcal{C}^{\cdot} \star \mathcal{C}^{\cdot}.$$

D'après la condition (3) du corollaire de la proposition 9, on a

$$(g', g) \perp (f', f) = (g' \perp f', g \perp f) \in \mathcal{C}^{\cdot} \star \mathcal{C}^{\cdot}$$

et

$$(g' \perp f').(g \perp f) = (g'.g \perp f'.f).$$

On en déduit que $\mathcal{C}^{\perp} \star \mathcal{C}^{\perp}$ est une sous-catégorie de $\mathcal{C}^{\cdot} \times \mathcal{C}^{\cdot}$ et que l'application $(g, f) \to g \perp f$, où $(g, f) \in \mathcal{C}^{\perp} \star \mathcal{C}^{\perp}$ est un foncteur de $(\mathcal{C}^{\perp} \star \mathcal{C}^{\perp})_{\cdot}$ vers $\mathcal{C}^{\cdot}$. Ceci prouve que $(\mathcal{C}^{\perp}, \mathcal{C}^{\cdot})$ est une catégorie double.

Proposition 10. — *Si* $(\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{\perp})$ *est une catégorie double, on a*

$$\mathcal{C}^{\cdot}_0 \cap \mathcal{C}^{\perp}_0 = (\mathcal{C}^{\cdot}_0)^{\perp}_0 = (\mathcal{C}^{\perp}_0)^{\cdot}_0.$$

En effet, soit $f \in \mathcal{C}$; puisque $\alpha^{\cdot}$ et $\beta^{\cdot}$ sont des foncteurs, de $\mathcal{C}^{\perp}$ vers $\mathcal{C}^{\perp}$, on a les relations

$$\alpha^{\cdot}(\alpha^{\perp}(f)) = \alpha^{\perp}(\alpha^{\cdot}(f)); \qquad \alpha^{\cdot}(\beta^{\perp}(f)) = \beta^{\perp}(\alpha^{\cdot}(f));$$
$$\beta^{\cdot}(\alpha^{\perp}(f)) = \alpha^{\perp}(\beta^{\cdot}(f)); \qquad \beta^{\cdot}(\beta^{\perp}(f)) = \beta^{\perp}(\beta^{\cdot}(f)).$$

Par suite $(\mathcal{C}^{\cdot}_0)^{\perp}_0 = (\mathcal{C}^{\perp}_0)^{\cdot}_0$. Si $z \in \mathcal{C}^{\perp}_0 \cap \mathcal{C}^{\cdot}_0$, on trouve

$$z = \alpha^{\cdot}(z) = \alpha^{\perp}(\alpha^{\cdot}(z)) \in (\mathcal{C}^{\cdot}_0)^{\perp}_0.$$

Définition 11. — *La classe* $(\mathcal{C}^{\cdot}_0)^{\perp}_0$ *sera appelée* classe des sommets *de la catégorie double* $(\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{\perp})$ *et désignée par le symbole* $\mathcal{C}_{00}$.

D'après ce qui précède, si $(\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{\perp})$ est une catégorie double, les conditions suivantes sont vérifiées :

(*a*) $\mathcal{C}^{\cdot}$ est une catégorie.

(*b*) $\mathcal{C}^{\perp}$ est une catégorie.

(*c*) $\alpha^{\cdot}$ et $\beta^{\cdot}$ (resp. $\alpha^{\perp}$ et $\beta^{\perp}$) sont des foncteurs de $\mathcal{C}^{\perp}$ vers $\mathcal{C}^{\perp}$ (resp. de $\mathcal{C}^{\cdot}$ vers $\mathcal{C}^{\cdot}$).

(*d*) Axiome de permutabilité : Si les composés $(g'.g) \perp (f'.f)$ et $(g' \perp f').(g \perp f)$ sont définis, on a

$$(g'.g) \perp (f'.f) = (g' \perp f').(g \perp f).$$

(*e*) $\mathcal{C}^{\perp} \star \mathcal{C}^{\perp}$ est une sous-catégorie $(\mathcal{C}^{\perp} \star \mathcal{C}^{\perp})^{\cdot}$ de $\mathcal{C}^{\cdot} \times \mathcal{C}^{\cdot}$ et l'application $\varkappa^{\perp}$ est un foncteur de $(\mathcal{C}^{\perp} \star \mathcal{C}^{\perp})^{\cdot}$ vers $\mathcal{C}^{\cdot}$.

(*f*) $\mathcal{C}^{\cdot} \star \mathcal{C}^{\cdot}$ est une sous-catégorie $(\mathcal{C}^{\cdot} \star \mathcal{C}^{\cdot})^{\perp}$ de $\mathcal{C}^{\perp} \times \mathcal{C}^{\perp}$ et l'application $\varkappa^{\cdot}$ est un foncteur de $(\mathcal{C}^{\cdot} \star \mathcal{C}^{\cdot})^{\perp}$ vers $\mathcal{C}^{\perp}$.

(*g*) $\mathcal{C}^{\cdot}_0$ (resp. $\mathcal{C}^{\perp}_0$) est stable relativement à $\perp$ (resp. à .).

(*h*) Si les composés $g'.g$, $f'.f$, $g' \perp f'$ et $g \perp f$ sont définis, alors

$$(g'.g) \perp (f'.f) \quad \text{et} \quad (g' \perp f').(g \perp f)$$

sont définis et égaux.

(*i*) Pour tout $f \in \mathcal{C}$, on a

$$\alpha^{\cdot}(\alpha^{\perp}(f)) = \alpha^{\perp}(\alpha^{\cdot}(f)); \qquad \beta^{\cdot}(\beta^{\perp}(f)) = \beta^{\perp}(\beta^{\cdot}(f));$$
$$\alpha^{\cdot}(\beta^{\perp}(f)) = \beta^{\perp}(\alpha^{\cdot}(f)); \qquad \beta^{\cdot}(\alpha^{\perp}(f)) = \alpha^{\perp}(\beta^{\cdot}(f)).$$

THÉORÈME 5. — *Soit $\mathcal{C}$ une classe munie de deux lois de composition . et $\perp$; pour que $(\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{\perp})$ soit une catégorie double, il faut et il suffit que l'un des trois systèmes d'axiomes suivants soit vérifié :*

(1) (*a*), (*b*), (*c*), (*d*).

(2) (*a*), (*b*), (*e*), (*f*), (*i*).

(3) (*a*), (*b*), (*g*), (*h*), (*i*).

Démonstration. — Montrons que le système d'axiomes (1) entraîne que $(\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{\perp})$ est une catégorie double. Soient $z^{\cdot} \in \mathcal{C}^{\cdot}_0$ et $z'^{\cdot} \in \mathcal{C}^{\cdot}_0$; si $z'^{\cdot} \perp z^{\cdot}$ est défini, comme $\alpha^{\cdot}$ est un foncteur, on a

$$\alpha^{\cdot}(z'^{\cdot} \perp z^{\cdot}) = \alpha^{\cdot}(z'^{\cdot}) \perp \alpha^{\cdot}(z^{\cdot}) = z'^{\cdot} \perp z^{\cdot} \in \mathcal{C}^{\cdot}_0;$$

$\alpha^{\perp}$ et $\beta^{\perp}$ étant des foncteurs, on a $\alpha^{\perp}(z^{\cdot}) \in \mathcal{C}^{\cdot}_0$ et $\beta^{\perp}(z^{\cdot}) \in \mathcal{C}^{\cdot}_0$; par conséquent, $\mathcal{C}^{\cdot}_0$ est une sous-catégorie de $\mathcal{C}^{\perp}$. Pour tout $f \in \mathcal{C}$, on a $\alpha^{\cdot}(\alpha^{\perp}(f)) = \alpha^{\perp}(\alpha^{\cdot}(f))$ puisque $\alpha^{\cdot}$ est un foncteur; de même les autres relations de l'axiome (*i*) sont aussi conséquence de l'axiome (*c*). Soit $(f', f) \in \mathcal{C}^{\cdot} \star \mathcal{C}^{\cdot}$; de (*i*) résulte

$$\alpha^{\cdot}(\alpha^{\perp}(f')) = \alpha^{\perp}(\alpha^{\cdot}(f')) = \alpha^{\perp}(\beta^{\cdot}(f)) = \beta^{\cdot}(\alpha^{\perp}(f))$$

et $(\alpha^{\perp}(f'), \alpha^{\perp}(f)) \in \mathcal{C}^{\cdot} \star \mathcal{C}^{\cdot}$; d'une manière analogue, on trouve

$$(\beta^{\perp}(f'), \beta^{\perp}(f)) \in \mathcal{C}^{\cdot} \star \mathcal{C}^{\cdot}.$$

Soit $(g', g) \in \mathcal{C}^{\cdot} \star \mathcal{C}^{\cdot}$ tel que $(g', f') \in \mathcal{C}^{\perp} \star \mathcal{C}^{\perp}$ et $(g, f) \in \mathcal{C}^{\perp} \star \mathcal{C}^{\perp}$; d'après (c) :

$$\alpha^{\cdot}(g' \perp f') = \alpha^{\cdot}(g') \perp \alpha^{\cdot}(f') = \beta^{\cdot}(g) \perp \beta^{\cdot}(f) = \beta^{\cdot}(g \perp f),$$

donc $(g' \perp f', g \perp f) \in \mathcal{C}^{\cdot} \star \mathcal{C}^{\cdot}$. On en déduit que $\mathcal{C}^{\cdot} \star \mathcal{C}^{\cdot}$ est une sous-catégorie de $\mathcal{C}^{\perp} \times \mathcal{C}^{\perp}$. Par ailleurs :

$$\alpha^{\perp}(g' . g) = \alpha^{\perp}(g') . \alpha^{\perp}(g) = \beta^{\perp}(f') . \beta^{\perp}(f) = \beta^{\perp}(f' . f)$$

entraîne $(g' . g, f' . f) \in \mathcal{C}^{\perp} \star \mathcal{C}^{\perp}$ et, en vertu de (d), $\varkappa^{\cdot}$ est un foncteur de $(\mathcal{C}^{\cdot} \star \mathcal{C}^{\cdot})^{\perp}$ vers $\mathcal{C}^{\perp}$. Par suite $(\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{\perp})$ est une catégorie double.

— Supposons le système d'axiomes (2) vérifié; si $z^{\cdot} \in \mathcal{C}^{\cdot}_0$, on a

$$\alpha^{\perp}(z^{\cdot}) = \alpha^{\cdot}(\alpha^{\perp}(z^{\cdot})) \in \mathcal{C}^{\cdot}_0;$$

si $z'^{\cdot} \in \mathcal{C}^{\cdot}_0$ et si $(z'^{\cdot}, z^{\cdot}) \in \mathcal{C}^{\perp} \star \mathcal{C}^{\perp}$, le foncteur $\varkappa^{\cdot}$ applique l'unité $(z'^{\cdot}, z^{\cdot})$ de $(\mathcal{C}^{\perp} \star \mathcal{C}^{\perp})^{\cdot}$ sur $(z'^{\cdot} \perp z^{\cdot}) \in \mathcal{C}^{\cdot}_0$; par conséquent $\mathcal{C}^{\cdot}_0$ est une sous-catégorie de $\mathcal{C}^{\perp}$. Si $z^{\perp} \in \mathcal{C}^{\perp}_0$, on a

$$\alpha^{\cdot}(z^{\perp}) = \alpha^{\perp}(\alpha^{\cdot}(z^{\perp})) \in \mathcal{C}^{\perp}_0.$$

Soit $(g, f) \in \mathcal{C}^{\perp} \star \mathcal{C}^{\perp}$; en vertu de (e), on a $(\alpha^{\cdot}(g), \alpha^{\cdot}(f)) \in \mathcal{C}^{\perp} \star \mathcal{C}^{\perp}$ et

$$\alpha^{\cdot}(g \perp f) = \alpha^{\cdot}(\varkappa^{\perp}(g, f)) = \varkappa^{\perp}(\alpha^{\cdot}(g), \alpha^{\cdot}(f)) = \alpha^{\cdot}(g) \perp \alpha^{\cdot}(f),$$

c'est-à-dire $\alpha^{\cdot}$, et pour la même raison $\beta^{\cdot}$, sont des foncteurs de $\mathcal{C}^{\perp}$ vers $(\mathcal{C}^{\cdot}_0)^{\perp}$. En tenant compte de (f), ceci démontre que $(\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{\perp})$ est une catégorie double.

— Enfin, supposons vérifié le système d'axiomes (3). Soit $(g, f) \in \mathcal{C}^{\perp} \star \mathcal{C}^{\perp}$; comme précédemment, on prouve que (i) entraîne $(\alpha^{\cdot}(g), \alpha^{\cdot}(f)) \in \mathcal{C}^{\perp} \star \mathcal{C}^{\perp}$; en vertu de (h), le composé $(g \perp f) . (\alpha^{\cdot}(g) \perp \alpha^{\cdot}(f))$ est défini et, puisque $\mathcal{C}^{\cdot}_0$ est stable relativement à $\perp$, on trouve

$$\alpha^{\cdot}(g) \perp \alpha^{\cdot}(f) = \alpha^{\cdot}(g \perp f).$$

On en déduit que l'axiome (c) est vérifié; de plus l'axiome (h) entraîne (d); donc le système d'axiomes (1) est vérifié et $(\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{\perp})$ est une catégorie double en vertu du début de la démonstration.

Remarque. — 1° Si tous les éléments $z^{\cdot}_2 \perp z^{\cdot}_1$, où $z^{\cdot}_i \in \mathcal{C}^{\cdot}_0$ (resp. $z^{\perp}_2 . z^{\perp}_1$, où $z^{\perp}_i \in \mathcal{C}^{\perp}_0$) sont réguliers [3 *a*] dans $\mathcal{C}^{\cdot}$ (resp. dans $\mathcal{C}^{\perp}$), les seuls axiomes (a), (b), (h), (i) entraînent que $(\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{\perp})$ est une catégorie double. En effet, de (h) et (i) résulte

$$(z^{\cdot}_2 \perp z^{\cdot}_1) . (z^{\cdot}_2 \perp z^{\cdot}_1) = z^{\cdot}_2 \perp z^{\cdot}_1,$$

d'où

$$\alpha^{\cdot}(z^{\cdot}_2 \perp z^{\cdot}_1) = z^{\cdot}_2 \perp z^{\cdot}_1 \in \mathcal{C}^{\cdot}_0.$$

Ceci prouve que (g) est vérifié.

2° Bien que les lois de composition . et $\perp$ aient des propriétés symétriques, il sera plus commode de supposer que la donnée de la catégorie double $(\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{\perp})$ comprend aussi l'ordre dans lequel on considère les lois de composition; donc $(\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{\perp})$ signifie : $\mathcal{C}^{\cdot}$ est la catégorie qui est structurée dans $\mathcal{F}$ par $\mathcal{C}^{\perp}$.

Une *sous-catégorie double* de la catégorie double $(\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{\perp})$ est une sous-classe $\mathcal{C}_1$ de $\mathcal{C}$, qui est une sous-catégorie de $\mathcal{C}^{\cdot}$ et une sous-catégorie de $\mathcal{C}^{\perp}$. Alors $(\mathcal{C}_1^{\cdot}, \mathcal{C}_1^{\perp})$ est une catégorie double.

Un foncteur $\mathcal{F}$-structuré sera appelé *foncteur double*. Par définition un foncteur double $\overline{\mathrm{F}} = ((\mathcal{C}_1^{\cdot}, \mathcal{C}_1^{\perp}), \mathrm{F}, (\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{\perp}))$ est défini par une application F de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}_1$ telle que $(\mathcal{C}_1^{\cdot}, \mathrm{F}, \mathcal{C}^{\cdot})$ et $(\mathcal{C}_1^{\perp}, \mathrm{F}, \mathcal{C}^{\perp})$ soient des foncteurs. D'après le théorème 1, les foncteurs doubles forment une catégorie d'homomorphismes $(\mathcal{F}, \overline{p_{\mathcal{F}}}, \overline{\mathcal{F}}, \overline{\mathcal{F}}_{\gamma})$, où

$$\overline{p_{\mathcal{F}}}(\overline{\mathrm{F}}) = (\mathcal{C}_1^{\cdot}, \mathrm{F}, \mathcal{C}^{\cdot});$$

d'après le théorème 2, ils forment aussi une catégorie d'homomorphismes $(\mathcal{F}, \overline{p}'_{\mathcal{F}}, \overline{\mathcal{F}}, \overline{\mathcal{F}}_{\gamma})$, où

$$\overline{p}'_{\mathcal{F}}(\mathrm{F}) = (\overline{p_{\mathcal{F}}})_{\mathcal{F}}(\overline{\mathrm{F}}) = (\mathcal{C}_1^{\perp}, \mathrm{F}, \mathcal{C}^{\perp}).$$

Catégories doubles de quadruplets. — Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux catégories ayant même classe d'unités Δ. Soit $\square(\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_1)$ la classe des quadruplets (f'_2, f'_1, f_1, f_2), où $f_i \in \mathcal{C}_i$, $f'_i \in \mathcal{C}_i$, $i = 1, 2$,

$$\alpha(f_1) = \alpha(f_2); \qquad \alpha(f'_1) = \beta(f_2); \qquad \beta(f_1) = \alpha(f'_2); \qquad \beta(f'_1) = \beta(f'_2).$$

Sur $\square(\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_1)$, on définit les deux lois de composition :

$$(\bar{f}'_2, \bar{f}'_1, \bar{f}_1, \bar{f}_2) \boxed{\rm I} (f'_2, f'_1, f_1, f_2) = (\bar{f}'_2, \bar{f}'_1 . f'_1, \bar{f}_1 . f_1, f_2) \quad \text{si, et seulement si,} \quad \bar{f}_2 = f'_2;$$
$$(\bar{f}'_2, \bar{f}'_1, \bar{f}_1, \bar{f}_2) \boxminus (f'_2, f'_1, f_1, f_2) = (\bar{f}'_2 . f'_2, \bar{f}'_1, f_1, \bar{f}_2 . f_2) \quad \text{si, et seulement si,} \quad \bar{f}_1 = f'_1.$$

Définition 12. — *La première des lois de composition sur* $\square(\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_1)$ *définie ci-dessus sera appelée* multiplication longitudinale, *la seconde,* multiplication latérale.

Proposition 11. — $\square(\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_1)$, *munie des multiplications longitudinale et latérale, est une catégorie double.*

La catégorie longitudinale sera notée $\boxed{\rm I}(\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_1)$, la catégorie latérale $\boxminus(\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_1)$; les applications source et but dans ces catégories seront désignées par $\alpha^{\boxed{\rm I}}$ et $\beta^{\boxed{\rm I}}$, resp. par $\alpha^{\boxminus}$ et $\beta^{\boxminus}$. La classe des sommets de la catégorie double $\square(\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_1)$ s'identifie à Δ.

Définition 13. — *Étant données deux catégories doubles* $(\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{\perp})$ *et* $(\mathcal{C}_1^{\cdot}, \mathcal{C}_1^{\perp})$, *on dira que* $(\mathcal{C}_1^{\cdot}, \mathcal{C}_1^{\perp})$ *est une* catégorie double quotient de $(\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{\perp})$

s'il existe une relation d'équivalence ρ sur $\mathcal{C}$ telle que $\mathcal{C}^{\cdot}_{1}$ (resp. $\mathcal{C}^{\perp}_{1}$) s'identifie à la catégorie quotient [3 *e*] *de $\mathcal{C}^{\cdot}$ (resp. de $\mathcal{C}^{\perp}$) par ρ.*

En particulier, le résultat suivant résulte d'un théorème de [3 *a*]. Soit π un foncteur double d'une catégorie double $(\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{\perp})$ sur une catégorie double $(\mathcal{C}^{\cdot}_{1}, \mathcal{C}^{\perp}_{1})$. Soit ρ_{π} la relation d'équivalence définie sur $\mathcal{C}$ par

$$f \sim f' \qquad \text{si, et seulement si} \quad \pi(f) = \pi(f').$$

Pour que $(\mathcal{C}^{\cdot}_{1}, \mathcal{C}^{\perp}_{1})$ s'identifie à la catégorie double quotient de $(\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{\perp})$ par ρ_{π}, il faut et il suffit que π vérifie les conditions :

(1) Si $g_1 . f_1$ est défini dans $\mathcal{C}^{\cdot}_{1}$, il existe $g \in \mathcal{C}$ et $f \in \mathcal{C}$ tels que $g.f$ soit défini, $g_1 = \pi(g)$ et $f_1 = \pi(f)$.

(2) Si $g_1 \perp f_1$ est défini dans $\mathcal{C}^{\perp}_{1}$, il existe $g \in \mathcal{C}$ et $f \in \mathcal{C}$ tels que $g \perp f$ soit défini, $g_1 = \pi(g)$ et $f_1 = \pi(f)$.

Théorème 6. — *Une catégorie double $(\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{\perp})$ admet pour catégorie double quotient une sous-catégorie de la catégorie double $\square(\mathcal{C}^{\cdot}_{0}, \mathcal{C}^{\perp}_{0})$, où $\mathcal{C}^{\cdot}_{0}$ (resp. $\mathcal{C}^{\perp}_{0}$) est muni de sa structure de sous-catégorie de $\mathcal{C}^{\perp}$ (resp. de $\mathcal{C}^{\cdot}$).*

En effet l'application

$$c: \quad f \to (\beta^{\cdot}(f), \beta^{\perp}(f), \alpha^{\perp}(f), \alpha^{\cdot}(f))$$

est un foncteur double de $\mathcal{C}$ vers $\square(\mathcal{C}^{\cdot}_{0}, \mathcal{C}^{\perp}_{0})$ vérifiant les conditions ci-dessus.

Définition 14. — *Avec les notations précédentes, l'élément $c(f)$ sera appelé* cadre de f dans $\mathcal{C}$.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Rappelons [3 *a*] qu'un *quatuor* de $\mathcal{C}$ est un quadruplet $(f'_2, f'_1, f_1, f_2) \in \square(\mathcal{C}, \mathcal{C})$ tel que

$$f'_2 . f_1 = f'_1 . f_2.$$

Soit $\square\mathcal{C}$ la sous-classe de $\square(\mathcal{C}, \mathcal{C})$ formée des quatuors de $\mathcal{C}$.

Proposition 12. — *$\square\mathcal{C}$ est une sous-catégorie double de $\square(\mathcal{C}, \mathcal{C})$.*

Soit $\overline{\mathrm{F}} = (\mathcal{C}_1, \mathrm{F}, \mathcal{C}) \in \mathcal{F}$; ce foncteur se prolonge en un foncteur double $\square\overline{\mathrm{F}} = ((\boxbar\mathcal{C}_1, \boxminus\mathcal{C}_1), \square\mathrm{F}, (\boxbar\mathcal{C}, \boxminus\mathcal{C}))$, où $\square\mathrm{F}$ est l'application définie par

$$\square\mathrm{F}(f'_2, f'_1, f_1, f_2) = (\mathrm{F}(f'_2), \mathrm{F}(f'_1), \mathrm{F}(f_1), \mathrm{F}(f_2)).$$

L'application $\square : \overline{\mathrm{F}} \to \square\,\overline{\mathrm{F}}$ est un foncteur de $\mathcal{F}$ vers $\overline{\mathcal{F}}$. Nous désignerons par $\boxbar$ (resp. $\boxminus$) le foncteur de $\mathcal{F}$ vers $\mathcal{F}$:

$$\overline{p_{\mathcal{F}}}.\square:\quad \overline{\mathrm{F}} \to (\boxbar\,\mathcal{C}_1, \square\,\mathrm{F}, \boxbar\,\mathcal{C}) = \boxbar\,\overline{\mathrm{F}}$$

$$\left[\text{resp. } \overline{p'_{\mathcal{F}}}.\square:\quad \overline{\mathrm{F}} \to (\boxminus\,\mathcal{C}_1, \square\,\mathrm{F}, \boxminus\,\mathcal{C}) = \boxminus\,\overline{\mathrm{F}}\right],$$

où $(\mathcal{C}_1, \mathrm{F}, \mathcal{C}) \in \mathcal{F}$. Pour tout $\mathcal{C} \in \mathcal{F}_0$, soit $\varepsilon(\mathcal{C})$ l'équivalence de $\boxbar\,\mathcal{C}$ sur $\boxminus\,\mathcal{C}$ définie par

$$(f'_2, f'_1, f_1, f_2) \to (f'_1, f'_2, f_2, f_1).$$

Nous désignerons par ε l'application $\mathcal{C} \to \varepsilon(\mathcal{C})$.

Proposition 13. — *Avec les notations précédentes,* $(\boxminus, \varepsilon, \boxbar)$ *est une équivalence naturelle dans* $\mathcal{F}$.

Dans la construction précédente, on peut remplacer $\square\,\mathcal{C}$ par la catégorie double $\square(\mathcal{C}, \mathcal{C})$ et la proposition 13 serait encore valable.

Soient $\mathcal{C}^{\cdot}_1$ une catégorie et $(\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{\perp})$ une catégorie double; soit $\mathcal{F}(\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{\cdot}_1)$, la classe des foncteurs de $\mathcal{C}^{\cdot}_1$ vers $\mathcal{C}^{\cdot}$.

Proposition 14. — $\mathcal{F}(\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{\cdot}_1)$ *est une catégorie pour la loi de composition* $(\Phi', \Phi) \to \Phi' \perp \Phi$, *où* $\Phi' \perp \Phi(f) = \Phi'(f) \perp \Phi(f)$ *si, et seulement si,* $\Phi'(f) \perp \Phi(f)$ *est défini pour tout* $f \in \mathcal{C}_1$.

Cette proposition résulte de l'axiome de permutabilité; l'unité à droite de Φ est le foncteur $\alpha^{\perp}\Phi$, son unité à gauche, le foncteur $\beta^{\perp}\Phi$.

Remarque. — Si Φ est un foncteur double de $(\mathcal{C}^{\cdot}_1, \mathcal{C}^{\perp}_1)$ vers $(\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{\perp})$, $\alpha^{\perp}\Phi$ n'est plus un foncteur de $\mathcal{C}^{\perp}_1$ vers $\mathcal{C}^{\perp}$, donc la classe des foncteurs doubles de $(\mathcal{C}^{\cdot}_1, \mathcal{C}^{\perp}_1)$ vers $(\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{\perp})$ ne s'identifie pas à une sous-catégorie de $\mathcal{F}(\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{\cdot}_1)$, contrairement à ce qui a été énoncé dans un corollaire de [3 *e*].

La définition d'une transformation naturelle $(\varphi', \tau, \varphi)$ d'un foncteur φ vers un foncteur φ' conduit immédiatement au théorème suivant (pour les notations, *voir* [3 *d*]) :

Théorème 7. — *Soient* $\mathcal{C}$ *et* $\mathcal{C}'$ *deux catégories; la catégorie longitudinale* $\mathcal{N}(\mathcal{C}', \mathcal{C})$ *des transformations naturelles entre foncteurs de* $\mathcal{C}$ *vers* $\mathcal{C}'$ *s'identifie à la catégorie* $\mathcal{F}(\boxminus\,\mathcal{C}', \mathcal{C})$, *en identifiant la transformation naturelle* $(\varphi', \tau, \varphi)$ *au foncteur* $\Phi \in \mathcal{F}(\boxminus\,\mathcal{C}', \mathcal{C})$ *tel que*

$$\Phi(f) = (\varphi'(f), \tau(\beta(f)), \tau(\alpha(f)), \varphi(f)) \qquad \textit{pour tout} \quad f \in \mathcal{C}.$$

Inversement $\Phi \in \mathcal{F}(\boxminus \mathcal{C}', \mathcal{C})$ *s'identifie à la transformation naturelle* $(\varphi', \tau, \varphi)$, *où*

$$\varphi = \alpha^{\boxed{\mid}}\Phi, \qquad \varphi' = \beta^{\boxed{\mid}}\Phi$$

et

$$(\varphi'(e), \tau(e), \tau(e), \varphi(e)) = \Phi(e) \qquad \textit{pour tout} \quad e \in \mathcal{C}_0.$$

Ce théorème montre que si $(\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{\perp})$ est une catégorie double, un foncteur Φ d'une catégorie Γ vers $\mathcal{C}^{\cdot}$ peut être considéré comme une transformation naturelle généralisée de $\alpha^{\perp}\Phi$ vers $\beta^{\perp}\Phi$. Nous verrons plus loin (§ III) une autre généralisation de la notion de transformation naturelle, à savoir la notion de quintette [3 *e*].

5. Catégories *n*-uples. — D'après le théorème 2, la catégorie $\overline{\mathcal{F}}$ des foncteurs doubles est une catégorie d'homomorphismes $(\mathcal{M}, p_{\mathcal{F}}\, \overline{p_{\mathcal{F}}}, \overline{\mathcal{F}}, \overline{\mathcal{F}}_{\gamma})$ au-dessus de $\mathcal{M}$. Nous verrons au n° 7 que cette catégorie d'homomorphismes est résolvante à droite et à produits finis. Par suite, on peut définir des foncteurs $\overline{\mathcal{F}}$-structurés et plus généralement poser la définition :

Définition 15. — *Soit* $\mathcal{F}^{[n-1]}$ *la catégorie des foncteurs* $(n-1)$*-uples considérée comme catégorie d'homomorphismes au-dessus de* $\mathcal{M}$. *Une catégorie* $\mathcal{F}^{[n-1]}$*-structurée sera appelée* catégorie *n*-uple, *un foncteur* $\mathcal{F}^{[n-1]}$*-structuré,* foncteur *n*-uple. *Une catégorie 2-uple est une catégorie double.*

D'après le théorème 13 et le corollaire 2 du théorème 14, si $\mathcal{F}^{[n-1]}$ est une catégorie d'homomorphismes à produits finis, résolvante à droite au-dessus de $\mathcal{M}$, il en est de même pour $\mathcal{F}^{[n]} = \overline{\mathcal{F}^{[n-1]}} =$ catégorie des foncteurs $\mathcal{F}^{[n-1]}$-structurés, ce qui justifie la définition par récurrence. Du théorème 13, il résulte aussi que si $(\mathcal{C}^{\perp_i})_{i \leq n}$ et $(\overline{\mathcal{C}}^{\top_i})_{i \leq n}$ sont des catégories *n*-uples, alors la classe $\mathcal{C} \times \overline{\mathcal{C}}$, munie des lois de composition $(\perp_i) \times (\top_i)$ où $i \leq n$, est une catégorie *n*-uple.

Théorème 8. — *Soit* $\mathcal{C}$ *une classe et soient* $\perp_i$, *où* $i \leq n$, *des lois de composition sur* $\mathcal{C}$ *telles que* $\mathcal{C}^{\perp_i}$ *soit une catégorie. Pour que* $(\mathcal{C}^{\perp_i})_{i \leq n}$ *soit une catégorie n-uple, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :*

(1) *Soient* α^i *et* β^i *les applications source et but dans* $\mathcal{C}^{\perp_i}$; *alors* α^i *et* β^i *sont des foncteurs de* $\mathcal{C}^{\perp_j}$ *vers* $\mathcal{C}^{\perp_j}$, *pour tout* $i \leq n$ *et tout* $j \leq n$, $j \neq i$.

(2) *Si les composés* $(g' \perp_i g) \perp_j (f' \perp_i f)$ *et* $(g' \perp_j f') \perp_i (g \perp_j f)$ *sont définis, on a*

$$(g' \perp_i g) \perp_j (f' \perp_i f) = (g' \perp_j f') \perp_i (g \perp_j f), \qquad \textit{où} \quad i \leq n \qquad \textit{et} \qquad j \leq n.$$

Démonstration. — Supposons le théorème démontré pour une catégorie *m*-uple, où $m \leq n-1$, et montrons-le pour une catégorie *n*-uple. Soit $(\mathcal{C}^{\perp_1}, (\mathcal{C}^{\perp_i})_{2 \leq i \leq n})$ une catégorie *n*-uple. Par hypothèse α^1 est un foncteur $(n-1)$-uple. Soit $e^1 \in \mathcal{C}_0^{\perp_1}$; on a $\alpha^i(e^1) \in \mathcal{C}_0^{\perp_1}$, puisque $\mathcal{C}_0^{\perp_1}$ est par définition une sous-catégorie $(n-1)$-uple de la catégorie $(n-1)$-uple $(\mathcal{C}^{\perp_i})_{2 \leqq i \leqq n}$. Supposons $g \perp_1 f$ défini; puisque la classe $\mathcal{C}^{\perp_i} \star \mathcal{C}^{\perp_i}$ des couples composables relativement à $\perp_i$ est une sous-catégorie $(n-1)$-uple de la catégorie-produit $(\mathcal{C}^{\perp_i})_{2 \leqq i \leqq n} \times (\mathcal{C}^{\perp_i})_{2 \leqq i \leqq n}$, le composé $(\alpha^i(g)) \perp_1 (\alpha^i(f))$ est défini; du fait que l'application

$$\varkappa^{\perp_1}: \quad (g, f) \rightarrow g \perp_1 f$$

est un foncteur $(n-1)$-uple, on déduit

$$\varkappa^{\perp_1}(\alpha^i(g), \alpha^i(f)) = \varkappa^{\perp_1}(\alpha^i(g, f)) = \alpha^i(g \perp_1 f),$$

d'où

$$\alpha^i(g) \perp_1 (\alpha^i(f)) = \alpha^i(g \perp_1 f).$$

Ceci prouve que α^i est un foncteur de $\mathcal{C}^{\perp_1}$ vers $\mathcal{C}^{\perp_1}$; par conséquent, la condition (1) du théorème est vérifiée. La condition (2) résulte de ce que $\varkappa^{\perp_1}$ est un foncteur $(n-1)$-uple. — Inversement supposons les conditions (1) et (2) du théorème vérifiées. Comme α^i est un foncteur de $\mathcal{C}^{\perp_j}$ vers $\mathcal{C}^{\perp_j}$, si $j \neq i$, on a

$$\alpha^i(\alpha^1(f)) = \alpha^1(\alpha^i(f)), \qquad \text{où } f \in \mathcal{C},$$

et

$$\alpha^1(e^1 \perp_i e'^1) = e^1 \perp_i e'^1, \qquad \text{où } e^1 \in \mathcal{C}_0^{\perp_1} \quad \text{et} \quad e'^1 \in \mathcal{C}_0^{\perp_1};$$

donc $\mathcal{C}_0^{\perp_1}$ est une sous-catégorie $(n-1)$-uple de $(\mathcal{C}^{\perp_i})_{2 \leqq i \leqq n}$. Nous allons démontrer que $(\mathcal{C}^{\perp_1}) \star (\mathcal{C}^{\perp_1})$ est une sous-catégorie $(n-1)$-uple de la catégorie $(n-1)$-uple produit $(\mathcal{C}^{\perp_i})_{2 \leqq i \leqq n} \times (\mathcal{C}^{\perp_i})_{2 \leqq i \leqq n}$. Supposons $(g, f) \in (\mathcal{C}^{\perp_1}) \star (\mathcal{C}^{\perp_1})$; puisque α^i est un foncteur de $\mathcal{C}^{\perp_1}$ vers $\mathcal{C}^{\perp_1}$, on a

$$\alpha^i(g \perp_1 f) = \alpha^i(g) \perp_1 \alpha^i(f),$$

donc $(\alpha^i(g), \alpha^i(f)) \in (\mathcal{C}^{\perp_1}) \star (\mathcal{C}^{\perp_1})$; de même $(\beta^i(g), \beta^i(f)) \in (\mathcal{C}^{\perp_1}) \star (\mathcal{C}^{\perp_1})$. Supposons de plus $(g', f') \in (\mathcal{C}^{\perp_1}) \star (\mathcal{C}^{\perp_1})$ tel que $g' \perp_i g$ et $f' \perp_i f$ soient définis pour tout $2 \leqq i \leqq n$. On trouve

$$\alpha^1(g' \perp_i g) = \alpha^1(g') \perp_i \alpha^1(g) = \beta^1(f') \perp_i \beta^1(f) = \beta^1(f' \perp_i f);$$

par conséquent

$$((g' \perp_i g), (f' \perp_i f)) \in (\mathcal{C}^{\perp_1}) \star (\mathcal{C}^{\perp_1}) \qquad \text{pour } 2 \leqq i \leqq n$$

et $(\mathcal{C}^{\perp_1}) \star (\mathcal{C}^{\perp_1})$ est une sous-catégorie. Il ne reste qu'à montrer que $\varkappa^{\perp_1}$ est un foncteur $(n-1)$-uple. On a

$$\varkappa^{\perp_1}((g', f') \perp_i (g, f)) = (g' \perp_i g) \perp_1 (f' \perp_i f);$$

comme

$$\alpha^i(g' \perp_1 f') = \alpha^i(g') \perp_1 \alpha^i(f') = \beta^i(g) \perp_1 \beta^i(f) = \beta^i(g \perp_1 f),$$

le composé $(g' \perp_1 f') \perp_i (g \perp_1 f)$ est défini; la condition (2) entraîne

$$\varkappa^{\perp_1}((g', f') \perp_i (g, f)) = (g' \perp_i g) \perp_1 (f' \perp_i f) = (g' \perp_1 f') \perp_i (g \perp_1 f) = \varkappa^{\perp_1}(g', f') \perp_i \varkappa^{\perp_1}(g, f).$$

Ceci démontre le théorème.

Soit $(\mathcal{C}^{\perp_i})_{i \leqq n}$ une catégorie n-uple. Désignons par $\lambda^{i_1} \ldots \lambda^{i_p}$ un foncteur $(n-p)$-uple tel que, pour tout $j \leqq p$, on ait

$$1 \leqq i_j \leqq n, \qquad i_j \neq i_{j'} \quad \text{si} \quad j \neq j' \qquad \text{et} \qquad \lambda^{i_j} = \alpha^{i_j} \quad \text{ou} \quad \beta^{i_j}.$$

Un tel foncteur est invariant par toute permutation de l'ensemble $(i_1, \ldots, i_p)$ en vertu de l'axiome de permutabilité [condition (2) du théorème 8]. L'image de $f \in \mathcal{C}$ par un tel foncteur $\lambda^{i_1} \ldots \lambda^{i_p}$ est appelée *$(n-p)$-face* de f. Les 0-faces seront appelées *sommets* de f; la classe des sommets de $\mathcal{C}$ est la classe $\bigcap_{i \leqq n} \mathcal{C}_0^{\perp_i}$. Les 1-faces seront appelées *arêtes* de $\mathcal{C}$.

Remarques. — 1° Soit $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ une suite de foncteurs telle que $\gamma_i = \alpha^i$, β^i ou Id, et $\gamma_i = \mathrm{Id}$ pour exactement p indices i. Pour tout $f \in \mathcal{C}$, la famille $(\gamma_1 \ldots \gamma_n(f))_{(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)}$ sera appelée *$(n-p)$-cadre* de f, noté $c_{n-p}(f)$. En particulier, les $(n-1)$-cadres forment une catégorie n-uple, la loi de composition $\perp_i$ pour tout $i \leqq n$, étant définie par

$$c_{n-1}(f') \perp_i c_{n-1}(f) = c_{n-1}(f' \perp_i f)$$

si, et seulement si, $f' \;{}_i f$ est défini. Cette catégorie n-uple est une catégorie n-uple quotient de $(\mathcal{C}^{\perp_i})_{i \leqq n}$.

2° Soit $\mathcal{C}^{\perp}$ une catégorie. Par récurrence on peut définir une catégorie n-uple $(\mathcal{C}^{[n]})^{\perp_i}_{i \leqq n}$ dans laquelle tout élément s'identifie à son 1-cadre :

$$(\mathcal{C}^{[1]})^{\perp_1} = \mathcal{C}^{\perp},$$
$$\mathcal{C}^{[n]} = \square\left((\mathcal{C}^{[n-1]})^{\perp_1}, (\mathcal{C}^{[n-1]})^{\perp_1}\right);$$

par récurrence on montre que, pour tout $i \leqq (n-1)$, il existe une bijection ε_n^i de $\mathcal{C}^{[n]}$ sur $\square\left((\mathcal{C}^{[n-1]})^{\perp_i}, (\mathcal{C}^{[n-1]})^{\perp_i}\right)$; la loi de composition $\perp_i$ sur $\mathcal{C}^{[n]}$ est l'image réciproque par ε_n^i de la multiplication longitudinale sur $\varepsilon_n^i(\mathcal{C}^{[n]})$. La loi de composition $\perp_n$ est définie par

$$(\bar{h}', \bar{k}', \bar{k}, \bar{h}) \perp (h', k', k, h) = (\bar{h}' \boxminus h', \bar{k}' \boxminus k', \bar{k} \boxminus k, \bar{h} \boxminus h)$$

si, et seulement si, $\bar{h}' \boxminus h'$, $\bar{k}' \boxminus k'$, $\bar{k} \boxminus k$ et $\bar{h} \boxminus h$ sont définis dans $\boxminus\left((\mathcal{C}^{[n-1]})^{\perp_1}, (\mathcal{C}^{[n-1]})^{\perp_1}\right)$. La catégorie n-uple $(\mathcal{C}^{[n]})^{\perp_i}_{i \leqq n}$ admet pour sous-catégorie n-uple la classe $\mathcal{C}^{\boxed{n}}$ définie par récurrence par

$$\mathcal{C}^{\boxed{1}} = \mathcal{C} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{C}^{\boxed{n}} = \square\left((\mathcal{C}^{\boxed{n-1}})^{\perp_1}\right).$$

En particulier

$$\mathcal{C}^{\boxed{2}} = \square\mathcal{C}.$$

3° Soient $\mathcal{C}_p = (\mathcal{C}^{\perp_i})_{i \leq p}$ une catégorie p-uple et $\overline{\mathcal{C}}_n = (\overline{\mathcal{C}}^{\perp_i})_{i \leq n}$ une catégorie n-uple. La classe $\mathcal{F}(\overline{\mathcal{C}}_n, \mathcal{C}_p)$ des foncteurs p-uples de $\mathcal{C}_p$ vers $(\overline{\mathcal{C}}^{\perp_i})_{i \leq p}$ est une catégorie $(n-p)$-uple pour les lois de composition $\perp_j$, où $p < j \leq (n-1)$, définies par

$$(\Phi' \perp_j \Phi)(f) = (\Phi'(f) \perp_j \Phi(f))$$

si, et seulement si, $\Phi'(f) \perp_j \Phi(f)$ est défini pour tout $f \in \mathcal{C}$. En particulier, si $p = 1$, la classe des foncteurs de $\mathcal{C}^{\perp_1}$ vers $\overline{\mathcal{C}}^{\perp_1}$ est une catégorie $(n-1)$-uple. Si $p = (n-1)$, la classe des foncteurs $(n-1)$-uples de $\mathcal{C}_{n-1}$ vers $(\overline{\mathcal{C}}^{\perp_i})_{i \leq n-1}$ est une catégorie. Un élément Φ de cette catégorie peut être considéré comme une *transformation naturelle généralisée du foncteur $(n-1)$-uple $\alpha^{\perp_n}\Phi$ vers le foncteur $(n-1)$-uple $\beta^{\perp_n}\Phi$.*

Proposition 15. — *Pour qu'une catégorie n-uple $(\mathcal{C}^{\perp_1}, (\mathcal{C}^{\perp_i})_{2 \leq i \leq n})$ soit un groupoïde $\mathcal{F}^{[n-1]}$-structuré, il faut et il suffit que $\mathcal{C}^{\perp_1}$ soit un groupoïde.*

Démonstration. — La condition est évidemment nécessaire; montrons qu'elle est suffisante. Pour tout $f \in \mathcal{C}$, nous désignerons par f^{-1} l'inverse de f dans le groupoïde $\mathcal{C}^{\perp_1}$. Il suffit de prouver que l'application $f \to f^{-1}$ est un foncteur $(n-1)$-uple de $(\mathcal{C}^{\perp_i})_{2 \leq i \leq n}$ sur $(\mathcal{C}^{\perp_i})_{2 \leq i \leq n}$. Puisque $\alpha^{\perp_i}$ est un foncteur de $\mathcal{C}^{\perp_1}$ vers $\mathcal{C}^{\perp_1}$, on a

$$(z^i)^{-1} = (\alpha^{\perp_i}(z^i))^{-1} = \alpha^{\perp_i}((z^i)^{-1}) \in \mathcal{C}_0^{\perp_i} \qquad \text{pour tout} \quad z^i \in \mathcal{C}_0^{\perp_i},$$

où $2 \leq i \leq n$. Puisque $\varkappa^{\perp_i}$ est un foncteur de $\mathcal{C}^{\perp_1} \star \mathcal{C}^{\perp_1}$ vers $\mathcal{C}^{\perp_1}$, on trouve

$$(g^{-1} \perp_i f^{-1}) = \varkappa^{\perp_i}(g^{-1}, f^{-1}) = \varkappa^{\perp_i}((g, f)^{-1}) = (\varkappa^{\perp_i}(g, f))^{-1} = (g \perp_i f)^{-1};$$

donc l'application $f \to f^{-1}$ est un foncteur de $\mathcal{C}^{\perp_i}$ vers $\mathcal{C}^{\perp_i}$ pour $2 \leq i \leq n$ et $(\mathcal{C}^{\perp_1}, (\mathcal{C}^{\perp_i})_{2 \leq i \leq n})$ est un groupoïde $\mathcal{F}^{[n-1]}$-structuré.

Définition 16. — *On appellera* groupoïde n-uple *une catégorie n-uple $(\mathcal{C}^{\perp_i})_{i \leq n}$ telle que $\mathcal{C}^{\perp_i}$ soit un groupoïde pour tout $i \leq n$.*

En particulier, il résulte de la proposition 15 que si $(\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{\perp})$ est un groupoïde double, alors $(\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{\perp})$ et $(\mathcal{C}^{\perp}, \mathcal{C}^{\cdot})$ sont des groupoïdes $\mathcal{F}$-structurés.

6. Structures d'ordre sur une catégorie.

Définition 17. — *On dira qu'une catégorie n-uple* $(\mathcal{C}^{\perp_i})_{i \leq n}$ définit un ordre n-uple (1) *si chacune des catégories* $\mathcal{C}^{\perp_i}$ *définit un ordre* $<_i$ sur *la classe de ses unités.*

Dans ce cas, la classe Δ des sommets de $(\mathcal{C}^{\perp_i})_{i \leq n}$ est munie des n ordres induits par $<_i$. Remarquons que la donnée de Δ et des n ordres induits ne détermine pas $(\mathcal{C}^{\perp_i})_{i \leq n}$. En particulier, soit une classe munie de deux ordres $<_1$ et $<_2$; soit $\Delta_0^{\cdot}$ (resp. $\Delta_0^{\perp}$) la catégorie des couples (E, e), où $e <_1 E$ (resp. $e <_2 E$); la catégorie double $\square(\Delta_0^{\cdot}, \Delta_0^{\perp})$ est la plus grande catégorie double définissant un ordre double qui induit sur Δ les ordres $<_1$ et $<_2$; ceci signifie que toute catégorie double définissant un ordre double induisant les ordres $<_1$ et $<_2$ sur Δ s'identifie à une sous-catégorie double de $\square(\Delta_0^{\cdot}, \Delta_0^{\perp})$. Ce résultat peut se généraliser au cas où l'on se donne n ordres sur la classe Δ.

Proposition 16. — *Soit* $(\mathcal{C}^{\perp_i})_{i \leq n}$ *une catégorie n-uple vérifiant la condition : Deux éléments de* $\mathcal{C}$ *ayant le même ensemble de sommets sont identiques. Alors* $(\mathcal{C}^{\perp_i})_{i \leq n}$ *définit un ordre n-uple.*

En effet, la classe des sommets de $f \in \mathcal{C}$ est identique à la réunion des classes des sommets de $\alpha^{\perp_i} f$ et $\beta^{\perp_i} f$; par suite, si f et g ont même ensemble d'unités dans $\mathcal{C}^{\perp_i}$, ils ont aussi même ensemble de sommets et $f = g$.

Soit $\tilde{\Omega}$ la catégorie des homomorphismes entre classes ordonnées et $(\mathcal{M}, \omega, \tilde{\Omega}, \Omega)$ la catégorie d'homomorphismes considérée au paragraphe I. $(\mathcal{M}, \omega, \tilde{\Omega}, \Omega)$ est une catégorie d'homomorphismes à produits finis, résolvante à droite. Le produit de $(A, <)$ avec $(A', <)$ est la classe ordonnée $(A \times A', <)$, dont l'ordre est l'ordre produit des ordres de A et de A'.

Pour que $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ soit une catégorie $\tilde{\Omega}$-structurée, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :

(1) $\mathcal{C}^{\cdot}$ est une catégorie et $(\mathcal{C}, <)$ est une classe ordonnée.

(2) $f' < f$ entraîne $\alpha(f') < \alpha(f)$ et $\beta(f') < \beta(f)$.

(3) Si l'on a $f' < f$, $g' < g$, et si $g.f$ et $g'.f'$ sont définis, alors $g'.f' < g.f$.

Pour que $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ soit un groupoïde $\tilde{\Omega}$-structuré, il faut de plus que :

(4) $f' < f$ entraîne $f'^{-1} < f^{-1}$.

Proposition 17. — *Pour que* $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ *soit une catégorie* $\tilde{\Omega}$*-structurée, il faut et il suffit qu'il existe une catégorie double* $(\mathcal{S}^{\cdot}, \mathcal{S}^{\perp})$ *vérifiant les*

(1) La notion d'ordre n-uple est à rapprocher de celle de classe n fois ordonnée de Cantor [6].

conditions suivantes :

(1) *$\mathcal{C}^{\cdot}$ s'identifie à $(\mathcal{S}_0^{\perp})^{\cdot}$;*
(2) *$\mathcal{S}^{\perp}$ définit l'ordre $<$ sur $\mathcal{C}^{\cdot}$.*

Démonstration. — S'il existe une catégorie double $(\mathcal{S}^{\cdot}, \mathcal{S}^{\cdot\perp})$ vérifiant les conditions (1) et (2), posons $\mathcal{C}^{\cdot} = (\mathcal{S}_0^{\perp})^{\cdot}$ et munissons $\mathcal{C}^{\cdot}$ de la relation : $f' < f$ si, et seulement si, il existe $k \in \mathcal{S}$ tel que

$$f = \beta^{\perp}(k) \quad \text{et} \quad f' = \alpha^{\perp}(k).$$

Si $f' < f$, on a

$$\alpha^{\cdot}(f) = \beta^{\perp}(\alpha^{\cdot}(k)) \quad \text{et} \quad \alpha^{\cdot}(f') = \alpha^{\perp}(\alpha^{\cdot}(k)), \quad \text{d'où} \quad \alpha^{\cdot}(f') < \alpha^{\cdot}(f);$$

de même $\beta^{\cdot}(f') < \beta^{\cdot}(f)$. Soit $g \in \mathcal{C}$ tel que $g.f$ soit défini; soit $g' \in \mathcal{C}$ tel que $g'.f'$ soit défini et qu'il existe $k_1 \in \mathcal{S}$ avec

$$g = \beta^{\perp}(k_1) \quad \text{et} \quad g' = \alpha^{\perp}(k_1);$$

puisque $\mathcal{S}^{\perp}$ définit un ordre sur $(\mathcal{S}_0^{\perp})$, les égalités

$$\alpha^{\perp}(\alpha^{\cdot}(k_1)) = \alpha^{\perp}(\beta^{\cdot}(k)) = \alpha^{\cdot}(g') \quad \text{et} \quad \beta^{\perp}(\alpha^{\cdot}(k_1)) = \beta^{\perp}(\beta^{\cdot}(k)) = \alpha^{\cdot}(g)$$

entraînent $\alpha^{\cdot}(k_1) = \beta^{\cdot}(k)$; par suite $k_1.k$ est défini et l'on obtient

$$g.f = \beta^{\perp}(k_1.k), \quad g'.f' = \alpha^{\perp}(k_1.k), \quad \text{donc } g'.f' < g.f.$$

Ceci montre que $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ est une catégorie $\tilde{\Omega}$-structurée. Inversement si $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ est $\tilde{\Omega}$-structurée, soit $\mathcal{O}$ la catégorie des couples (E, e), où $e \in \mathcal{C}_0^{\cdot}$, $E \in \mathcal{C}_0^{\cdot}$ et $e < E$. La classe $\mathcal{S}$ des quadruplets $((E_1, e_1), f, f', (E, e))$, où $f' < f$, $\alpha(f') = e$, $\beta(f') = e_1$, $\alpha(f) = E$, $\beta(f) = E_1$, forme une sous-catégorie double de $\square(\mathcal{O}, \mathcal{C}^{\cdot})$ vérifiant (1) et (2).

Soit $\tilde{\Omega}'$ la sous-catégorie de $\tilde{\Omega}$ formée des homomorphismes stricts, c'est-à-dire des triplets $((A', <), h, (A, <))$ tels que les relations $z' < z$ et $h(z') = h(z)$ entraînent $z = z'$.

DÉFINITION 18. — *Une catégorie $\tilde{\Omega}$ $(\tilde{\Omega}', \tilde{\Omega})$-structurée sera appelée* catégorie ordonnée; *un groupoïde $\tilde{\Omega}((\tilde{\Omega}', \tilde{\Omega}'), \tilde{\Omega})$-structuré sera appelé* groupoïde strictement ordonné.

Pour qu'une catégorie $\tilde{\Omega}$-structurée $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ soit une catégorie ordonnée, il faut et il suffit que les conditions

$$f' < f, \quad \alpha(f') = \alpha(f) \quad \text{et} \quad \beta(f') = \beta(f)$$

entraînent $f' = f$.

PROPOSITION 18. — *Un groupoïde $\tilde{\Omega}$-structuré $(\mathcal{C}^{\bullet}, <)$ est une catégorie ordonnée.*

En effet, soient $g \in \mathcal{C}$ et $g' \in \mathcal{C}$ tels que

$$g' < g, \qquad \alpha(g') = \alpha(g) \qquad \text{et} \qquad \beta(g') = \beta(g).$$

On a

$$\beta(g) = \beta(g') = g'.g'^{-1} < g.g'^{-1} < g.g^{-1} = \beta(g),$$
$$\alpha(g) = \alpha(g') = g'^{-1}.g' < g'^{-1}.g < g^{-1}.g = \alpha(g).$$

On en déduit

$$g.g'^{-1} = \beta(g) \qquad \text{et} \qquad g'^{-1}.g = \alpha(g).$$

Donc

$$g'^{-1} = g^{-1} \qquad \text{et} \qquad g = g'.$$

PROPOSITION 19. — *Pour qu'un groupoïde $\tilde{\Omega}$-structuré $(\mathcal{C}^{\bullet}, <)$ soit un groupoïde strictement ordonné, il faut et il suffit que la condition suivante soit vérifiée :*

Pour tout $f \in \mathcal{C}$ et tout $e < \alpha(f)$, il existe au plus un $f' \in \mathcal{C}$ tel que $f' < f$ et $\alpha(f') = e$.

Pour que $(\mathcal{C}^{\bullet}, <)$ soit un groupoïde strictement ordonné, il faut et il suffit qu'il existe une catégorie double $(\mathcal{S}^{\bullet}, \mathcal{S}^{\perp})$ vérifiant les conditions (1) et (2) de la proposition 17, que $\mathcal{C}^{\bullet}$ soit un groupoïde et qu'on ait :

(3) Les relations $k \in \mathcal{S}$, $k' \in \mathcal{S}$, $\beta^{\perp}(k) = \beta^{\perp}(k')$ et $\alpha^{\bullet}(k) = \alpha^{\bullet}(k')$ entraînent $k = k'$.

DÉFINITION 19. — *On appelle* catégorie (*resp.* groupoïde) fonctoriellement ordonné *une catégorie (resp. un groupoïde) $\mathcal{C}^{\bullet}$ muni d'une relation d'ordre vérifiant la condition :*

(1) *L'application qui associe à $f \in \mathcal{C}$ la classe des éléments $f' < f$ est un foncteur généralisé [3 a] de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}$.*

D'après une proposition de [3 *a*], un groupoïde fonctoriellement ordonné est aussi un groupoïde strictement ordonné.

PROPOSITION 20. — *Pour que $(\mathcal{C}^{\bullet}, <)$ soit un groupoïde fonctoriellement ordonné, il faut et il suffit que $\mathcal{C}^{\bullet}$ soit un groupoïde et qu'il existe une catégorie double $(\mathcal{S}^{\bullet}, \mathcal{S}^{\perp})$ vérifiant les conditions* (1) *et* (2) *de la proposition 17 ainsi que la condition :*

(3') *Soient $f \in \mathcal{S}_0^{\perp}$ et $z \in \mathcal{S}_0^{\bullet}$ tels que $\alpha^{\bullet}(f^{\perp}) = \beta^{\perp}(z)$. Alors il existe un et un seul $k \in \mathcal{S}$ tel que*

$$\beta^{\perp}(k) = f \qquad et \qquad \alpha^{\bullet}(k) = z.$$

Démonstration. — Les conditions sont nécessaires en vertu de la proposition de [3 *a*] citée ci-dessus. Inversement supposons donnée une catégorie double $(\mathcal{S}^{\cdot}, \mathcal{S}^{\perp})$ vérifiant les conditions (1), (2) et (3'); alors, d'après la proposition 18, $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ est un groupoïde ordonné. En tenant compte des conditions (1) et (2), la condition (3') signifie que si $f \in \mathcal{C}$, $e \in \mathcal{C}^{\cdot}_0$ et $e < \alpha(f)$, il existe un et un seul $f' \in \mathcal{C}$ tel que $f' < f$ et $\alpha(f') = e$. En particulier, les relations

$$e \in \mathcal{C}^{\cdot}_0 \quad \text{et} \quad g < e \quad \text{entraînent} \quad \alpha(g) < e, \quad \text{d'où} \quad g = \alpha(g).$$

Soit $d < g.f$. Par hypothèse, il existe $k \in \mathcal{S}$ et $k' \in \mathcal{S}$ tels que

$$\alpha^{\cdot}(k) = (\alpha(f), \alpha(d)); \qquad \beta^{\perp}(k) = f; \qquad \beta^{\perp}(k') = g \qquad \text{et} \qquad \alpha^{\cdot}(k') = \beta^{\cdot}(k).$$

Il en résulte

$$d = (\alpha^{\perp}(k')).(\alpha^{\perp}(k)).$$

Soit $\tilde{\Omega}''$ la sous-catégorie de $\tilde{\Omega}$ formée des triplets $((A', <), h, (A, <))$ tels que h vérifie la condition :

Si $e' < h(z)$, il existe $z' < z$ avec $h(z') = e'$.

PROPOSITION 21. — *Pour que* $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ *soit un groupoïde fonctoriellement ordonné, il faut et il suffit que* $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ *soit un groupoïde* $\tilde{\Omega}((\tilde{\Omega}' \cap \tilde{\Omega}'', \tilde{\Omega}' \cap \tilde{\Omega}''), \tilde{\Omega})$*-structuré.*

Ceci résulte de la proposition 20.

Soit $\mathcal{J}_0$ la sous-classe de Ω_0 formée des classes inductives [3 *a*], c'est-à-dire des classes ordonnées $(A, <)$ telles que toute sous-classe majorée admette une borne supérieure, appelée *agrégat*. Soit $\mathcal{J}$ la sous-catégorie de $\tilde{\Omega}$ formée des applications inductives entre classes inductives [3 *a*], c'est-à-dire dont les éléments sont les triplets $((A', <), h, (A, <))$ tels que h vérifie les conditions :

(1) $z' < z$ et $z'' < z$ entraînent $h(z \cap z') = h(z) \cap h(z')$, où $z \cap z'$ désigne la borne inférieure, ou *intersection*, de z et z' dans A.

(2) Soit C une sous-classe majorée dans A et soit $\cup\, C$ son agrégat dans A; on a

$$h(\cup C) = \cup h(C).$$

$(\mathcal{M}, \omega, \mathcal{J}, \mathcal{J} \cap \Omega)$ est une catégorie d'homomorphismes à produits finis résolvante à droite. Une sous-structure de $(A, <)$ dans $\mathcal{J}$ est une partie sous-inductive faible [3 *a*] de A. Toute sous-structure dans $\mathcal{J}$ étant *a fortiori* une sous-structure dans $\tilde{\Omega}$, une catégorie $\mathcal{J}$-structurée est aussi $\tilde{\Omega}$-structurée.

Pour que $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ soit une catégorie $\mathcal{J}$-structurée, il faut et il suffit que $(\mathcal{C}, <)$ soit une classe inductive et que les conditions suivantes soient vérifiées :

(I_1) Les relations $f' < f$ et $f'' < f$ entraînent

$$\alpha(f' \cap f'') = \alpha(f') \cap \alpha(f''); \qquad \beta(f' \cap f'') = \beta(f') \cap \beta(f'').$$

(I_2) Les relations $f_i < f$, où $i \in \mathrm{I}$, entraînent

$$\alpha\Big(\bigcup_{i\in \mathrm{I}} f_i\Big) = \bigcup_{i\in \mathrm{I}} \alpha(f_i); \qquad \beta\Big(\bigcup_{i\in \mathrm{I}} f_i\Big) = \bigcup_{i\in \mathrm{I}} \beta(f_i).$$

(I_3) Les relations $g_i < g, f_i < f$, où $i \in \mathrm{I}$, $(g_i, f_i) \in \mathcal{C}^{\cdot} \star \mathcal{C}^{\cdot}$ et $(g, f) \in \mathcal{C}^{\cdot} \star \mathcal{C}^{\cdot}$ entraînent

$$(g_i \cap g_j) \cdot (f_i \cap f_j) = (g_i \cdot f_i) \cap (g_j \cdot f_j),$$

$$\Big(\bigcup_{i\in \mathrm{I}} g_i\Big) \cdot \Big(\bigcup_{i\in \mathrm{I}} f_i\Big) = \bigcup_{i\in \mathrm{I}} (g_i \cdot f_i).$$

Proposition 22. — *Soit* $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ *une catégorie* $\mathcal{J}$*-structurée; soient* g *et* f *deux éléments de* $\mathcal{C}$; *soit* H *la classe des éléments* $g'.f'$ *tels que* $g' < g$ *et* $f' < f$. *Alors la classe* H *admet un plus grand élément.*

Démonstration. — Soit $\langle g, f \rangle$ la classe des couples (g', f') tels que

$$g' \in \mathcal{C}, \qquad f' \in \mathcal{C}, \qquad g' < g, \qquad f' < f \quad \text{et} \quad \alpha(g') = \beta(f').$$

Soit G la classe des g' tels qu'il existe $(g', f') \in \langle g, f \rangle$; soit F la classe des f' tels qu'il existe $(g', f') \in \langle g, f \rangle$. La classe $\alpha(\mathrm{G})$ est alors égale à la classe $\beta(\mathrm{F})$. D'après la condition (2), la classe G, majorée par g, admet un agrégat $\cup \mathrm{G} < g$ tel que $\alpha(\cup \mathrm{G}) = \cup\, \alpha(\mathrm{G})$. De même F admet un agrégat $\cup \mathrm{F} < f$ tel que $\beta(\cup \mathrm{F}) = \cup\, \beta(\mathrm{F})$. Par suite, $\alpha(\cup \mathrm{G}) = \beta(\cup \mathrm{F})$ et $(\cup \mathrm{G}).(\cup \mathrm{F})$ est défini; comme $(\cup \mathrm{G}).(\cup \mathrm{F})$ appartient à H, on trouve $\cup \mathrm{H} = (\cup \mathrm{G}).(\cup \mathrm{F})$.

Définition 20. — *Avec les conditions de la proposition* 22, *le plus grand élément* $\cup$ H *de* H *sera noté* gf *et appelé* pseudo-produit de g et f.

Remarquons que la loi de composition $(g, f) \to gf$, partout définie, n'est pas forcément associative.

Proposition 23. — *Soit* $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ *une catégorie* $\mathcal{J}$*-structurée; le pseudo-produit* $(g, f) \to gf$ *vérifie les conditions suivantes :*

(1) *Soient* $g \in \mathcal{C}$, $g' \in \mathcal{C}$, $f \in \mathcal{C}$ *et* $f' \in \mathcal{C}$ *tels que* $g' < g$ *et* $f' < f$. *Alors on a* $g'f' < gf$.

(2) *Soient* $g \in \mathcal{C}$ *et* $f \in \mathcal{C}$; *on a*

$$\beta(gf) < \beta(g) \quad \text{et} \quad \alpha(gf) < \alpha(f).$$

(3) *Soient* $s \in \mathcal{C}_0$ *et* $S \in \mathcal{C}^{\cdot}_0$ *tels que* $s < S$; *on a*

$$\alpha(Ss) = s = \beta(sS).$$

En effet les conditions (1) et (2) résultent de la définition du pseudo-produit. Supposons $s < S$ dans $\mathcal{C}^{\cdot}_0$. On a $\alpha(Ss) < s$. De plus $s.s < Ss$, donc

$$s < \alpha(Ss) < s \quad \text{et} \quad s = \alpha(Ss).$$

De même

$$\beta(sS) = s.$$

En utilisant les sous-catégories $\tilde{\Omega}'$ et $\tilde{\Omega}''$ de $\tilde{\Omega}$ définies plus haut, posons

$$\mathcal{J}' = \mathcal{J} \cap \tilde{\Omega}' \quad \text{et} \quad \mathcal{J}'' = \mathcal{J} \cap \tilde{\Omega}''.$$

Les éléments de $\mathcal{J}'$ sont les applications inductives strictes [3 *a*]. La sous-catégorie $\mathcal{J}'$ de $\mathcal{J}$ contient le groupoïde des éléments inversibles de $\mathcal{J}$ et vérifie la condition (σ) de la proposition 10 (§ I), puisque toute restriction d'une application inductive stricte est une application inductive stricte. $\mathcal{J}''$ contient aussi $\mathcal{J} \cap \Omega$, mais $\mathcal{J}''$ ne vérifie pas la condition (σ). Les sous-catégories $\mathcal{J}'$ et $\mathcal{J}''$ de $\mathcal{J}$ sont stables par produit (mais ce ne sont pas des catégories d'homomorphismes à produits finis au-dessus de $\mathcal{M}$).

Définition 21. — *Une catégorie* $\mathcal{J}(\mathcal{J}', \mathcal{J})$*-structurée sera appelée* catégorie inductive; *si* $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ *est une catégorie inductive, un élément* f' *tel que* $f' < f$ *sera dit* induit par f.

Théorème 9. — *Soit* $\mathcal{C}^{\cdot}$ *une catégorie et* $(\mathcal{C}, <)$ *une classe inductive. Pour que* $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ *soit une catégorie inductive, il faut et il suffit que soient vérifiés les axiomes* (I_1) *et* (I_2) *ainsi que les axiomes :*

(I'_3) *Les conditions* $g' < g$, $f' < f$, $(g, f) \in \mathcal{C}^{\cdot} \star \mathcal{C}^{\cdot}$ *et* $(g', f') \in \mathcal{C}^{\cdot} \star \mathcal{C}^{\cdot}$ *entraînent* $g'.f' < g.f$.

(I'_4) *Les conditions* $g' < g$, $\alpha(g') = \alpha(g)$ et $\beta(g') = \beta(g)$ *entraînent* $g' = g$.

Démonstration. — Les conditions sont évidemment nécessaires. Montrons qu'elles sont suffisantes, c'est-à-dire qu'elles entraînent l'axiome (I_3), dont nous reprenons les notations. Comme on a

$$\alpha(g_i \cap g_j) = \alpha(g_i) \cap \alpha(g_j) = \beta(f_i) \cap \beta(f_j),$$

le composé $h = (g_i \cap g_j).(f_i \cap f_j)$ est défini et, en vertu de (I'_3), on a

$$h < (g_i.f_i) \cap (g_j.f_j).$$

Puisque $g_i.f_i < g.f$ et $g_j.f_j < g.f$, en utilisant (I_1), on trouve

$$\alpha(g_i.f_i \cap g_j.f_j) = \alpha(f_i) \cap \alpha(f_j) = \alpha(f_i \cap f_j) = \alpha(h)$$

et

$$\beta(g_i.f_i \cap g_j.f_j) = \beta(g_i) \cap \beta(g_j) = \beta(g_i \cap g_j) = \beta(h).$$

De l'axiome (I'_4) on déduit alors

$$h = (g_i \cdot f_i) \cap (g_j \cdot f_j).$$

On démontre d'une manière analogue la deuxième relation de (I_3).

Corollaire 1. — *Pour que* $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ *soit une catégorie inductive au sens de* [3 *c*], *il faut et il suffit que* $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ *soit une catégorie* $\mathcal{J}(\mathcal{J}', \mathcal{J}'')$*-structurée.*

En effet les conditions (I_1), (I_2), (I'_3) et (I'_4) signifient que $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ vérifie tous les axiomes d'une catégorie inductive au sens de [3 *c*] à l'exception de l'axiome :

(I'_5) Si $k < g.f$, il existe $g' < g$ et $f' < f$ tels que $k = g'.f'$; l'axiome (I'_5) est équivalent à la condition $((\mathcal{C}^{\cdot}, <), \varkappa^{\cdot}, (\mathcal{C}^{\cdot}\star\mathcal{C}^{\cdot}, <)) \in \mathcal{J}''$.

Corollaire 2. — *Dans une catégorie inductive au sens de* [3 *c*], *deux éléments quelconques ont un pseudo-produit et la loi de composition* $(g, f) \to gf$ *est associative.*

Remarque. — Dans la suite de cet article, nous verrons que les catégories $\mathcal{H}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')$-structurées telles que $\mathcal{H}'$ et $\mathcal{H}''$ vérifient la condition (σ) de la proposition 10 (§ I) jouissent de nombreuses propriétés. C'est cette raison qui a motivé la nouvelle terminologie employée ici, car la classe des catégories inductives au sens de la définition 21 est plus stable pour certaines opérations que la classe des catégories inductives au sens de [3 *c*].

Proposition 24. — *Soit* $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ *une catégorie inductive; soient* $f \in \mathcal{C}$ *et* $f' \in \mathcal{C}$ *tels que* $f' < f$; *alors on a*

$$f' = \beta(f')\,(f\alpha(f')) = (\beta(f')\,f)\,\alpha(f').$$

Démonstration. — En utilisant la proposition 23, on trouve

$$f' = f' \cdot \alpha(f') < f\alpha(f'), \qquad f' = \beta(f') \cdot f' < \beta(f')\,(f\alpha(f')),$$
$$\alpha(\beta(f')\,(f\alpha(f'))) < \alpha(f\alpha(f')) < \alpha(f')$$

et

$$\beta(\beta(f')\,(f\alpha(f'))) < \beta(f').$$

Posons $f'' = \beta(f')\,(f\alpha(f'))$; comme $f' < f''$, on a

$$\alpha(f') < \alpha(f'') \qquad \text{et} \qquad \beta(f') < \beta(f'').$$

Il en résulte

$$\alpha(f') = \alpha(f'') \qquad \text{et} \qquad \beta(f') = \beta(f'').$$

Puisque $[\beta, \alpha]$ est une application inductive stricte, les relations

$$f' < f'', \qquad \alpha(f') = \alpha(f'') \qquad \text{et} \qquad \beta(f') = \beta(f'')$$

entraînent $f' = f''$. On montre de même l'égalité

$$f' = (\beta(f')f)\,\alpha(f').$$

Corollaire. — *Soit* $(\mathcal{C}^{\bullet}, <)$ *une catégorie inductive; les conditions*

$$s \in \mathcal{C}^{\bullet}_0, \qquad S \in \mathcal{C}^{\bullet}_0 \qquad \text{et} \qquad s < S$$

entraînent

$$s = s(Ss) = (sS)\,s.$$

Proposition 25. — *Soit* $(\mathcal{C}^{\bullet}, <)$ *une catégorie inductive. Pour que* $(\mathcal{C}^{\bullet}, <)$ *soit une catégorie* $\mathcal{I}(\mathcal{I}', \mathcal{I}'')$*-structurée, il faut et il suffit que le pseudo-produit* $(g, f) \to gf$ *soit associatif.*

Démonstration. — La condition est nécessaire d'après le théorème 9 et son corollaire. Si elle est vérifiée, soit $k < g.f$; en vertu de la proposition 24, on a

$$k = \beta(k)\,(g.f)\,\alpha(k) = (\beta(k)g)\,(f\alpha(k)),$$

en utilisant l'associativité du pseudo-produit. De la définition du pseudo-produit, il résulte

$$k = (\cup G).(\cup F),$$

où G est une classe majorée par $(\beta(k)\,g)$ et F une classe majorée par $(f\alpha(k))$, donc $\cup\, G < g$ et $\cup\, F < f$. Ceci démontre que l'axiome (I'_5) est vérifié.

Soit $(\mathcal{C}^{\bullet}, <)$ une catégorie $\mathcal{I}$-structurée. Soit $\mathcal{C}'$ la classe des triplets (S', f, S) tels que

$$f \in \mathcal{C}, \qquad S \in \mathcal{C}^{\bullet}_0, \qquad S' \in \mathcal{C}^{\bullet}_0, \qquad \alpha(f) < S \qquad \text{et} \qquad \beta(f) < S'.$$

Munie de la loi de composition

$$(S'', f', S'_1).(S', f, S) = (S'', f'.f, S)$$

si, et seulement si,

$$\alpha(f') = \beta(f) \qquad \text{et} \qquad S'_1 = S',$$

$\mathcal{C}'$ est une catégorie; les unités de $\mathcal{C}'$ sont les triplets (S, e, S) où $e \in \mathcal{C}^{\bullet}_0$ et $e < S$. L'application $f \to (\beta(f), f, \alpha(f))$ identifie $\mathcal{C}$ à une sous-catégorie de $\mathcal{C}'$.

Proposition 26. — *Avec les notations précédentes* $(\mathcal{C}', <)$ *est une catégorie* $\mathcal{I}$*-structurée, la relation d'ordre étant définie par* $(S'_1, f_1, S_1) < (S', f, S)$ *si, et seulement si,* $S'_1 < S'$, $S_1 < S$ *et* $f_1 < f$. *Si* $(\mathcal{C}^{\bullet}, <)$ *est une catégorie inductive [resp.* $\mathcal{I}(\mathcal{I}', \mathcal{I}'')$*-structurée],* $(\mathcal{C}', <)$ *est une catégorie inductive [resp.* $\mathcal{I}(\mathcal{I}', \mathcal{I}'')$*-structurée].*

Démonstration. — Supposons $\bar{f}_i = (S_i', \bar{f}_i, S_i) < f = (S', f, S)$ pour tout $i \in I$; on a

$$\bigcup_{i\in I} \bar{f}_i = \left(\bigcup_{i\in I} S_i', \bigcup_{i\in I} f_i, \bigcup_{i\in I} S_i\right) \quad \text{et} \quad \bar{f}_i \cap \bar{f}_j = (S_i' \cap S_j', f_i \cap f_j, S_i \cap S_j),$$

d'où

$$\alpha\left(\bigcup_{i\in I} \bar{f}_i\right) = \bigcup_{i\in I} \alpha(\bar{f}_i) \quad \text{et} \quad \alpha(\bar{f}_i \cap \bar{f}_j) = \alpha(\bar{f}_i) \cap \alpha(\bar{f}_j),$$

$$\beta\left(\bigcup_{i\in I} \bar{f}_i\right) = \bigcup_{i\in I} \beta(\bar{f}_i) \quad \text{et} \quad \beta(\bar{f}_i \cap \bar{f}_j) = \beta(\bar{f}_i) \cap \beta(\bar{f}_j).$$

Ainsi les conditions (I_1) et (I_2) sont vérifiées. Soit

$$\bar{g}_i = (S_i'', g_i, S_i') < \bar{g} = (S'', g, S')$$

tel que $\bar{g}_i . \bar{f}_i$ et $\bar{g} . \bar{f}$ soient définis; comme $g_i . f_i < g . f$, on a aussi $\bar{g}_i . \bar{f}_i < \bar{g} . \bar{f}$. Des relations

$$\bar{g}_i . \bar{f}_i = (S_i'', g_i . f_i, S_i),$$

on déduit

$$(\bar{g}_i . \bar{f}_i) \cap (\bar{g}_j . \bar{f}_j) = (S_i'' \cap S_j'', (g_i \cap g_j) . (f_i \cap f_j), S_i \cap S_j) = (\bar{g}_i \cap \bar{g}_j) . (\bar{f}_i \cap \bar{f}_j)$$

et

$$\bigcup_{i\in I} (\bar{g}_i . \bar{f}_i) = \left(\bigcup_{i\in I} S_i'', \bigcup_{i\in I} (g_i . f_i), \bigcup_{i\in I} S_i\right) = \left(\bigcup_{i\in I} \bar{g}_i\right) . \left(\bigcup_{i\in I} \bar{f}_i\right).$$

Donc $(\mathcal{C}^l, <)$ est une catégorie $\mathcal{J}$-structurée. — Si $(\mathcal{C}, <)$ est une catégorie inductive, les conditions

$$\bar{f}_i < \bar{f}, \qquad \alpha(\bar{f}_i) = \alpha(\bar{f}) \quad \text{et} \quad \beta(\bar{f}_i) = \beta(\bar{f})$$

entraînent

$$S_i = S, \qquad S_i' = S' \quad \text{et} \quad f_i = f, \qquad \text{d'où} \quad \bar{f}_i = \bar{f}.$$

Ainsi l'axiome (I_4') est également vérifié dans $(\mathcal{C}^l, <)$. — Enfin si $(\mathcal{C}^\bullet, <)$ est une catégorie $\mathcal{J}$ $(\mathcal{J}', \mathcal{J}'')$-structurée, soit

$$\bar{h} = (S_1'', h, S_1) < (S'', g, S') . (S', f, S);$$

comme

$$h = g' . f', \qquad \text{où} \quad g' < g \quad \text{et} \quad f' < f,$$

on trouve

$$\bar{h} = (S_1'', g', \alpha(g')) . (\alpha(g'), f', S_1);$$

par suite, $(\mathcal{C}^l, <)$ est une catégorie $\mathcal{J}(\mathcal{J}', \mathcal{J}'')$-structurée.

COROLLAIRE. — *Si $(\mathcal{C}^\bullet, <)$ est un groupoïde $\mathcal{J}$-structuré, alors $(\mathcal{C}^l, <)$ est un groupoïde $\mathcal{J}$-structuré.*

En effet, la condition $(S'_1, f_1, S_1) < (S', f, S)$ entraîne

$$f_1^{-1} < f^{-1}, \qquad \text{d'où} \qquad (S_1, f_1^{-1}, S'_1) < (S, f^{-1}, S').$$

DÉFINITION 22. — *Avec les notations précédentes, la catégorie (resp. le groupoïde) $\mathcal{I}$-structuré $(\mathcal{C}^l, <)$ sera appelé* catégorie des homomorphismes locaux (*resp.* groupoïde des isomorphismes locaux) *associée à la catégorie (resp. au groupoïde) $\mathcal{I}$-structuré $(\mathcal{C}^\bullet, <)$.*

Remarque. — La classe $\mathcal{C}^l$ peut aussi être munie de la loi de composition

$$(S''_1, f', S'_1) \perp (S', f, S) = (S'', f'f, S) \qquad \text{si, et seulement si,} \quad S' = S'_1,$$

où $f'f$ désigne le pseudo-produit de f' et f dans $(\mathcal{C}^\bullet, <)$. Soit $<_\perp$ la relation d'ordre définie sur $\mathcal{C}^l$ par

$$(S'_1, f_1, S_1) <_\perp (S', f, S) \qquad \text{si, et seulement si,} \quad S' = S'_1, \qquad S = S_1 \qquad \text{et} \qquad f' < f.$$

Une démonstration analogue à celle de la proposition 26 conduit à :

PROPOSITION 26 *bis*. — *Si $(\mathcal{C}^l, <)$ est une catégorie $\mathcal{I}$-structurée, alors $\left((\mathcal{C}^l)^\perp, <_\perp\right)$ est une catégorie $\mathcal{I}$-structurée.*

Toutefois, même si $(\mathcal{C}^\bullet, <)$ est une catégorie inductive, $\left((\mathcal{C}^l)^\perp, <_\perp\right)$ n'est pas une catégorie $\mathcal{I}(\mathcal{I}', \mathcal{I})$-structurée.

Soit $\mathcal{C}^\bullet$ un groupoïde. Rappelons (*voir* [3 *a*]) que $(\mathcal{C}^\bullet, <)$ est un groupoïde inductif si $(\mathcal{C}, <)$ est une classe inductive et si $(\mathcal{C}^\bullet, <)$ est un groupoïde fonctoriellement ordonné.

THÉORÈME 10. — *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) $(\mathcal{C}^\bullet, <)$ *est un groupoïde inductif.*

(2) $(\mathcal{C}^\bullet, <)$ *est un groupoïde* $\mathcal{I}((\mathcal{I}' \cap \mathcal{I}'', \mathcal{I}' \cap \mathcal{I}''), \mathcal{I})$*-structuré.*

(3) $(\mathcal{C}^\bullet, <)$ *est un groupoïde* $\mathcal{I}(\mathcal{I}, \mathcal{I}' \cap \mathcal{I}'')$*-structuré.*

Démonstration. — Les conditions (1) et (2) sont équivalentes d'après la proposition 21. Montrons l'équivalence des conditions (1) et (3). Un groupoïde inductif est une catégorie inductive au sens de [3 *c*]; du corollaire 1 du théorème 9, il résulte que $(\mathcal{C}^\bullet, <)$ est une catégorie $\mathcal{I}(\mathcal{I}, \mathcal{I}'')$-structurée; comme $f' < f$ entraîne $f'^{-1} < f^{-1}$, $(\mathcal{C}^\bullet, <)$ est aussi un groupoïde $\mathcal{I}(\mathcal{I}, \mathcal{I}'')$-structuré. De plus les relations

$$g' \cdot f' = g \cdot f, \qquad g' < g \qquad \text{et} \qquad f' < f$$

entraînent

$$\alpha(f) = \alpha(f') \qquad \text{et} \qquad \beta(g') = \beta(g),$$

et, en vertu de la proposition 20, $g' = g$ et $f' = f$. Ceci démontre que $(\mathcal{C}^\bullet, <)$ est un groupoïde $\mathcal{I}(\mathcal{I}, \mathcal{I}' \cap \mathcal{I}'')$-structuré. Inversement, soit $(\mathcal{C}^\bullet, <)$ un groupoïde $\mathcal{I}(\mathcal{I}, \mathcal{I}' \cap \mathcal{I}'')$-structuré. D'après la proposition 18 et le corollaire 2 du théorème 9, $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ est une catégorie inductive au sens de [3 c]. Il ne reste qu'à prouver que les conditions $g < e$ et $e \in \mathcal{C}^{\cdot}_0$ entraînent $g \in \mathcal{C}^{\cdot}_0$. En effet, on a

$$\alpha(g) < e \quad \text{et} \quad \beta(g) < e,$$

c'est-à-dire, en utilisant la condition (I_2) :

$$(\beta(g) \cap g) \cdot (g \cap \alpha(g)) = (\beta(g) . g) \cap (g . \alpha(g)) = \beta(g) . g;$$

puisque l'application $\varkappa^{\cdot}$ appartient à $\mathcal{I}'$, il en résulte

$$g \cap \alpha(g) = g, \quad \text{d'où} \quad g < \alpha(g).$$

Des relations

$$g^{-1} . g = \alpha(g) . \alpha(g) \quad \text{et} \quad g^{-1} < \alpha(g),$$

on déduit, pour la même raison :

$$g = \alpha(g) \in \mathcal{C}^{\cdot}_0.$$

Remarques. — 1° Même si $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ est un groupoïde inductif, le groupoïde $(\mathcal{C}^{l}, <)$ des isomorphismes locaux associé n'est pas un groupoïde inductif; en effet, les conditions $e \in \mathcal{C}^{\cdot}_0$, $\mathrm{S} \in \mathcal{C}^{\cdot}_0$ et $e < \mathrm{S}$ entraînent $(e, e, \mathrm{S}) < (\mathrm{S}, \mathrm{S}, \mathrm{S})$, bien que (e, e, S) ne soit pas une unité de $\mathcal{C}^{l}$.

2° Pour qu'une catégorie inductive $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ soit fonctoriellement ordonnée (définition 19), il faut et il suffit que $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ soit une catégorie $\mathcal{I}(\mathcal{I}', \mathcal{I}'')$-structurée, que $(\mathcal{C}_\gamma, <)$, où $\mathcal{C}_\gamma$ est le groupoïde des éléments inversibles de $\mathcal{C}^{\cdot}$, soit un groupoïde inductif et que $\mathcal{C}_\gamma$ soit saturé par induction dans $\mathcal{C}$. Exemple : la catégorie des surjections.

7. Théorèmes généraux sur les catégories structurées. — Dans tout ce paragraphe, nous supposerons que la catégorie d'homomorphismes à produits finis $(\mathcal{M}, p, \mathcal{H}, \Gamma)$ est résolvante à droite. $\mathcal{H}'$ et $\mathcal{H}''$ désignent deux sous-catégories de $\mathcal{H}$ contenant Γ.

Proposition 27. — *Pour que $(\mathcal{C}^{\cdot}, s)$ soit une catégorie $\mathcal{H}$-structurée, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :*

(1) *$\mathcal{C}^{\cdot}$ est une catégorie, $s \in \mathcal{H}_0$ et $p(s) = \mathcal{C}$.*

(2) *On a $(s, \alpha, s) \in \mathcal{H}$ et $(s, \beta, s) \in \mathcal{H}$.*

(3) *Les conditions $(s \times s, \iota, s') \in \mathcal{H}$ et $p(s') = \mathcal{C}^{\cdot} \star \mathcal{C}^{\cdot}$ entraînent*

$$(s, \varkappa^{\cdot}, s') \in \mathcal{H}.$$

Démonstration. — Ces conditions sont nécessaires; en effet si $s' \propto s \times s$ et $p(s') = \mathcal{C}^{\cdot} \star \mathcal{C}^{\cdot}$, soit $s'' \in \mathcal{H}_0$ tel que $p(s'') = \mathcal{C}^{\cdot} \star \mathcal{C}^{\cdot}$ et $(s \times s, \iota, s'') \in \mathcal{H}$. Par définition d'une sous-structure, on aura aussi $(s', \iota, s'') \in \mathcal{H}$, par suite, $(s, \varkappa^{\cdot}, s'') \in \mathcal{H}$. Montrons que les conditions sont suffisantes. D'après l'axiome (R), le couple $((s, \alpha, s), (s, \iota, s))$ admet un p-noyau $s_0 \propto s$ tel que $p(s_0)$ soit la classe des $f \in \mathcal{C}$ pour lesquels $f = \alpha(f)$, c'est-à-dire $p(s_0) = \mathcal{C}^{\cdot}_0$. Comme

$$\alpha(p(s)) = \mathcal{C}^{\cdot}_0 \quad \text{et} \quad \beta(p(s)) = \mathcal{C}^{\cdot}_0,$$

on a aussi

$$(s_0, \alpha, s) \in \mathcal{H} \quad \text{et} \quad (s_0, \beta, s) \in \mathcal{H},$$

ce qui prouve que l'axiome (1) des catégories $\mathcal{H}$-structurées est vérifié. Soient p_1 et p_2 les projections canoniques de $p(s) \times p(s)$ sur $p(s)$; on a

$$(s, \alpha p_1, s \times s) = (s, \alpha, s) \cdot (s, p_1, s \times s) \in \mathcal{H} \quad \text{et} \quad (s, \beta p_2, s \times s) \in \mathcal{H}.$$

L'axiome (R) assure que le couple $((s, \alpha p_1, s \times s), (s, \beta p_2, s \times s))$ admet un p-noyau $s' \propto s \times s$ tel que $p(s') = \mathcal{C}^{\cdot} \star \mathcal{C}^{\cdot}$. Donc $(\mathcal{C}^{\cdot}, s)$ est une catégorie $\mathcal{H}$-structurée.

PROPOSITION 28. — *Supposons que* $\mathcal{H}'$ *vérifie la condition* (σ) (prop. 10, § I). *Pour que* $(\mathcal{C}^{\cdot}, s)$ *soit une catégorie* $\mathcal{H}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')$ - [*resp.* $\mathcal{H}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H}'')$-] *structurée, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :*

(1) $\mathcal{C}^{\cdot}$ *est une catégorie; on a* $s \in \mathcal{H}_0$ et $p(s) = \mathcal{C}$.

(2) *On a* $(s \times s, [\beta, \alpha], s) \in \mathcal{H}'$ [*resp.* $(s, \alpha, s) \in \mathcal{H}'$ et $(s, \beta, s) \in \mathcal{H}'$].

(3) *Si* $s' \propto s \times s$ *et* $p(s') = \mathcal{C}^{\cdot} \star \mathcal{C}^{\cdot}$, *alors* $(s, \varkappa, s') \in \mathcal{H}''$.

Démonstration. — Supposons que $(\mathcal{C}^{\cdot}, s)$ soit une catégorie $\mathcal{H}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')$-structurée. D'après la proposition 5, il existe $s_0 \propto s$ tel que

$$p(s_0) = \mathcal{C}^{\cdot}_0 \quad \text{et} \quad (s_0 \times s_0, [\beta, \alpha], s) \in \mathcal{H}'.$$

En vertu de la proposition 3, on a $s_0 \times s_0 \propto s \times s$ donc, à l'aide de (σ), on trouve $s_0 \times s_0 \propto s \times s$ dans $\mathcal{H}'$ et

$$(s \times s, [\beta, \alpha], s) \in \mathcal{H}'.$$

Ainsi les conditions (1), (2) et (3) sont nécessaires. — Montrons qu'elles sont suffisantes. Un raisonnement analogue à celui de la proposition 27 montre que, dans $\mathcal{H}$, il existe

$$s_0 \propto s \quad \text{tel que} \quad p(s_0) = \mathcal{C}^{\cdot}_0$$

et

$$s' \propto s \times s \quad \text{tel que} \quad p(s') = \mathcal{C}^{\cdot} \star \mathcal{C}^{\cdot}.$$

Par suite l'axiome (2) de la définition 3 est vérifié. De plus, comme $s_0 \times s_0 \propto s \times s$ dans $\mathcal{H}'$, on obtient, en utilisant la condition (2) :

$$(s_0 \times s_0, [\beta, \alpha], s) \in \mathcal{H}'.$$

Le cas $\mathcal{H}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H}'')$-structuré se traite d'une manière analogue.

COROLLAIRE. — *Si $\mathcal{H}'$ et $\mathcal{H}''$ vérifient la condition* (σ), *pour que* $(\mathcal{C}^{\cdot}, s)$ *soit un groupoïde* $\mathcal{H}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H}'')$*-structuré, il faut et il suffit que soient vérifiées les conditions* (1) *et* (3) *de la proposition* 28 *ainsi que les conditions :*

(2′) *On a* $(s, \alpha, s) \in \mathcal{H}'$;

(4) $\mathcal{C}^{\cdot}$ *est un groupoïde et l'on a* $(s, j, s) \in \mathcal{H}$, *où j désigne l'application* $f \to f^{-1}, f \in \mathcal{C}$.

En effet, les conditions sont évidemment nécessaires. Inversement si elles sont vérifiées, on a

$$(s, \beta, s) = (s, \alpha, s).(s, j, s) \in \mathcal{H},$$

donc la condition (2) de la proposition est aussi vérifiée.

PROPOSITION 29. — *Si $\mathcal{H}'$ est stable par produit et vérifie la condition* (σ), *alors* $\overline{\mathcal{H}}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H}'')$ *est une sous-catégorie pleine de* $\overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')$.

Démonstration. — Soit $s \in \mathcal{H}_0$. D'après l'axiome (R), le couple $((s, p_1, s\times s), (s, p_2, s\times s))$, où p_1 et p_2 sont les projections canoniques de $p(s)\times p(s)$ sur $p(s)$, admet un p-noyau $s^1 \propto s\times s$ tel que $p(s^1)$ soit la diagonale Δ de $p(s)\times p(s)$. Supposons $(\mathcal{C}^{\cdot}, s) \in \overline{\mathcal{H}}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H}'')_0$. Les relations

$$(s, \alpha, s) \in \mathcal{H}' \qquad \text{et} \qquad (s, \beta, s) \in \mathcal{H}'$$

entraînent

$$(s \times s, \beta \times \alpha, s \times s) \in \mathcal{H}'.$$

Puisque $\mathcal{H}'$ vérifie la condition (σ), on a

$$(s \times s, \iota, s^1) \in \mathcal{H}',$$

d'où

$$(s \times s, [\beta, \alpha], s^1) = (s \times s, (\beta \times \alpha).s \times s), (s \times s, \iota, s^1) \in \mathcal{H}'.$$

Par suite, $(\mathcal{C}^{\cdot}, s)$ est une catégorie $\mathcal{H}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')$-structurée, ce qui démontre la proposition, car $(s^1, [\iota,\iota], s) \in \Gamma$ (*voir* théorème 12).

Reprenons les notations définies au n° 2.

THÉORÈME 11. — $\left(\mathcal{H}, \bar{p}_{\mathcal{H}}, \overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}''), \overline{\Gamma}\right)$ *et* $\left(\mathcal{H}, \bar{p}_{\mathcal{H}}, \overline{\mathcal{G}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}''), \overline{\Gamma}_{\mathcal{G}}\right)$ *sont des catégories d'homomorphismes saturées au-dessus de* $\mathcal{H}$.

Démonstration. — Le seul point à démontrer est que les conditions

$$(\mathcal{C}^{\cdot}, s) \in \overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')_0 \qquad \text{et} \qquad (\bar{s}, F, s) \in \Gamma$$

entraînent l'existence de $\left(\overline{\mathcal{C}}^{\cdot}, \bar{s}\right)$ tel que

$$\left((\overline{\mathcal{C}}^{\cdot}, \bar{s}), F, (\mathcal{C}^{\cdot}, s)\right) \in \overline{\Gamma}.$$

En effet, puisque $\mathcal{F}$ est saturé au-dessus de $\mathcal{M}$, il existe $\overline{\mathcal{C}}^{\cdot}$ tel que

$$(\overline{\mathcal{C}}^{\cdot}, F, \mathcal{C}^{\cdot}) \in \overline{F}_{\gamma}.$$

Soit $s_0 \propto s$ tel que $p(s_0) = \mathcal{C}^{\cdot}_0$. Comme s_0 est un p-noyau (démonstration de la proposition 28), d'après la proposition 16 (§ I), il existe

$$\bar{s}_0 \propto \bar{s} \quad \text{tel que} \quad (\bar{s}_0, \mathrm{F}\iota, s_0) \in \Gamma;$$

on a alors $p(\bar{s}_0) = \overline{\mathcal{C}}^{\cdot}_0$. Comme $\mathcal{H}'$ contient Γ, on trouve

$$(\bar{s}_0 \times \bar{s}_0, [\bar{\beta}, \bar{\alpha}], \bar{s}) = (\bar{s}_0 \times \bar{s}_0, \mathrm{F}\iota \times \mathrm{F}\iota, s_0 \times s_0).(s_0 \times s_0, [\beta, \alpha], s).(s, \mathrm{F}^{-1}, \bar{s}) \in \mathcal{H}',$$

où $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$ désignent les applications source et but dans $\overline{\mathcal{C}}^{\cdot}_0$. Soit $s' \propto s \times s$ tel que $p(s') = \mathcal{C}^{\cdot} \star \mathcal{C}^{\cdot}$. En utilisant la relation

$$(\bar{s} \times \bar{s}, \mathrm{F} \times \mathrm{F}, s \times s) \in \Gamma$$

la proposition 16 (§ I) assure l'existence de

$$\bar{s}' \propto \bar{s} \times \bar{s} \quad \text{tel que} \quad (\bar{s}', (\mathrm{F} \times \mathrm{F})\iota, s') \in \Gamma, \quad \text{et} \quad p(\bar{s}') = \overline{\mathcal{C}}^{\cdot} \star \overline{\mathcal{C}}^{\cdot}.$$

Par conséquent :

$$(\bar{s}, \bar{\varkappa}^{\cdot}, \bar{s}') = (\bar{s}, \mathrm{F}, s).(s, \varkappa^{\cdot}, s').(\bar{s}', (\mathrm{F} \times \mathrm{F})\iota, s')^{-1} \in \mathcal{H}''.$$

Il en résulte

$$(\overline{\mathcal{C}}^{\cdot}, \bar{s}) \in \overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')_0 \quad \text{et} \quad ((\overline{\mathcal{C}}^{\cdot}, \bar{s}), \mathrm{F}, (\mathcal{C}^{\cdot}, s)) \in \overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'').$$

Si de plus on a $(\mathcal{C}^{\cdot}, s) \in \overline{\mathcal{G}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')_0$, on obtient

$$(\bar{s}, \bar{j}, \bar{s}) = (\bar{s}, \mathrm{F}, s).(s, j, s).(s, \mathrm{F}^{-1}, \bar{s}) \in \Gamma,$$

où j et $\bar{j}$ désignent resp. les applications $f \to f^{-1}$ dans $\mathcal{C}^{\cdot}$ et dans $\overline{\mathcal{C}}^{\cdot}$. Donc

$$((\overline{\mathcal{C}}^{\cdot}, \bar{s}), \mathrm{F}, (\mathcal{C}^{\cdot}, s)) \in \overline{\mathcal{G}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'').$$

COROLLAIRE. — $(\mathcal{M}, p_{\mathcal{F}}, \bar{p}, \overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}''), \bar{\Gamma})$ *et* $(\mathcal{M}, p_{\mathcal{F}}\, \bar{p}, \overline{\mathcal{G}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}''), \bar{\Gamma}_{\mathcal{G}})$ *sont des catégories d'homomorphismes.*

En effet, supposons vérifiées les conditions

$$((\overline{\mathcal{C}}^{\cdot}, \bar{s}), \mathrm{F}, (\mathcal{C}^{\cdot}, s)) \in \bar{\Gamma} \quad \text{et} \quad (\mathcal{C}^{\perp}, s_1) \in \overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')_0.$$

Puisque $(\mathcal{M}, p, \Gamma)$ est une espèce de structures, il existe $\bar{s}_1 \in \mathcal{H}_0$ tel que

$$(\bar{s}_1, \mathrm{F}, s_1) \in \Gamma$$

et il résulte du théorème 11 qu'on a alors

$$((\overline{\mathcal{C}}^{\perp}, \bar{s}_1), \mathrm{F}, (\mathcal{C}^{\perp}, s_1)) \in \bar{\Gamma}.$$

THÉORÈME 12 :

$$(\mathcal{H}, \bar{p}_{\mathcal{H}}, \overline{\mathcal{H}}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H}''), \bar{\Gamma}') \quad \text{et} \quad (\mathcal{H}, \bar{p}_{\mathcal{H}}, \overline{\mathcal{G}}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H}''), \bar{\Gamma}'_{\mathcal{G}})$$

sont des catégories d'homomorphismes saturées au-dessus de $\mathcal{H}$;

$$(\mathcal{M}, p_{\mathcal{F}}\bar{p}, \overline{\mathcal{H}}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H}''), \bar{\Gamma}') \quad \text{et} \quad (\mathcal{M}, p_{\mathcal{F}}\bar{p}, \overline{\mathcal{G}}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H}''), \bar{\Gamma}'_{\mathcal{G}})$$

sont des catégories d'homomorphismes et $\mathcal{H}$ *s'identifie à une sous-catégorie pleine de* $\overline{\mathcal{H}}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H}'')$.

Démonstration. — La première partie du théorème se démontre d'une manière analogue au théorème 11. Soit $s \in \mathcal{H}_0$ et posons $\mathcal{C} = p(s)$. Munissons $\mathcal{C}$ de la loi de composition (triviale) :

$$(f', f) \to f'.f = f \quad \text{si, et seulement si,} \quad f' = f.$$

On a $(s, \alpha, s) \in \Gamma$, puisque $\alpha(f) = f$ pour tout $f \in \mathcal{C}$. D'après l'axiome (R). il existe $s' \propto s \times s$ tel que $p(s') = \mathcal{C}^{\cdot} \star \mathcal{C}^{\cdot} =$ diagonale Δ de $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$. Les relations

$$(s \times s, [\iota, \iota], s) \in \mathcal{H} \quad \text{et} \quad [\iota, \iota](\mathcal{C}) = \Delta \quad \text{entraînent} \quad (s', [\iota, \iota], s) \in \mathcal{H}.$$

Par ailleurs : $(s, p_1\iota, s') \in \mathcal{H}$, où p_1 est la projection de $p(s) \times p(s)$ sur $p(s)$, Des égalités

$$(s', [\iota, \iota], s).(s, p_1\iota, s') = s' \quad \text{et} \quad (s, p_1\iota, s').(s', [\iota, \iota], s) = s,$$

il résulte

$$(s, \varkappa^{\cdot}, s') = (s, p_1\iota, s') \in \Gamma.$$

Donc $(\mathcal{C}^{\cdot}, s)$ est une catégorie $\overline{\mathcal{H}}((\Gamma, \Gamma), \Gamma)$-structurée. Enfin l'application

$$(\bar{s}, g, s) \to ((p(\bar{s}), \bar{s}), g, (p(s), s))$$

est une équivalence de $\mathcal{H}$ sur une sous-catégorie pleine de $\overline{\mathcal{H}}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H}'')$.

Théorème 13. — *Si* $\mathcal{H}'$ *et* $\mathcal{H}''$ *sont des sous-catégories de* $\mathcal{H}$ *stables par produit, les catégories d'homomorphismes* $(\mathcal{M}, p_{\mathcal{F}}\bar{p}, \overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}''), \bar{\Gamma})$, $(\mathcal{M}, p_{\mathcal{F}}\bar{p}, \overline{\mathcal{G}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}''), \bar{\Gamma}_{\mathcal{G}})$ *et* $(\mathcal{M}, p_{\mathcal{F}}\bar{p}, \overline{\mathcal{H}}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H}''), \bar{\Gamma}')$ *sont des catégories d'homomorphismes à produits finis.*

Démonstration. — Comme $\mathcal{F}$ et $\mathcal{H}$ sont des catégories d'homomorphismes à produits finis au-dessus de $\mathcal{M}$, pour vérifier que $(\mathcal{M}, p_{\mathcal{F}}\bar{p}, \overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}''), \bar{\Gamma})$ est une catégorie d'homomorphismes à produits finis, le seul point à démontrer est que les relations

$$(\mathcal{C}^{\cdot}, s) \in \overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')_0 \quad \text{et} \quad (\bar{\mathcal{C}}^{\cdot}, \bar{s}) \in \overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')_0$$

entraînent

$$(\mathcal{C}^{\cdot} \times \bar{\mathcal{C}}^{\cdot}, s \times \bar{s}) \in \overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')_0.$$

D'après la proposition 3, on a

$$s_0 \times \bar{s}_0 \propto s \times \bar{s} \quad \text{et} \quad p(s_0 \times \bar{s}_0) = (\mathcal{C}^{\cdot} \times \bar{\mathcal{C}}^{\cdot})_0.$$

Puisque

$$(s_0 \times s_0, [\beta, \alpha], s) \in \mathcal{H}' \qquad \text{et} \qquad (\bar{s}_0 \times \bar{s}_0, [\bar{\beta}, \bar{\alpha}], \bar{s}) \in \mathcal{H}',$$

on a aussi

$$((s_0 \times s_0) \times (\bar{s}_0 \times \bar{s}_0), [\beta, \alpha] \times [\bar{\beta}, \bar{\alpha}], s \times \bar{s}) \in \mathcal{H}'.$$

En vertu de la proposition 4 il existe

$$((s_0 \times \bar{s}_0) \times (s_0 \times \bar{s}_0), \gamma, (s_0 \times s_0) \times (\bar{s}_0 \times \bar{s}_0)) \in \Gamma,$$

avec

$$\gamma((f', f), (\bar{f}', \bar{f})) = ((f', \bar{f}'), (f, \bar{f}));$$

d'où

$$((s_0 \times \bar{s}_0) \times (s_0 \times \bar{s}_0), \gamma([\beta, \alpha] \times [\bar{\beta}, \bar{\alpha}]), s \times \bar{s})$$
$$= ((s_0 \times \bar{s}_0) \times (s_0 \times \bar{s}_0), [\beta \times \bar{\beta}, \alpha \times \bar{\alpha}], s \times \bar{s}) \in \mathcal{H}'.$$

Par ailleurs, il existe $s'' \propto (s \times \bar{s}) \times (s \times \bar{s})$ tel que

$$p(s'') = (\mathcal{C}^\cdot \times \bar{\mathcal{C}}^\cdot) \star (\mathcal{C}^\cdot \times \bar{\mathcal{C}}^\cdot).$$

Des propositions 4 et 7 résultent

$$((s \times \bar{s}) \times (s \times \bar{s}), \gamma, (s \times s) \times (\bar{s} \times \bar{s})) \in \Gamma \qquad \text{et} \qquad (s'', \gamma\iota, s' \times \bar{s}') \in \Gamma;$$

$\mathcal{H}''$ étant stable par produit, des relations

$$(s, \varkappa^\cdot, s') \in \mathcal{H}'' \qquad \text{et} \qquad (\bar{s}, \bar{\varkappa}^\cdot, \bar{s}') \in \mathcal{H}'',$$

on déduit

$$(s \times \bar{s}, (\varkappa^\cdot \times \bar{\varkappa}^\cdot)(\gamma\iota)^{-1}, s'') \in \mathcal{H}''.$$

Par suite, $(\mathcal{C}^\cdot \times \bar{\mathcal{C}}^\cdot, s \times s)$ est une catégorie $\mathcal{H}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')$-structurée.

Remarque. — La démonstration de ce théorème se modifie aisément si l'on suppose que $\mathcal{H}$ est saturé au-dessus de $\mathcal{M}$ au lieu de supposer que $(\mathcal{M}, p, \mathcal{H}, \Gamma)$ est résolvante à droite. En effet, dans ce cas, la proposition 15 (§ I) assure l'existence de $s'' \propto (s \times \bar{s}) \times (s \times \bar{s})$ tel que

$$p(s'') = (\mathcal{C}^\cdot \times \bar{\mathcal{C}}^\cdot) \star (\mathcal{C}^\cdot \times \bar{\mathcal{C}}^\cdot) \qquad \text{et} \qquad (s'', \gamma\iota, s' \times \bar{s}') \in \Gamma.$$

Ceci permet d'énoncer, en utilisant le théorème 3 :

THÉORÈME 13 *bis*. — *Si $\mathcal{H}$ est saturé au-dessus de $\mathcal{M}$ et si $\mathcal{H}'$ et $\mathcal{H}''$ sont stables par produit, $(\mathcal{M}, p_{\mathcal{F}}\bar{p}, \overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}''), \bar{\Gamma})$ et $(\mathcal{M}, p_{\mathcal{F}}\bar{p}, \overline{\mathcal{H}}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H}''), \bar{\Gamma}')$ sont des catégories d'homomorphismes à produits finis, même si $(\mathcal{M}, p, \mathcal{H}, \Gamma)$ n'est pas résolvante à droite.*

THÉORÈME 14. — *Supposons que $\mathcal{H}'$ et $\mathcal{H}''$ vérifient la condition (σ). Soit $(\mathcal{C}^\cdot, s)$ une catégorie (resp. un groupoïde) $\mathcal{H}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')$-structuré. Soit $\bar{s} \propto s$ tel que $p(\bar{s})$ soit une sous-catégorie (resp. un sous-groupoïde) $\bar{\mathcal{C}}$ de $\mathcal{C}^\cdot$.*

Alors $(\overline{\mathcal{C}}^{\bullet}, \bar{s})$ *est une sous-catégorie (resp. un sous-groupoïde)* $\mathcal{H}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')$ *structuré de* $(\mathcal{C}^{\bullet}, s)$. *On peut remplacer dans cet énoncé* $\mathcal{H}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')$ *par* $\mathcal{H}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H}'')$.

Démonstration. — En utilisant la condition (σ) et la proposition 3, les relations

$$\bar{s} \propto s, \qquad (s \times s, [\beta, \alpha]\,\iota, \bar{s}) \in \mathcal{H}' \qquad \text{et} \qquad [\beta, \alpha](\bar{\mathcal{C}}) \subset \bar{\mathcal{C}} \times \bar{\mathcal{C}}$$

entraînent $\bar{s} \times \bar{s} \propto s \times s$ et

$$(\bar{s} \times \bar{s}, [\beta, \alpha]\,\iota, \bar{s}) = (\bar{s} \times \bar{s}, [\bar{\beta}, \bar{\alpha}], \bar{s}) \in \mathcal{H}',$$

où $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$ désignent les applications source et but dans $\overline{\mathcal{C}}^{\bullet}$. Par ailleurs supposons

$$s' \propto s \times s, \qquad \bar{s}' \propto \bar{s} \times \bar{s}, \qquad p(s') = \mathcal{C}^{\bullet} \star \mathcal{C}^{\bullet} \qquad \text{et} \qquad p(\bar{s}') = \bar{\mathcal{C}}^{\bullet} \star \bar{\mathcal{C}}^{\bullet}.$$

D'après la proposition 3 et le théorème 1 (§ I), on a

$$\bar{s} \times \bar{s} \propto s \times s \qquad \text{et} \qquad \bar{s}' \propto s';$$

comme

$$(s, \varkappa^{\bullet}, \bar{s}') = (s, \varkappa^{\bullet}, s').(s', \iota, \bar{s}') \in \mathcal{H} \qquad \text{et} \qquad \varkappa^{\bullet}(p(\bar{s}')) \subset \bar{\mathcal{C}},$$

on trouve $(\bar{s}, \bar{\varkappa}^{\bullet}, \bar{s}') \in \mathcal{H}$, où $\bar{\varkappa}^{\bullet}$ est la restriction de $\varkappa^{\bullet}$ à $\overline{\mathcal{C}}^{\bullet} \star \overline{\mathcal{C}}^{\bullet}$. Donc $(\overline{\mathcal{C}}^{\bullet}, \bar{s})$ est une catégorie $\mathcal{H}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')$-structurée et

$$((\mathcal{C}^{\bullet}, s), \iota, (\bar{\mathcal{C}}^{\bullet}, \bar{s})) \in \overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'').$$

Des relations

$$((\mathcal{C}^{\bullet}, s), g, (\mathcal{S}^{\bullet}, \sigma)) \in \overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'') \qquad \text{et} \qquad g(p(\sigma)) \subset \bar{\mathcal{C}},$$

on déduit

$$(\bar{\mathcal{C}}^{\bullet}, g, \mathcal{S}^{\bullet}) \in \mathcal{F} \qquad \text{et} \qquad (\bar{s}, g, \sigma) \in \mathcal{H},$$

d'où

$$((\bar{\mathcal{C}}^{\bullet}, \bar{s}), g, (\mathcal{S}^{\bullet}, \sigma)) \in \overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'') \qquad \text{et} \qquad (\bar{\mathcal{C}}^{\bullet}, \bar{s}) \underset{\bar{p}}{\propto} (\mathcal{C}^{\bullet}, s).$$

Même démonstration pour les catégories $\mathcal{H}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H}'')$-structurées.

Corollaire 1. — *Si* $\mathcal{H}'$ *et* $\mathcal{H}''$ *vérifient la condition* (σ), *les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) $(\overline{\mathcal{C}}^{\bullet}, \bar{s}) \underset{\bar{p}}{\propto} (\mathcal{C}^{\bullet}, s)$ *dans* $\overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')$ [*resp. dans* $\overline{\mathcal{G}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')$] *et il existe* $\bar{s}^1 \underset{p}{\propto} s$ *tel que* $p(\bar{s}^1) = \overline{\mathcal{C}}$.

(2) $(\mathcal{C}^{\bullet}, s) \in \overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')_0$, $\bar{\mathcal{C}}$ *est une sous-catégorie (resp. un sous-groupoïde) de* $\mathcal{C}^{\bullet}$; $\bar{s} \underset{p}{\propto} s$ *dans* $\mathcal{H}$ *et* $p(\bar{s}) = \bar{\mathcal{C}}$.

En effet si la condition (1) est vérifiée, on a

$$(\overline{\mathcal{C}}^{\boldsymbol{\cdot}}, \bar{s}) \underset{\bar{p}}{\propto} (\mathcal{C}^{\boldsymbol{\cdot}}, s) \qquad \text{et} \qquad (\overline{\mathcal{C}}^{\boldsymbol{\cdot}}, \bar{s}^1) \underset{\bar{p}}{\propto} (\mathcal{C}, s),$$

donc

$$(\overline{\mathcal{C}}^{\boldsymbol{\cdot}}, \bar{s}) = (\overline{\mathcal{C}}^{\boldsymbol{\cdot}}, \bar{s}^1) \qquad \text{et} \qquad \bar{s} = \bar{s}^1.$$

COROLLAIRE 2. — *Si $\mathcal{H}'$ et $\mathcal{H}''$ vérifient* (σ), *les catégories d'homomorphismes* $(\mathcal{F}, \bar{p}, \overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}''), \bar{\Gamma})$, $(\mathcal{F}, \bar{p}, \overline{\mathcal{H}}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H}''), \bar{\Gamma}')$, $(\mathcal{F}, \bar{p}, \overline{\mathcal{G}}, \bar{\Gamma}_{\mathcal{G}})$, $(\mathcal{M}, p_{\mathcal{F}}\bar{p}, \overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}''), \bar{\Gamma})$ *et* $(\mathcal{M}, p_{\mathcal{F}}\bar{p}, \overline{\mathcal{H}}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H}''), \bar{\Gamma}')$ *sont résolvantes à droite.*

Ce corollaire résulte du théorème 14, de la proposition 14 (§ I) et du fait que $(\mathcal{M}, p_{\mathcal{F}}, \mathcal{F}, \mathcal{F}_{\cdot})$ et $(\mathcal{M}, p, \mathcal{H}, \Gamma)$ sont résolvantes à droite.

Remarques. — 1° En général, $(\overline{\mathcal{C}}^{\boldsymbol{\cdot}}, \bar{s}) \underset{\bar{p}}{\propto} (\mathcal{C}^{\boldsymbol{\cdot}}, s)$ n'entraîne pas $\bar{s} \underset{p}{\propto} s$. Il en est toutefois ainsi lorsque $(\mathcal{M}, p, \mathcal{H}, \Gamma)$ vérifie la condition :

Si $(S, \iota, s') \in \mathcal{H}$, il existe $s \propto S$ tel que $p(s) = p(s')$.

En particulier $\mathcal{F}$, $\tilde{\mathcal{E}}$, $\mathcal{J}$ vérifient cette condition.

2° Dans le théorème 14, l'hypothèse : $\mathcal{H}'$ et $\mathcal{H}''$ vérifient (σ) est nécessaire. Par exemple, soit $(\mathcal{C}^{\boldsymbol{\cdot}}, <)$ un groupoïde inductif; un sous-groupoïde de $\mathcal{C}^{\boldsymbol{\cdot}}$ qui est une sous-classe inductive faible de $(\mathcal{C}, <)$ peut ne pas être un sous-groupoïde inductif de $(\mathcal{C}^{\boldsymbol{\cdot}}, <)$. Une sous-structure de $(\mathcal{C}^{\boldsymbol{\cdot}}, <)$ dans $\overline{\mathcal{J}}(\mathcal{J}, \mathcal{J}'')$ ou dans $\overline{\mathcal{J}}((\mathcal{J}' \cap \mathcal{J}'', \mathcal{J}' \cap \mathcal{J}''), \mathcal{J})$ est un sous-groupoïde $\overline{\mathcal{C}}^{\boldsymbol{\cdot}}$ de $\mathcal{C}^{\boldsymbol{\cdot}}$ vérifiant les conditions :

(*a*) $\overline{\mathcal{C}}$ est une partie sous-inductive de $(\mathcal{C}, <)$;

(*b*) Si $f \in \overline{\mathcal{C}}$, $e \in \overline{\mathcal{C}}_0$, $e < \alpha(f)$, on a $fe \in \overline{\mathcal{C}}$.

3° D'après la proposition 14 (§ I), pour que $(\mathcal{C}^{\boldsymbol{\cdot}}_1, s_1)$ soit une sous-catégorie $\mathcal{H}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')$-structurée de $(\mathcal{C}^{\boldsymbol{\cdot}}, s)$, il faut et il suffit qu'on ait $(\mathcal{C}^{\boldsymbol{\cdot}}_1, s_1) \propto (\mathcal{C}^{\boldsymbol{\cdot}}, s)$ dans $(\mathcal{M}, p_{\mathcal{F}}\bar{p}, \overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}''), \bar{\Gamma})$.

Dans la fin de ce numéro nous supposerons que $\mathcal{H}'$ est une sous-catégorie de $\mathcal{H}$ stable par produit et vérifiant la condition (σ).

La projection canonique d'une classe produit $e_1 \times e_2$ sur e_i sera notée p_i (ou éventuellement p'_i pour éviter des confusions), $i = 1, 2$.

Soit $(\mathcal{C}^{\boldsymbol{\cdot}}, s)$ une catégorie $\mathcal{H}$-structurée. En utilisant l'axiome (R) et la proposition 4, on peut construire les éléments suivants :

(*a*) $s_\alpha \propto s_0 \times s$ tel que $p(s_\alpha)$ soit la classe des couples $(\alpha(f), f)$; on a

$$\gamma_\alpha = (s, p_2\iota, s_\alpha) = (s, p_2, s_0 \times s) . (s_0 \times s, \iota, s_\alpha) \in \mathcal{H}$$

et

$$\bar{\gamma}_\alpha = (s_\alpha, \alpha \times \iota, s \times s) . (s \times s, [\iota, \iota], s) \in \mathcal{H},$$

d'où

$$\bar{\gamma}_\alpha \cdot \gamma_\alpha = s_\alpha \quad \text{et} \quad \gamma_\alpha \cdot \bar{\gamma}_\alpha = s, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \gamma_\alpha \in \Gamma.$$

(*b*) $s'_\alpha \propto s \times s_0$ tel que $p(s'_\alpha)$ soit la classe des couples $(f, \alpha(f))$; on a

$$\gamma'_\alpha = (s, p_1 \iota, s'_\alpha) \in \Gamma.$$

(*c*) $s_\beta \propto s_0 \times s$ (resp. $s'_\beta \propto s \times s_0$) tel que $p(s_\beta)$ [resp. $p(s'_\beta)$] soit la classe des couples $(\beta(f), f)$ [resp. $(f, \beta(f))$]; on a

$$\gamma_\beta = (s, p_2 \iota, s_\beta) \in \Gamma \quad \text{et} \quad \gamma'_\beta = (s, p_1 \iota, s'_\beta) \in \Gamma.$$

(*d*) $s_{\beta\alpha} \propto s_0 \times (s_0 \times s)$ tel que $p(s_{\beta\alpha})$ soit la classe des couples $(\beta(f), (\alpha(f), f))$; on a

$$\gamma_{\beta\alpha} = (s, p_2 p'_2 \iota, s_{\beta\alpha}) \in \Gamma.$$

Proposition 30. — *Soit $s \in \mathcal{H}_0$ et soit $\perp$ la loi de composition sur $p(s) \times p(s)$ définie par*

$$(x'', x'_1) \perp (x', x) = (x'', x) \quad \textit{si, et seulement si,} \quad x'_1 = x'.$$

Alors $((p(s) \times p(s))^\perp, s \times s)$ est un groupoïde $\mathcal{H}(\Gamma, \mathcal{H})$-structuré.

Démonstration. — Posons $p(s) = \mathcal{C}$. La classe des unités de $(\mathcal{C} \times \mathcal{C})^\perp$ s'identifie à la diagonale Δ de $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$. Soit $s_0 \propto s \times s$ tel que $p(s_0) = \Delta$; on a (*voir* démonstration du théorème 12) :

$$(s_0, [\iota, \iota], s) \in \Gamma,$$

d'où

$$(s_0 \times s_0, [\beta^\perp, \alpha^\perp], s \times s) = (s_0 \times s_0, [\iota, \iota] \times [\iota, \iota], s \times s) \in \Gamma.$$

Soit $s'^\perp \propto (s \times s) \times (s \times s)$, tel que

$$p(s'^\perp) = (\mathcal{C} \times \mathcal{C})^\perp \star (\mathcal{C} \times \mathcal{C})^\perp;$$

alors

$$(s \times s, \varkappa^\perp, s'^\perp) = (s \times s, [p_1 p'_1, p_2 p'_2] \iota, s'^\perp) \in \mathcal{H},$$

où p'_i sont les projections canoniques de $(s \times s) \times (s \times s)$ sur $s \times s$ et p_i les projections canoniques de $s \times s$ sur s, $i = 1, 2$. Donc

$$((\mathcal{C} \times \mathcal{C})^\perp, s \times s) \in \overline{\mathcal{H}}(\Gamma, \mathcal{H}).$$

Enfin, il résulte de la proposition 4 qu'on a

$$(s \times s, j, s \times s) \in \Gamma, \quad \text{où} \quad j(x', x) = (x, x').$$

Par suite, $((\mathcal{C} \times \mathcal{C})^\perp, s \times s)$ est un groupoïde $\mathcal{H}(\Gamma, \mathcal{H})$-structuré.

Théorème 15. — *Soient $(\mathcal{C}^\cdot, s)$ et $(\overline{\mathcal{C}}^\cdot, \bar{s})$ deux catégories $\mathcal{H}(\mathcal{H}', \mathcal{H})$-structurées telles que $\mathcal{C}^\cdot_0 = \overline{\mathcal{C}}^\cdot_0$ et que les conditions $s_0 \propto s$ et $p(s_0) = \overline{\mathcal{C}}^\cdot_0$ entraînent*

$s_0 \propto \bar{s}$. *Alors il existe* $\square(s, \bar{s}) \in \mathcal{H}_0$ *tel que* $(\boxed{\square}(\mathcal{C}^{\cdot}, \bar{\mathcal{C}}^{\cdot}), \square(s, \bar{s}))$ *et* $(\boxminus(\mathcal{C}^{\cdot}, \bar{\mathcal{C}}^{\cdot}), \square(s, \bar{s}))$ *soient des catégories* $\mathcal{H}(\mathcal{H}', \mathcal{H})$-*structurées.*

Démonstration. — Un quadruplet appartenant à $\square(\mathcal{C}^{\cdot}, \bar{\mathcal{C}}^{\cdot})$ est identifié à un élément $((f', \bar{f}'), (\bar{f}, f)) \in (\mathcal{C} \times \bar{\mathcal{C}}) \times (\bar{\mathcal{C}} \times \mathcal{C})$ tel que

$$((\beta(f'), \bar{\alpha}(\bar{f}')), (\bar{\beta}(\bar{f}), \alpha(f))) = ((\bar{\beta}(\bar{f}'), \beta(f)), (\alpha(f'), \bar{\alpha}(\bar{f}))),$$

où α et β (resp. $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$) désignent les applications source et but dans $\mathcal{C}^{\cdot}$ (resp. dans $\bar{\mathcal{C}}^{\cdot}$). D'après la proposition 4, on a

$$\bar{\gamma} = ((\bar{s} \times s) \times (s \times \bar{s}), \gamma, (s \times \bar{s}) \times (\bar{s} \times s)) \in \Gamma$$

et

$$\bar{\gamma}_0 = ((s_0 \times s_0) \times (s_0 \times s_0), \gamma_0, (s_0 \times s_0) \times (s_0 \times s_0)) \in \Gamma,$$

où

$$\gamma((f', \bar{f}'), (\bar{f}, f)) = ((\bar{f}', f), (f', \bar{f}));$$

l'axiome (R) assure que le couple $(\bar{h}', \bar{h})$, où

$$\bar{h} = ((s_0 \times s_0) \times (s_0 \times s_0), (\beta \times \bar{\alpha}) \times (\bar{\beta} \times \alpha), (s \times \bar{s}) \times (\bar{s} \times s))$$

et

$$\bar{h}' = ((s_0 \times s_0) \times (s_0 \times s_0), (\bar{\beta} \times \beta) \times (\alpha \times \bar{\alpha}), (\bar{s} \times s) \times (s \times \bar{s})).\bar{\gamma}$$

admet un p-noyau $\square(s, \bar{s})$ tel que $p(\square(s, \bar{s})) = \square(\mathcal{C}^{\cdot}, \bar{\mathcal{C}}^{\cdot})$. Du théorème 13, il résulte, $(\mathcal{C} \times \mathcal{C})^{\perp}$ étant la catégorie considérée dans la proposition 30, que

$$\Sigma = ((\mathcal{C} \times \mathcal{C})^{\perp} \times (\bar{\mathcal{C}}^{\cdot} \times \bar{\mathcal{C}}^{\cdot}), (s \times s) \times (\bar{s} \times \bar{s}))$$

est une catégorie $\mathcal{H}(\mathcal{H}', \mathcal{H})$-structurée. D'après la proposition 4, on a

$$\bar{\gamma}' = ((s \times s) \times (\bar{s} \times \bar{s}), \gamma', (s \times \bar{s}) \times (\bar{s} \times s)) \in \Gamma,$$

où

$$\gamma'((f', \bar{f}'), (\bar{f}, f)) = ((f', f), (\bar{f}', \bar{f})).$$

En vertu de la proposition 16 (§ I), il existe $S \propto (s \times s) \times (\bar{s} \times s)$ tel que

$$(S, \gamma'\iota, \square(s, \bar{s})) \in \Gamma.$$

On voit que $\gamma'\iota$ est une équivalence de $\boxed{\square}(\mathcal{C}^{\cdot}, \bar{\mathcal{C}}^{\cdot})$ sur une sous-catégorie de $(\mathcal{C} \times \mathcal{C})^{\perp} \times (\bar{\mathcal{C}}^{\cdot} \times \bar{\mathcal{C}}^{\cdot})$. D'après le théorème 14, $(\gamma'(\boxed{\square}(\mathcal{C}^{\cdot}, \bar{\mathcal{C}}^{\cdot})), S)$ est une sous-catégorie $\mathcal{H}(\mathcal{H}', \mathcal{H})$-structurée de Σ. Donc, en vertu du théorème 12, $(\boxed{\square}(\mathcal{C}^{\cdot}, \bar{\mathcal{C}}^{\cdot}), \square(s, \bar{s}))$ est une catégorie $\mathcal{H}(\mathcal{H}', \mathcal{H})$-structurée. Une démonstration analogue montre qu'on a aussi

$$(\boxminus(\mathcal{C}^{\cdot}, \bar{\mathcal{C}}^{\cdot}), \square(s, \bar{s})) \in \bar{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H})_0.$$

THÉORÈME 16. — *Soit* $(\mathcal{C}^{\bullet}, s)$ *une catégorie* $\mathcal{H}(\mathcal{H}', \mathcal{H})$-[*resp.* $\mathcal{H}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H})$-]*structurée. Il existe* $\square s \in \mathcal{H}_0$ *tel que* $(\boxbar\, \mathcal{C}^{\bullet}, \square s)$ *et* $(\boxminus\, \mathcal{C}^{\bullet}, \square s)$ *soient des catégories* $\mathcal{H}(\mathcal{H}', \mathcal{H})$-[*resp.* $\mathcal{H}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H})$-]*structurées. Si* $(\mathcal{C}^{\bullet}, s)$ *appartient à* $\overline{\mathcal{G}}(\mathcal{H}', \mathcal{H})_0$ [*resp. à* $\overline{\mathcal{G}}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H})_0$], *il en est de même pour* $(\boxbar\, \mathcal{C}^{\bullet}, \square s)$ *et* $(\boxminus\, \mathcal{C}^{\bullet}, \square s)$.

Démonstration. — Supposons $(\mathcal{C}^{\bullet}, s) \in \overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H})_0$. Un quatuor (h', f', f, h) appartenant à $\square \mathcal{C}^{\bullet}$ sera identifié à un élément $((h', f'), (f, h))$ de $\square(\mathcal{C}^{\bullet}, \mathcal{C}^{\bullet})$ tel que $h'.f = f'.h$. D'après la proposition 4, on a

$$((s \times s) \times (s \times s), \gamma, (s \times s) \times (s \times s)) \in \Gamma,$$

où

$$\gamma((h', f'), (f, h)) = ((h', f), (f', h)).$$

Soit $s' \propto s \times s$ tel que $p(s') = \mathcal{C}^{\bullet} \star \mathcal{C}^{\bullet}$; d'après la proposition 3, on a

$$s' \times s' \propto (s \times s) \times (s \times s);$$

de plus $s' \times s'$ est un p-noyau et la proposition 16 (§ I) assure l'existence de

$$(s' \times s', \gamma_1, S) \in \Gamma \qquad \text{où} \quad \gamma_1 < \gamma.$$

En vertu de l'axiome (R), le couple $((s, \varkappa^{\bullet} p_1 \gamma_1, S), (s, \varkappa^{\bullet} p_2 \gamma_1, S))$ admet un p-noyau $\square s \propto \square(s, s)$ (*voir* théorème 15) tel que

$$p(\square s) = \square \mathcal{C}^{\bullet}.$$

Par conséquent il résulte du théorème 14 que

$$(\boxbar\, \mathcal{C}^{\bullet}, \square s) \quad \text{et} \quad (\boxminus\, \mathcal{C}^{\bullet}, \square s)$$

sont des catégories $\mathcal{H}(\mathcal{H}', \mathcal{H})$-structurées. Si de plus $(\mathcal{C}^{\bullet}, s) \in \overline{\mathcal{G}}_0$, en désignant encore par j l'application $f \to f^{-1}$ dans $\mathcal{C}$, les relations

$$((s \times s) \times (s \times s), \gamma_2(\iota \times j) \times (j \times \iota)\iota, \square s) \in \mathcal{H} \quad \text{et} \quad \gamma_2(\iota \times j) \times (j \times \iota)(\square \mathcal{C}^{\bullet}) \subset \square \mathcal{C}^{\bullet}$$

où

$$\gamma_2((h', f'), (f, h)) = ((h, f'), (f, h'))$$

entraînent $(\square s, \boxbar\, j, \square s) \in \Gamma$, où $\boxbar\, j$ désigne l'application $\overline{k} \to \overline{k}^{-1}$ dans $\boxbar\, \mathcal{C}^{\bullet}$. Ceci prouve $(\boxbar\, \mathcal{C}^{\bullet}, \square s) \in \overline{\mathcal{G}}_0$; on a de même $(\boxminus\, \mathcal{C}^{\bullet}, \square s) \in \overline{\mathcal{G}}_0$.

— Supposons $(\mathcal{C}^{\bullet}, s) \in \overline{\mathcal{H}}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H})_0$; d'après ce qui précède, on a $(\boxbar\, \mathcal{C}^{\bullet}, \square s) \in \overline{\mathcal{H}}_0$. Soit $\boxbar\, s_0 \propto \square s$ tel que $p(\boxbar\, s_0) = (\boxbar\, \mathcal{C}^{\bullet})_0$. Soit μ l'application $h \to ((h, \beta(h)), (\alpha(h), h))$ de $\mathcal{C}$ sur $(\boxbar\, \mathcal{C}^{\bullet})_0$; les relations

$$\overline{\mu} = (\boxbar\, s_0, \mu, s) \equiv (\boxbar\, s_0, [[\iota, \beta], [\alpha, \iota]], s) \in \mathcal{H}$$

et

$$\overline{\mu}' = (s, \mu^{-1}, \boxbar\, s_0) = (s, p'_1 p_1 \iota, \boxbar\, s_0) \in \mathcal{H},$$

entraînent

$$\overline{\mu}.\overline{\mu}' = \boxed{\mid}\, s_0 \quad \text{et} \quad \overline{\mu}'.\overline{\mu} = s, \quad \text{d'où} \quad \overline{\mu} \in \Gamma.$$

Montrons qu'on a $\left(\boxed{\mid}\, s_0,\ \alpha^{\boxed{\mid}},\ \square s\right) \in \mathcal{H}'$. En effet, soit

$$\overline{a}_1 = ((s \times s) \times (s \times s),\ (\beta \times \iota) \times (\alpha \times \iota),\ (s \times s) \times (s \times s)) \in \mathcal{H}'.$$

Soit s_1 le p-noyau du couple

$$((s_0,\ \alpha p_2 p'_1 \iota,\ s'_\beta \times s_\alpha),\ (s_0,\ \beta p_2 p'_2 \iota,\ s'_\beta \times s_\alpha)).$$

Comme $p(\overline{a}_1)\ (\square \mathcal{C}^{\cdot}) \subset p(s_1)$, on a, en vertu de la proposition 10 (§ I),

$$\overline{a}'_1 = \overline{a}_1 \underset{p}{\vdash} (s_1,\ \square s) \in \mathcal{H}'.$$

Par ailleurs, on a

$$\overline{a}_2 = (s \times s_\alpha,\ \gamma'_\beta \times \iota,\ s'_\beta \times s_\alpha) \in \Gamma$$

et

$$\overline{a}_3 = (s_0 \times s,\ \alpha \times \iota,\ s \times s_\alpha) \in \mathcal{H}',$$

d'où $\overline{a}_3.\overline{a}_2 \in \mathcal{H}'$. Puisque $p(\overline{a}_3.\overline{a}_2)\ (p(s_1)) \subset p(s_{\beta\alpha})$, on trouve

$$\overline{a}'_2 = (\overline{a}_3.\overline{a}_2) \underset{p}{\vdash} (s_{\beta\alpha},\ s_1) \in \mathcal{H}'.$$

Finalement on obtient

$$\left(\boxed{\mid}\, s_0,\ \alpha^{\boxed{\mid}},\ \square s\right) = \overline{\mu}^{-1}.\gamma_{\beta\alpha}.\overline{a}'_2.\overline{a}'_1 \in \mathcal{H}'.$$

De même on prouve $\left(\boxed{\mid}\, s_0,\ \beta^{\boxed{\mid}},\ \square s\right) \in \mathcal{H}'$. Donc

$$\left(\boxed{\mid}\, \mathcal{C}^{\cdot},\ \square s\right) \in \overline{\mathcal{H}}((\mathcal{H}',\ \mathcal{H}'),\ \mathcal{H})_0.$$

Pour la même raison,

$$(\boxminus\, \mathcal{C}^{\cdot},\ \square s) \in \overline{\mathcal{H}}((\mathcal{H}',\ \mathcal{H}'),\ \mathcal{H})_0.$$

Corollaire. — *Il existe deux foncteurs* $\overline{\boxed{\mid}}$ *et* $\overline{\boxminus}$ *de la catégorie* $\overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H})$ [*resp.* $\overline{\mathcal{H}}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H})$, *resp.* $\overline{\mathcal{G}}(\mathcal{H}', \mathcal{H})$, *resp.* $\overline{\mathcal{G}}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H})$] *vers elle-même et une équivalence naturelle* $\left(\overline{\boxminus},\ \overline{\varepsilon},\ \overline{\boxed{\mid}}\right)$ *se projetant par* $\overline{p}$ *sur l'équivalence naturelle* $\left(\boxminus,\ \varepsilon,\ \boxed{\mid}\right)$.

Démonstration. — Soit $((\overline{\mathcal{C}}^{\cdot}, \overline{s}),\ g,\ (\mathcal{C}^{\cdot}, s)) \in \overline{\mathcal{H}}$; d'après le théorème 13, on a

$$((\overline{\mathcal{C}}^{\cdot}, \overline{s})^4,\ (g \times g) \times (g \times g),\ (\mathcal{C}^{\cdot}, s)^4) \in \overline{\mathcal{H}},$$

d'où

$$((\overline{s} \times \overline{s}) \times (\overline{s} \times \overline{s}),\ ((g \times g) \times (g \times g))\,\iota,\ \square s) \in \mathcal{H}.$$

Comme $g^4(\square\mathcal{C}^{\cdot}) = (\square g)(\square\mathcal{C}^{\cdot}) \subset \square\overline{\mathcal{C}}^{\cdot}$, il résulte de la définition de $\square s$ qu'on a

$$(\square\bar{s}, \square g, \square s) \in \mathcal{H}, \qquad \text{c'est-à-dire} \quad \left(\left(\boxbar\overline{\mathcal{C}}^{\cdot}, \square\bar{s}\right), \square g, \left(\boxbar\mathcal{C}^{\cdot}, \square s\right)\right) \in \overline{\mathcal{H}}.$$

Comme $\boxbar$ est un foncteur de $\mathcal{F}$ vers $\mathcal{F}$, l'application $\overline{\boxbar}$:

$$\left(\left(\overline{\mathcal{C}}^{\cdot}, \bar{s}\right), g, (\mathcal{C}^{\cdot}, s)\right) \to \left(\left(\boxbar\overline{\mathcal{C}}^{\cdot}, \square\bar{s}\right), \square g, \left(\boxbar\mathcal{C}^{\cdot}, \square s\right)\right)$$

est un foncteur de $\overline{\mathcal{H}}$ vers $\overline{\mathcal{H}}$. De même l'application $\overline{\boxminus}$:

$$\left(\left(\overline{\mathcal{C}}^{\cdot}, \bar{s}\right), g, (\mathcal{C}^{\cdot}, s)\right) \to \left(\left(\boxminus\overline{\mathcal{C}}^{\cdot}, \square\bar{s}\right), \square g, \left(\boxminus\mathcal{C}^{\cdot}, \square s\right)\right)$$

est un foncteur de $\overline{\mathcal{H}}$ vers $\overline{\mathcal{H}}$.

Enfin, en vertu des propositions 4 et 7 (§ I), on trouve

$$((s \times s) \times (s \times s), \gamma, (s \times s) \times (s \times s)) \in \Gamma,$$

où

$$\gamma((h', f'), (f, h)) = ((f', h'), (h, f))$$

et

$$\varepsilon(s) = (\square s, \gamma\iota, \square s) \in \Gamma.$$

Par suite,

$$\bar{\varepsilon}(\mathcal{C}^{\cdot}, s) = \left(\left(\boxminus\mathcal{C}^{\cdot}, \square s\right), \gamma\iota, \left(\boxbar\mathcal{C}^{\cdot}, \square s\right)\right) \in \overline{\Gamma}$$

et $\left(\overline{\boxminus}, \bar{\varepsilon}, \overline{\boxbar}\right)$ est une équivalence naturelle. De plus on a

$$\bar{p}(\bar{\varepsilon}(\mathcal{C}^{\cdot}, s)) = \varepsilon(\mathcal{C}^{\cdot}).$$

Remarque. — Avec les hypothèses du théorème 15, une démonstration analogue à la fin de la démonstration du théorème 16 permet de démontrer :

THÉORÈME 15 *bis*. — *Si* $(\mathcal{C}^{\cdot}, s)$ *et* $(\overline{\mathcal{C}}^{\cdot}, \bar{s})$ *sont des catégories* $\overline{\mathcal{H}}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H})$-*structurées, alors il en est de même pour* $\left(\boxbar(\mathcal{C}^{\cdot}, \overline{\mathcal{C}}^{\cdot}), \square(s, \bar{s})\right)$.

Exemples. — 1° Si $(\mathcal{C}^{\cdot}, s)$ est une catégorie topologique, $\left(\boxbar\mathcal{C}^{\cdot}, \square s\right)$ est une catégorie topologique.

2° Si $(\mathcal{C}^{\cdot}, s)$ est une catégorie (resp. un groupoïde) ordonné, alors $\left(\boxbar\mathcal{C}^{\cdot}, \square s\right)$ est une catégorie (resp. un groupoïde) ordonné. Si $(\mathcal{C}^{\cdot}, s)$ est une catégorie inductive, $\left(\boxbar\mathcal{C}^{\cdot}, \square s\right)$ est une catégorie inductive.

3° Si $\left(\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{\perp}\right)$ est une catégorie double, $\left(\boxbar\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{\square\perp}, \boxminus\mathcal{C}^{\cdot}\right)$ est une catégorie triple, où $\mathcal{C}^{\square\perp}$ désigne la classe $\square\mathcal{C}^{\cdot}$ munie de sa structure de sous-catégorie de la catégorie-produit $\left(\mathcal{C}^{\perp}\right)^4$. Plus généralement, si $\left(\mathcal{C}^{\perp_i}\right)_{i \leq n}$ est une catégorie n-uple, alors $\left(\boxbar\,\mathcal{C}^{\perp_1}, \left(\mathcal{C}^{\square\perp_i}\right)_{2\leq i\leq n}\right)$ est une catégorie n-uple et

$$\left(\boxbar\,\mathcal{C}^{\perp_1}, \left(\mathcal{C}^{\square\perp_i}\right)_{2\leq i\leq n}, \boxminus\,\mathcal{C}^{\perp_1}\right)$$

est une catégorie $(n+1)$-uple. En particulier, soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Par récurrence sur n, on construit la catégorie n-uple :

$$\mathcal{C}^{\boxed{n}} = \left(\mathcal{C}^{\boxed{n}\perp_i}\right)_{i\leq n}$$

définie par

$$\mathcal{C}^{\boxed{2}} = \left(\boxbar\,\mathcal{C}, \boxminus\,\mathcal{C}\right) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{C}^{\boxed{n+1}} = \left(\boxbar\left(\mathcal{C}^{\boxed{n}}\right), \left(\left(\mathcal{C}^{\boxed{n}}\right)^{\square\perp_i}\right)_{i\leq n}, \boxminus\left(\mathcal{C}^{\boxed{n}}\right)\right).$$

On obtient les formules

$$\mathcal{C}_{\boxed{n+1}} = \left(\boxbar^n\mathcal{C}, \left(\left(\square\left(\boxminus^{p-1}\mathcal{C}\right)\right)^{\square^{n-p},\boxminus}\right)_{1\leq p\leq n}\right),$$

où

$$\boxbar^0\mathcal{C} = \mathcal{C} \qquad \text{et} \qquad \boxbar^n\mathcal{C} = \boxbar\left(\boxbar^{n-1}\mathcal{C}\right);$$

le symbole $\left(\square\left(\boxbar^{p-1}\mathcal{C}\right)\right)^{\square^{n-p}\boxminus}$ désigne, en accord avec les conventions posées ci-dessus, la classe $\square\left(\boxbar^{p-1}\mathcal{C}\right)$ munie de sa structure de sous-catégorie de la catégorie produit $\left(\boxminus\left(\boxbar^{p-1}\mathcal{C}\right)\right)^{4n-p}$. La catégorie n-uple $\mathcal{C}^{\boxed{n}}$ est identique à la catégorie n-uple $\mathcal{C}^{\boxed{n}}$ construite dans la remarque finale du n° 5.

Rappelons que si $\mathcal{C}^{\bullet}$ est une catégorie, on appelle *catégorie des trios* de $\mathcal{C}$, notée $\sqsupset\mathcal{C}^{\bullet}$, la classe des triplets $((f', f), h) \in (\mathcal{C}\times\mathcal{C})\times\mathcal{C}$ tels que

$$\alpha(f) = \alpha(h) \qquad \text{et} \qquad \alpha(f') = \beta(h),$$

munie de la loi de composition $\sqsupset$:

$$((\bar{f}', \bar{f}), \bar{h}) \sqsupset ((f', f), h) = ((\bar{f}', f), \bar{h}.h) \qquad \text{si, et seulement si,} \quad \bar{f} = f'.$$

THÉORÈME 17. — *Soit* $(\mathcal{C}^{\bullet}, s)$ *une catégorie* $\mathcal{H}(\mathcal{H}', \mathcal{H})$ - [*resp.* $\mathcal{H}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H})$-]*structurée. Il existe* $\sqsupset s \in \mathcal{H}_0$ *tel que* $(\sqsupset\mathcal{C}^{\bullet}, \sqsupset s)$ *soit une catégorie* $\mathcal{H}(\mathcal{H}', \mathcal{H})$ - [*resp.* $\mathcal{H}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H})$-]*structurée; si* $(\mathcal{C}^{\bullet}, s) \in \overline{\mathcal{G}}(\mathcal{H}', \mathcal{H})_0$, *on a aussi* $(\sqsupset\mathcal{C}^{\bullet}, \sqsupset s) \in \overline{\mathcal{G}}(\mathcal{H}', \mathcal{H})_0$.

Démonstration. — En utilisant la proposition 4, on voit qu'on a

$$\bar{g} = (s\times s, \alpha p_2\times\beta, (s\times s)\times s) \in \mathcal{H} \qquad \text{et} \qquad \bar{g}' = (s\times s, \pi(\alpha p_1\times\alpha), (s\times s)\times s) \in \mathcal{H},$$

où $\pi(f_1, f_2) = (f_2, f_1)$. Comme $\sqsupset\mathcal{C}^{\bullet}$ est la classe des éléments $((f', f), h)$ tels que

$$p(\bar{g})((f', f), h) = (\alpha(f), \beta(h)) = p(\bar{g}')((f', f), h),$$

l'axiome (R) assure l'existence de $\sqsupset s \propto (s \times s) \times s$ avec $p(\sqsupset s) = \sqsupset \mathcal{C}^{\cdot}$. Puisque $\sqsupset \mathcal{C}^{\cdot}$ est une sous-catégorie de $(\mathcal{C} \times \mathcal{C})^{\perp} \times \mathcal{C}^{\cdot}$, il résulte du théorème 14 et de la proposition 30 que $(\sqsupset \mathcal{C}^{\cdot}, \sqsupset s)$ est une catégorie $\mathcal{H}(\mathcal{H}', \mathcal{H})$-structurée. Si de plus $(\mathcal{C}^{\cdot}, s) \in \overline{\mathcal{G}}(\mathcal{H}', \mathcal{H})_0$, pour la même raison on a aussi $(\sqsupset \mathcal{C}^{\cdot}, \sqsupset s) \in \overline{\mathcal{G}}(\mathcal{H}', \mathcal{H})_0$. Si $(\mathcal{C}^{\cdot}, s)$ est une catégorie $\mathcal{H}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H})$-structurée, il existe $\sqsupset s_0 \propto \sqsupset s$ tel que

$$p(\sqsupset s_0) = (\sqsupset \mathcal{C}^{\cdot})_0.$$

Montrons qu'on a $(\sqsupset s_0, \alpha^{\sqsupset}, \sqsupset s) \in \mathcal{H}'$. En utilisant les propositions 4 et 7 (§ I), on trouve

$$\overline{a}_1 = (s \times (s_0 \times s), \gamma, (s \times s_0) \times s).$$
$$.((s \times s_0) \times s, \pi \times \iota, (s_0 \times s) \times s).((s_0 \times s) \times s, (\alpha \times \iota) \times \iota, (s \times s) \times s),$$

où

$$\gamma((f', e), h) = (f', (e, h));$$
$$\overline{a}_2 = (s \times s_0, \iota \times \alpha, s \times s).(s \times s, \iota \times \gamma_\beta, s \times s_\beta) \in \mathcal{H}'$$

et

$$\overline{a}_3 = ((s \times s) \times s_0, ([\iota, \iota] \times \iota)\, \iota, s'_\alpha) \underset{p}{\vdash} (\sqsupset s_0, s'_\alpha) \in \Gamma.$$

L'axiome (R) permet de construire $s_1 \propto s \times s_\beta$ tel que $p(s_1)$ soit la classe des triplets $(f, (\beta(h), h))$ pour lesquels $\alpha(f) = \alpha(h)$. Des relations

$$p(\overline{a}_1)(\sqsupset \mathcal{C}^{\cdot}) \subset p(s_1) \qquad \text{et} \qquad p(\overline{a}_2)(p(s_1)) \subset p(s'_\alpha),$$

on déduit à l'aide de la proposition 10 (§ I) :

$$\overline{a}'_1 = \overline{a}_1 \underset{p}{\vdash} (s_1, \sqsupset s) \in \mathcal{H}' \qquad \text{et} \qquad \overline{a}'_2 = \overline{a}_2 \underset{p}{\vdash} (s'_\alpha, s_1) \in \mathcal{H}'.$$

Il en résulte

$$(\sqsupset s_0, \alpha^{\sqsupset}, \sqsupset s) = \overline{a}_3 . \overline{a}'_2 . \overline{a}'_1 \in \mathcal{H}' \qquad \text{et} \qquad (\sqsupset \mathcal{C}^{\cdot}, \sqsupset s) \in \overline{\mathcal{H}}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H})_0.$$

Corollaire. — *Soit $(\mathcal{C}^{\cdot}, s)$ une catégorie $\mathcal{H}$-structurée; on a*

$$\overline{\tau} = ((\sqsupset \mathcal{C}^{\cdot}, \sqsupset s), \tau, (\boxminus \mathcal{C}^{\cdot}, \square s)) \in \overline{\mathcal{H}},$$

où

$$\tau((h', f'), (f, h)) = ((f', f), h).$$

Si $(\mathcal{C}^{\cdot}, s)$ est un groupoïde $\mathcal{H}$-structuré, on a $\overline{\tau} \in \overline{\Gamma}$.

Démonstration. — En vertu des propositions 4 et 7 (§ I), on a

$$(\sqsupset s, \tau, \square s) = ((s \times s) \times s, \gamma'(p_2 \times \iota), (s \times s) \times (s \times s)) \underset{p}{\vdash} (\sqsupset s, \square s) \in \mathcal{H},$$

où

$$\gamma'(f', (f, h)) = ((f', f), h).$$

Montrons que si de plus $(\mathcal{C}^{\bullet}, s) \in \overline{\mathcal{G}_0}$, on a aussi $(\square s, \tau^{-1}, \sqsupset s) \in \mathcal{H}$. En effet, d'après la proposition 4, on a

$$(s \times s, \pi, s \times s) \in \Gamma, \qquad \text{où} \quad \pi(f, h) = (h, f).$$

Soit

$$\bar{b}_1 = (s \times (s \times s), \iota \times (\iota \times j), s \times (s \times s)) . (s \times (s \times s), (\iota \times \pi)\gamma'^{-1}, (s \times s) \times s) \in \Gamma;$$

la proposition 16 (§ I) assure l'existence de $s_1 \propto s \times (s \times s)$ tel que

$$\bar{b}'_1 = \bar{b}_1 \underset{p}{\vdash} (s_1, \sqsupset s) \in \Gamma.$$

En vertu du théorème 1 (§ I), on a

$$s_1 \propto s \times s', \qquad \text{où} \quad p(s') = \mathcal{C}^{\bullet} \bigstar \mathcal{C}^{\bullet},$$

d'où

$$(s \times s, (\iota \times \varkappa^{\bullet})\, \iota, s_1) \in \mathcal{H};$$

comme $(\iota \times \varkappa^{\bullet})\,(p(s_1)) \subset p(s')$, on trouve

$$\bar{b}_2 = (s, \varkappa^{\bullet}, s') . (s', (\iota \times \varkappa^{\bullet})\, \iota, s_1) \in \mathcal{H}.$$

D'après la proposition 4, on a

$$\bar{\gamma}_1 = ((s \times s) \times (s \times s), \gamma_1, s \times ((s \times s) \times s)) \in \Gamma,$$

où

$$\gamma_1(h', ((f', f), h)) = ((h', f'), (f, h)).$$

Il en résulte

$$\bar{b}_3 = \bar{\gamma}_1 . (\bar{b}_2 . \bar{b}'_1 \times \sqsupset s) . (\sqsupset s \times \sqsupset s, [\iota, \iota], \sqsupset s) \in \mathcal{H}$$

et

$$p(\bar{b}_3)(\sqsupset \mathcal{C}^{\bullet}) = \tau^{-1}(\sqsupset \mathcal{C}^{\bullet}) \subset \square \mathcal{C}^{\bullet}.$$

Donc

$$\bar{b}_3 \underset{p}{\vdash} (\square s, \sqsupset s) = (\square s, \tau^{-1}, \sqsupset s) \in \mathcal{H} \qquad \text{et} \qquad (\sqsupset s, \tau, \square s) \in \Gamma.$$

Remarque. — En général si $(\mathcal{C}^{\bullet}, s)$ appartient à $\overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')_0$ il n'en est pas de même pour $(\boxed{\,\Box\,}\,\mathcal{C}^{\bullet}, \square s)$ et $(\sqsupset \mathcal{C}^{\bullet}, \sqsupset s)$. Toutefois, si $\mathcal{H}''$ est une sous-catégorie de $\mathcal{H}$ stable par produit, vérifiant la condition (σ) et contenant $\mathcal{H}'$, on a :

THÉORÈME 18. — *Si $(\mathcal{C}^{\bullet}, s)$ appartient à $\overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')_0$, il en est de même pour $(\boxed{\,\Box\,}\,\mathcal{C}^{\bullet}, \square s)$, $(\boxminus\,\mathcal{C}^{\bullet}, \square s)$ et $(\sqsupset \mathcal{C}^{\bullet}, \sqsupset s)$.*

Remarque (ajoutée à la correction des épreuves) : Soit $(\mathcal{C}^{\bullet}, s)$ une catégorie $\mathcal{H}$-structurée et ρ une relation d'équivalence sur $\mathcal{C}$ telle qu'il existe uue catégorie quotient $\mathcal{C}^{\bullet}/\rho$ de $\mathcal{C}^{\bullet}$. S'il existe une structure quotient [3 *e*] s/ρ de s par ρ dans $(\mathcal{M}, p, \mathcal{H}, \Gamma)$, en général $(\mathcal{C}^{\bullet}/\rho, s/\rho)$ n'est pas une catégorie $\mathcal{H}$ -structurée. C'est pourquoi nous avons été amenés à définir plus récemment la notion de catégorie faiblement $\mathcal{H}$ -structurée, stable par passage au quotient (voir *Structures quotient*, act. polycopié, Paris, à paraître dans *Comm. Mat. Helv.*).

BIBLIOGRAPHIE.

[1] J. Bénabou, *Catégories avec multiplication* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 256, 1963, p. 1887).

[2] Dieudonné et Grothendieck, *Éléments de Géométrie algébrique*, III, Institut des Hautes Études scientifiques, nº 11, 1961.

[3] C. Ehresmann :

a. Espèces de structures locales. Élargissements de catégories [1re partie : traduction de *Gattungen von lokalen Strukturen* (*Jahres. der Deutschen Math. Vereinigung*, t. 61, 1957)]; *Séminaire de Topologie et Géométrie différentielle* (Ehresmann), Paris, III, 1961.

b. Catégories topologiques et catégories différentiables. Colloque de Géométrie différentielle globale, Bruxelles, C. B. R. M., 1959, p. 137.

c. Catégories inductives et pseudogroupes (*Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 10, 1960, p. 307).

d. Catégorie des foncteurs types (*Revista Unión Mate. Argentina*, vol. 20, 1960, p. 194).

e. C. R. Acad. Sc., t. 256, 1963, p. 1198, 1891, 2080, 2280 et 5031.

[4] P. J. Hilton, *Note on free and direct products in general categories* (*Bull. Soc. Math. Belgique*, t. 13, 1961).

[5] Kurosch, Liwschitz, Schulgeifer et Zalenko, *Zur Theorie der Kategorien*, Deutsch. Verlag Wissenschaften, Berlin, 1963.

[6] G. Cantor, *Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten*, Gesammelte Abhandlungen, Berlin, 1932, p. 423.