ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

HERMITE

Sur deux intégrales doubles

Annales scientifiques de l'É.N.S. 1re série, tome 2 (1865), p. 49-53

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1865_1_2__49_0>

SUR DEUX INTÉGRALES DOUBLES,

PAR M. HERMITE,

MEMBRE DE L'INSTITUT,
MAITRE DE CONFÉRENCES A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

Une question relative à un certain mode de développement en série des fonctions de plusieurs variables repose sur la détermination de l'intégrale multiple

$$A = \int\int\cdots\int \frac{dx\,dy\ldots du}{PP'},$$

où les quantités P et P′ ont pour expression

$$P = 1 - 2ax - 2by - \ldots - 2lu + a^2 + b^2 + \ldots + l^2,$$
$$P' = 1 - 2a'x - 2b'y - \ldots - 2l'u + a'^2 + b'^2 + \ldots + l'^2,$$

et l'intégration devant être étendue à toutes les valeurs des variables $x, y, \ldots, u$, qui satisfont à la condition

$$x^2 + y^2 + \ldots + u^2 \leqq 1.$$

En posant

$$Q = (1 - ax - by - \ldots - lu)^2 - (a^2 + b^2 + \ldots + l^2)(x^2 + y^2 + \ldots + u^2 - 1),$$

la même question exige aussi la détermination de l'intégrale

$$B = \int\int\cdots\int \frac{dx\,dy\ldots du}{P'\sqrt{Q}}$$

entre les mêmes limites que la précédente. Me bornant au cas de deux variables seulement, et en employant les méthodes élémentaires, je vais développer le calcul par lequel on obtient leurs valeurs.

Soit, pour abréger,

$$r^2 = a^2 + b^2,$$
$$r'^2 = a'^2 + b'^2;$$

j'introduirai comme auxiliaire un angle θ défini par les égalités

$$\frac{aa'+bb'}{rr'}=\cos\theta,\quad \frac{ba'-ab'}{rr'}=\sin\theta,$$

et je ferai un premier changement de variable, savoir :

$$x=\frac{a\xi+b\eta}{r},\quad y=\frac{b\xi-a\eta}{r},$$

par lequel l'intégrale A prendra cette forme plus simple

$$A=\iint\frac{d\xi\,d\eta}{(1-2r\xi+r^2)[1-2r'(\xi\cos\theta+\eta\sin\theta)+r'^2]}.$$

Les limites d'ailleurs seront déterminées comme précédemment par la condition

$$\xi^2+\eta^2\leqq 1,$$

de sorte que l'intégration par rapport à η devra s'effectuer depuis $\eta=-\sqrt{1-\xi^2}$ jusqu'à $\eta=+\sqrt{1-\xi^2}$. On trouve ainsi pour résultat

$$\frac{1}{1-2r\xi+r^2}\cdot\frac{1}{2r'\sin\theta}\log\frac{1-2r'(\xi\cos\theta-\sqrt{1-\xi^2}\sin\theta)+r'^2}{1-2r'(\xi\cos\theta+\sqrt{1-\xi^2}\sin\theta)+r'^2},$$

et c'est cette expression qu'il reste à intégrer de $\xi=-1$ à $\xi=+1$.

En posant

$$\xi=\cos\varphi,$$

on obtiendra pour A la valeur suivante

$$A=\frac{1}{2r'\sin\theta}\int_0^\pi d\varphi\,\frac{\sin\varphi}{1-2r\cos\varphi+r^2}\log\frac{1-2r'\cos(\varphi+\theta)+r'^2}{1-2r'\cos(\varphi-\theta)+r'^2},$$

ou plutôt, en multipliant et divisant par r,

$$A=\frac{1}{2(ba'-ab')}\int_0^\pi d\varphi\,\frac{r\sin\varphi}{1-2r\cos\varphi+r^2}\log\frac{1-2r'\cos(\varphi+\theta)+r'^2}{1-2r'\cos(\varphi-\theta)+r'^2}.$$

Cette intégrale définie se trouve aisément, comme on va voir.

Je supposerai expressément que r et r' sont tous deux moindres que l'unité, de manière à pouvoir faire usage de ces développements :

$$\frac{r\sin\varphi}{1-2r\cos\varphi+r^2}=r\sin\varphi+r^2\sin 2\varphi+r^3\sin 3\varphi+\ldots$$

$$-\frac{1}{2}\log[1-2r'\cos(\varphi+\theta)+r'^2]=r'\cos(\varphi+\theta)+\frac{r'^2}{2}\cos 2(\varphi+\theta)+\frac{r'^3}{3}\cos 3(\varphi+\theta)+\ldots$$

$$-\frac{1}{2}\log[1-2r'\cos(\varphi-\theta)+r'^2]=r'\cos(\varphi-\theta)+\frac{r'^2}{2}\cos 2(\varphi-\theta)+\frac{r'^3}{3}\cos 3(\varphi-\theta)+\ldots.$$

On conclut des deux derniers

$$\frac{1}{4}\log\frac{1-2r'\cos(\varphi+\theta)+r'^2}{1-2r'\cos(\varphi-\theta)+r'^2}=r'\sin\varphi\sin\theta+\frac{r'^2}{2}\sin 2\varphi\sin 2\theta+\frac{r'^3}{3}\sin 3\varphi\sin 3\theta+\ldots,$$

de sorte qu'on est amené à intégrer entre zéro et π le produit de deux séries

$$(r\sin\varphi+r^2\sin 2\varphi+r^3\sin 3\varphi+\ldots)\left(r'\sin\varphi\sin\theta+\frac{r'^2}{2}\sin 2\varphi\sin 2\theta+\frac{r'^3}{3}\sin 3\varphi\sin 3\theta+\ldots\right).$$

Or, en vertu des relations,

$$\int_0^\pi d\varphi\sin m\varphi\sin n\varphi=0,$$

$$\int_0^\pi d\varphi\sin^2 m\varphi=\frac{\pi}{2},$$

on obtient ainsi, pour la valeur de A, ce développement

$$A=\frac{\pi}{ba'-ab'}\left(rr'\sin\theta+\frac{r^2r'^2}{2}\sin 2\theta+\frac{r^3r'^3}{3}\sin 3\theta+\ldots\right),$$

et, d'après les formules connues, on en conclut immédiatement

$$A=\frac{\pi}{ba'-ab'}\cdot\frac{1}{2\sqrt{-1}}\log\frac{1-rr'e^{-\theta\sqrt{-1}}}{1-rr'e^{\theta\sqrt{-1}}}.$$

Observant enfin qu'on peut écrire successivement

$$\log\frac{1-rr'e^{-\theta\sqrt{-1}}}{1-rr'e^{\theta\sqrt{-1}}}=\log\frac{1-rr'(\cos\theta-\sqrt{-1}\sin\theta)}{1-rr'(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)},$$

$$=\log\frac{1+\dfrac{rr'\sin\theta}{1-rr'\cos\theta}\sqrt{-1}}{1-\dfrac{rr'\sin\theta}{1-rr'\cos\theta}\sqrt{-1}},$$

$$=\log\frac{1+\dfrac{ba'-ab'}{1-aa'-bb'}\sqrt{-1}}{1-\dfrac{ba'-ab'}{1-aa'-bb'}\sqrt{-1}},$$

on arrive définitivement à ce résultat très-simple

$$A = \frac{\pi}{ba' - ab'} \text{ arc tang } \frac{ba' - ab'}{1 - aa' - bb'}.$$

Je considère en second lieu l'intégrale B, savoir :

$$B = \int\int \frac{dx\,dy}{(1 - 2a'x - 2b'y + a'^2 + b'^2)[(1 - 2ax - 2by)^2 - (a^2 + b^2)(x^2 + y^2 - 1)]^{\frac{1}{2}}};$$

elle devient d'abord, par la substitution linéaire,

$$x = \frac{a'\xi - b'\eta}{r'}, \quad y = \frac{b'\xi + a'\eta}{r'},$$

$$B = \int\int \frac{d\xi\,d\eta}{(1 - 2r'\xi + r'^2)[(1 - r\cos\theta\xi - r\sin\theta\eta)^2 - (\xi^2 + \eta^2 - 1)r^2]^{\frac{1}{2}}},$$

ce qui conduit à intégrer, en premier lieu, par rapport à la variable η. Il convient, à cet effet, d'employer les logarithmes imaginaires, en se servant de la formule

$$\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}} = \frac{1}{\sqrt{A}} \log\left(\frac{Ax + B}{\sqrt{A}} + \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}\right);$$

et en remarquant que les valeurs limites de η donnent $\xi^2 + \eta^2 = 1$, la racine carrée placée sous le signe logarithmique pourra s'extraire et deviendra simplement

$$1 - r\cos\theta\xi - r\sin\theta\eta.$$

Quelques réductions faciles à voir donneront pour résultat de cette intégration, par rapport à η, entre les limites $\eta = -\sqrt{1 - \xi^2}$, $\eta = +\sqrt{1 - \xi^2}$, la quantité

$$\frac{1}{1 - 2r'\xi + \xi^2} \cdot \frac{1}{r\cos\theta\sqrt{-1}} \log \frac{1 - r\cos\theta(\xi - \sqrt{-1}\sqrt{1 - \xi^2})}{1 - r\cos\theta(\xi + \sqrt{-1}\sqrt{1 - \xi^2})},$$

et il s'agit de l'intégrer par rapport à ξ entre les limites $\xi = -1$, $\xi = +1$.

Je ferai comme précédemment

$$\xi = \cos\varphi,$$

ce qui donnera, après avoir multiplié et divisé par r', l'intégrale définie

$$B = \frac{1}{rr'\cos\theta} \int_0^\pi d\varphi \frac{r'\sin\varphi}{1 - 2r'\cos\varphi + r'^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{-1}} \log \frac{1 - r\cos\theta e^{-\varphi\sqrt{-1}}}{1 - r\cos\theta e^{\varphi\sqrt{-1}}},$$

et, en admettant toujours la supposition déjà faite de r et r' moindres que l'unité, je ferai usage des développements

$$\frac{r'\sin\varphi}{1-2r'\cos\varphi+r'^2}=r'\sin\varphi+r'^2\sin2\varphi+r'^3\sin3\varphi+\ldots,$$

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}}\log\frac{1-r\cos\theta\, e^{-\varphi\sqrt{-1}}}{1-r\cos\theta\, e^{\varphi\sqrt{-1}}}=r\cos\theta\sin\varphi+\frac{r^2\cos^2\theta}{2}\sin2\varphi+\frac{r^3\cos^3\theta}{3}\sin3\varphi+\ldots.$$

Maintenant, si l'on intègre entre les limites zéro et π le produit des seconds membres, on trouvera immédiatement

$$B=\frac{\pi}{rr'\cos\theta}\left[rr'\cos\theta+\frac{(rr'\cos\theta)^2}{2}+\frac{(rr'\cos\theta)^3}{3}+\ldots\right],$$

c'est-à-dire

$$B=\frac{\pi}{rr'\cos\theta}\log\frac{1}{1-rr'\cos\theta}=\frac{\pi}{aa'+bb'}\log\left(\frac{1}{1-aa'-bb'}\right).$$

C'est le résultat que je me proposais d'établir; je me borne en ce moment à remarquer que les constantes a, b, a', b' n'y entrent que par les produits aa' et bb', de sorte que l'intégrale ne change pas en y remplaçant a et a' par $\frac{a}{t}$, $a't$, et b et b' par $\frac{b}{u}$, $b'u$. Relativement à A, il est possible seulement de changer a et b, d'une part, en at, bt; a' et b', de l'autre, en $\frac{a'}{t}$, $\frac{b'}{t}$; ce sont ces propriétés qui servent de point de départ à l'extension aux fonctions de plusieurs variables de la théorie des fonctions X_n de Legendre.