ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

GUY MAURY

La condition « intégralement clos » dans quelques structures algébriques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 78, nº 1 (1961), p. 31-100

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1961_3_78_1_31_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
3e série, t. 78, 1961, p. 31 à 100.

LA CONDITION « INTÉGRALEMENT CLOS » DANS QUELQUES STRUCTURES ALGÉBRIQUES (1).

PAR M. GUY MAURY.

INTRODUCTION (2).

1. On connaît plusieurs caractérisations des anneaux commutatifs noethériens intégralement clos :

— La plus connue est certainement celle de van der Wærden-Artin [22], que nous appellerons « caractérisation A »;

— Une autre caractérisation (caractérisation B), dérivée des travaux de Krull [11], est exposée dans le cas des domaines d'intégrité par Nagata [18].

Une troisième caractérisation (caractérisation C) a été donnée par Mori dans le cas des domaines d'intégrité [17], et a été étendue au cas où il y a des diviseurs de zéro, par Yoshida [21].

Or il se trouve que seule la caractérisation A a donné lieu à des travaux ultérieurs, dont voici les principaux :

— Extension de la caractérisation A aux demi-groupes abéliens « intégralement clos », par A. H. Clifford [5];

— Extension de la caractérisation A aux anneaux non commutatifs « intégralement clos », par Asano [1], puis aux demi-groupes non commutatifs « intégralement clos », par Asano-Murata [3];

— Extension de la caractérisation A aux gerbiers commutatifs « intégralement clos », par Mme M.-L. Dubreil-Jacotin [9], puis aux demi-groupes résidutifs abéliens « nomaux », par Molinaro [16];

(1) *Thèse Sc. math.*, Paris, 1960.

(2) Les numéros entre crochets renvoient à la bibliographie placée à la fin de ce travail.

— Certes, en 1939, P. Lorenzen [15] avait fait passer une partie des résultats de Krull, concernant les anneaux de valuation et les anneaux commutatifs intégralement clos, aux semi-groupes (demi-groupes vérifiant la règle de simplification) commutatifs. Mais, d'une part il se restreignait aux semi-groupes, d'autre part il ignorait, ce que Ward et Dilworth [23] établissaient la même année, que la décomposition en idéaux primaires était valable pour les idéaux d'un demi-groupe commutatif noethérien.

2. Or dans l'étude de certains problèmes, ce n'est pas la caractérisation A, mais bien l'une des deux autres qui s'avère techniquement la plus utile : c'est ce que j'ai montré à propos de la solution du problème suivant, dans laquelle la caractérisation B est seule utilisable : « Trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'une extension $A[\theta]$, simple, entière, sans diviseurs de zéro de l'anneau normal A (c'est-à-dire commutatif, à élément unité, noethérien, intégralement clos) soit un anneau normal. »

La résolution de ce problème est l'objet principal du chapitre I.

3. Ceci suggère l'idée de tenter de prolonger les caractérisations B et C aux domaines où la caractérisation A a déjà été prolongée : ainsi, au chapitre II, j'énonce des caractérisations B′ et C′, analogues respectivement aux caractérisations B et C, pour les demi-groupes commutatifs, à élément unité, noethériens, intégralement clos, et ce d'une façon tout à fait indépendante de la théorie d'Artin. Les caractérisations B et C font, en particulier, état de la décomposition en idéaux primaires, valable, comme on le sait, dans un anneau commutatif noethérien. Une première raison, pour laquelle les caractérisations B et C peuvent se prolonger, est que la décomposition en idéaux primaires est, comme nous l'avons déjà dit, valable aussi dans un demi-groupe commutatif noethérien. Une seconde raison est que j'ai pu transposer des méthodes de théorie des anneaux (anneaux de fractions, théorèmes d'intersection de Krull, etc.) grâce, en particulier, à l'outil suivant : P désignant l'idéal maximal propre du demi-groupe commutatif, à élément-unité, noethérien D, j'appelle « nœud » de D l'ensemble $\bigcap_n P^n$ (éventuellement vide).

Cette étude me donne accessoirement des résultats sur le rang d'un idéal de D et sur les « extensions entières » de D.

4. Je me suis demandé, ensuite, si l'on pouvait étendre les caractérisations B et C aux anneaux et demi-groupes non commutatifs « intégralement clos », c'est-à-dire aux « ordres maximaux » dans le langage d'Asano. Les travaux récents de Lesieur et Croisot [13], [14], donnant pour un idéal à gauche d'un anneau ou demi-groupe avec zéro, non commutatif, noethérien à gauche, une décomposition en idéaux « tertiaires » — remplaçant les idéaux primaires —

laissaient espérer qu'on pouvait mener l'entreprise à bonne fin. En effet, en utilisant ces travaux, j'établis, au chapitre III, une caractérisation B'', généralisant les caractérisations B et B' des ordres maximaux réguliers, noethériens à gauche, et dont tous les éléments non nuls sont simplifiables.

5. Enfin, dans la ligne, cette fois, des divers travaux auxquels a donné lieu la caractérisation A, je montre, au début du chapitre III, comment on peut étendre la théorie des éléments « nomaux » de Molinaro aux demi-groupes résidués « nomaux » non commutatifs, la nouvelle théorie comprenant comme cas particulier la théorie d'Asano [3].

Chacun des trois chapitres peut se lire indépendamment des autres.

6. Je tiens à exprimer toute ma gratitude à M. P. Dubreil, rapporteur de cette thèse qui, au cours de l'élaboration de ce travail, m'a évité, à plusieurs reprises, les chemins sans issue, et dont les encouragements me furent si précieux, et à M. de Possel, qui voulut bien me donner un second sujet et qui, jadis, guida mes premiers pas dans la recherche. Je voudrais dire aussi le grand profit que j'ai retiré de la fréquentation du Séminaire d'Algèbre et Théorie des nombres, dirigé par MM. P. Dubreil, M.-L. Dubreil-Jacotin, C. Pisot, et des contacts que j'ai eus avec MM. Lesieur et Croisot.

Je suis également heureux de remercier M. G. Julia, Membre de l'Institut, qui a présenté mes Notes à l'Académie [24], et M. Favard, Professeur à la Faculté des Sciences, qui a bien voulu présider mon jury.

CHAPITRE I.

THÉORÈMES DE TRANSFERT EN THÉORIE DES ANNEAUX

Introduction.

Par « anneau » nous entendrons dans tout le chapitre « anneau commutatif, à élément unité ».

Nous nous donnons un anneau A et un suranneau B de A, l'élément unité de B étant celui de A. θ sera un élément de B, entier sur A, sauf mention expresse du contraire. Nous cherchons à quelle condition portant sur les polynomes de A$[x]$, dont θ est racine, certaines propriétés de A sont encore vraies dans A$[\theta]$.

Ainsi on examinera les cas suivants :

I. A$[\theta]$ quasi-local, A l'étant.

II. A$[\theta]$ normal (c'est-à-dire nœthérien, sans diviseurs de zéro, intégralement clos), A l'étant.

III. A[θ] local régulier, A l'étant.

IV. A[θ] intégralement clos dans son anneau complet des quotients, A l'étant, θ étant racine d'un polynome unitaire $\varphi(x)$ de A[x] et n'étant racine d'aucun polynome de A[x] de degré inférieur. Il sera fait, de plus, certaines hypothèses simplificatrices sur A.

Nous nous référons très souvent au Mémoire de M. Nagata [18]. Nous aurons besoin des propriétés fondamentales des anneaux locaux réguliers [parties II et III], qu'on pourra trouver dans Northcott [19].

I. A [θ] quasi local, A l'étant.

1. Dans cette partie, A est un anneau « quasi-local », c'est-à-dire un anneau dont l'ensemble des éléments non inversibles forme un idéal. Celui-ci est alors son unique idéal maximal propre. Un anneau quasi-local noethérien est appelé un anneau local. Un anneau quasi-local peut être défini comme un anneau n'ayant qu'un seul idéal maximal propre : En effet, soit A′ un tel anneau, $\mathfrak{m}'$ son idéal maximal et a un élément de A′, n'appartenant pas à $\mathfrak{m}'$; (a) est égal à A′, ou bien (a) est compris dans un idéal maximal propre de A′ [dans un anneau A′ commutatif, *à élément unité,* tout idéal propre est contenu dans un idéal maximal (Krull)], c'est-à-dire dans $\mathfrak{m}'$. Seule la première hypothèse est possible et a est inversible.

Soit θ un élément de B, qui ne sera pas obligatoirement entier sur A dans ce paragraphe. L'anneau A[θ] $\left(\text{c'est-à-dire l'ensemble des } \sum a_i\theta^i \text{ dans B, } a_i \in \mathrm{A}\right)$, sera noté aussi A*. Si $\mathfrak{m}$ désigne l'idéal maximal de A, $\mathfrak{m}^\star$ sera l'idéal de A* formé par les $\sum m_i\theta^i$, $m_i \in \mathfrak{m}$. $\mathfrak{m}^\star$ est propre, si, et seulement si, θ n'est pas racine d'un polynome de la forme $1 + \sum_0^N m_i x^i$, $m_i \in \mathfrak{m}$ $(i = 0, \ldots, N)$. A chaque polynome $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_p x^p$ de A[x], dont θ est racine (il peut n'y avoir que le polynome O) faisons correspondre le polynome

$$\overline{f}(x) = \overline{a}_0 + \overline{a}_1 x + \ldots + \overline{a}_p x^p,$$

de $\frac{\mathrm{A}}{\mathfrak{m}}[x]$, $\overline{a}_i$ étant la classe de a_i dans $\frac{\mathrm{A}}{\mathfrak{m}}$.

a. Premier cas : $\mathfrak{m}^\star$ *est propre; considérons* $\frac{\mathrm{A}^\star}{\mathfrak{m}^\star}$.

1° S'il n'y a pas de $\overline{f}(x)$ non nul, $\frac{\mathrm{A}^\star}{\mathfrak{m}^\star}$ est isomorphe à $\frac{\mathrm{A}}{\mathfrak{m}}[x]$.

2° S'il y a un $\bar{f}(x)$ non nul, soit $\bar{\varphi}(x)$ un polynome non nul de plus petit degré parmi les $\bar{f}(x)$ et

$$\bar{\varphi}(x)=\prod_{i=1}^{q}\bar{\varphi}_i^{\alpha_i}(x),$$

la décomposition de $\bar{\varphi}(x)$ en facteurs premiers dans $\frac{A}{\mathfrak{m}}[x]$ $\left(\frac{A}{\mathfrak{m}}\text{ est un corps}\right)$. Il est facile de vérifier que $\frac{A^\star}{\mathfrak{m}^\star}$ est isomorphe à $\frac{A}{\mathfrak{m}}[x]/(\bar{\varphi}(x))$. Soit

$$\bar{\varphi}_i(x)=\bar{\beta}_0+\ldots+\bar{\beta}_{n_i}x^{n_i}, \qquad \bar{\beta}_i\in\frac{A}{\mathfrak{m}} \qquad (i=0,\ \ldots,\ n_i).$$

Considérons

$$\varphi_i(x)=\beta_0+\beta_1 x+\ldots+\beta_{n_i}x^{n_i},$$

β_i étant un représentant de $\bar{\beta}_i$. Les idéaux de $A^\star$ dont l'intersection avec A est $\mathfrak{m}$, sont au nombre de q, engendrés respectivement par $\varphi_i(\theta)$ et $\mathfrak{m}(i=1,\ \ldots,\ q)$.

b. Deuxième cas : $\mathfrak{m}^\star$ n'est pas propre. — Il n'y a pas alors d'idéaux de $A^\star$ propres dont l'intersection avec A est $\mathfrak{m}$. Ceci ne peut se produire si θ est entier sur A ([18], p. 66, corollaire 1).

2. Si θ est entier sur A, nous sommes dans le cas a, 2° précédent. Les seuls idéaux maximaux de $A^\star$ sont les idéaux engendrés par $\mathfrak{m}$ et les $\varphi_i(\theta)(i=1\ \ldots,\ q)$, dans $A^\star$: en effet, soit $\mathfrak{p}'$ un idéal maximal dans $A^\star$, $\frac{A^\star}{\mathfrak{p}'}$ est un corps entier sur l'anneau $\frac{A}{\mathfrak{p}'\cap A}$. Or, ceci entraîne que $\frac{A}{\mathfrak{p}'\cap A}$ est un corps ([18], p. 66, lemme 3). $\mathfrak{p}'\cap A$ n'est autre que $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{p}'$ contient $\mathfrak{m}^\star$ et est, par suite un des idéaux maximaux déjà trouvés. On déduit de là :

Théorème. — *$A^\star$ est quasi-local si, et seulement si, la décomposition de $\bar{\varphi}(x)$ dans $\frac{A}{\mathfrak{m}}[x]$ est $\bar{\varphi}(x)=\bar{\varphi}'^{\lambda}(x)$, $\bar{\varphi}'(x)$ étant irréductible dans $\frac{A}{\mathfrak{m}}[x]$ et λ étant un entier naturel.*

Remarque : 1° Tout sous-anneau de $A^\star$ contenant A est quasi-local.

2° Si $A^\star$ est un anneau quasi-local, extension entière d'un anneau A, celui-ci est nécessairement quasi-local.

3° Supposons que θ soit racine d'un polynome

$$\psi(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n,$$

à coefficient dans A et que θ ne soit racine d'aucun polynome de degré inférieur.

Alors, on peut prendre $\bar{\varphi}(x) = \bar{\psi}(x)$. En effet, tous les polynomes de A$[x]$, dont θ est racine, sont multiples de $\psi(x)$. Supposons que $\bar{\varphi}(x)$ provienne de $\varphi(x)$, on aura

$$\varphi(x) = \lambda(x)\,\psi(x) \qquad \text{et} \qquad \bar{\varphi}(x) = \bar{\lambda}(x)\,\bar{\psi}(x),$$

le degré de $\bar{\varphi}(x)$ étant supérieur ou égal à celui de $\bar{\psi}(x)$. D'après le choix de $\bar{\varphi}(x)$, $\bar{\varphi}(x)$ et $\bar{\psi}(x)$ ont le même degré.

II. — A[θ] normal, A l'étant.

1. Notations. — A est ici un anneau noethérien, sans diviseurs de zéro, intégralement clos, plongé dans un anneau B, sans diviseurs de zéro. Soit θ un élément de B, entier sur A. Comme dans la partie I, A$[\theta]$ sera aussi noté A*. θ est alors racine d'un polynome unitaire $\varphi(x)$ de A$[x]$, irréductible dans $\bar{\mathrm{A}}(x)$ $\bar{\mathrm{A}}$ étant le corps des quotients de A.

$\varphi(x)$ sera appelé le polynome caractéristique de θ sur A. Soit n son degré. Nous cherchons une condition nécessaire et suffisante pour que A* soit intégralement clos. Nous terminons par quelques applications.

2. Rappel. — *a*. Étant donnés un anneau noethérien A′ et un idéal premier $\mathfrak{p}$ de A′, formons toutes les suites croissantes d'idéaux premiers de A′, distincts et strictement compris dans $\mathfrak{p}$. Il existe un nombre entier r positif ou nul, tel qu'il existe une suite ayant r termes et qu'il n'existe pas de suite ayant $r+1$ termes. Le nombre r est appelé le rang de $\mathfrak{p}$.

Le plus grand nombre r qu'on puisse ainsi trouver dans A′ est appelé la dimension de A′.

b. S étant un ensemble multiplicativement stable d'éléments de A′, ne contenant pas o, A′ étant ici un anneau sans diviseurs de zéro quelconque, on notera A'_{S} l'anneau ensemble des fractions $\frac{a'}{s}$, où a' appartient à A′ et s à S.

Ainsi, si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de A′, on peut considérer l'ensemble $\mathrm{S} = \mathrm{A}' - \mathfrak{p}$ et l'anneau A'_{S}, noté aussi dans ce cas $\mathrm{A}'\mathfrak{p}$.

c· On sait que ([18], p. 75, corollaire 1) : un anneau noethérien Λ sans diviseurs de zéro, est intégralement clos si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont réalisées :

(H_1) : Pour chaque idéal premier $\mathfrak{p}$ de Λ de rang 1, $\Lambda\mathfrak{p}$ est intégralement clos;

(H_2) : Chaque idéal principal de Λ n'a pas d'idéaux premiers essentiels immergés (2).

(2) C'est la caractérisation notée « caractérisation B » dans l'introduction.

Remarque. — Si A n'a que des idéaux premiers, non nuls, de rang 1, la condition nécessaire et suffisante précédente se réduit à la condition (H_1).

LEMME. — *Soient* A *un anneau, sans diviseurs de zéro, intégralement clos, dans son corps des quotients* $\overline{A}$, *et* S *un ensemble multiplicativement stable de* A, *ne contenant pas zéro, l'anneau* A_S *est intégralement clos dans son corps des quotients* $\overline{A}$.

Soit u un élément de $\overline{A}$, entier sur A_S

$$u^n + b_1 u^{n-1} - \ldots + b_n = 0, \qquad \text{avec} \quad b_i = \frac{a_i}{s_i} \qquad (s_1 \in S,\ a_i \in A,\ i = 1, \ldots, n).$$

Considérons $\beta = u s_1 \ldots s_n$:

$$\beta^n + c_1 \beta^{n-1} + \ldots + c_n = 0, \qquad c_i = b_i (s_1 \ldots s_n)^n \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Les c_i appartiennent à A, β appartient à A et u à A_S.

4. Soit $\mathfrak{p}^\star$ un idéal premier de rang 1 de $A^\star$ et soit $\mathfrak{p}^\star \cap A = \mathfrak{p}$. $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de rang 1 ([18], p. 72, propos. 2). D'ailleurs, si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de rang 1 de A, il existe au moins un idéal premier $\mathfrak{p}^\star$ de $A^\star$, tel que $\mathfrak{p}^\star \cap A = \mathfrak{p}$ et $\mathfrak{p}^\star$ est alors de rang 1.

Posons, $\mathfrak{p}$ étant un idéal premier de rang 1 de A, $S = A - \mathfrak{p}$, et considérons $[A[\theta]]_S$: d'après (II, 3), cet anneau est intégralement clos, si $A^\star$ l'est. Mais $[A[\theta]]_S = A_S[\theta]$, le polynome caractéristique de θ sur A_S étant toujours $\varphi(x)$. Donc, si $A^\star$ est intégralement clos, $A_S[\theta]$ l'est aussi pour tout S relatif à un idéal premier de rang 1 de A.

Réciproquement, si $A_S[\theta]$ est intégralement clos, $S = A - \mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}$ idéal premier de rang 1 de A, il en est de même de $A^\star_{S^\star}$, où $S^\star = A^\star - \mathfrak{p}^\star$, $\mathfrak{p}^\star$ étant un idéal premier de A, dont l'intersection avec A est $\mathfrak{p}$, car nous pouvons écrire

$$A^\star_{S^\star} = ([A[\theta]]_S)_{S^\star} = [A_S[\theta]]_{S^\star}.$$

Il suffit alors d'appliquer le lemme de (II, 3).

Ainsi, une condition nécessaire pour que $A^\star$ soit intégralement clos est que pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de rang 1 de A, et $S = A - \mathfrak{p}$, $A_S[\theta]$ soit intégrale ment clos et cette condition, si elle est réalisée, entraîne que la condition (H_1) est réalisée dans $A^\star$.

5. Considérons donc, étant donné $S = A - \mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}$ étant un idéal premier de rang 1 de A, $A_S[\theta]$:

$A_S[\theta]$ est une extension entière, sans diviseurs de zéro, de l'anneau local régulier de dimension 1, A_S. C'est un anneau semi-local d'idéaux maximaux $\mathfrak{p}_i^\star = (i = 1, \ldots, q)$ engendrés respectivement par $\varphi_i(\theta)$ et $\mathfrak{p}_S$, $\mathfrak{p}_S$ désignant l'idéal maximal de A_S, la décomposition de $\varphi(x)$ modulo $\mathfrak{p}_S$, dans $\frac{A_S}{\mathfrak{p}_S}[x]$ étant

$$\bar{\varphi}\,\mathfrak{p}_S = \prod_{i=1}^{q} \bar{\varphi}_i^{\alpha_i}(x),$$

$\varphi_i(x)$ étant irréductible dans $\frac{A_S}{\mathfrak{p}_S}[x]$, (*voir* I, 1 et 2, et I, 2, remarque 3).

Si $\bar{\varphi}\mathfrak{p}_S$ est irréductible dans $\frac{A_S}{\mathfrak{p}_S}[x]$, alors $A_S[\theta]$ est local régulier de dimension 1, son idéal maximal étant engendré par un générateur u de $\mathfrak{p}_S$. Donc $A_S[\theta]$ est intégralement clos.

Si $\bar{\varphi}\mathfrak{p}_S$ n'est pas irréductible, et a la décomposition ci-dessus, quelle est la condition pour que $A_S[\theta]$ soit intégralement clos?

6. Soit un facteur $\bar{\varphi}_i(x)$, d'exposant $\alpha_i = 1$ dans la décomposition précédente de $\bar{\varphi}\mathfrak{p}_S(x)$ et soit, u étant, comme ci-dessus, le générateur de $\mathfrak{p}_S$,

$$\varphi(x) = \prod_{i=1}^{q} \varphi_i^{\alpha_i}(x) + u\,\mu(x).$$

$\mu(x)$ étant un polynome de $A_S[x]$, de degré $n-1$ au plus. Posons $S_i^\star = A_S^\star - \mathfrak{p}_i^\star$ et considérons $(A_S^\star)_{S_i^\star}$: c'est un anneau local de dimension 1 d'idéal maximal $\mathfrak{p}^\star_{i_{S_i^\star}}$, dont une base est $[u, \varphi_i(\theta)]$. Mais comme

$$\varphi_i(\theta) = \frac{-u\,\mu(\theta)}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{q} \varphi_j^{\alpha_j}(\theta)},$$

u est une base.

$(A_S^\star)_{S_i^\star}$ est donc régulier et, par suite, intégralement clos.

Considérons maintenant un facteur $\bar{\varphi}_i(x)$, d'exposant $\alpha_i > 1$ et supposons $A_S[\theta]$ intégralement clos : c'est alors un anneau semi-local, de Dedekind, donc à idéaux tous principaux ([18, p. 74, propos. 1). En particulier, $\mathfrak{p}_i^\star$ est engendré par un certain élément $\lambda(\theta)$ et l'on a $\varphi_i(\theta) = \lambda(\theta)\lambda'(\theta)$, $\lambda'(\theta)$ étant un élément de $A_S^\star$. Démontrons que $\lambda'(\theta)$ est inversible :

Si $\lambda'(\theta)$ n'était pas inversible, il appartiendrait à un $\mathfrak{p}_j^\star$. Comme $\varphi_i(\theta)$ n'appartient pas à $\mathfrak{p}_j^\star$ pour $j\neq i$, $\lambda'(\theta)$ appartiendrait à $\mathfrak{p}_i^\star$. Mais n'oublions pas que, dans $A_S^\star/\mathfrak{p}_S A_S^\star$, $\bar{\lambda}(\bar{\theta})$ et $\bar{\lambda}'(\bar{\theta})$ sont multiples de $\bar{\varphi}_i(\bar{\theta})$, $\bar{\theta}$ désignant la classe de θ dans $A_S^\star/\mathfrak{p}_S A_S^\star$. On aurait donc

$$\bar{\varphi}_i(\bar{\theta}) = \bar{\varphi}_i^2(\bar{\theta})\,\bar{\psi}(\bar{\theta}), \qquad \bar{\psi}(\bar{\theta}) \in A_S^\star/\mathfrak{p}_S A_S^\star.$$

Par suite,

$$\bar{\varphi}_i(x) + \bar{\eta}(x)\left[\prod_{k=1}^{q} \bar{\varphi}_k^{\alpha_k}(x)\right] = \bar{\varphi}_i^2(x)\,\bar{\psi}(x),$$

avec un certain polynome $\overline{\eta}(x)$ appartenant à $\frac{A_S}{\mathfrak{p}_S}[x]$.

Le premier membre s'écrit

$$\overline{\varphi}_i(x)\left[1+\overline{\eta}(x)\left(\prod_{k=1}^{q}\overline{\varphi}_k^{\alpha'_k}(x)\right)\right],$$

avec

$$\alpha'_k=\alpha_k \quad \text{si } k\neq i \qquad \text{et} \qquad \alpha'_i=\alpha_i-1.$$

$\overline{\varphi}_i(x)$ devrait diviser la quantité entre crochets, ce qui n'est pas, puisque α'_i est supérieur ou égal à 1.

$\lambda'(\theta)$ est donc inversible, et l'on peut engendrer $\mathfrak{p}_i^{\star}$ par $\varphi_i(\theta)$ dans le cas $\alpha_i>1$.

Mais alors, dans

$$\varphi(x)=\prod_{i=1}^{q}\varphi_i^{\alpha_i}(x)+u\,\mu(x),$$

faisons $x=\theta$: $\mu(\theta)$ n'est pas dans $\mathfrak{p}_i^{\star}$, car autrement $\mu(\theta)=\varphi_i(\theta)\gamma(\theta)$, où

$$\gamma(\theta)=a_0+\ldots+a_{n-1}\,\theta^{n-1}, \qquad a_i\in A_S \qquad (i=0,\ \ldots,\ n-1).$$

θ serait racine du polynome de $A_S[x]$ non identiquement nul de degré inférieur à n

$$\prod_{k=1}^{q}\varphi_k^{\alpha'_k}(x)+u(a_0+a_1x+\ldots+a_{n-1}x^{n-1}),$$

où α'_k a la valeur précisée plus haut. C'est impossible. Donc, si $A_S[\theta]$ est intégralement clos, $\mu(\theta)$ n'appartient à aucun $\mathfrak{p}_i^{\star}$, pour i, tel que α_i est supérieur à 1.

7. Nous allons montrer que :

Réciproquement, si $\mu(\theta)$ n'appartient à aucun $\mathfrak{p}_i^{\star}$, pour i, tel que α_i est supérieur à 1, $A_S[\theta]$ est intégralement clos.

En effet, soit d'abord i, tel que $\alpha_i=1$. Nous avons vu (II, 6) que $(A_S^{\star})_{S_i^{\star}}$ est intégralement clos.

Soit, ensuite, i, tel que $\alpha_i>1$. Une base de $(\mathfrak{p}_i^{\star})_{S_i^{\star}}$ est $[u,\ \varphi_i(\theta)]$, mais si $\mu(\theta)$ n'appartient pas à $\mathfrak{p}_i^{\star}$, on peut écrire

$$u=\frac{-\prod_{i=1}^{q}\varphi_i^{\alpha_i}(\theta)}{\mu(\theta)},$$

et, par suite, $\mathfrak{p}^{\star}_{i_{S_i^{\star}}}$ est engendré dans $(A_S^{\star})_{S_i^{\star}}$ par $\varphi_i(\theta)$, et $(A_S^{\star})_{S_i^{\star}}$ est local régulier de dimension 1, donc intégralement clos.

Ainsi $A_S[\theta]$ est intégralement clos, d'après la remarque de (II, 2).

8. Essayons d'exprimer la condition « $\mu(\theta)$ n'appartient pas à $\mathfrak{p}_i^*$ », à l'aide$_i$ du polynome $\mu(x)$ et même à l'aide de $\varphi(x)$.

$\mathfrak{p}_i^*$ étant engendré par $\varphi_i(\theta)$ et u, $\mu(\theta)$ appartient à $\mathfrak{p}_i^*$ si, et seulement si, il existe $\lambda(\theta)$ dans Λ_S^* et $p_S(\theta)$ dans $\mathfrak{p}_S A_S$, tels que

$$\mu(\theta) = \lambda(\theta)\,\varphi_i(\theta) + p_S(\theta).$$

De façon générale, si

$$f(\theta) = a_0 + a_1\theta + \ldots + a_{n-1}\theta^{n-1}, \qquad a_i \in A_S \qquad (i = 0, \ldots, n-1),$$

appelons $f(x)$ le polynome $a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}$.

Considérons alors

$$\psi(x) = \lambda(x)\,\varphi_i(x) + p_S(x).$$

Le reste de la division de $\psi(x)$ par $\varphi_i(x)$ a tous ses coefficients dans $\mathfrak{p}_S$.

Il en est de même du reste de la division de $\mu(x)$ par $\varphi_i(x)$. On a en effet,

$$\psi(x) - \mu(x) = \eta(x)\,\varphi(x),$$

$\eta(x)$ étant un certain polynome de $A_S[x]$, puisque $\psi(\theta) - \mu(\theta)$ est nul. Nous pouvons donc écrire

$$\mu(x) = \psi(x) + \eta(x)\left[\prod_{i=1}^{q} \varphi_i^{\alpha_i}(x)\right] + p'_S(x),$$

$p'_S(x)$ étant un polynome à coefficient dans $\mathfrak{p}_S$.

Le reste de la division de $\mu(x)$ par $\varphi_i(x)$, comme celui de la division de $\psi(x)$ et $p'_S(x)$ par $\varphi_i(x)$ est à coefficients dans $\mathfrak{p}_S$.

Réciproquement, s'il en est ainsi, $\mu[\theta]$ appartient bien à $\mathfrak{p}_i^*$, mais il revient au même de dire que le reste de la division de $\mu(x)$ par $\varphi_i(x)$ a ses coefficients dans $\mathfrak{p}_S$, ou que le reste de la division de $\varphi(x)$ par $\varphi_i(x)$ a ses coefficients dans $\mathfrak{p}_S^2$.

Donc, une condition nécessaire, pour que $A[\theta]$ soit intégralement clos, est que, pour tout S relatif à un idéal premier, $\mathfrak{p}$ de A de rang 1, on ait la condition (C) suivante :

(C) : « Si α_i est supérieur ou égal à 2, le reste de la division de $\varphi(x)$ par $\varphi_i(x)$ n'a pas tous ses coefficients dans $\mathfrak{p}_S^2$. »

De plus, si (C) est réalisée, alors, la condition (H_1) est vérifiée dans $A[\theta]$ (II, 4,).

9. Nous allons montrer que, si (H_1) est vérifiée dans $A[\theta]$, alors (H_2) l'est également. Nous nous appuierons sur un théorème de Nagata ([16], p. 76, corollaire 4) :

Soit $\mathfrak{O}$ un anneau noethérien, sans diviseurs de zéro, dans lequel (H_1) *est réalisée. Si un idéal principal* (a) *de $\mathfrak{O}$, a un idéal premier essentiel immergé $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}$ est aussi* *un idéal premier essentiel immergé pour* (b), *b étant un élément non nul quelconque de* $\mathfrak{q}$.

Supposons que (H_2) ne soit pas réalisée dans $A^\star$, (H_1) l'étant. Il existe $a^\star$ dans $A^\star$, tel que $(a^\star)$ a un idéal premier essentiel immergé $\mathfrak{q}^\star$. Alors pour a, non nul, appartenant à $\mathfrak{q}^\star \cap A = \mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}^\star$ est un idéal premier essentiel immergé de $(a)^\star$ idéal engendré par a dans $A^\star$. Il existe donc $b^\star$ appartenant à $A^\star$ et n'appartenant pas à $(a)^\star$, tel que $b^\star$ appartient à $(a)^\star : \mathfrak{q}^\star$. Posons

$$b^\star = b_0 + \ldots + b_{n-1}\theta^{n-1}, \qquad b_i \in A \qquad (i = 0, \ldots, n-1).$$

Il existe un b_i, pour certain i, qui n'appartient pas à (a), idéal engendré par a dans A, puisque $b^\star$ n'appartient pas à $(a)^\star$. En particulier, pour tout q, appartenant à $\mathfrak{q}$, $b^\star q$ appartient à $(a)^\star$ et, par suite, $b_i q$ appartient à (a); on remarque, en effet, à ce propos, qu'un élément

$$c^\star = c_0 + \ldots + c_{n-1}\theta^{n-1}, \qquad c_i \in A \qquad (i = 0, \ldots, n-1)$$

appartient à $(a)^\star$ si, et seulement si, tous les c_i appartiennent à (a). Or, ceci montre que $(a):\mathfrak{q}$ contient effectivement (a), donc que $\mathfrak{q}$ est compris dans un idéal premier de (a). Or, $\mathfrak{q}$ n'est pas de rang 1, puisqu'il a même rang que $\mathfrak{q}^\star$. C'est impossible, puisque (H_2) est réalisée dans A.

10. En résumé de cette étude, nous pouvons énoncer :

Théorème. — *Soit* A *un anneau à élément unité, noethérien, intégralement clos, sans diviseurs de zéro, plongé dans un suranneau* R *commutatif et sans diviseurs de zéro, ayant même unité que* A, *et soit* θ *un élément de* B, *entier sur* A, *dont le polynome caractéristique sur* A *est noté* $\varphi(x)$.

Soit $\mathfrak{p}$ *un idéal premier de rang* 1 *de* A, *posons* $S = A - \mathfrak{p}$.

Soit $\mathfrak{p}_S$ *l'idéal maximal de* A_S.

Soit $\bar{\varphi}_{\mathfrak{p}_S}(x)$ *le polynome déduit de* $\varphi(x)$ *par passage aux classes des coefficients, modulo* $\mathfrak{p}_S$, *et soit* $\prod_{i=1}^{q} \bar{\varphi}_i^{\alpha_i}(x)$ *sa décomposition dans* $\frac{A_S}{\mathfrak{p}_S}[x]$ *en facteurs premiers.*

Soient

$$\bar{\varphi}_i(x) = \bar{\beta}_0 + \ldots + \bar{\beta}_{n_i} x^{n_i}, \qquad \bar{\beta}_j \in \frac{A_S}{\mathfrak{p}_S} \qquad (j = 0, \ldots, n_i)$$

et

$$\varphi_i(x) = \beta_0 + \ldots + \beta_{n_i} x^{n_i},$$

où β_i *est un représentant dans* A_S *de* $\bar{\beta}_i$.

Alors, pour que $A[\theta]$ *soit intégralement clos, il faut et il suffit, que pour tout idéal premier* $\mathfrak{p}$ *de rang* 1 *de* A, *la condition* (C) *suivante soit réalisée :*

(C) : *Pour tout* i, *tel que* α_i *est supérieur ou égal à* 2, *le reste de la division de* $\varphi(x)$ *par* $\varphi_i(x)$ *n'a pas ses coefficients tous dans* $\mathfrak{p}_S^2$.

Remarque. — Si un idéal premier $\mathfrak{p}$ est tel que, dans la décomposition de $\bar{\varphi}\mathfrak{p}_S$, il y ait un α_i supérieur ou égal à 2, alors $\varphi(x)$ a une racine double modulo $\mathfrak{p}_S$. Son discriminant d doit être nul modulo $\mathfrak{p}_S$. Or, d appartient à A et (d) a pour idéaux premiers essentiels des idéaux $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ de A, tous de rang 1. Il suffira de vérifier (C) pour ces idéaux premiers $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$.

11. Application au cas où A est l'anneau des entiers. — Remarquons d'abord, d'une façon générale, que $\frac{A_S}{\mathfrak{p}_S}$ est isomorphe au corps des quotients de $\frac{A}{\mathfrak{p}}$, donc à $\frac{A}{\mathfrak{p}}$, dans le cas où A est l'anneau des entiers, $\mathfrak{p}$ désignant un idéal premier de A. Dans chaque classe de $\frac{A_S}{\mathfrak{p}_S}$, il existe un élément de A. On peut donc relever $\bar{\varphi}_i(x)$ dans $A[x]$, au lieu de le relever dans $A_S[x]$, de sorte que la règle du paragraphe (II, 10) devient :

Soit $\varphi(x)$ le polynome caractéristique de θ sur l'anneau des entiers A. *Soit $d = p_1^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r}$ la décomposition en facteurs premiers du discriminant d de $\varphi(x)$. Désignons par $\mathfrak{p}_i = (p_i)$ l'idéal engendré par p_i dans* A. *Soit $\varphi_{(p_i)}(x)$ le polynome déduit de $\varphi(x)$ par passage aux classes des coefficients modulo $\mathfrak{p}_i$, et soit*

$$\bar{\varphi}_{(p_i)}(x) = \prod_{j=1}^{r_i} \bar{\varphi}_{ji}^{\alpha_{ji}}(x),$$

la décomposition de $\bar{\varphi}_{\mathfrak{p}_i}(x)$ dans $\frac{A}{\mathfrak{p}_i}[x]$.

Soient

$$\bar{\varphi}_{ji}(x) = \bar{\beta}_0^i + \ldots + \bar{\beta}_{n_{ji}}^i x^{n_{ji}}, \qquad \bar{\beta}_k^i \in \frac{A}{\mathfrak{p}_i} \qquad (k = 0, \ldots, n_{ji})$$

et

$$\varphi_{ji}(x) = \beta_0^i + \ldots + \beta_{n_{ji}}^i x^{n_{ji}},$$

β_k^i étant un représentant dans A *de $\bar{\beta}_k^i$.*

Alors, pour que A^* *soit intégralement clos, il faut, et il suffit, que la condition* (C) *suivante soit réalisée :*

(C) : *Le reste de la division de $\varphi(x)$ par $\varphi_{ji}(x)$ relatif à j et i, tels que α_{ji} est supérieur ou égal à 2, n'a pas tous ses coefficients multiples de p_i^2* ([3]).

Exemples. — 1° $\varphi(x) = x^2 - x - 1$. Le discriminant est 5. On a

$$x^2 - x - 1 = (x+2)^2 - 5x - 5,$$

([3]) On retrouve ainsi un résultat de Ore ([20], p. 339, th. 4), concernant la théorie des idéaux dans la fermeture entière $\mathcal{C}'$ de l'anneau des entiers $\mathcal{C}$ dans une extension algébrique finie du corps des rationnels, et d'ailleurs dû à Dedekind [6]. Cependant, même dans le cas des nombres, notre théorie ne semble pas avoir été faite.

et le reste de la division de $\varphi(x)$ par $x+2$ est $+5$. $A[\theta]$ est intégralement clos.

2° $\varphi(x)=x^2-2x-4$. On a

$$\varphi(x)=x^2 \qquad (\bmod 2)$$

et $\varphi(x)=x^2-2x-4$, divisé par x, donne comme reste 4 : $A[\theta]$ n'est pas intégralement clos.

12. Application au cas $A=K[x]$, K étant un corps algébriquement clos, θ étant racine du polynome en y, à coefficients dans $K[x]$, $y^n+a_1y^{n-1}+\ldots+a_n$, irréductible dans $K(x)[y]$.

Désignons par C la courbe plane

$$y^n+a_1y^{n-1}+\ldots+a_n=\varphi(x,y)=0.$$

Alors la condition du paragraphe (II, 10), pour que $A[\theta]$ soit intégralement clos, est équivalente à la suivante : « C *n'a pas de point multiple* ».

Ceci est d'ailleurs bien connu en géométrie algébrique. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A, engendré par $x-a$, $a\in K$. On peut supposer $a=0$, au besoin en faisant un changement de variable. A_S est l'anneau formé des éléments $\frac{f(x)}{g(x)}$, où $f(x)$ et $g(x)$ appartiennent à $K[x]$, $g(x)$ n'étant pas divisible par x. Si f_0 et g_0 sont les termes constants de $f(x)$ et $g(x)$, g_0 non nul, on vérifiera que $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f_0}{g_0}$ modulo $\mathfrak{p}_S$. Donc $\frac{A_S}{\mathfrak{p}_S}$ est isomorphe au corps K. $\overline{\varphi}\mathfrak{p}_S$ s'obtient en faisant $x=0$ dans $\varphi(x,y)$, d'où

$$\overline{\varphi}\mathfrak{p}_S=y^n+a_1(0)y^{n-1}+\ldots+a_n(0)$$

et la décomposition dans $\frac{A_S}{\mathfrak{p}_S}[y]$, c'est-à-dire dans $K[y]$, est

$$\prod_{i=1}^{q}(y-a_i)^{\alpha_i},$$

où les éléments a_i sont dans K, et sont racines de $\overline{\varphi}\mathfrak{p}_S$, la multiplicité de la racine a_i étant α_i. Les éléments a_i sont les ordonnées des points où $x=0$ coupe C. Considérons un facteur $y-a_i$, d'exposant α_i plus grand que 1, s'il y y en a. Nous pouvons supposer $a_i=0$ (en faisant au besoin le changement de variable $Y=y-a_i$). Appliquons la condition du paragraphe (II, 10) en remarquant d'abord qu'il n'y a pas de terme constant dans $\varphi(x,y)$ et qu'il n'y a pas de terme de la forme by, b appartenant à K non nul. Le reste de la division de $\varphi(x,y)$ par y n'est pas à coefficients multiples de x^2 si, et seulement si, il existe dans $\varphi(x,y)$ un terme ax, a appartenant à K et non nul.

D'où le résultat énoncé au début.

13. Application au cas $A = K[x, y]$, K étant un corps algébriquement fermé, et θ étant racine du polynome en z, à coefficients dans $K[x, y]$, irréductible dans $K(x, y)[z]$:

$$z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n = \varphi(x, y, z).$$

Un raisonnement analogue au précédent montre que la condition du paragraphe (II.10) est équivalente à : « S *n'a pas de courbes singulières* ».

Exemple : Si $z^2 = xy$, l'anneau correspondant est intégralement clos.

III. — $A[\theta]$ local régulier, A l'étant.

1. Notations. — A est ici local régulier; $u_1, \ldots, u_p$ est une base minimale de l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A; p est donc la dimension de A.

Soit B un suranneau de A, commutatif et sans diviseurs de zéro. θ est un élément de B entier sur A. Soit $\varphi(x)$ le polynome caractéristique de θ sur A, et soit n son degré; $\mathfrak{m}^\star$ est propre (I, 1, a, 2°). De plus, le polynome $\bar{\varphi}(x)$ défini en (I, 1, a, 2°) se déduit du polynome $\varphi(x)$ par passage aux classes modulo $\mathfrak{m}$ des coefficients (I, 2, remarque 3).

Nous cherchons une condition nécessaire et suffisante pour que $A[\theta]$ soit local régulier. $A[\theta]$ sera aussi noté $A^\star$.

2. Théorème. — *Une condition nécessaire et suffisante pour que* $A[\theta]$ *soit local régulier,* A *l'étant,* θ *étant un élément de* B, *entier sur* A, *est qu'on ait :*

1° $\bar{\varphi}(x) = \bar{\varphi}'^{\lambda}(x)$, $\bar{\varphi}'(x)$ *étant irréductible dans* $\frac{A}{\mathfrak{m}}[x]$, λ *étant un entier naturel plus grand ou égal à* 1.

2° *Si* λ *est plus grand que* 1, *le reste de la division de* $\varphi(x)$ *par* $\varphi'(x)$ *n'a pas tous ses coefficients dans* $\mathfrak{m}^2$, $\varphi'(x)$ *étant un polynome de* $A[x]$, *de même degré que* $\bar{\varphi}'(x)$, *tel qu'en prenant les classes modulo* $\mathfrak{m}$ *de ses coefficients, on obtienne* $\bar{\varphi}'(x)$.

Premier point. — La condition (1) est équivalente à « $A^\star$ est local » (I, 2). Si λ est égal à 1, l'idéal maximal $\mathfrak{m}'^\star$ de $A^\star$ est alors engendré par $\mathfrak{m}$ dans $A^\star$; $u_1, \ldots, u_p$ est une base de $\mathfrak{m}'^\star$, et $A^\star$ étant de dimension p, comme A, est local régulier.

Deuxième point. — Supposons la condition (1) réalisée, et supposons que λ est supérieur à 1. Démontrons que la condition (2) est réalisée, lorsque $A^\star$ est local régulier, en supposant de plus que A a la dimension 1; u désignera un générateur de $\mathfrak{m}$.

$\mathfrak{m}'^{\star}$ est engendré par $\varphi'(\theta)$ et u. Comme $A^{\star}$ est local régulier de dimension 1, cette base n'est pas une base minimale de $\mathfrak{m}'^{\star}$: on peut tirer de cette base non minimale, une base minimale ayant un seul élément : cet élément ne peut être que $\varphi'(\theta)$. On peut écrire

$$\varphi(x) = [\varphi'(x)]^{\lambda} + u\,\mu(x),$$

$\mu(x)$ étant un polynome de $A[x]$ de degré $n-1$ au plus. Si $\mu(\theta)$ n'était pas inversible, on aurait

$$\mu(\theta) = \varphi'(\theta)\,\lambda(\theta), \qquad \text{avec} \quad \lambda(\theta) = a_0 + \ldots + a_{n-1}\theta^{n-1},$$
$$a_i \in A \qquad (i = 0, \ldots, n-1).$$

Mais θ serait racine du polynome non identiquement nul, de degré inférieur à n

$$[\varphi'(x)]^{\lambda-1} + u(a_0 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1}).$$

C'est impossible, et $\mu(\theta)$ est inversible. Or, ceci est équivalent à la condition (2) (raisonnement déjà fait en II, 8).

Troisième point. — Supposons λ supérieur à 1, et les conditions (1) et (2) réalisées.

Montrons que, p étant quelconque, $A^{\star}$ est local régulier. On peut écrire

$$\varphi(x) = \varphi'(x)\,\lambda(x) + m_0 + \ldots + m_{q-1}x^{q-1},$$
$$m_i \in \mathfrak{m} \qquad (i = 0, \ldots, q-1),$$

q étant le degré de $\varphi'(x)$.

Supposons que m_j n'appartienne pas à $\mathfrak{m}^2$ et posons

$$m_i = \lambda_1^i u_1 + \ldots + \lambda_p^i u_p \qquad (i = 0, \ldots, q-1).$$

Comme m_j n'appartient pas à $\mathfrak{m}^2$ il existe pour $1 \leqq r \leqq p$, un λ_r^j n'appartenant pas à $\mathfrak{m}$; en isolant u_r dans

$$\varphi'(\theta)\,\lambda(\theta) + \sum_{i=0}^{q-1} m_i\theta^i = 0,$$

il vient

$$\varphi'(\theta)\,\lambda(\theta) + \sum_{i=0}^{q-1}\sum_{\substack{k=1\\k\neq r}}^{p} \lambda_k^i u_k\theta^i + u_r(\lambda_r^0 + \ldots + \lambda_r^{q-1}\theta^{q-1}) = 0.$$

Posons

$$\Lambda(\theta) = \varphi'(\theta)\,\lambda(\theta) + \sum_{i=0}^{q-1}\sum_{\substack{k=1\\k\neq r}}^{p} \lambda_k^i u_k\theta^i,$$

et remarquons que $\Lambda(\theta)$ appartient à l'idéal $(u_1, \ldots, u_{r-1}, u_{r+1}, \ldots, u_p, \varphi'(\theta))$, engendré par ces éléments dans $A^{\star}$.

L'élément $\lambda_r^0 + \ldots + \lambda_r^{q-1}\theta^{q-1}$ est inversible, puisque λ_r^j n'appartient pas à $\mathfrak{m}$ (II, 8). Soit $\mu'(\theta)$ son inverse. Alors, on a $u_r = -\mu'(\theta)\Lambda(\theta)$. Une base de l'idéal maximal $\mathfrak{m}'^{\star}$ de $A^{\star}$ est $(u_1, \ldots, u_{r-1}, u_{r+1}, \ldots, u_p, \varphi'(\theta))$: elle contient p éléments; $A^{\star}$ est local régulier.

Quatrième point. — Il reste à prouver que, la condition (1) étant réalisée, et λ étant supérieur à 1, la condition (2) est réalisée, lorsque $A^{\star}$ est local régulier, et lorsque la dimension de A, donc de $A^{\star}$, p, est supérieur à 1. Pour $p=1$, en effet, nous l'avons établi (2ᵉ point). Si $A^{\star}$ est local régulier, une base minimale déduite de $(u_1, \ldots, u_p, \varphi'(\theta))$ comprend p éléments : un des u_i, soit u_p, s'exprime linéairement, en fonction de $u_1, \ldots, u_{p-1}, \varphi'(\theta)$. L'idéal $\mathfrak{c}^{\star}$ engendré par $u_1, \ldots, u_{p-1}$, dans $A^{\star}$ est premier, et son intersection avec A est de rang $p-1$ et comprend l'idéal premier $\mathfrak{c}$ engendré par $u_1, \ldots, u_{p-1}$ dans A.

$\mathfrak{c}^{\star} \cap A$ est distinct de $\mathfrak{m}$, dont le rang est p.

$\mathfrak{c}^{\star} \cap A$ ne peut contenir strictement $\mathfrak{c}$, car on aurait dans A la chaîne de $p+1$ idéaux premiers distincts : $(u_1), \ldots, \mathfrak{c}, \mathfrak{c}^{\star} \cap A, \mathfrak{m}$. Ceci est impossible et, par suite, $\mathfrak{c}^{\star} \cap A = \mathfrak{c}$.

Désignons par $\varphi'_{\mathfrak{c}}(x)$ le polynome déduit du polynome $\varphi'(x)$ par passage aux classes de $\frac{A}{\mathfrak{c}} = B$, et par $\overline{\varphi}'_{\mathfrak{c}}$, le polynome déduit de $\varphi'_{\mathfrak{c}}$ en prenant les classes de B modulo $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}/\mathfrak{c}$: $\overline{\varphi}'_{\mathfrak{c}}$ est irréductible dans $\frac{B}{\mathfrak{n}}[x]$, puisque $\frac{B}{\mathfrak{n}}$ est isomorphe à $\frac{A}{\mathfrak{m}}$.

Cela étant, $B^{\star} = \frac{A^{\star}}{\mathfrak{c}^{\star}}$ est local régulier, et est extension entière de l'anneau local régulier $B = \frac{A}{\mathfrak{c}}$, qui est de dimension 1. Si η désigne la classe de θ modulo $\mathfrak{c}^{\star}$, on peut écrire

$$B^{\star} = B[\eta].$$

On pourra vérifier que le polynome caractéristique de η n'est autre que $\varphi_{\mathfrak{c}}(x)$. La décomposition de ce polynome dans $\frac{B}{\mathfrak{n}}[x]$ est

$$\overline{\varphi}(x) = [\overline{\varphi}'(x)]^{\lambda},$$

$\overline{\varphi}'(x)$ étant irréductible dans $\frac{B}{\mathfrak{n}}[x]$ d'après ce que nous avons dit plus haut. De l'identité de la division par $\varphi'(x)$,

$$\varphi(x) = \varphi'(x)\,\lambda(x)\,r(x),$$

degré de $r(x) <$ degré de $\varphi'(x)$, on déduit

$$\varphi_{\mathfrak{c}}(x) = \varphi'_{\mathfrak{c}}(x)\,\lambda_{\mathfrak{c}}(x) + r_{\mathfrak{c}}(x),$$

degré de $r_{\mathfrak{c}}(x) <$ degré de $\varphi'_{\mathfrak{c}}(x)$, en prenant les classes, modulo $\mathfrak{c}$, des coefficients des polynomes. D'après le deuxième point, $r_{\mathfrak{c}}(x)$ ne doit pas avoir tous ses coefficients dans $\mathfrak{n}^2$, et ceci entraîne que $r(x)$ n'a pas tous les siens dans $\mathfrak{m}^2$.

Ainsi, la condition (2) est réalisée.

IV. — A[θ] intégralement clos dans son anneau complet des fractions.

1. Avant d'aborder le problème qui fait l'objet de cette partie et qui sera énoncé au paragraphe 8, il nous faut démontrer les généralisations suivantes de résultats figurant dans [18].

Résultat R_1. — Un anneau $\mathfrak{O}$ noethérien est intégralement clos dans son anneau complet des fractions $\overline{\mathfrak{O}}$ si, et seulement si :

(H'_1) : Pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$, de rang 1, de $\mathfrak{O}$, contenant un élément non diviseur de zéro, $\mathfrak{O}_\mathfrak{p}$ est un anneau local régulier de dimension 1.

(H'_2) : a étant un élément de $\mathfrak{O}$, qui n'est pas un diviseur de zéro, (a) n'a pas d'idéaux premiers essentiels immergés (*cf.* II, 2).

Résultat R_2. — Soit un anneau noethérien $\mathfrak{O}$. Supposons que pour chaque idéal premier $\mathfrak{p}$, de rang 1, de $\mathfrak{O}$, contenant un élément non diviseur de zéro, $\mathfrak{O}_\mathfrak{p}$ est intégralement clos. Si un idéal principal (a), a n'étant pas diviseur de zéro dans $\mathfrak{O}$, a un idéal premier essentiel immergé $\mathfrak{q}$, (b) admet un idéal premier essentiel immergé, b étant un élément non diviseur de zéro de $\mathfrak{q}$, ([18], p. 76, corollaire 4; *cf.* II, 9).

2. Rappel. — *a*. Soit $(0)=\bigcap_{i=1}^{r}\mathfrak{q}_i$, $\mathfrak{q}_i$ étant $\mathfrak{p}_i$-primaire $(i=1, \ldots, r)$. Pour qu'un élément de $\mathfrak{O}$ soit diviseur de zéro, il faut, et il suffit, qu'il appartienne à un $\mathfrak{p}_i$.

b. Si $\mathfrak{O}$ ne contient que des éléments inversibles ou diviseurs de zéro, il est confondu avec $\overline{\mathfrak{O}}$, donc intégralement clos. Dans la suite, nous supposerons toujours qu'il existe dans $\mathfrak{O}$ un élément non diviseur de zéro, et non inversible.

c. Supposons que l'élément a de $\mathfrak{O}$ ne soit pas diviseur de zéro, et soit $\frac{b}{a}=u$, un élément entier sur $\mathfrak{O}$, alors il existe l non diviseur de zéro dans $\mathfrak{O}$, tel que pour tout entier naturel p, $u^p l$ appartienne à $\mathfrak{O}$. (Si u est racine du polynome à coefficients dans A, $x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$, on peut prendre $l=a^{n-1}$.)

d. Réciproquement ([18], p. 67, corollaire 3) : Soit $\mathfrak{O}$ un anneau noethérien, sous-anneau d'un anneau $\mathfrak{O}'$ et soit b appartenant à $\mathfrak{O}'$. S'il existe un élément a de $\mathfrak{O}$, qui n'est pas diviseur de zéro dans $\mathfrak{O}'$, tel que ab^n appartienne à $\mathfrak{O}$, quel que soit l'entier naturel n, alors b est entier sur $\mathfrak{O}$.

3. *Soit un élément a non diviseur de zéro dans un anneau local noethérien* $\mathfrak{O}$, *d'idéal maximal* $\mathfrak{p}$, *de rang supérieur à* 1, *et soit b appartenant à* $(a):\mathfrak{p}$, *alors* $\frac{b}{a}$ *est entier sur* $\mathfrak{O}$. (Généralisation du lemme 1 de [18], p. 74.)

Soit h appartenant à $\mathfrak{p}$ et soit $c=\frac{b}{a}h$. D'après le choix de b, c appartient à $\mathfrak{O}$. Supposons que c n'appartienne pas à $\mathfrak{p}$. Alors $(a)=(bh)$. Ceci entraîne que b et h ne sont pas diviseurs de zéro. Il existe un idéal premier essentiel minimal $\mathfrak{p}'$ de (h) de rang 1 [le rang d'un idéal principal dans un anneau noethérien est au plus 1, et comme ici h n'est pas diviseur de zéro, il ne peut appartenir à aucun idéal premier essentiel de (o)]. Comme $\mathfrak{p}$ n'est pas de rang 1, $\mathfrak{p}'$ est différent de $\mathfrak{p}$. a appartient à $\mathfrak{p}'$ et, $\mathfrak{p}'$ étant de rang 1, est idéal premier essentiel de (a).

Soit $\mathfrak{q}'$ la composante $\mathfrak{p}'$-primaire de (a) (bien déterminée, puisque $\mathfrak{p}'$ est minimal); puisque $\mathfrak{p}$ est différent de $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{q}':\mathfrak{p}=\mathfrak{q}'$ et, par suite, b appartient à $\mathfrak{q}'$. Alors, $(a)=(bh)$ montre que

$$\mathfrak{q}'\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}'}=\mathfrak{q}'\mathfrak{p}'\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}'},$$

ce qui est une contradiction du corollaire 1 de la proposition 1 du chapitre J-radical de [18], parce que $\mathfrak{p}'\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}'}$ est le J-radical de $\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}'}$. Nous voyons que c appartient à $\mathfrak{p}$ et de là que $\left(\frac{b}{a}\right)^n h$ appartient à $\mathfrak{p}$, pour tout entier naturel n. Comme on peut prendre h non diviseur de zéro dans $\mathfrak{O}$, donc dans $\overline{\mathfrak{O}}$, $\frac{b}{a}$ est entier sur $\mathfrak{O}$ (IV, 2, d).

4. *Soit un élément a non diviseur de zéro d'un anneau noethérien* $\mathfrak{O}$. *Si* (a) *a un idéal premier essentiel immergé, il existe b non nul, appartenant à* $\mathfrak{O}$, *tel que* $\frac{b}{a}$ *est entier sur* $\mathfrak{O}$, *et tel que* $\frac{b}{a}$ *n'appartient pas à* $\mathfrak{O}$. *Réciproquement, s'il existe un tel élément b, ou bien il existe un idéal premier essentiel* $\mathfrak{p}$ *de rang* 1 *de* (a), *tel que* $\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}}$ *n'est pas intégralement clos, ou bien* (a) *a un idéal premier essentiel immergé*. (Généralisation de [18], propos. 2, p. 75.)

Supposons que (a) ait un idéal premier essentiel immergé $\mathfrak{q}$. Formons l'anneau des fractions $\mathfrak{O}_{\mathfrak{q}}$: on l'obtient ainsi : on fait d'abord l'homomorphisme

$$\sigma:\quad \mathfrak{O}\rightarrow\mathfrak{O}'=\frac{\mathfrak{O}}{\mathfrak{n}},$$

$\mathfrak{n}$ étant l'intersection des composantes primaires de (o) contenues dans $\mathfrak{q}$. Soit $\mathfrak{q}'=\frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{n}}$. Ensuite, on prend l'anneau ordinaire des fractions $\mathfrak{O}'_{\mathfrak{q}'}$. C'est cet anneau qu'on appelle aussi $\mathfrak{O}_{\mathfrak{q}}$. Remarquons que $\mathfrak{q}$ est de rang supérieur à 1, car il ne peut être de rang 1, (a) ayant alors un idéal premier essentiel de rang, o ce qui ne peut être (IV, 2, a) : donc $\mathfrak{q}\mathfrak{O}\mathfrak{q}$ noté aussi $\mathfrak{q}'\mathfrak{O}\mathfrak{q}'$, est de rang supérieur à 1. Il existe b'' appartenant à $\mathfrak{O}'\mathfrak{q}'$, et à $a'\mathfrak{O}\mathfrak{q}' : \mathfrak{q}'\mathfrak{O}'\mathfrak{q}'$ et n'appartenant pas à $a'\mathfrak{O}'\mathfrak{q}'$, a' étant la classe de a dans $\mathfrak{O}'$. a' n'est pas diviseur de zéro dans $\mathfrak{O}'$, car, autrement il existerait λ n'appartenant pas à $\mathfrak{n}$, tel que $a\lambda$ appartienne à $\mathfrak{n}$; avec les notations de (IV, 2, a) λ n'appartient pas, par exemple, à $\mathfrak{q}_1$ et, par suite, a appartiendrait à $\mathfrak{p}_1$, ce qui n'est pas (IV, 2, a). D'après le paragraphe (IV, 3), $\frac{b''}{a'}$ est entier sur $\mathfrak{O}'\mathfrak{q}'$, et n'appartient pas à $\mathfrak{O}'\mathfrak{q}'$

$$\left(\frac{b''}{a'}\right)^n - \frac{c'_1}{s'_1}\left(\frac{b''}{a'}\right)^{n-1} - \ldots - \frac{c'_n}{s'_n} = 0,$$
$$s'_i \in S' = \mathfrak{O}' - \mathfrak{q}', \qquad c'_1 \in \mathfrak{O}' \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

On peut supposer

$$b'' = \frac{c'}{s'}, \qquad c' \in \mathfrak{O}', \qquad s' \in S'.$$

Posons

$$b'_1 = s's'_1 \ldots s'_n c',$$

$\frac{b'_1}{a'}$ est entier sur $\mathfrak{O}'$. Donc, pour tout entier naturel p, $\left(\frac{b'_1}{a'}\right)^p l'$ appartient à $\mathfrak{O}'$, pour un l' qu'on peut prendre égal à a'^{n-1} (IV, 2, C). Si donc, b_1 et l sont des représentants dans $\mathfrak{O}$ de b', l', on peut écrire

$$b_1^p = a^p c_p + n_p, \qquad c_p \in \mathfrak{O}, \qquad n_p \in \mathfrak{n}.$$

Soient, par numération convenable, $\mathfrak{q}_{i+1}, \ldots, \mathfrak{q}_r$, les idéaux primaires de (o) non compris dans $\mathfrak{q}$, donc rencontrant $S = \mathfrak{O} - \mathfrak{q}$; soit m_j un élément de

$$\mathfrak{q}_j \cap S \quad (j = i+1, \ldots, r) \qquad \text{et} \qquad m = \prod_{j=i+1}^{r} m_j.$$

mn est nul pour tout $n \in \mathfrak{n}$, m n'étant pas nul, puisque S est multiplicativement fermé, et ne contient pas zéro. Donc,

$$(mb_1)^p\, l = a^p d_p, \qquad d_p \in \mathfrak{O}.$$

Comme on peut prendre $l = a^{n-1}$, non diviseur dans $\mathfrak{O}$ et dans $\overline{\mathfrak{O}}$, $\frac{mb_1}{a}$ est entier sur $\mathfrak{O}$ (IV, 2, d). Supposons que $\frac{mb_1}{a}$ appartienne à $\mathfrak{O}$, alors $\frac{m'b'_1}{a'}$ appartient à $\mathfrak{O}'$, m' appartient à S', $\frac{b'_1}{a'}$ appartiendrait à $\mathfrak{O}'\mathfrak{q}'$, et aussi $\frac{b''}{a'}$, ce qui n'est pas. Il suffit, alors, de prendre $b = mb_1$.

Pour la deuxième partie du théorème, $\frac{b}{a}$ est entier sur $\mathfrak{O}$ et n'appartient pas à $\mathfrak{O}$. Soient $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_k$, les idéaux premiers essentiels de (a). Ils sont tous minimaux par hypothèse, donc de rang 1.

Soit $(a) = A_1 \cap \ldots \cap A_h$, A_i étant $\mathfrak{a}_i$-primaire ($i = 1, \ldots, h$). Puisque $\frac{b}{a}$ est entier sur $\mathfrak{O}$, $\frac{b'}{a'}$ est entier sur $\mathfrak{O}\,\mathfrak{a}_i$ [$\mathfrak{n}_i$ étant l'intersection des idéaux primaires de (o) contenu dans $\mathfrak{a}_i$, x' désigne la classe de x modulo $\mathfrak{n}_i$].

$b'\mathfrak{O}\,\mathfrak{a}_i$ est contenu dans $a'\mathfrak{O}\,\mathfrak{a} = \Lambda'_i\,\mathfrak{O}\,\mathfrak{a}_i$ et, par suite, b' appartient à $\Lambda'_i\,\mathfrak{O}\,\mathfrak{a}_i \cap \mathfrak{O}' = \Lambda'_i$. Donc, b appartient à $(\Lambda_i, \mathfrak{n}_i) = \Lambda_i$, et ce pour $i = 1, \ldots, h$. Donc b appartient à (a). Il y a contradiction.

5. Si $\mathfrak{O}$ est intégralement clos dans $\overline{\mathfrak{O}}$, et si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de rang 1, contenant un élément non diviseur de zéro, $\mathfrak{O}\,\mathfrak{p}$ est un anneau local régulier de dimension 1 [19].

6. La condition (H'_2) est nécessaire d'après la première partie du lemme du paragraphe (IV, 4).

La condition (H'_1) est nécessaire d'après (IV, 5).

Les conditions (H'_1) et (H'_2) sont suffisantes d'après la deuxième partie du lemme du paragraphe (IV, 4).

La proposition R_1 est donc établie (IV, 1).

7. Démonstration de la proposition R_2. — Soit b un élément non diviseur de zéro, autre que a, appartenant à $\mathfrak{q}$. Considérons $\mathfrak{O}'\mathfrak{q}' = \mathfrak{O}\,\mathfrak{q}$. Soit d' appartenant à $a'\mathfrak{O}'\mathfrak{q}' : \mathfrak{q}'\mathfrak{O}'\mathfrak{q}'$ et n'appartenant pas à $a'\mathfrak{O}'\mathfrak{q}'$; $\frac{d'}{a'}$ n'appartient pas à $\mathfrak{O}'\mathfrak{q}'$ et est entier sur $\mathfrak{O}'\mathfrak{q}'$ (IV, 3) [remarquer en passant que a' et b' ne sont pas diviseurs de zéro dans $\mathfrak{O}'$, démonstration déjà faite en (IV, 4)].

Soit $c' = \frac{d'}{a'}b'$; c' appartient à $\mathfrak{O}'\mathfrak{q}'$.

$\frac{d'}{a'} = \frac{c'}{b'}$, montre que $\frac{c'}{b'}$ est entier sur $\mathfrak{O}'\mathfrak{q}'$ et qu'il n'appartient pas à $\mathfrak{O}'\mathfrak{q}'$. Alors, un raisonnement déjà fait à la première partie du paragraphe (IV, 4) montre qu'il existe un élément $\frac{e}{b}$, n'appartenant pas à $\mathfrak{O}$ et entier sur $\mathfrak{O}$ $(e \in \mathfrak{O})$. D'après le théorème du paragraphe (IV, 4), (b) admet un idéal premier essentiel immergé.

8. Nous sommes maintenant en mesure d'aborder le problème qui fait l'objet de cette quatrième partie.

A est ici un anneau avec diviseurs de zéro, noethérien intégralement clos, dans son anneau complet des fractions et de dimension supérieur ou égal à 1.

A vérifie, de plus, les hypothèses suivantes :

1° Les idéaux premiers essentiels dc (o) sont tous minimaux;

2° Appelons *idéal utile*, un idéal premier essentiel de (o), contenu dans un idéal premier de rang 1 de A. Alors, si η est un idéal utile, $\frac{A}{\eta}$ est intégralement clos. Soit B un suranneau de A, commutatif, dont l'élément unité est celui de A et soit θ un élément de B, racine d'un polynome unitaire $\varphi(x)$, à coefficients dans A, θ n'étant racine d'aucun polynome de $A[x]$ de degré inférieur à celui de $\varphi(x)$, noté n. On cherche une condition nécessaire et suffisante pour que $A[\theta]$, noté aussi $A^\star$, soit intégralement clos.

9. Tout idéal premier de rang 1 de $A^\star$ a pour restriction dans A un idéal premier de rang 1. — En effet, soit un idéal premier $\mathfrak{p}^\star$, de rang 1, de $A^\star$, $\mathfrak{p}^\star \cap A = \mathfrak{p}$ est un idéal premier de A de rang supérieur ou égal à 1. $\mathfrak{p}$ contient donc un élément a non diviseur de zéro, qui est non diviseur de zéro dans $A^\star$ (utiliser le fait que $A^\star$ est un A-module libre). $aA^\star$ admet $\mathfrak{p}^\star$ comme idéal premier essentiel, donc $aA^\star : \mathfrak{p}^\star$ comprend effectivement $aA^\star$: il existe

$$b^\star = b_0 + \ldots + b_{n-1}\theta^{n-1}, \qquad \text{avec} \quad b_i \in A \qquad (i = 0, \ldots, n-1),$$

et avec un b_k pour $0 \leqq k \leqq n-1$, qui n'appartient pas à aA, tel que $b^\star p^\star$ appartient à $aA^\star$, pour tout $p^\star$ appartenant à $\mathfrak{p}^\star$. En particulier, $b^\star p$ appartient à $aA^\star$, pour tout p appartenant à $\mathfrak{p}$ et $b_k p$ appartient à aA pour tout p appartenant à $\mathfrak{p}$. Ceci entraîne que $\mathfrak{p}$ est compris dans un idéal premier essentiel de aA et, à cause de (H'_2), que $\mathfrak{p}$ est de rang 1.

10. Tout idéal utile de $A^\star$ a pour restriction un idéal utile de A. — Soit, en effet, $\mathfrak{n}^\star$ un idéal utile de $A^\star$, compris donc dans l'idéal premier de rang 1, $\mathfrak{p}$. L'idéal $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^\star \cap A$ est premier de rang 1 (IV, 9) contenant $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}^\star \cap A$, nécessairement de rang 0. Ainsi, $\mathfrak{n}$ est un idéal utile de A. La réciproque résultera de la démonstration qui suit (IV, 12).

11. Soit $\mathfrak{n}$ un idéal utile de A.

Posons $S = A - \mathfrak{n}$.

Considérons $A^\star_S$. $A^\star_S$ s'obtiendra en faisant d'abord l'homomorphie $\sigma : A^\star \to \frac{A^\star}{\mathfrak{n}'}$, $\mathfrak{n}'$ étant égal à $\mathfrak{n}A^\star$ [remarquer que $\mathfrak{n}$ est la composante primaire de (0) relative à $\mathfrak{n}$, dans A], puis en prenant les fractions au sens ordinaire par $\sigma(S)$

$$A^\star_S = \sigma(A^\star)_{\sigma(S)} = \left(\frac{A}{\mathfrak{n}}[\theta^\star]\right)_{\sigma(S)} = A_S[\theta^\star],$$

où $\theta^\star$ est racine de $\varphi_\mathfrak{n}(x)$ déduit de $\varphi(x)$ par passage aux classes modulo $\mathfrak{n}$ des coefficients, $\theta^\star$ n'étant racine d'aucun polynome de $\frac{A}{\mathfrak{n}}[x]$ de degré inférieur. A_S est le corps des fractions de $\frac{A}{\mathfrak{n}}$. Les idéaux primaires de $A^\star$ dont l'intersection avec A est $\mathfrak{n}$, sont en correspondance biunivoque avec les idéaux primaires de (0) dans $A_S[\theta^\star]$. Ils sont donnés par la décomposition dans $A_S[x]$ de $\varphi_\mathfrak{n}(x)$ (I, 1). Soit

$$\varphi_\mathfrak{n}(x) = \prod_{i=1}^{r_\mathfrak{n}} f_i^{\rho_i}(x);$$

puisque $\frac{A}{\mathfrak{n}}$ est intégralement clos par hypothèse, les $f_i(x)$ sont dans $\frac{A}{\mathfrak{n}}[x]$. Les $r_{\mathfrak{n}}$ idéaux premiers dont l'intersection avec A est $\mathfrak{n}$, sont engendrés respectivement par $f'_i(\theta)$ et $\mathfrak{n}$ ($i = 1, \ldots, r_{\mathfrak{n}}$, $f'_i(x)$ étant un polynome relevant dans $A[x]$ le polynome $f_i(x)$ de $\frac{A}{\mathfrak{n}}[x]$.

12. Voyons maintenant comment sont obtenus les idéaux premiers de $A^\star$ de rang 1, ayant l'idéal $\mathfrak{p}$ pour restriction à A. Appelons $\mathfrak{n}$ l'idéal premier de (0) contenu dans $\mathfrak{p}$. $\mathfrak{n}$ est la composante primaire de (0) relative à $\mathfrak{n}$. Les idéaux de rang 1, premiers, dont l'intersection avec A est $\mathfrak{p}$, sont en correspondance biunivoque avec les idéaux premiers de $A^\star_S$, $S = A - \mathfrak{p}$, dont l'intersection avec A_S est $\mathfrak{p}_S$, sont donnés par la décomposition de $\varphi_{\mathfrak{n}}(x)$ dans $\frac{A_S}{\mathfrak{p}_S}[x]$, donc par les décompositions de $f_i(x)$ dans $\frac{A_S}{\mathfrak{p}_S}[x]$.

On trouvera donc toujours un idéal premier de rang 1 de $A^\star$, contenant l'idéal premier $\mathfrak{n}^\star$, engendré par $f'_i(\theta)$ et $\mathfrak{n}$ dans $A^\star$, dont l'intersection avec A est $\mathfrak{n}$:

Tout idéal premier de $A^\star$, dont la restriction à A est un idéal utile de A, est un idéal utile de $A^\star$.

13. Supposons $A^\star$ intégralement clos. L'idéal premier $\mathfrak{n}^\star$ de $A^\star$, engendré par $f'_i(\theta)$ et $\mathfrak{n}$, idéal utile de A, est un idéal utile de $A^\star$: la composante primaire de (0) relative à $\mathfrak{n}^\star$ est $\mathfrak{n}^\star$ lui-même. Il n'y a donc pas d'idéaux $\mathfrak{n}^\star$-primaires distincts de $\mathfrak{n}^\star$ dans $A^\star$ et ceci a lieu si, et seulement si, $p_i = 1$ (définition de p_i en IV, 11). Par ailleurs, $\mathfrak{p}^\star$ étant un idéal premier de $A^\star$, dont l'intersection avec A est l'idéal premier $\mathfrak{p}$ de rang 1, contenant $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}^\star$ est un idéal de rang 1, qui ne doit contenir qu'un seul idéal premier essentiel de (0), dont l'intersection avec A est obligatoirement $\mathfrak{n}$.

Ceci a lieu si, et seulement si, en posant $S = A - \mathfrak{p}$, $\bar{f}_i^{(S)}$ désignant le polynome déduit de $f_i(x)$ par passage aux classes des coefficients dans $\frac{A_S}{\mathfrak{p}_S}$, $\bar{f}_i^{(S)}$ et $\bar{f}_j^{(S)}$ n'ont pas de facteurs en commun pour tout $i, j (i \neq j)$.

14. Soit, enfin, $\mathfrak{p}^\star$ un idéal premier de $A^\star$ de rang 1, contenant un seul idéal premier essentiel de (0), $\mathfrak{n}^\star$, qui est aussi la composante primaire de (0) relative à $\mathfrak{n}^\star$ lui-même. Posons $S^\star = A^\star - \mathfrak{p}^\star$, et considérons $A^\star_{S^\star}$;

$$A^\star_{S^\star} = \left(\frac{A^\star}{\mathfrak{n}^\star}\right)_{\frac{S^\star}{\mathfrak{n}^\star}}.$$

Or, $\frac{A^\star}{\mathfrak{n}^\star} = \frac{A}{\mathfrak{n}}[\theta^\star]$, le polynome caractéristique de $\theta^\star$ sur $\frac{A}{\mathfrak{n}}$ étant $f_i(x)$, $\mathfrak{n}^\star$ étant engendré par $f_i'(\theta)$ et $\mathfrak{n}$. On peut écrire

$$\left(\frac{A}{\mathfrak{n}}[\theta^\star]\right)_{\frac{S^\star}{\mathfrak{n}^\star}} = \left(\left[\frac{A}{\mathfrak{n}}[\theta^\star]\right]_{\frac{S}{\mathfrak{n}}}\right)_{\frac{S^\star}{\mathfrak{n}^\star}} = (A_S[\theta^\star])_{\frac{S^\star}{\mathfrak{n}^\star}}$$

(on pose $S = A - \mathfrak{p}$, avec $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^\star \cap A$).

Soit $\mathfrak{p}_S^\star$ l'idéal $\frac{\mathfrak{p}^\star}{\mathfrak{n}^\star} A_S[\theta^\star]$ et soit

$$S_S^\star = A_S[\theta^\star] - \mathfrak{p}_S^\star.$$

Comme $S_S^\star$ contient $\frac{S^\star}{\mathfrak{n}^\star}$, on peut écrire

$$(A_S[\theta^\star])_{S_S^\star} = \left[(A_S[\theta^\star])_{\frac{S^\star}{\mathfrak{n}^\star}}\right]_{S_S^\star} = (A^\star_{S^\star})_{S_S^\star}.$$

Si $A^\star$ est supposé intégralement clos, $A^\star_{S^\star}$ l'est d'après la condition (H_1') et, par suite, aussi $(A_S[\theta^\star])_{S_S^\star}$. Comme ceci a lieu pour tous les idéaux premiers $\mathfrak{p}^\star$ de $A^\star$, contenant $\mathfrak{n}^\star$, dont l'intersection avec A est $\mathfrak{p}$, on peut voir (II, 2, remarque) que $A_S[\theta^\star]$ est intégralement clos.

Donc, pour que $A^\star$ soit intégralement clos, il est nécessaire que $\mathfrak{p}$ étant un idéal premier de rang 1 de A quelconque, dont on appelle $\mathfrak{n}$ l'idéal utile, et S étant égal à $A - \mathfrak{p}$, $A_S[x]/(f_i(x))$ $(i = 1, \ldots, r_{\mathfrak{n}})$ soit intégralement clos.

Si cette condition est réalisée, la condition (H_1') est réalisée dans $A^\star$.

Si la condition (H_1') est réalisée dans $A^\star$, un raisonnement, utilisant R_2, analogue à celui du paragraphe (II, 8) montre que la condition (H_2') l'est aussi.

15. On peut donc énoncer :

Pour que $A[\theta]$ soit intégralement clos, sous les hypothèses énoncées au paragraphe (IV, 8) il faut, et il suffit, que les conditions C_1, C_2, C_3 suivantes soit simultanément réalisées :

C_1 : $\mathfrak{n}$ étant un idéal utile quelconque,

$$\varphi_{\mathfrak{n}}(x) = \prod_{i=1}^{r_{\mathfrak{n}}} f_i(x),$$

$f_i(x)$ appartenant à $\frac{A}{\mathfrak{n}}[x]$, et étant irréductible dans $\frac{A}{\mathfrak{n}}[x]$ $(i = 1, \ldots, r_{\mathfrak{n}})$.

C_2 : Si $\bar{f}_i^{(S)}(x)$ désigne ce que devient $f_i(x)$ modulo $\mathfrak{p}_S$, $S = A - \mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}$ étant un idéal premier quelconque de rang 1 de A, dont on note $\mathfrak{n}$ l'idéal utile; $\bar{f}_i^{(S)}(x)$ et $\bar{f}_j^{(S)}(x)$ n'ont pas de facteur commun dans $\frac{A_S}{\mathfrak{p}_S}[x]$, pour tout i et j variant de 1 à $r_{\mathfrak{n}}(i \neq j)$.

C_3 : Si $\bar{f}_i^{(S)}(x) = \prod_{k=1}^{h} \bar{g}_{ik}^{\alpha_{ik}}(x)$ est la décomposition de $\bar{f}_i^{(S)}(x)$ en facteurs premiers dans $\frac{A_S}{\mathfrak{p}_S}[x]$ et $\bar{g}_{ik}(x)$ se relevant en polynome $g_{ik}(x)$, de même degré que $\bar{g}_{ik}(x)$, dans $A_S[x]$, le reste de la division de $f_i(x)$ par un $g_{ik}(x)$ relatif à un α_{ik} supérieur à 1, n'a pas tous ses coefficients dans $\mathfrak{p}_S^2$.

CHAPITRE II.

Demi-groupes noethériens.
Caractérisations des demi-groupes noethériens intégralement clos.
Extensions entières.

Introduction.

Dans ce chapitre, nous appellerons demi-groupe noethérien, un demi-groupe D abélien, à élément unité et vérifiant la condition de chaîne ascendante pour les idéaux. Le but de ce chapitre est d'utiliser des méthodes de théorie des anneaux noethériens (anneaux de fractions, théorème d'intersection de Krull, décomposition en idéaux primaires, etc.) pour obtenir des théorèmes sur le rang des idéaux de D et surtout des caractérisations B′ et C′, analogues respectivement aux caractérisations B et C dont il est question dans l'introduction de cette thèse. Une application de la caractérisation B′ est donnée. Rappelons que la décomposition en idéaux primaires est valable dans D [23].

I. — Préliminaire I : Demi-groupe généralisé des fractions, selon un sous-demi-groupe S ne contenant pas zéro d'un demi-groupe abélien D.

1. Rappel. — Soit D un demi-groupe abélien. L'opération du demi-groupe fait correspondre à $a \in D$, $b \in D$, l'élément $ab = ba$ de D, appelé produit de a par b. Cette opération sera appelée multiplication.

Soit S un sous-demi-groupe de D ne contenant que des éléments simplifiables. Considérons dans le demi-groupe $\mathcal{D}$ des couples (a, s), $a \in D$, $s \in S$, avec la loi de composition

$$(a, s)(a', s') = (aa', ss'), \qquad a' \in D, \qquad s' \in S,$$

la relation d'équivalence R_S régulière pour cette loi

$$a, a' \in D; \qquad s, s' \in S; \qquad (a, s) R_S (a', s') \rightleftharpoons sa' = s'a.$$

Notons $\frac{a}{s}$ la classe contenant (a, s). Le produit des deux classes $\frac{a}{s}$, $\frac{a'}{s'}$, noté $\frac{a}{s}\frac{a'}{s'}$

est la classe contenant (aa', ss') c'est-à-dire $\frac{aa'}{ss'}\cdot$ L'ensemble de ces classes avec l'opération que nous venons de définir est un demi-groupe noté D_S : on a $D_S = \frac{\mathcal{D}}{R_S}\cdot$ Si l'on identifie $\frac{sa}{s}$ avec a, D_S contient D ([4]).

Remarque. — D_S est le demi-groupe des fractions (au sens ordinaire) de D selon S. Si S est le sous-demi-groupe des éléments simplifiables de D, D_S est appelé le demi-groupe complet des fractions de D.

2. Proposition 1. — *Il y a une correspondance biunivoque entre les idéaux premiers (respectivement primaires) de* D *ne rencontrant pas* S *et les idéaux premiers (respectivement primaires) de* D_S. *En outre si* D *est noethérien,* D_S *l'est.*

Nous ferons la démonstration dans le cas de la correspondance entre idéaux premiers, la démonstration étant analogue dans le cas des idéaux primaires.

Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de D ne rencontrant pas S; $\mathfrak{p}_S$ désigne l'idéal $\mathfrak{p}D_S$ de D_S, formé de toutes les fractions $\frac{p}{s}$, $p \in \mathfrak{p}$, $s \in S$. L'idéal $\mathfrak{p}_S$ est premier, car

$$\frac{a}{s}\,\frac{a'}{s'} \in \mathfrak{p}_S, \qquad \frac{a}{s} \notin \mathfrak{p}_S \quad (\text{donc } a \notin \mathfrak{p}),$$

entraîne

$$\frac{aa'}{ss'} = \frac{p}{s''}, \qquad p \in \mathfrak{p}, \qquad s'' \in S \qquad \text{et} \qquad aa's'' = pss' \in \mathfrak{p}.$$

Comme as'' n'appartient pas à $\mathfrak{p}$, on en déduit, $\mathfrak{p}$ étant premier,

$$a' \in \mathfrak{p} \qquad \text{et} \qquad \frac{a'}{s'} \in \mathfrak{p}_S.$$

$\mathfrak{p}_S \cap D = \mathfrak{p}$: en effet,

$$\frac{p}{s} = \lambda, \quad \lambda \in D \qquad \text{entraîne} \quad s\lambda = p, \quad \lambda \in \mathfrak{p}.$$

Soit $\bar{\mathfrak{p}}$ un idéal premier de D_S.

Posons $\bar{\mathfrak{p}} \cap D = \mathfrak{p}$. $\mathfrak{p}$ est premier et ne rencontre pas S, puisque $\mathfrak{p}D_S$ est contenue dans $\bar{\mathfrak{p}}$, supposé propre, c'est-à-dire distinct de D_S.

Montrons que $\mathfrak{p}D_S = \bar{\mathfrak{p}}$. Soit

$$\bar{p} \in \bar{\mathfrak{p}}, \qquad \bar{p} = \frac{a}{s}, \qquad a \in D, \qquad s \in S.$$

On a $s\bar{p} = a$ et a appartient à $\bar{\mathfrak{p}} \cap D = \mathfrak{p}$.

Enfin, si $\bar{\mathfrak{r}}$ est un idéal de D_S, $\mathfrak{r} = \bar{\mathfrak{r}} \cap D$ est un idéal de D et $\bar{\mathfrak{r}} = \mathfrak{r}D_S$, car $\bar{i} \in \bar{\mathfrak{r}}$ s'écrit

$$\bar{i} = \frac{i}{s}, \qquad i \in D, \qquad s \in S \qquad \text{et} \qquad s\bar{i} = i,$$

([4]) Pour plus de détails, on pourra se reporter à [7], p. 266 et suiv.

de sorte que i appartient à $\mathfrak{c} = \bar{\mathfrak{c}} \cap \mathrm{D}$. Il est alors évident que si D vérifie la condition de chaîne ascendante pour les idéaux, il en est de même de D_{S}.

3. Supposons maintenant que S contienne des éléments non simplifiables, sans toutefois contenir le zéro de D, s'il existe. Considérons la relation Σ définie dans D

$$x,\ y \in \mathrm{D}, \qquad x \Sigma y \rightleftharpoons \exists\, s,\ s \in \mathrm{S}, \qquad \text{tel que} \quad sx = sy.$$

C'est bien une relation d'équivalence ; vérifions, par exemple, la transitivité

$$x \Sigma y \rightleftharpoons \exists\, s,\ s \in \mathrm{S}, \qquad \text{tel que} \quad sx = sy,$$
$$y \Sigma z \rightleftharpoons \exists\, s',\ s' \in \mathrm{S}, \qquad \text{tel que} \quad s'x = s'y,$$

d'où

$$ss'x = ss'y = ss'z \quad \text{et} \quad x \Sigma z.$$

Σ est régulière pour la multiplication, car

$$x \Sigma y, \quad \forall z \in \mathrm{D} \qquad \text{entraîne} \quad szx = szy, \cdot \text{ donc } zx \Sigma zy.$$

Notons $\bar{x}$ la classe de x; appelons $\bar{x}.\bar{y}$, produit des classes $\bar{x}$ et $\bar{y}$, la classe contenant xy. L'ensemble $\bar{\mathrm{D}}$ des classes d'équivalences, muni de cette loi de composition, est un demi-groupe $\bar{\mathrm{D}} = \mathrm{D}/\Sigma$.

Remarque 1. — Soit $\bar{\mathrm{S}}$ le sous-demi-groupe de $\bar{\mathrm{D}}$ formé par les classes des éléments de S, $\bar{\mathrm{S}}$ est formé d'éléments simplifiables dans $\bar{\mathrm{D}}$.

En effet, soit $\bar{s}.\bar{a} = \bar{s}.\bar{b}$ et soient s, a, b des représentants de $\bar{s}$, $\bar{a}$, $\bar{b}$ respectivement; on a $sa \Sigma sb$. Il existe donc s' dans S, tel que $s'sa = s'sb$. Comme ss' appartient à S, on a $a \Sigma b$ et $\bar{a} = \bar{b}$.

Remarquons que si l'on admettait dans S le zéro de D, s'il existe, tous les éléments de D seraient congrus à zéro (noté o), car pour tout a, appartenant à D, $oa = oo$; $\bar{\mathrm{D}}$ se réduirait à la classe zéro.

Remarque 2. — Si a est simplifiable dans D, sa classe $\bar{a}$ l'est dans $\bar{\mathrm{D}}$.

En effet, $\bar{a}.\bar{x} = \bar{a}.\bar{y}$ entraîne qu'il existe un élément s de S, tel que $sax = say$, et, par suite, a étant simplifiable, $sx = sy$, c'est-à-dire $\bar{x} = \bar{y}$; $\bar{a}$ est simplifiable.

Proposition 2. — *Il y a une correspondance biunivoque entre les idéaux premiers (respectivement primaires) de* $\bar{\mathrm{D}}$ *ne rencontrant pas* $\bar{\mathrm{S}}$ *et les idéaux premiers (respectivement primaires) de* D *ne rencontrant pas* S. *Si* D *est noethérien,* $\bar{\mathrm{D}}$ *l'est.*

Nous ne ferons la démonstration que pour la correspondance entre idéaux premiers :

Premier point. — A un idéal premier $\mathfrak{p}$ de D de rencontrant pas S, correspond un idéal premier $\bar{\mathfrak{p}}$ de $\bar{\mathrm{D}}$ ne rencontrant pas $\bar{\mathrm{S}}$: soit $\bar{\mathfrak{p}}$ l'ensemble des classes des éléments p appartenant à $\mathfrak{p}$; $\bar{\mathfrak{p}}$ est un idéal de $\bar{\mathrm{D}}$ et $\bar{\mathfrak{p}}$ ne rencontre pas $\bar{\mathrm{S}}$, car $\bar{s} \in \bar{\mathfrak{p}}$ entraîne qu'il existe un élément s' appartenant à S et un élément p appartenant à $\mathfrak{p}$, tels que, s étant un représentant dans S de $\bar{s}$, $ss' = s'p$, ce qui est impossible, $\mathfrak{p}$ ne rencontrant pas S. Enfin, $\bar{\mathfrak{p}}$ est premier, car $\bar{a}.\bar{b} \in \bar{\mathfrak{p}}$, $\bar{a}$, $\bar{b} \in \bar{\mathrm{D}}$, $\bar{a} \notin \bar{\mathfrak{p}}$, entraîne $sab = sp$, $p \in \mathfrak{p}$, $s \in \mathrm{S}$. Donc sab appartient à $\mathfrak{p}$, et, puisque sa n'appartient pas à $\mathfrak{p}$, on déduit $b \in \mathfrak{p}$ et $\bar{b} \in \bar{\mathfrak{p}}$.

Deuxième point. — A tout idéal premier $\bar{\mathfrak{p}}$ de $\bar{\mathrm{D}}$ ne rencontrant pas $\bar{\mathrm{S}}$, correspond un idéal premier $\mathfrak{p}$ de D ne rencontrant pas S.

Désignons par $\mathfrak{p}$ l'ensemble de tous les éléments de D dont la classe est dans $\bar{\mathfrak{p}}$: c'est un idéal de D, car λp, $p \in \mathfrak{p}$, $\lambda \in \mathrm{D}$ appartient à $\mathfrak{p}$, puisque $\overline{\lambda p} = \bar{\lambda}.\bar{p} \in \bar{\mathfrak{p}}$. D'autre part, $\mathfrak{p}$ ne rencontre évidemment pas S. Enfin, $\bar{\mathfrak{p}}$ est premier, car $ab \in \mathfrak{p}$, a, $b \in \mathrm{D}$, $a \notin \mathfrak{p}$ entraîne $\bar{a}.\bar{b} \in \bar{\mathfrak{p}}$, $\bar{a} \notin \bar{\mathfrak{p}}$ et, par suite, $\bar{\mathfrak{p}}$ étant premier, $\bar{b} \in \bar{\mathfrak{p}}$, c'est-à-dire $b \in \mathfrak{p}$.

Remarquons que si $\bar{\mathfrak{p}}$ et $\bar{\mathfrak{q}}$ sont deux idéaux premiers de $\bar{\mathrm{D}}$ distincts et ne rencontrant pas $\bar{\mathrm{S}}$, les idéaux $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$ correspondants sont évidemment des idéaux premiers distincts et ne rencontrant pas S.

Troisième point. — Si $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$ sont des idéaux premicrs de D, distincts et ne rencontrant pas S, les idéaux $\bar{\mathfrak{p}}$ et $\bar{\mathfrak{q}}$ définis au premier point, sont distincts. En effet, supposons $\bar{\mathfrak{p}} = \bar{\mathfrak{q}}$, et soit q un élément de $\mathfrak{q}$ quelconque. Comme $\bar{q}$ appartient à $\bar{\mathfrak{p}} = \bar{\mathfrak{q}}$, il existe $p \in \mathfrak{p}$ et $s \in \mathrm{S}$, tels que $sp = sq$. On a donc $sq \in \mathfrak{p}$ et, puisque $s \notin \mathfrak{p}$, $q \in \mathfrak{p}$. Ainsi $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$ et de même $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$; $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$ ne peuvent être distincts.

Quatrième point. — Enfin, soit $\bar{\mathfrak{c}}$ un idéal de $\bar{\mathrm{D}}$, et soit $\mathfrak{c}$ l'ensemble des éléments de D dont la classe appartient à $\bar{\mathfrak{c}}$. Alors $\mathfrak{c}$ est un idéal de D. Si D est noethérien, $\mathfrak{c}$ est réunion d'un nombre fini d'idéaux principaux, donc aussi $\bar{\mathfrak{c}}$ et $\bar{\mathrm{D}}$ est noethérien.

4. $\bar{\mathrm{S}}$ n'ayant pas d'éléments non simplifiables (remarque 1, § 3), on peut former (§ 1) le demi-groupe (au sens ordinaire) des fractions de $\bar{\mathrm{D}}$ selon $\bar{\mathrm{S}}$ qu'on notera $\bar{\mathrm{D}}_{\bar{\mathrm{S}}}$ ou encore D_{S} : on appellera D_{S} *le demi-groupe généralisé des fractions de* D *selon* S.

Si S est le complémentaire d'un idéal premier $\mathfrak{p}$, D_{S} est alors noté aussi $\mathrm{D}\mathfrak{p}$.

Des propositions 1 et 2 on déduit alors la proposition suivante :

PROPOSITION 3. — *Il y a une correspondance biunivoque entre les idéaux premiers* (*respectivement primaires*) *de* D *ne rencontrant pas* S, *et les idéaux premiers* (*respectivement primaires*) *de* D_{S}.

En outre, D_{S} *est noethérien quand* D *l'est.*

Proposition 4. — *Soit* $\mathfrak{c}$ *un idéal de* D *et* $\mathfrak{c} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{q}_i$, *une décomposition normale de* $\mathfrak{c}$ *en idéaux primaires dans* D. *Soit, de façon générale,* $\mathfrak{b}$ *un idéal de* D, $\bar{\mathfrak{b}}$ *l'idéal correspondant de* $\bar{D}$, *on notera* $\mathfrak{b}\,D_S$ *l'idéal* $\bar{\mathfrak{b}}\,.\,\bar{D}_{\bar{S}}$. *On a alors*

$$\mathfrak{c}\,D_S = \bar{\mathfrak{c}}\,.\,\bar{D}_{\bar{S}} = \bigcap \mathfrak{q}_i D_S \qquad (\mathfrak{q}_i \cap S = \emptyset)$$

et ceci constitue une décomposition normale en idéaux primaires de $\mathfrak{c}\,D_S$ *dans* D_S.

En effet, soit $\mathfrak{h}$ l'idéal des éléments de D, dont la classe est dans $\bar{\mathfrak{c}}\,.\,\bar{D}_{\bar{S}} \cap \bar{D} = \bar{\mathfrak{h}}$.

Remarquons d'abord que si $\mathfrak{q}_i$, $\mathfrak{p}_i$-primaire ne rencontre pas S, il en est de même de $\mathfrak{p}_i$. Soit alors

$$\bar{h} = \frac{\bar{i}}{\bar{s}}, \qquad \bar{h} \in \bar{\mathfrak{h}}, \qquad \bar{s} \in \bar{S}, \qquad \bar{i} \in \bar{\mathfrak{c}}.$$

On a $\bar{h}\,.\,\bar{s} = \bar{i}$. Il existe donc $h \in \mathfrak{h}$, $i \in \mathfrak{c}$, $s \in S$ et $s' \in S$, tels que $s'sh = s'i$. On déduit de là que $\mathfrak{h}$ appartient à tous les $\mathfrak{q}_i$ ne rencontrant pas S. Supposons que la numérotation des $\mathfrak{q}_i$ est telle que pour $i = 1, \ldots, r$, $\mathfrak{q}_i$ rencontre S, et que pour $i = r+1, \ldots, n$, $\mathfrak{q}_i$ ne rencontre pas S. On a donc

$$\mathfrak{h} \subseteq \bigcap_{i=r+1}^{n} \mathfrak{q}_i.$$

Soit $l \in \bigcap_{i=r+1}^{n} \mathfrak{q}_i$, on peut trouver pour $j = 1, \ldots, r$, s_j dans $S \cap \mathfrak{q}_j$. Soit $s = \prod_{j=1}^{r} s_j$. On a

$$sl \in \mathfrak{c}, \qquad \text{donc} \quad \bar{s}\,\bar{l} \in \bar{\mathfrak{c}}$$

et $\bar{l}$ appartient à $\bar{\mathfrak{h}}$. Par suite,

$$\mathfrak{h} = \bigcap_{i=r+1}^{n} \mathfrak{q}_i.$$

On a alors

$$\mathfrak{h}\,D_S = \bar{\mathfrak{h}}\,.\,\bar{D}_{\bar{S}} = \mathfrak{c}\,D_S,$$

car d'une part, $\mathfrak{c}$ est contenu dans $\mathfrak{h}$, d'autre part, $\bar{\mathfrak{c}}\,.\,\bar{D}_{\bar{S}}$ contient $\bar{\mathfrak{h}}\,.\,\bar{D}_S$.

II. — Préliminaire II : La relation R'_n.

D possède un élément unité. On note (a) l'idéal engendré par l'élément a de D dans D.

1. Définition. — Soit un demi-groupe abélien D et $\mathfrak{n}$ un idéal propre de D. Considérons la relation $R'_{\mathfrak{n}}$ définie dans D,

$$a, b \in D, \; aR'_{\mathfrak{n}}b \rightleftarrows (a) \cup \mathfrak{n} = (b) \cup \mathfrak{n}. \tag{1}$$

C'est une relation d'équivalence.

Autre forme de la définition. — Remarquons que si a (respectivement b) appartient à $\mathfrak{n}$, b (respectivement a) appartient à $\mathfrak{n}$. D'ailleurs, $\mathfrak{n}$ forme une classe d'équivalenae modulo $R'_{\mathfrak{n}}$: car si i et j appartiennent à $\mathfrak{n}$, on a bien

$$(i) \cup \mathfrak{n} = (j) \cup \mathfrak{n} = \mathfrak{n}.$$

Si a n'appartient pas à $\mathfrak{n}$, il en est de même de b et (1) équivaut alors à $(a) = (b)$.

En résumé, (1) peut s'écrire aussi

$$a, b \in D, \; aR'_{\mathfrak{n}}b \rightleftarrows \begin{cases} (a) = (b) & \text{si} \quad a \notin \mathfrak{n}, \\ b \in \mathfrak{n} & \text{si} \quad a \in \mathfrak{n}. \end{cases} \tag{1'}$$

Il est facile de voir que $R'_{\mathfrak{n}}$ est régulière pour la multiplication. On peut parler, alors, du demi-groupe $D' = D/R'_{\mathfrak{n}}$. On peut remarquer que D' a un zéro qui n'est autre que $\mathfrak{n}$, car quel que soit $a' \in D'$, $a'\mathfrak{n} = \mathfrak{n}$.

2. Proposition 1. — *Il y a une correspondance biunivoque entre les idéaux de* D *contenant* $\mathfrak{n}$ *et ceux de* D'. *A des idéaux premiers (respectivement primaires) de* D *contenant* $\mathfrak{n}$, *correspondent des idéaux premiers (respectivement primaires) de* D'. *Si* D *est noethérien*, D' *l'est.*

Soit $\mathfrak{m}$ un idéal de D contenant $\mathfrak{n}$, l'ensemble des classes des éléments de $\mathfrak{m}$ forme un idéal $\mathfrak{m}'$ de D'. Réciproquement, soit $\mathfrak{m}_1$ l'ensemble des éléments de D dont une classe est dans $\mathfrak{m}'$: $\mathfrak{m}_1$ est un idéal de D, contenant $\mathfrak{n}$. Soit x appartenant à $\mathfrak{m}_1$, on a $xR'_{\mathfrak{n}}y$ pour un certain y appartenant à $\mathfrak{m}$, donc ou bien x appartient à $\mathfrak{n}$, donc à $\mathfrak{m}$, ou bien $(x) = (y)$, donc $x = \lambda y$, $\lambda \in D$ et, par suite, x appartient à $\mathfrak{m}$, puisque y appartient à $\mathfrak{m}$. De toutes façons, x appartient à $\mathfrak{m}$ et

$$\mathfrak{m}_1 \subseteq \mathfrak{m}, \qquad \text{donc} \quad \mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}.$$

D'ailleurs, si $\mathfrak{m}$ est premier, $\mathfrak{m}'$ l'est :

$$a'b' \in \mathfrak{m}', \qquad a' \notin \mathfrak{m}' \qquad \text{entraîne} \quad ab \in \mathfrak{m}, \qquad a \notin \mathfrak{m},$$

donc

$$b \in \mathfrak{m} \qquad \text{et} \qquad b' \in \mathfrak{m}',$$

a et b étant des représentants de a' et b' respectivement.

De même, si $\mathfrak{m}'$ est premier, $\mathfrak{m}$ l'est :

$$ab \in \mathfrak{m}, \qquad a \notin \mathfrak{m} \qquad \text{entraîne} \quad a'b' \in \mathfrak{m}', \qquad a' \notin \mathfrak{m}',$$

donc

$$b' \in \mathfrak{m}' \qquad \text{et} \qquad b \in \mathfrak{m}.$$

De même, on démontrerait que $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{m}'$ sont primaires en même temps.

Enfin, il est évident que, si D est noethérien, D' l'est aussi.

3. On démontrera facilement

1° si $\mathfrak{n}$ est premier, D' n'a pas de diviseurs de zéro [$a'b' = \mathfrak{n}$ entraîne a' (ou b') $= \mathfrak{n}$];

2° si $\mathfrak{n}$ est premier, et si a est un élément simplifiable de D, n'appartenant pas à $\mathfrak{n}$, sa classe a' est simplifiable dans D'.

III. — Préliminaire III : Nœud d'un demi-groupe noethérien D.

Définition 1. — On appelle *nœud* d'un demi-groupe noethérien D l'ensemble des éléments a, $a \in D$, tels qu'on ait $a = a\tau$ avec un élément τ de D non inversible.

C'est un idéal $\mathfrak{n}$ qui peut être l'ensemble vide. $\mathfrak{n}$ ne contient aucun élément simplifiable.

Définition 2. — D est dit de *nœud nul* si :

a. lorsque D a un zéro, $\mathfrak{n} = (0)$;

b. lorsque D n'a pas de zéro, $\mathfrak{n}$ est vide.

Définition 3. — On appelle *nœud d'un idéal* $\mathfrak{p}$ de D, noté $\mathfrak{n}(\mathfrak{p})$, l'ensemble des éléments a de D, tels qu'on ait $a = pa$, avec $p \in \mathfrak{p}$.

Proposition 1. — *Si* $\mathfrak{n}$ *est le nœud de* D, D *n'étant pas de nœud nul,* $D' = D/R'_{\mathfrak{n}}$ *est un demi-groupe de nœud nul.*

Supposons, en effet, qu'il existe $a' \in D'$, tel que $a' = a'\tau'$, τ' étant un élément non inversible de D', et supposons $a' \neq \mathfrak{n}$, $\mathfrak{n}$ étant, comme on le sait, le zéro de D' (préliminaire II).

Il existe alors des représentants $a \in a'$, $\tau \in \tau'$, dans D, τ n'étant pas inversible dans D, tels que $aR'_{\mathfrak{n}}a\tau$ avec $a \notin \mathfrak{n}$. On a alors $(a) = (a\tau)$, $a = \lambda\tau a$, $\lambda\tau$ n'étant pas inversible et, par suite, a appartient à $\mathfrak{n}$, contrairement à l'hypothèse.

Proposition 2. — *Si a est simplifiable dans* D, *la classe a' de a dans* D' *est simplifiable dans* D'.

De $a'x' = a'y'$, on déduit a, x, y étant des représentants de a', x', y' respectivement : $axR'_{\mathfrak{n}}ay$.

1° Si $a'x' \neq \mathfrak{n}$, alors $(ax) = (ay)$ et

$$ax = \lambda ay, \qquad ay = a\mu x;$$

donc

$$x = \lambda y, \qquad y = \mu x \qquad \text{et} \qquad (x) = (y),$$

c'est-à-dire $x' = y'$.

2° Si $a'x' = \mathfrak{n}$, alors $a'y' = \mathfrak{n}$, donc

$$ax = ax\tau \qquad \text{et} \qquad ay = ay\mu,$$

τ et μ n'étant pas inversibles. Puisque a est simplifiable, on déduit de là $x = x\tau$ et $y = y\mu$ et x, y appartiennent à $\mathfrak{n}$: $x' = y' = \mathfrak{n}$.

Proposition 3. — *$\mathfrak{p}$ étant un idéal de* D,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{p}^n = \mathfrak{n}(\mathfrak{p}).$$

Posons $\mathfrak{b} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{p}^n$. On a $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\mathfrak{p}$. En effet, soit $\mathfrak{b}\mathfrak{p} = \bigcap_{i=1}^{r} \mathfrak{q}_i$, une décomposition normale en idéaux primaires de $\mathfrak{b}\mathfrak{p}$. Si $\mathfrak{b}$ est différent de $\mathfrak{b}\mathfrak{p}$, il existe un des $\mathfrak{q}_i$, par exemple $\mathfrak{q}_1$, qui ne contient pas $\mathfrak{b}$. De $\mathfrak{b}\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}_1$ étant $\mathfrak{q}_1$-primaire, on déduit alors $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}_1$ et, par suite, il existe un nombre naturel τ, tel que

$$\mathfrak{p}^\tau \subseteq \mathfrak{p}_1^\tau \subseteq \mathfrak{q}_1.$$

Comme $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}^\tau$, on a $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{q}_1$, contrairement à l'hypothèse. On a donc $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\mathfrak{p}$. Soit alors $(\tau_1, \ldots, \tau_r)$ une base minimale de $\mathfrak{b}$: on a $\tau_i = p_{ij}\tau_j$, qu'on déduit de $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\mathfrak{p}$. Mais la base étant minimale, on ne peut avoir que $i = j$, c'est-à-dire $\tau_i = p_{ii}\tau_i$, $p_{ii} \in \mathfrak{p}$. Pour tout b appartenant à $\mathfrak{b}$, on aura donc $b = pb$, avec $p \in \mathfrak{p}$. Réciproquement, si b vérifie $b = pb$, $p \in \mathfrak{p}$, donc $b = p^n b$, quel que soit n, on a $b \in \mathfrak{b}$. On a donc bien $\mathfrak{b} = \mathfrak{n}(\mathfrak{p})$. En particulier, si $\mathfrak{p}$ est l'idéal maximal de D, ensemble des éléments non inversibles de D, $\mathfrak{n}(\mathfrak{p})$ est le nœud $\mathfrak{n}$ de D.

Proposition 4. — *Si $\mathfrak{q}$ est un idéal premier essentiel du nœud $\mathfrak{n}$ de* D, *$\mathfrak{q}$ ne contient aucun élément simplifiable de* D.

En effet. $\mathfrak{n} : \mathfrak{q}$ contient strictement $\mathfrak{n}$, puisque $\mathfrak{q}$ est un idéal premier essentiel de $\mathfrak{n}$ (même démonstration que dans le cas d'idéaux d'un anneau noethérien). Il existe donc y, $y \notin \mathfrak{n}$, tel que $y\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{n}$. Soit q un élément simplifiable de $\mathfrak{q}$, s'il en existe. On a $qy \in \mathfrak{n}$. Il existe donc un élément non inversible τ de D, tel que $qy = qy\tau$ et par suite, $y = y\tau$, puisque q est simplifiable. Mais alors y appartient à $\mathfrak{n}$, contrairement à l'hypothèse : aucun élément de $\mathfrak{q}$ ne peut être simplifiable.

Proposition 5. — *Si* D *est de nœud nul,* $\overline{\mathrm{D}} = \mathrm{D}/\Sigma$, *où* Σ *est l'équivalence définie au préliminaire* I, (§ 3), *associée à un sous-demi-groupe* S *de* D, *ne contenant pas zéro, est aussi de nœud nul.*

La démonstration est aisée.

IV. — Préliminaire IV : Énoncé d'un théorème.

THÉORÈME 1. — *Dans un demi-groupe noethérien* D, *il n'y a qu'un nombre fini d'idéaux* $\mathfrak{p}$*-primaires contenant un idéal* $\mathfrak{p}$*-primaire donné.*

Nous renvoyons pour la démonstration de ce théorème à un exposé de Lesieur ([12], exposé 11, p. 5), ou à Birkhoff ([4], p. 139).

V. — Rang d'un idéal dans un demi-groupe noethérien.

Définition 1. — Un idéal de D est dit régulier, s'il contient un élément simplifiable.

Définition 2. — Un idéal premier et régulier $\mathfrak{p}$ est dit premier régulier minimal, s'il n'y a pas d'idéal premier et régulier contenu strictement dans $\mathfrak{p}$.

THÉORÈME 1. — *Dans un demi-groupe noethérien* D, *tout idéal premier essentiel minimal* $\mathfrak{p}$ *d'un idéal* (a), *engendré par un élément simplifiable et non inversible* a *de* D, *est premier régulier minimal.*

On peut toujours supposer que $\mathfrak{p}$ est l'idéal maximal de D, en remplaçant, au besoin, D par $D\mathfrak{p}$ (préliminaire I).

Supposons que $\mathfrak{p}$ contienne un idéal premier régulier $\mathfrak{q}$ distinct de $\mathfrak{p}$: $\mathfrak{q}$ ne peut contenir a, car alors $\mathfrak{q}$ contiendrait un idéal premier essentiel de (a), et ceci contredirait le fait que $\mathfrak{p}$ est idéal premier essentiel minimal de (a).

Premier cas. — Supposons d'abord D de nœud nul. Soit $\mathfrak{q}^{(i)}$ la composante $\mathfrak{q}$-primaire bien déterminée de $\mathfrak{q}^i$.

Considérons

$$\mathfrak{a}_i = \mathfrak{q}^{(i)} \cup (a).$$

L'idéal (a) étant $\mathfrak{p}$-primaire (préliminaire I, propos. 4), et $\mathfrak{p}$ étant l'idéal maximal, $\mathfrak{a}_i$ est $\mathfrak{p}$-primaire.

Appliquons alors le théorème du préliminaire IV : il existe un entier naturel n, tel que pour $i \geqq n$, on ait $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{a}_n$.

On a donc

$$\mathfrak{q}^{(n)} \subseteq \mathfrak{q}^{(i)} \cup (a).$$

Soit $\tau_1, \ldots, \tau_r$ une base minimale de $\mathfrak{q}^{(n)}$. On ne peut avoir $\tau_j \in (a)$, car on aurait alors

$$\tau_j = \lambda_j a \qquad \text{et} \qquad a \notin \mathfrak{q},$$

ce qui entraînerait, puisque $\mathfrak{q}^{(n)}$ est $\mathfrak{q}$-primaire, $\lambda_j = \mu_j \tau_i$ pour un certain $i (1 \leqq i \leqq r)$. On a alors $\tau_j = \mu_j a \tau_i$, et ceci n'est possible qu'avec $j = i$, puisque la base est minimale : $\tau_j = \mu_j a \tau_j$; $\mu_j a$ étant non inversible, comme a, ceci entraîne, si D n'a pas de zéro, une impossibilité, puisque D a un nœud nul.

Si D a un zéro, ceci entraîne $\tau_j = 0$, et ceci est encore impossible, puisque la base est minimale.

On a donc $\mathfrak{q}^{(n)} \subseteq \mathfrak{q}^{(i)}$ et, par suite, $\mathfrak{q}^{(n)} = \mathfrak{q}^{(i)}$, pour tout $i \geqq n$. Soit alors b un élément simplifiable de l'idéal régulier $\mathfrak{q}$, on a $b^n \in \mathfrak{q}^n \subseteq \mathfrak{q}^{(n)}$. Appelons $\bar{b}$ la classe de b dans $\overline{\mathrm{D}} = \mathrm{D}/\Sigma$, Σ étant l'équivalence définie au paragraphe 3 du préliminaire I, associée au complément S de $\mathfrak{q}$, $\mathrm{S} = \mathrm{D} - \mathfrak{q}$. $\bar{b}^n$ est simplifiable dans $\mathrm{D}\mathfrak{q}$, puisque b^n l'est dans D (remarque 2, préliminaire I), et $\bar{b}^n$ appartient à tous les

$$\mathfrak{q}^{(i)}\,\mathrm{D}\mathfrak{q} = \mathfrak{q}^i\,\mathrm{D}\mathfrak{q} = (\mathfrak{q}\,\mathrm{D}\mathfrak{q})^i \quad \text{pour tout } i \geqq n$$

(pour la première égalité, se reporter au préliminaire I, propos. 4; la seconde se démontre facilement). Donc $\bar{b}^n$ appartient au nœud $\mathrm{D}\mathfrak{q}$, et ceci est impossible, puisque le nœud ne peut contenir d'élément simplifiable.

Deuxième cas. — Supposons maintenant que D ne soit pas de nœud nul.

Soit alors $\mathfrak{c}$ un idéal premier essentiel du nœud $\mathfrak{n}$. $\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{q} \cup \mathfrak{c}$ est un idéal premier, comme il est facile de le vérifier, évidemment régulier comme $\mathfrak{q}$.

Considérons $\mathrm{R}'_{\mathfrak{n}}$ et $\mathrm{D}' = \mathrm{D}/\mathrm{R}'_{\mathfrak{n}}$ (préliminaire II). Soient $\mathfrak{p}'$ et $\mathfrak{q}'_1$ les idéaux correspondant à $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}_1$: ils sont premiers (préliminaire II, propos. 1) et réguliers (préliminaire III, propos. 2). D' est noethérien comme D, mais de nœud nul (préliminaire III, propos. 1). $\mathfrak{p}'$ est d'ailleurs idéal premier essentiel minimal de (a'), a' étant la classe de a (préliminaire II, propos. 1).

D'après la première partie, on a donc

$$\mathfrak{p}' = \mathfrak{q}'_1 \qquad \text{et} \qquad a' \in \mathfrak{q}'_1, \qquad \text{c'est-à-dire} \quad a \in \mathfrak{q} \cup \mathfrak{c}.$$

Comme $\mathfrak{c}$ ne peut contenir d'éléments simplifiables (préliminaire III, propos. 4), on a alors : $a \in \mathfrak{q}$, contrairement à l'hypothèse.

Définition 3. — Soit D un demi-groupe noethérien, et $\mathfrak{p}$ un idéal premier de D.

Considérons les chaînes d'idéaux premiers $\mathfrak{p}_i$ de D ($\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2 \subset \ldots \subset \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}$), distincts. Toutes ces chaînes ont un nombre fini d'éléments. $\mathfrak{p}$ sera dit de rang r si, parmi toutes ces chaînes, il existe une chaîne de r éléments, et s'il n'existe aucune chaîne de $r + 1$ éléments.

Définition 3 *bis*. — On appelle rang d'un idéal quelconque $\mathfrak{c}$ de D, le plus petit des rangs des idéaux premiers essentiels de $\mathfrak{c}$.

THÉORÈME 1 *bis*. — *Si* D *est un semi-groupe noethérien, et a un élément non inversible de* D, *les idéaux premiers essentiels minimaux de l'idéal* (a), *engendre par a, sont de rang* 1.

THÉORÈME 2. — *Soit* D *un semi-groupe noethérien, et soit* $\mathfrak{a} = \bigcup_{i=1}^{n} (a_i)$ *un idéal de* D, *engendrés par n éléments* $a_1, \ldots, a_n$ *non inversibles. Alors, pour un idéal premier essentiel mininal* $\mathfrak{p}$ *de* $\mathfrak{a}$, *le rang de* $\mathfrak{p}$ *est au plus n.*

Pour $n = 1$ le théorème a été démontré (th. 1 *bis*).

Nous allons raisonner par récurrence sur n. Considérons $D\mathfrak{p}$ au lieu de D; nous pouvons supposer que $\mathfrak{p}$ est l'unique idéal maximal de D. Dans ce cas, $\mathfrak{a}$ est un idéal primaire appartenant à $\mathfrak{p}$. Soit

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 \supset \mathfrak{p}_2 \supset \ldots \supset \mathfrak{p}_s$$

une chaîne d'idéaux premiers distincts $\mathfrak{p}_i$, telle qu'il n'y a pas d'idéaux premiers entre $\mathfrak{p}_1$ et $\mathfrak{p}_2$. Nous pouvons supposer que a_1 n'est pas dans $\mathfrak{p}_2$. Alors, $\mathfrak{p}_2 \cup (a_1)$ est un idéal $\mathfrak{p}$-primaire. Il existe donc un nombre naturel t tel que

$$a_i^t \in \mathfrak{p}_2 \cup (a_1) \quad \text{pour chaque } i \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Considérons les a_i^t pour lesquels $a_i^t \in \mathfrak{p}_2$ et $a_i^t \notin (a_1)$. Ils engendrent un idéal $\mathfrak{a}'$ compris dans $\mathfrak{p}_2$. $\mathfrak{a}' \cup (a_1)$ est un idéal $\mathfrak{p}$-primaire, car il existe t', tel que

$$\mathfrak{p}^{t'} \subseteq \mathfrak{a} \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{p}^{nt't} \subseteq \mathfrak{a}^{nt} \subseteq \mathfrak{a}' \cup (a_1),$$

et $\mathfrak{p}^{ntt'}$ est $\mathfrak{p}$-primaire.

$\mathfrak{p}_2$ contient $\mathfrak{a}'$ donc un idéal premier essentiel $\mathfrak{p}'$ de $\mathfrak{a}'$; $\mathfrak{p}' \cup (a_1)$ contenant l'idéal $\mathfrak{p}$-primaire $\mathfrak{a}' \cup (a_1)$, est $\mathfrak{p}$-primaire.

Considérons le demi-groupe noethérien $\bar{D} = D/R'_{\mathfrak{p}'}$; les classes de tous les éléments de D n'appartenant pas à $\mathfrak{p}'$ sont des éléments simplifiables de $\bar{D}$ (préliminaire II, § 3, 2°) : ainsi, $\bar{a}_1$ classe de a_1, est simplifiable dans $\bar{D}$ et engendre, dans $\bar{D}$, un idéal $(\bar{a}_1)$ qui est $\bar{\mathfrak{p}}$-primaire (préliminaire II, propos. 1).

On déduit du théorème 1 que $\bar{\mathfrak{p}}$ ne contient pas d'idéal premier régulier distinct de lui-même.

Par suite, $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}_2$. Mais $\mathfrak{a}'$ est engendré au plus par $n - 1$ éléments; alors, d'après l'hypothèse de récurrence : $s \leqq n$.

Définition 4. — Soit $\mathfrak{p}$ un idéal d'un demi-groupe noethérien D. Soit $\mathfrak{a}$ l'idéal premier des éléments non simplifiables de D. Considérons les chaînes, nécessairement finies, d'idéaux premiers

$$\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p} \cup \mathfrak{a} \supset \mathfrak{p}_2 \supset \ldots \supset \mathfrak{p}_n$$

distincts et contenant strictement $\mathfrak{a}$. $\mathfrak{p}$ est dit de *rang généralisé* r s'il existe une telle chaîne comportant r éléments, et s'il n'existe aucune chaîne comportant $r+1$ éléments ($r = 0$, si $\mathfrak{p} \cup \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$). Si $\mathfrak{a}'$ est un idéal quelconque de D, on appelle *rang généralisé* de $\mathfrak{a}'$, le plus petit des rangs généralisés des idéaux premiers essentiels de $\mathfrak{a}' \cup \mathfrak{a}$.

THÉORÈME 2 *bis*. — *Le rang généralisé d'un idéal* $\mathfrak{a}'$ *dont une base comporte* r *éléments simplifiables est au plus* r.

Il suffit de passer au semi-groupe $\{\bar{D} - \mathfrak{a}\}$, $\bar{D} = D/R'_{\mathfrak{a}}$ et d'appliquer le théorème 2.

VI. — Demi-groupes noethériens intégralement clos. Caractérisations.

1. *Définition* 1. — Un élément x du demi-groupe complet D' des fractions du demi-groupe noethérien D est dit entier sur D, s'il existe un élément simplifiable λ dans D, tel que, quel que soit l'entier naturel p, $x^p\lambda$ appartienne à D ([5]).

Définition 1 *bis*. — Un élément x de D' est dit entier sur D, s'il existe un couple d'entiers naturels n, p avec $n > p$, tels que $x^n = \mu x^p$ avec $\mu \in D$.

ÉQUIVALENCE DES DÉFINITIONS 1 ET 1 *bis*. — Soit x entier au sens de la définition 1, montrons qu'il est entier au sens de la définition 1 *bis*.

Soit donc x appartenant à D', tel qu'il existe un élément simplifiable de D, λ, tel que, pour tout entier naturel p, $x^p\lambda$ appartienne à D.

Considérons le sous-demi-groupe de D', noté $D[x]$, formé de tous les éléments a de D, et de tous les éléments de la forme ax^τ, τ étant un entier positif, et a étant un élément quelconque de D. Considérons, d'autre part, l'ensemble $\lambda D[x]$, formé des produits d'un élément de $D[x]$ par λ. Cet ensemble est formé d'éléments de D, et c'est un idéal de D, $\mathfrak{n}$. D étant noethérien, $\mathfrak{n}$ est union d'un nombre fini d'idéaux principaux (a_i) $(i = 1, \ldots, r)$. Tout élément de $D[x]$ s'écrit donc $\mu \frac{a_i}{\lambda}$, pour $1 \leqq i \leqq r$ et $\mu \in D$; $\frac{a_i}{\lambda}$ $(i = 1, \ldots, r)$ appartient à $D[x]$:

$$\frac{a_i}{\lambda} = \mu'_i x^{n_i}, \qquad \mu'_i \in D, \qquad n_i \geqq 0$$

(on pose $x^0 = e$, unité de D).

Pour un entier naturel n supérieur à tous les n_i $(i = 1, \ldots, r)$, on a

$$x^n = \mu \frac{a_i}{\lambda}, \qquad \mu \in D,$$

pour un certain i $(1 \leqq i \leqq r)$. Donc $x^n = \mu\mu'_i x^{n_i}$, où $\mu\mu'_i$ appartient à D et où n est supérieur à n_i; x satisfait à la définition 1 *bis*.

Supposons maintenant que x satisfasse à la définition 1 *bis*.

([5]) C'est la définition de P. Lorenzen [15], p. 542, th. 6, lorsque D est un semi-groupe.

Il existe un élément μ de D et un couple d'entiers naturels n, $p\,(n > p > 0)$ tel que $x^n = \mu x^p$. On a $x = \frac{b}{a}$, où $b \in \mathrm{D}$, et où a est un élément simplifiable de D.

N étant un entier naturel quelconque,

$$\mathrm{N} = k_1 n + r_1 \quad (0 \leqq r_1 \leqq n) \qquad \text{et} \qquad x^{\mathrm{N}} = x^{k_1 p + r_1} \mu^{k_1}.$$

Posons

$$\mathrm{N}_2 = k_1 p + r_1.$$

On a

$$\mathrm{N}_2 = k_2 n + r_2 \qquad (0 \leqq r_2 < n),$$
$$x^{\mathrm{N}_2} = x^{r_2} x^{k_2 n} = x^{k_2 p + r_2} \mu^{k_2} \qquad \text{et} \qquad x^{\mathrm{N}} = \mu^{k_1 + k_2} x^{\mathrm{N}_3}$$

avec

$$\mathrm{N}_3 = k_2 p + r_2.$$

Si N_3 est supérieur ou égal à n, on continuera ainsi, et l'on tombera finalement sur

$$x^{\mathrm{N}'} = x^{r'} \mu^{k'} \qquad (0 \leqq r' < n),$$

puisque la suite N, N_1, N_2, N_3, ... est décroissante.

Prenons alors $\lambda = a^{n-1}$, λ est simplifiable et

$$x^{\mathrm{N}'} \lambda = a^{n-1} x^{r'} \mu^{k'}, \qquad \text{avec} \quad r' < n.$$

On a $x^{r'} a^{n-1} \in \mathrm{D}$ et $x^{\mathrm{N}'} \lambda$ appartient à D quel que soit N'. x est entier au sens de la définition 1 *bis*.

Définition 2. — Un demi-groupe noethérien D est dit intégralement clos (dans son demi-groupe complet des fractions D') si tout élément de D' entier sur D appartient à D.

2. Lemme 1. — *Soit* D *un demi-groupe noethérien, dont on suppose que l'idéal maximal* $\mathfrak{p}$ *est régulier, mais n'est pas premier régulier minimal* (V, définitions 1 et 2). *Soit un élément simplifiable et non inversible a de* D. *Si b appartient à* $(a) : \mathfrak{p}$, $\frac{b}{a}$ *est entier sur* D.

Soit h un élément de $\mathfrak{p}$ et soit $c = \frac{b}{a} h$. Puisque b appartient à $(a) : \mathfrak{p}$, bh appartient à (a) et c appartient à D. Supposons que c ne soit pas dans $\mathfrak{p}$, alors $(a) = (bh)$, $\mathfrak{p}$ étant l'idéal des éléments non inversibles de D. Soit $\mathfrak{p}'$ un idéal premier essentiel minimal de (h). Remarquons que h est simplifiable, puisque a l'est. Donc, $\mathfrak{p}'$ est premier régulier minimal (th. 1, V). $\mathfrak{p}'$ contenant (a) et étant premier régulier minimal, est idéal premier essentiel minimal de (a). Soit $\mathfrak{q}'$ la composante $\mathfrak{p}'$-primaire de (a) : puisque $\mathfrak{p}$ n'est pas premier régulier minimal, on a $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}'$. On a alors $\mathfrak{q}' : \mathfrak{p} = \mathfrak{q}'$, donc b appartient à $\mathfrak{q}'$. Alors $(a) = (bh)$ montre que

$$\mathfrak{q}' \mathrm{D}_{\mathfrak{p}'} \subseteq \mathfrak{q}' \mathfrak{p}' \mathrm{D}_{\mathfrak{p}'}$$

(préliminaire I, propos. 4), et

$$\mathfrak{q}'\,D\mathfrak{p}' = \mathfrak{q}'\,\mathfrak{p}'\,D\mathfrak{p}' = \mathfrak{q}'\,D\mathfrak{p}'.\mathfrak{p}'\,D\mathfrak{p}'.$$

Donc $\mathfrak{q}'\,D\mathfrak{p}'$ est compris dans le nœud de $D\mathfrak{p}'$, ce qui est impossible, puisque le nœud ne peut contenir un élément simplifiable, alors que $\mathfrak{q}'\,D\mathfrak{p}'$ en contient (préliminaire I, remarque 2).

Nous voyons que c appartient à $\mathfrak{p}$ et $\left(\frac{b}{a}\right)^n h$ appartient à $\mathfrak{p}$ pour chaque n; $\frac{b}{a}$ est donc entier sur D.

Lemme 2. — *Soit* D *un demi-groupe noethérien, et soit un élément simplifiable et non inversible a de* D.

Supposons que (a) admette un idéal premier essentiel immergé $\mathfrak{q}$, alors il existe b dans D, *tel que $\frac{b}{a}$ est entier sur* D *et $\frac{b}{a} \notin D$. Réciproquement, s'il existe un élément b, tel que le précédent, alors, ou bien il existe un idéal premier essentiel de (a), $\mathfrak{p}$ tel que $D\mathfrak{p}$ n'est pas intégralement clos, ou bien (a) admet un idéal premier essentiel immergé.*

Supposons que (a) ait un idéal premier essentiel immergé $\mathfrak{q}$. Soit b' un élément de $(a)D\mathfrak{q} : \mathfrak{q}D\mathfrak{q}$, qui n'est pas dans $(a)D\mathfrak{q}$.

Notons $\bar{x}$ la classe de x, $x \in D$, dans l'équivalence Σ relative à $S = D - \mathfrak{q}$, définie au préliminaire I (§ 3).

Alors, à cause du lemme 1, $\frac{b'}{\bar{a}}$ est entier sur $D\mathfrak{q}$. On a

$$b' = \frac{\bar{b}}{\bar{s}} \qquad (\bar{b} \in \bar{D};\ \bar{s} \in \bar{S}).$$

On a

$$\left(\frac{b'}{\bar{a}}\right)^n = \frac{\bar{\mu}}{\bar{s}'}\left(\frac{b'}{\bar{a}}\right)^p \quad (\bar{\mu} \in \bar{D};\ \bar{s}' \in \bar{S};\ n > p > 0) \qquad \text{et} \qquad \frac{b'}{\bar{a}} \notin \bar{D}\bar{\mathfrak{q}}.$$

$$\left(\bar{s}'\frac{\bar{b}}{\bar{a}}\right)^n = \bar{s}'^{n-p-1}\,\bar{\mu}.\bar{s}^{n-p}\left(\frac{\bar{s}'.\bar{b}}{\bar{a}}\right)^p = \bar{\tau}\left(\frac{\bar{s}'.\bar{b}}{\bar{a}}\right)^p,$$

avec

$$\bar{\tau} = \bar{s}'^{n-p-1}\,\bar{s}^{n-p}\,\bar{\mu} \in \bar{D}.$$

Posons $\bar{c} = \bar{s}'.\bar{b}$, on a

$$\left(\frac{\bar{c}}{\bar{a}}\right)^n = \bar{\tau}\left(\frac{\bar{c}}{\bar{a}}\right)^p.$$

Donc $\bar{c}^n = \bar{\tau}.\bar{a}^{n-p}\,\bar{c}^p$ et il existe s'', tel que $s'' \in S$ et

$$s''\,c^n = s''\,\tau\,a^{n-p}\,c^p, \qquad (s''\,c)^n = s''^{n-p}\,\tau\,a^{n-p}(s''\,c)^p,$$

et

$$\left(\frac{s''\,c}{a}\right)^n = s''^{n-p}\,\tau\left(\frac{s''\,c}{a}\right)^p.$$

Ceci montre que $\frac{s''c}{a}$ est entier sur D. D'ailleurs $\frac{s''c}{a}$ n'appartient pas à D, car de $s''c = a\lambda$, $\lambda \in D$, on déduit

$$\bar{s}''.\bar{c} = \bar{a}.\bar{\lambda} \qquad \text{et} \qquad \frac{\bar{c}}{\bar{a}} \in \overline{D}_{\bar{\mathfrak{q}}}, \qquad \text{donc} \quad \frac{b'}{\bar{a}} \in \overline{D}_{\bar{\mathfrak{q}}},$$

ce qui n'est pas.

Soit maintenant $\frac{b}{a}$ entier sur D et $\frac{b}{a} \notin D$. Soient $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_h$ les idéaux premiers essentiels de (a).

Supposons-les tous premiers réguliers minimaux, et supposons $D\mathfrak{p}_i$ intégralement clos $(i = 1, \ldots, h)$. Alors, soit $(a) = \Lambda_1 \cap \ldots \cap \Lambda_h$ une décomposition réduite de (a) en idéaux primaires, Λ_i étant $\mathfrak{p}_i$-primaire $(i = 1, \ldots, h)$. Puisque $\frac{b}{a}$ est entier sur D, $\frac{\bar{b}}{\bar{a}}$ est entier sur $D\mathfrak{p}_i$ (on note $\bar{x}$ la classe de x dans l'équivalence Σ relative à $S_i = D - \mathfrak{p}_i$), donc appartient à $D\mathfrak{p}_i$.

$$\bar{b}\, D\mathfrak{p}_i \subseteq (\bar{a})\, D\mathfrak{p}_i = \bar{\Lambda}_i\, D\mathfrak{p}_i$$

et, par suite,

$$\bar{b} \in \bar{\Lambda}_i\, D\mathfrak{p}_i \cap \overline{D} = \bar{\Lambda}_i.$$

Donc, pour un $s \in S_i$ et un $\lambda_i \in \Lambda_i$, $sb = s\lambda_i$. Comme s n'appartient pas à $\mathfrak{p}_i$, on en déduit $b \in \Lambda_i$, et comme ceci a lieu pour $i = 1, \ldots, h$, on a $\frac{b}{a} \in D$: il y a contradiction.

THÉORÈME 1. — *Caractérisation* B′ : *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un demi-groupe noethérien soit intégralement clos, est que les deux conditions suivantes soient simultanément réalisées :*

1° *Pour tout élément simplifiable et non inversible a de* D, (a) *n'a que des idéaux premiers essentiels réguliers minimaux* (définition 2, V);

2° *Pour tout idéal premier régulier minimal* $\mathfrak{p}$ *de* D, $D\mathfrak{p}$ *est intégralement clos.*

Ceci résulte des deux lemmes précédents et aussi du fait que si D est intégralement clos, D_S l'est, S étant un sous-demi-groupe de D ne contenant pas le zéro de D, s'il existe, comme on pourrait le voir par une démonstration analogue à celle faite à la première partie du lemme 2.

LEMME 3. — *Soit un élément simplifiable et non inversible a du demi-groupe noethérien* D.

Supposons que pour tout idéal premier régulier minimal $\mathfrak{p}$ *de* D, $D\mathfrak{p}$ *est intégralement clos. Alors, si* (a) *admet un idéal premier essentiel immergé* $\mathfrak{q}$, *pour tout élément simplifiable b de* $\mathfrak{q}$, *l'idéal* (b) *admet un idéal premier essentiel immergé.*

Soit b un élément simplifiable de $\mathfrak{q}$ distinct de a. Considérons $D\mathfrak{p}$ et soit $\bar{x}$ la classe de x, $x \in D$, dans l'équivalence Σ relative à $D - \mathfrak{q}$ (préliminaire I, § 3).

Soit d' appartenant à $(a)\mathrm{D}\mathfrak{q}:\mathfrak{q}\mathrm{D}\mathfrak{q}$ et n'appartenant pas à $\mathfrak{q}\mathrm{D}\mathfrak{q}$. L'élément $\frac{d'}{\bar{a}}$ n'appartient pas à $\mathrm{D}\mathfrak{q}=\bar{\mathrm{D}}_{\bar{\mathfrak{q}}}$ et est entier sur $\mathrm{D}\mathfrak{q}$ (lemme 1, VI). Rappelons en passant que $\bar{a}$ et $\bar{b}$ sont simplifiables dans $\bar{\mathrm{D}}$ (préliminaire I, remarque 2). Soit $c'=\frac{d'}{\bar{a}}\bar{b}$; c' appartient à $\bar{\mathrm{D}}_{\bar{\mathfrak{q}}}$ et $\frac{d'}{\bar{a}}=\frac{c'}{\bar{b}}$ montre que $\frac{c'}{\bar{b}}$ est entier sur $\bar{\mathrm{D}}_{\bar{\mathfrak{q}}}$ et qu'il n'appartient pas à $\bar{\mathrm{D}}_{\bar{\mathfrak{q}}}$. Alors, un raisonnement déjà fait dans la première partie du lemme 2, montre qu'il existe un élément $\frac{f}{b}$ n'appartenant pas à D et entier sur D, $f\in\mathrm{D}$.

D'après le lemme 2 (b) a un idéal essentiel immergé.

3. Le théorème (1, VI) ne renseigne pas sur la structure des demi-groupes noethériens D, dont l'idéal maximal est premier régulier minimal, et qui sont intégralement clos [par exemple les demi-groupes $\mathrm{D}\mathfrak{p}$ intervenant dans la condition (2) du théorème (1, VI)]. Nous allons démontrer le théorème :

THÉORÈME 2. — *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un demi-groupe noethérien* D, *dont l'idéal maximal* $\mathfrak{p}$ *est premier régulier minimal, soit intégralement clos, est que* $\mathfrak{p}$ *soit engendré par un élément* π *de* D; $\mathfrak{p}=(\pi)$.

Soit D′ le demi-groupe complet des fractions de D. Soit a un élément simplifiable et non inversible (il en existe, puisque $\mathfrak{p}$ est régulier); (a) est $\mathfrak{p}$-primaire. Soit ρ son exposant : $\mathfrak{p}^{\rho-1}\not\subseteq(a)$, $\mathfrak{p}^{\rho}\subseteq(a)$. On peut trouver

$$b\in\mathfrak{p}^{\rho-1},\qquad b\notin(a)\qquad\text{et}\qquad b\mathfrak{p}\subseteq(a).$$

On a alors $\frac{b}{a}\mathfrak{p}\subseteq\mathrm{D}$. Supposons

$$\frac{b}{a}\mathfrak{p}\subseteq\mathfrak{p},\qquad\text{alors}\quad\left(\frac{b}{a}\right)^{n}\mathfrak{p}\subseteq\mathfrak{p},$$

quel que soit l'entier naturel n et, par suite, $\frac{b}{a}$ est entier sur D. Donc, si l'on suppose D intégralement clos, $\frac{b}{a}$ appartient à D, et ceci est impossible d'après le choix de b. On a donc $\frac{b}{a}\,\mathfrak{p}=\mathrm{D}$, et il existe $\pi\in\mathfrak{p}$, tel que $\frac{b}{a}\,\pi=e$, e étant l'unité de D. π est donc inversible dans D′ et $\frac{b}{a}=\frac{e}{\pi}\cdot$ On déduit de là et de $\frac{b}{a}\mathfrak{p}=\mathrm{D}$,

$$\frac{b}{a}p=\lambda\quad(\lambda\in\mathrm{D};\,p\in\mathfrak{p})\qquad\text{et}\qquad\frac{e}{\pi}p=\lambda,\qquad\text{donc}\quad p=\lambda\pi.$$

Réciproquement, si $\mathfrak{p}$, idéal maximal du demi-groupe noethérien D, est premier régulier minimal et engendré par un élément π (nécessairement simplifiable et non inversible), alors D est intégralement clos.

Soit a un élément simplifiable de $\mathfrak{p}$, alors a ne peut appartenir à $\mathfrak{p}^q$, quel que soit l'entier naturel q, car il appartiendrait au nœud de D, ce qui est impossible. Il existe donc q, tel que $a \in \mathfrak{p}^q$ et $a \notin \mathfrak{p}^{q+1}$. On a donc $a = \lambda\pi^q$, λ étant inversible. Considérons, alors, un élément $\frac{b}{a}$ entier sur D. Il existe un élément simplifiable de D, μ, tel que pour toute valeur de l'entier naturel n, $\left(\frac{b}{a}\right)^n \mu \in \mathrm{D}$. Si b n'appartient pas au nœud, il appartient à $\mathfrak{p}^r$ et n'appartient pas à $\mathfrak{p}^{r+1}$ pour un certain entier naturel r : on a donc $b = \mu''\pi^r$, μ'' est inversible et b est simplifiable : si $r' = -r + q$ est positif, on a alors $\left(\frac{e}{\pi^{r'}}\right)^n \mu \in \mathrm{D}$, pour tout n, et μ appartient à $\mathfrak{p}^{r'n}$ pour tout n, donc au nœud de D, et c'est impossible.

Donc, r' est négatif ou nul et $\frac{b}{a}$ appartient à D. Si b appartient au nœud de D, alors b appartient à $\mathfrak{p}^n$, quel que soit n et $b = \lambda\pi^n$. On peut prendre, en particulier, $n > q$ et $\frac{b}{a}$ appartient à D. De toutes façons, on voit que $\frac{b}{a}$ appartient à D.

Remarques. — 1° Le demi-groupe commutatif D

$$\left\{\begin{array}{l} e = \text{élément unité}, \\ a \neq a^2 \neq \ldots \neq a^n \neq \ldots, \\ x, \quad x^2, \quad \ldots, \quad x^n, \quad \ldots \qquad (x^i \neq x^j \text{ si } i \neq j), \\ ax = a = ax^2 = \ldots = ax^n = \ldots, \\ a^2 x^i = a^2, \qquad \ldots, \qquad a^n x^i = a^n, \qquad \ldots \qquad (\text{quel que soit } i) \end{array}\right\}$$

est noethérien. Le nœud de D est engendré par a, l'idéal maximal est engendré par x. On peut vérifier que x est simplifiable et non inversible. Ce demi-groupe D est intégralement clos.

2° Il n'y a pas d'idéal $\mathfrak{p}$-primaire entre $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{p}^2$ dans le demi-groupe noethérien dont l'idéal maximal est engendré par l'élément simplifiable et non inversible π. On en déduit que, si D est un demi-groupe noethérien intégralement clos, il n'y a pas d'idéal $\mathfrak{p}$-primaire entre $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{p}^{(2)}$, (on note $\mathfrak{p}^{(2)}$ la composante $\mathfrak{p}$-primaire bien déterminée de $\mathfrak{p}^2$), $\mathfrak{p}$ étant un idéal premier régulier minimal quelconque de D.

4. Théorème 3. — *Caractérisation* C′ : *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un demi-groupe noethérien* D *soit intégralement clos est que, pour tout idéal premier essentiel* $\mathfrak{p}$ *d'un idéal principal* (a) *engendré par un élément simplifiable* a *de* D *(et non inversible), il n'a ait pas d'idéal* $\mathfrak{p}$*-primaire entre* $\mathfrak{p}$ *et* $\mathfrak{p}^{(2)}$.

D'après la remarque précédente, il suffit de démontrer que la condition est suffisante.

Soit donc $\mathfrak{p}$ idéal premier essentiel d'un idéal (a) engendré par un élément simplifiable et non inversible a de D. Considérons $\mathrm{D}\mathfrak{p}$ et posons, pour simplifier l'écriture

$$\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}\,\mathrm{D}\mathfrak{p}, \qquad \mathrm{D}\mathfrak{p} = \mathrm{D}'.$$

Soit $\mathfrak{n}'$ le nœud de D′. Montrons que $\mathfrak{p}'$ est engendré par un élément π.

Il n'y a pas d'idéal $\mathfrak{p}'$-primaire entre $\mathfrak{p}'^2$ et $\mathfrak{p}'$ d'après l'hypothèse. Comme $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}'^2$ entraînerait que $\mathfrak{p}'$ coïncide avec $\mathfrak{n}'$, ce qui est impossible, $\mathfrak{p}'$ étant régulier, il existe un élément π, $\pi \in \mathfrak{p}'$, $\pi \notin \mathfrak{p}'^2$ et comme $(\pi) \cup \mathfrak{p}'^2$ est $\mathfrak{p}'$-primaire, on a

$$\mathfrak{p}' = (\pi) \cup \mathfrak{p}'^2$$

et, par suite,

$$\mathfrak{p}' = (\pi) \cup \mathfrak{p}'^n = \bigcap_{n=1}^{\infty} ((\pi) \cup \mathfrak{p}'^n) = (\pi) \cup \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{p}'^n \right) = (\pi) \cup \mathfrak{n}'.$$

Nous allons montrer que $\mathfrak{p}' \neq (\pi)$ est impossible.

Soit $\bar{a}$ la classe de a dans l'équivalence Σ associée à $D - \mathfrak{p}$ (préliminaire I, § 3) : c'est un élément simplifiable et non inversible de D'. Par suite, π est nécessairement simplifiable et $\bar{a}$ appartient à $\mathfrak{p}'^{\rho}$ sans appartenir à $\mathfrak{p}'^{\rho+1}$ pour un certain ρ : $\bar{a} = \lambda\pi^{\rho}$, λ inversible, $\lambda \in D'$. $\mathfrak{p}'$ étant idéal premier essentiel de $(\bar{a}) = (\pi^{\rho})$, il existe $c \not\subseteq (\pi^{\rho})$, tel que $c\mathfrak{p}' \subseteq (\pi^{\rho})$. Comme on suppose $\mathfrak{p}' \neq (\pi)$, on a $c \in \mathfrak{p}'$ et $\rho > 1$. Si c n'appartenait pas à (π), il appartiendrait à $\mathfrak{n}'$: $c = cp'$ avec $p' \in \mathfrak{p}'$ montrerait alors que $c \in (\pi^{\rho})$, contrairement à l'hypothèse. Ainsi $c = c_1\pi$, $c_1 \in D'$. Mais alors, $c_1\mathfrak{p}' \subseteq (\pi^{\rho-1})$. On a $\rho - 1 \geqq 1$, et c_1 appartient à $\mathfrak{p}'$, car $\mathfrak{p}' \neq (\pi)$. De plus, c_1 appartient à (π), même raisonnement que pour c.

Finalement, on voit que

$$c = c_{\rho-1}\pi^{\rho-1} \qquad \text{et} \qquad c_{\rho-1}\mathfrak{p}' \subseteq (\pi).$$

On a $c_{\rho-1} \in \mathfrak{p}'$ est même $c_{\rho-1} \in (\pi)$: $c = c_{\rho}\pi^{\rho}$, $c_{\rho} \in D'$, et ceci est impossible d'après le choix de c.

On a donc $\mathfrak{p}' = (\pi)$ et ceci montre d'abord que $\mathfrak{p}$ est un idéal premier essentiel minimal de (a), donc que D vérifie la condition 1° du théorème (1, VI). Ensuite, d'après le théorème (2, VI), cela montre que $D\mathfrak{p} = D'$ est intégralement clos et, par suite, que D vérifie la condition 2° du théorème (2, VI) : D est intégralement clos.

VII. — Extension entière d'un demi-groupe commutatif D.

1. *Définition* 1. — Soit D' un demi-groupe commutatif contenant le sous-demi-groupe D, un sous-ensemble M de D' est dit un D-*ensemble* de D', si pour tout $a \in D$ et pour tout $m \in M$, am appartient à M.

Un D-ensemble de D', M, est dit fini, s'il est engendré par un nombre fini d'éléments $a'_1, \ldots, a'_r$: tout élément de M s'écrit aa'_j avec un certain $a \in D$, pour un certain $j\ (1 \leqq j \leqq r)$.

PROPOSITION 1. — *Tout sous-*D*-ensemble* M′ *d'un* D*-ensemble de* D′, M *fini, est lui-même fini, si* D *est noethérien.*

Soit $a'_1, \ldots, a'_r$ les éléments qui engendrent M en tant que D-ensemble. Pour tout $u \in \mathrm{M}$, $u = aa'_j$, pour un certain $a \in \mathrm{D}$, et pour un certain $j\,(1 \leqq j \leqq r)$: a est dit le coefficient de u selon a'_j et u est dit multiple de a'_j. Les coefficients selon a'_j des éléments de M′ multiples de a'_j forment un idéal de D engendré par r_j éléments $a_{1j}, \ldots, a_{r_j j}$ (r_j peut être nul, s'il n'y a pas de multiples de a'_j dans M′). L'ensemble des éléments $\{a'_j a_{ij}\}_{\substack{j=1,\ldots,r\\ i=1,\ldots,r_j}}$ engendre M′.

Définition 2. — Un élément a' de D′ est dit entier sur le demi-groupe D si, et seulement si, toute puissance $a'^t\,(t = 1, 2, \ldots)$ de a' appartient à un certain D-ensemble fini de D′, M.

Proposition 2. — *Si* D *est noethérien, a' est entier sur* D, $a' \in \mathrm{D}'$ *si, et seulement si, pour un certain couple d'entiers n, p* $(n > p > 0)$, *on a*

$$a'^n = aa'^p, \qquad \text{avec} \quad a \in \mathrm{D},$$

En effet, le D-ensemble de D′, engendré par les puissances de a', est un sous-D-ensemble M′ de M, donc un D-ensemble fini, a' étant supposé entier sur D. L'existence du couple $n, p\,(n > p > 0)$ et de a de D, tels que $a'^n = aa'^p$ s'en déduit.

Réciproquement, si l'on suppose cette existence, toute puissance de a' se trouve dans le D-ensemble de D′, engendré par $a', a'^2, \ldots, a'^{n-1}$ et, par suite, a' est entier sur D.

Proposition 3. — *Le produit de deux éléments entiers sur le demi-groupe* D, *est entier sur* D. *Il suffit d'appliquer la définition* 2.

Définition 3. — Un élément de D′ est dit fortement entier sur D, si une puissance de a' appartient à D. Tout élément fortement entier est entier. Si D′ est un semi-groupe contenant le sous-demi-groupe noethérien D, la réciproque est vraie.

Les éléments entiers (fortement entiers) sur D, forment dans D′ un demi-groupe appelé la *fermeture entière* (*fortement entière*) de D dans D′.

D′ est dit une extension entière (fortement entière) de D, si tout élément de D′ est entier (fortement entier) sur D.

2. Théorème 1. — *Soit* D′ *une extension fortement entière, commutative, d'un demi-groupe* D. *Pour chaque idéal premier* $\mathfrak{p}$ *de* D, *il existe un idéal premier et un seul* $\mathfrak{p}'$ *de* D′, *dont l'intersection avec* D *est* $\mathfrak{p}$; $\mathfrak{p}'$ *est dit associé à* $\mathfrak{p}$. *Si* $\mathfrak{p}'_1$ *et* $\mathfrak{p}'_2$ *sont associés à* $\mathfrak{p}_1$ *et* $\mathfrak{p}_2$ *respectivement, on a* $\mathfrak{p}'_1 \subset \mathfrak{p}'_2$ *si, et seulement si,* $\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2$.

Si l'on considère l'ensemble des éléments de D′ dont une puissance est dans $\mathfrak{p}$, on pourra vérifier sans peine que c'est un idéal premier de D′ dont l'intersection avec D est $\mathfrak{p}$. Il n'est pas du tout évident que ce soit le seul idéal premier de D′ ayant cette propriété.

Le complément de $\mathfrak{p}$ dans D, soit $S = D - \mathfrak{p}$, est un sous-demi-groupe de D et de D', ne contenant pas le zéro de D, s'il existe. Soit Σ' l'équivalence définie dans D', associée au sous-demi-groupe S (préliminaire I, § 3). Soit Σ, l'équivalence définie dans D, associée à S : Σ est la restriction à D de Σ'. $\bar{D}' = D/\Sigma'$ est extension fortement entière de $\bar{D} = D/\Sigma$.

Si $\mathfrak{p}'$ est un idéal premier de D' dont l'intersection avec D est $\mathfrak{p}$, il lui correspond dans $\bar{D}'$ un idéal premier $\bar{\mathfrak{p}}'$ ne rencontrant pas $\bar{S}$, dont l'intersection avec $\bar{D}$ est $\bar{\mathfrak{p}}$. $\bar{D}'_{\bar{S}}$ est extension fortement entière de $\bar{D}_{\bar{S}}$, $\bar{\mathfrak{p}}_{\bar{S}}$ est l'idéal maximal de $\bar{D}_{\bar{S}}$, $\bar{\mathfrak{p}}_{\bar{S}} = \bar{\mathfrak{p}}.\bar{D}_{\bar{S}}$, et à $\bar{\mathfrak{p}}'$ correspond dans $\bar{D}'_{\bar{S}}$ un idéal premier $\bar{\mathfrak{p}}'_{\bar{S}}$, tel que

$$\bar{\mathfrak{p}}'_{\bar{S}} \cap \bar{D}_{\bar{S}} = \bar{\mathfrak{p}}_{\bar{S}}.$$

Considérons alors la relation d'équivalence $R'_{\bar{\mathfrak{p}}'_{\bar{S}}}$ (préliminaire II) definie dans $\bar{D}'_{\bar{S}}$: $\bar{D}'_{\bar{S}}$ est appliqué sur un demi-groupe $\mathcal{D}'$ qui n'a pas de diviseurs de zéro et $\bar{D}_{\bar{S}}$ est appliqué sur le sous-demi-groupe $\mathcal{D}$ de $\mathcal{D}'$ formé des classes o et e', e' étant l'unité de $\mathcal{D}'$, o étant la classe de $\bar{\mathfrak{p}}'_{\bar{S}}$. $\mathcal{D}'$ est extension fortement entière de $\mathcal{D}$ et, par suite, $\{\mathcal{D}' - o\}$ est un groupe. Il résulte de là que, dans D', $\mathfrak{p}'$ est maximal par rapport à S, c'est-à-dire que tout idéal de D' contenant $\mathfrak{p}'$ rencontre S.

Considérons alors qu'il existe un idéal premier $\mathfrak{p}'$ dont l'intersection avec D est $\mathfrak{p}$ (début de cette démonstration); on en déduit facilement le théorème.

3. Soit à résoudre, comme application, le problème suivant :

Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que, étant donnés un semi-groupe commutatif D' contenant le semi-groupe D noethérien et intégralement clos, et θ un élément de D' entier, donc fortement entier, sur D, le semi-groupe $D[\theta]$ engendré par D et θ dans D', soit intégralement clos.

Soit donc un semi-groupe noethérien D, compris dans un semi-groupe commutatif D' dont l'élément unité e est celui de D. Soit G le groupe complet des fractions de D, G' celui de D'.

Un élément θ de G' est dit algébrique sur G, s'il existe un entier naturel n', tel que $\theta^{n'} \in G$. Soit alors n le plus petit entier naturel, tel que $\theta^{n} \in G$, soit $\theta^n = a\,(a \in G)$. On démontre facilement que, si l'on a $\theta^{n'} = b\,(b \in G)$, alors $n' = kn$ et $b = a^k$, k étant un entier naturel. L'équation $\theta^n = a$ est appelée l'équation caractéristique de θ sur G.

Si θ est entier sur D, on a, pour un entier naturel n', $\theta^{n'} = b\,(b \in D)$. On démontrera facilement alors que, D étant de plus intégralement clos, il faut et il suffit, pour que θ soit entier sur D, que a appartienne à D, dans l'équation caractéristique $\theta^n = a$ de θ sur G.

Portons maintenant notre attention sur le semi-groupe $D^\star = D[\theta]$ engendré dans D' par D et θ, ensemble des éléments $a_i\theta^i$, $a_i \in D\,(i = 0, 1, \ldots, n, \ldots)$

($\theta^0 = e$, par définition) : a_i est appelé le coefficient de $a_i\theta^i$. Tout élément de $D^\star$ s'écrit d'une façon et d'une seule $a_i\theta^i$, $a_i \in D$ ($i = 0, 1, \ldots, n-1$).

$D^\star$ est noethérien : il nous suffira de démontrer qu'un idéal $\mathfrak{a}^\star$ de $D^\star$ quelconque est engendré par un nombre fini d'éléments : $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^\star \cap D$ est un idéal de D, engendré par $a_1, \ldots, a_i$. Parmi tous les éléments de $\mathfrak{a}^\star$, dont le coefficient est a_i, il y en a un de plus petit degré, dont tous les autres sont multiples : on voit ainsi que $\mathfrak{a}^\star$ est engendré par un nombre fini d'éléments.

4. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier minimal de D, et soit $S = D - \mathfrak{p}$. L'idéal $\mathfrak{p}^\star$ premier de $D^\star$, dont l'intersection avec D est $\mathfrak{p}$, est minimal et réciproquement (th. 1, VII). Si $\mathfrak{p}^\star$ est un idéal premier minimal de $D^\star$, $\mathfrak{p}^\star = \mathfrak{p} \cap D$ est un idéal premier minimal de D.

On a $(D[\theta])_S = D_S[\theta] = D^\star_S$. L'équation caractéristique de θ sur D_S est encore $\theta^n = a$, $a \in D$. $\mathfrak{p}_S$ est l'idéal maximal de D_S. D étant intégralement clos, D_S l'est, et $\mathfrak{p}_S$ est engendré par un élément π (th. 2, VI).

Supposons d'abord que a n'appartienne pas à $\mathfrak{p}_S$, θ est alors inversible dans $D^\star_S$ et la réciproque est vraie. Dans ce cas, l'idéal $\mathfrak{p}^\star_S = \mathfrak{p}_S D^\star_S$ est l'ensemble des éléments non inversibles de $D^\star_S$, car un élément de $D^\star_S$, $b\theta^q$, $b \in D_S$ ($0 \leqq q \leqq n-1$) est inversible si, et seulement si, b n'appartient pas à $\mathfrak{p}_S$. Ainsi, dans ce cas, l'idéal premier de $D^\star_S$ dont l'intersection avec D_S est $\mathfrak{p}_S$, est $\mathfrak{p}^\star_S = \mathfrak{p}_S D^\star_S$ et c'est l'idéal maximal de $D^\star_S$: celui-ci est engendré par π et $D^\star_S$ est intégralement clos (th. 2, VI).

Supposons maintenant que a appartienne à $\mathfrak{p}_S$, alors θ n'est pas inversible dans $D^\star$ et comme $\theta = b\theta^q$, $b \in \mathfrak{p}_S$ ($0 \leqq q \leqq n-1$) est impossible, θ n'appartient pas à $\mathfrak{p}^\star_S$.

Considérons alors le demi-groupe $\bar{D}^\star_S = D^\star_S / R'_{\mathfrak{p}^\star_S}$ (préliminaire II), et soit, de façon générale, $\bar{x}$ la classe de x, dans $\bar{D}^\star_S$, $x \in D^\star_S$. On a $\mathfrak{p}^\star_S \cap D_S = \mathfrak{p}_S$, car $e = b\theta^q$ ($0 \leqq q \leqq n-1$), $b \in \mathfrak{p}_S$ est impossible. $\bar{D}_S$ est formé des éléments $\bar{e}$ et $\bar{0}$, classe des éléments de $\mathfrak{p}^\star_S$. $\bar{D}^\star_S$ est formé des éléments $\bar{e}, \bar{0}, \bar{\theta}, \bar{\theta}^2, \ldots, \bar{\theta}^{n-1}$ et $\bar{\theta}^n = \bar{0}$. L'idéal des éléments non inversibles de $\bar{D}^\star_S$ est engendré par $\bar{\theta}$, donc l'idéal des éléments non inversibles de $\bar{D}^\star_S$ est engendré par θ et π, soit $\mathfrak{p}^{\star\star}_S$ cet idéal. On a $\mathfrak{p}^{\star\star}_S \cap D = \mathfrak{p}_S$. Une condition nécessaire et suffisante pour que $D^\star_S$ soit intégralement clos, est qu'il existe un élément τ, tel que π et θ soient multiples de τ. Une démonstration simple montre qu'on peut prendre alors $\tau = \theta$ et que ceci a lieu si, et seulement si, $\theta^n = a = \mu\pi$, avec μ inversible dans D_S.

5. Supposons $D^\star$ intégralement clos ; $\mathfrak{p}'$ étant un idéal premier minimal quelconque de $D^\star$, posons $\mathfrak{p} = D \cap \mathfrak{p}'$, et $S = D - \mathfrak{p}$: $D^\star_S$ est intégralement clos.

Réciproquement, si $D^\star_S$ est intégralement clos, en posant

$$S' = D^\star - \mathfrak{p}', \qquad S \subseteq S',$$

$D^\star_{S'} = (D^\star_S)_{S'}$ l'est aussi. On déduit de là qu'une condition nécessaire pour que $D^\star$

soit intégralement clos est donc que $D_S^\star$ le soit, pour tout $S = D - \mathfrak{p}$, où $\mathfrak{p}$ est un idéal premier minimal quelconque de D, c'est-à-dire que (a) soit égal à D ou soit intersection d'idéaux premiers de D (§ 4 VII). Alors, si cela est vérifié, $D^\star$ vérifie la condition 2° du théorème (1, VI).

6. Pour montrer que $D^\star$ est intégralement clos sous la condition qui vient d'être énoncée sur (a), il suffit donc de montrer que $D^\star$ vérifie aussi la condition 1° du théorème (1, VI). On va se servir du lemme (3, VI).

Supposons la condition sur (a) réalisée, alors $D_{\mathfrak{p}'}^\star$ est intégralement clos, pour tout idéal premier minimal $\mathfrak{p}'$ de $D^\star$, et supposons qu'il existe un élément b' de $D^\star$, tel que $(b')^\star$, idéal engendré par b' dans $D^\star$, ait un idéal premier essentiel immergé $\mathfrak{q}'$. Alors, d'après le lemme 3, partie VI, en prenant b dans $(b')^\star \cap D$ (b existe), l'idéal $(b)^\star$ engendré par b dans $D^\star$ a aussi un idéal premier essentiel immergé $\mathfrak{q}''$. Je dis que l'idéal (b) engendré par b dans D a aussi, alors, un idéal premier essentiel immergé.

Considérons l'idéal premier de D : $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}'' \cap D$. On a $(b)^\star : \mathfrak{q}'' \supset (b)^\star$, puisque $\mathfrak{q}''$ est un idéal premier essentiel de $(b)^\star$. Donc, il existe

$$c' \notin (b)^\star, \qquad c' = c\theta^q, \qquad c \in D, \qquad 0 \leqq q \leqq n-1,$$

tel que $c'\mathfrak{q}'' \subseteq (b)^\star$. Or,

$$d\theta^q \in (b)^\star, \qquad d \in D, \qquad 0 \leqq q \leqq n-1$$

a lieu si, et seulement si $d \in (b)$, car

$$d\theta^q = bb_1\theta^{q'}, \qquad b_1 \in D, \qquad 0 \leqq q' \leqq n-1$$

entraîne $d = bb_1$ et $q = q'$, d'après l'unicité de la représentation d'un élément de $D^\star$ sous la forme $u\theta^q, u \in D$, $0 \leqq q \leqq n-1$. De $c'\mathfrak{q}'' \subseteq (b)^\star$, on déduit $c'\mathfrak{q} \subseteq (b)^\star$ et $c'r \subseteq (b)^\star$, pour tout $r \subseteq \mathfrak{q}$, donc $\mathfrak{a} \in (b)$, pour tout $r \in \mathfrak{q}$, avec $c \notin (b)$, puisque c' n'appartient pas à $(b)^\star$. Ceci montre que $\mathfrak{q}$ est compris dans un idéal premier de (b), et comme $\mathfrak{q}$ n'est pas minimal, puisque $\mathfrak{q}'$ ne l'est pas, (b) admet un idéal premier essentiel, qui n'est pas minimal, ce qui est impossible, puisque D est intégralement clos.

On peut alors énoncer :

Théorème 2. — $D^\star$ *est intégralement clos si, et seulement si, l'équation caractéristique de* θ *sur* D *est* $\theta^n = a$, *où* $(a) = D$ *ou bien où* (a) *est intersection d'idéaux premiers de* D.

CHAPITRE III.

Ce chapitre est relatif à des structures non nécessairement commutatives. Il se divise en deux parties :

— La première est une généralisation partielle d'un travail de Molinaro [16].

Celui-ci a défini les éléments « nomaux » dans un gerbier G, commutatif, à élément unité, résidué. Nous définissons des éléments « nomaux » dans un gerbier G′, non nécessairement commutatif, à élément unité, résidué. Un gerbier « nomal » est un gerbier G′, possédant un élément nomal : Le gerbier des idéaux fractionnaires d'un anneau commutatif, noethérien, intégralement clos, est un gerbier nomal. Dans le cas non commutatif. les $\mathcal{O}$-idéaux d'un ordre maximal introduits par Asano [1], [3], fournissent un exemple de gerbier nomal.

— La seconde partie, plus importante, contient une étude fine des ordres maximaux réguliers noethériens, à gauche, d'où le lien avec la partie précédente. La théorie des ordres maximaux a été faite par Asano et publiée sous sa forme générale en 1953 [3]. Un ordre maximal régulier est un anneau, ou un demi-groupe, non nécessairement commutatif, défini par certaines propriétés, qui seront données dans le corps du chapitre.

En 1956, Lesieur et Croisot ont publié leur *Théorie noethérienne des anneaux, des demi-groupes et des modules, dans le cas non commutatif* [13] et [14].

Nous montrons que, en utilisant cette dernière théorie, on peut affiner la théorie des ordres maximaux réguliers noethériens d'un côté. Un anneau, ou un demi-groupe, ordre maximal régulier, commutatif, noethérien, n'est pas autre chose qu'un anneau, ou un demi-groupe commutatif noethérien, intégralement clos.

Nous énonçons, en particulier, une caractérisation B″ des ordres maximaux réguliers, noethériens à gauche, qui généralise la caractérisation B des anneaux, noethériens, commutatifs, intégralement clos (chap. I, partie II), et la caractérisation B′ des demi-groupes noethériens, intégralement clos (chap. II, VI, 1).

Partie I.

Section 1 : Notations. Définitions préliminaires.

Soit A un gerbier, à élément unité e, résidué [8], dont la multiplication n'est pas nécessairement commutative, et dont l'union est notée U.

Soit x un élément de A. Nous notons :

$\mathfrak{A}_x$ la relation définie par

$$a,\ b \in \mathrm{A}, \qquad a\,\mathfrak{A}_x\,b \leftrightarrow x \mathbin{.\cdot} a = x \mathbin{.\cdot} b, \qquad \text{ou} \qquad a \equiv b\,(\mathfrak{A}_x),$$

et ${}_x\mathfrak{A}$ la relation définie par

$$a,\ b \in \mathrm{A}, \qquad a\,{}_x\mathfrak{A}\,b \leftrightarrow x \mathbin{\cdot.} a = x \mathbin{\cdot.} b, \qquad \text{ou} \qquad a \equiv b\,({}_x\mathfrak{A}),$$

x sera dit *symétrique* si $\mathfrak{A}_x = {}_x\mathfrak{A}$, et *équirésiduel*, si $x \mathbin{.\cdot} a = x \mathbin{\cdot.} a$, quel que soit l'élément a de A. Tout élément équirésiduel est symétrique.

Section 2 : Propriétés préliminaires de $\mathcal{A}_x$ et ${}_x\mathcal{A}$.

On note ($\subseteq$) la relation d'ordre de A. $\mathcal{A}_x$ est une relation d'équivalence régulière par rapport à l'union et régulière à droite, par rapport à la multiplication.

La classe E de e modulo $\mathcal{A}_x$ est l'ensemble des éléments e_1, tels que : $x \,.\!\cdot\, e_1 = x \,.\!\cdot\, e = x$. On a $e_1 x \subseteq x$ et $e_1 \subseteq x \cdot\!.\, x$. Or

$$x \,.\!\cdot\, (x \cdot\!.\, x) = x, \qquad \text{donc} \qquad x \cdot\!.\, x \equiv e(\mathcal{A}_x).$$

E est donc la classe de $x \cdot\!.\, x$ et ne contient que des éléments inférieurs ou égaux à $x \cdot\!.\, x$.

La classe X de x modulo $\mathcal{A}_x$ est l'ensemble des éléments x_1, tels que $x \,.\!\cdot\, x_1 = x \,.\!\cdot\, x$. On a

$$x_1(x \,.\!\cdot\, x) \subseteq x, \qquad x_1 \subseteq x \cdot\!.\, (x \,.\!\cdot\, x) = x.$$

Donc X n'est constitué que par des éléments inférieurs ou égaux à x.

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence définie dans A, régulière à droite pour la multiplication, et régulière pour l'union, et dont la classe X de x ne contient que des éléments inférieurs ou égaux à x :

(★) Théorème I, 1 [6]. — *$\mathcal{R}$ est plus fine que $\mathcal{A}_x$.*

Démonstration. — Soit $a \equiv b(\mathcal{R})$,

$$x = a(x \,.\!\cdot\, a) \cup x \equiv b(x \,.\!\cdot\, a) \cup x(\mathcal{R}),$$
$$b(x \,.\!\cdot\, a) \subseteq x \qquad \text{et} \qquad x \,.\!\cdot\, a \subseteq x \,.\!\cdot\, b.$$

De même, on verrait que

$$x \,.\!\cdot\, b \subseteq x \,.\!\cdot\, a.$$

(★) Théorème I, 2. — *Si une classe A′ modulo $\mathcal{R}$ contient un résiduel à gauche ω de x, cet élément est maximal dans sa classe, donc une classe ne peut contenir plus d'un résiduel à gauche de x.*

Démonstration. — Soit $a \equiv \omega(\mathcal{R})$ avec $\omega = x \cdot\!.\, \mu$, on a $a\mu \equiv \omega\mu(\mathcal{R})$, mais $\omega\mu \subseteq x$, donc $a\mu \subseteq x$ et $a \subseteq x \cdot\!.\, \mu = \omega$.

(★) Théorème I, 3. — *Si a appartient à la classe, A′ modulo $\mathcal{A}_x$, l'élément $\bar{a} = x \cdot\!.(x \,.\!\cdot\, a)$ est équivalent à a et est élément maximal de A′.*

Démonstration :

$$x \,.\!\cdot\, \bar{a} = x \,.\!\cdot\, [x \cdot\!.\, (x \,.\!\cdot\, a)] = x \,.\!\cdot\, a$$

et, d'autre part, $\bar{a}$ est résiduel à gauche de x.

---

[6] Les théorèmes précédés de (★) se démontrent en gros comme dans [16], avec des modifications le plus souvent évidentes.

Section 3 : Éléments nomaux.

Dans toute la suite, nous supposerons que x est équirésiduel. Cherchons la condition pour que $\mathfrak{A}_x = \mathfrak{A}_{x:\mu}$, $\forall \mu \in A$. Il nous arrivera de noter $x \,.\!\cdot\, \mu = x \cdot\!. \,\mu$ par $x : \mu$, pour mettre en évidence le fait que x est équirésiduel.

Si $\mathfrak{A}_x = \mathfrak{A}_{x:\mu}$, la classe de x dans $\mathfrak{A}_{x:\mu}$ ne contient que des éléments inférieurs ou égaux à x. D'après le théorème I, 3, où l'on fait $a = x$ et $x = x : \mu$,

$$\bar{x} = (x : \mu) \cdot\!. \,[(x : \mu) \,.\!\cdot\, x]$$

est dans la même classe que x modulo $\mathfrak{A}_{x:\mu}$ et est maximal dans sa classe, donc on a $\bar{x} = x$:

$$x = (x : \mu) \cdot\!. \,[(x : \mu) \,.\!\cdot\, x]. \tag{1}$$

Réciproquement, si l'on a la relation (1), la classe de x dans $\mathfrak{A}_{x:\mu}$ est formée d'éléments inférieurs à x, puisque x est résiduel à gauche de $x : \mu$. Donc, d'après le théorème I, 1, appliqué à $\mathcal{R} = \mathfrak{A}_{x:\mu}$, $\mathfrak{A}_{x:\mu}$ est plus fine que $\mathfrak{A}_x$, c'est-à-dire que $a\mathfrak{A}_{x:\mu}b$ entraîne $a\mathfrak{A}_x b$.

Mais réciproquement, on a toujours $a\mathfrak{A}_x b$ entraîne $a\mathfrak{A}_{x:\mu}b$, car

$$(x : \mu) \,.\!\cdot\, a = x \,.\!\cdot\, \mu a = x \cdot\!. \,\mu a = (x \cdot\!. \,a) \cdot\!. \,\mu = (x \cdot\!. \,b) \cdot\!. \,\mu = x \cdot\!. \,\mu b = x \,.\!\cdot\, \mu b,$$

donc

$$(x \cdot\!. \,\mu) \,.\!\cdot\, a = (x : \mu) \,.\!\cdot\, b.$$

La relation (1) s'écrit aussi

$$x = x \cdot\!. \,e = x \cdot\!. \,(x \,.\!\cdot\, \mu x)\mu$$

ou encore

$$(x : \mu x)\mu \equiv e({}_x\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_x). \tag{2}$$

Définitions I, 1. — Nous dirons que l'élément x de A est *nomal à droite* si :

1° x est équirésiduel;

2° $\mathfrak{A}_x = \mathfrak{A}_{x:\mu}$, $\quad \forall \mu \in A$.

Nous dirons que l'élément x de A est *nomal à gauche* si :

1° x est équirésiduel;

2° ${}_x\mathfrak{A} = {}_{x:\mu}\mathfrak{A}$, $\quad \forall \mu \in A$.

— Nous dirons qu'un élément x de A est *nomal*, s'il est à la fois nomal à droite et nomal à gauche.

Nous venons de montrer le théorème :

THÉORÈME I, 4. — *Pour qu'un élément x de* A *soit nomal à droite, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient simultanément réalisées :*

1° *x est équirésiduel;*

2° $(x : \mu x)\mu \equiv e(\mathfrak{A}_x)$, $\forall \mu \in A$.

THÉORÈME I, 5. — *Pour qu'un élément x de A soit nomal à droite, il suffit que les conditions suivantes soient simultanément réalisées :*

1° *x est équirésiduel;*

2° *Il existe un élément k de A, tel que $x = x : xk$;*

3° *Le résiduel à gauche par lui-même de tout résiduel (à droite ou à gauche) de x est égal à $x : x$.*

Démonstration. — On a

$$(x : k'x) \cdot. (x : k'x) = x .\cdot x, \qquad \forall k' \in A,$$

d'où

$$x \cdot. (x : k'x) k'x = (x : x) \cdot. (x : k'x) k' = (x : x) \cdot. e$$

et

$$(x : k'x) k' \equiv e \qquad {}_{x:x}\mathfrak{A}.$$

D'autre part, on a l'égalité

$$(x : x) .\cdot [(x : x) \cdot. ((x : x) .\cdot k)] = (x : x) .\cdot k,$$

or,

$$(x : x) .\cdot k = x .\cdot xk = x,$$

pour l'élément k particulier du théorème. Par suite,

$$(x : x) .\cdot [(x : x) \cdot. x] = x,$$

x est donc un résiduel à droite de $x : x$, donc est maximum dans sa classe modulo ${}_{x:x}\mathfrak{A}$ (th. I, 2). Par suite, ${}_{x:x}\mathfrak{A}$ est plus fine que ${}_{x}\mathfrak{A}$ (th. I, 1) et, par suite,

$$\mathfrak{A}_x = {}_x\mathfrak{A} = {}_{x:x}\mathfrak{A},$$

car $a_x\mathfrak{A}b$ entraîne $a_{x:x}\mathfrak{A}b$; en effet,

$$x .\cdot a = x .\cdot b \qquad \text{entraîne} \quad (x .\cdot a) .\cdot x = (x .\cdot b) .\cdot x,$$

donc

$$x .\cdot ax = x .\cdot bx \qquad \text{et} \qquad (x : x) \cdot. a = (x : x) \cdot. b.$$

De la relation

$$(x : k'x) k' \equiv e({}_{x:x}\mathfrak{A}),$$

on déduit donc

$$(x : k'x) k' \equiv e(\mathfrak{A}_x) \quad \text{quel que soit } k' \in A,$$

et, par suite, x est nomal à droite (th. I, 4).

THÉORÈME I, 6. — *Pour que le gerbier* A *contienne un élément nomal à droite (à gauche), il faut et il suffit que l'ensemble des éléments idempotents positifs admette un élément maximal, qui soit équirésiduel.*

Démonstration. — Remarquons d'abord que $\forall y \in D$, $y .\cdot y$ et $y \cdot. y$ sont des idempotents.

Montrons, par exemple, que $(y \cdot\!. \, y)^2 = y \cdot\!. \, y$.

Posons

$$z = y \cdot\!. \, y, \qquad zy \subseteq y, \qquad z^2 y \subseteq zy \subseteq y \qquad \text{et} \qquad z^2 \subseteq y \cdot\!. \, y = z;$$

mais $z \supseteq e$, car $ey \subseteq y$, donc $z^2 \supseteq z$ et $z^2 = z$.

Ceci étant, si x est nomal à droite, on a

$$y^2 = y \qquad \text{entraîne} \quad (x : y) .\!\cdot y = x .\!\cdot y^2 = x .\!\cdot y,$$

d'où

$$y(x .\!\cdot y) \subseteq x .\!\cdot y \qquad \text{et} \qquad y \subseteq (x : y) \cdot\!. \, (x : y).$$

Mais $(x : y) \cdot\!. \, (x : y)$ est maximal dans la classe de e modulo $\mathcal{C}_{x:y} = \mathcal{C}_x$, donc

$$(x : y) \cdot\!. \, (x : y) = x : x \qquad \text{et} \qquad y \subseteq x : x,$$

ce qui montre que $x : x$ est l'idempotent maximal.

Montrons que cet idempotent maximal $x : x$ est symétrique ; d'abord $a \mathcal{C}_{x:x} b$ entraîne $a_{x:x} \mathcal{C} b$, car $a \mathcal{C}_{x:x} b$ est équivalent à $a \mathcal{C}_x b$, donc

$$(x : x) \cdot\!. \, a = x : ax = x .\!\cdot ax = (x .\!\cdot a) .\!\cdot x = (x .\!\cdot b) .\!\cdot x = x .\!\cdot bx = (x : x) \cdot\!. \, b.$$

Ensuite $a_{x:x} \mathcal{C} b$ entraîne $a \mathcal{C}_{x:x} b$, car

$$(x : x) \cdot\!. \, a = (x : x) \cdot\!. \, b \qquad \text{entraîne} \quad x : ax = x : bx = u,$$

mais la condition de nomalité à droite fournit (th. I, 4)

$$(x : ax) a \equiv (x : bx) b \equiv e(\mathcal{C}_x),$$

donc

$$x .\!\cdot ua = x .\!\cdot ub, \qquad (x .\!\cdot u) .\!\cdot a = (x .\!\cdot u) .\!\cdot b \qquad \text{et} \qquad a \mathcal{C}_{x:u} b,$$

c'est-à-dire, x étant nomal à droite $a \mathcal{C}_x b$ et $a \mathcal{C}_{x:x} b$.

Montrons enfin, qu'un idempotent maximal symétrique est équirésiduel.

Soit θ l'idempotent maximal supposé de plus symétrique. La classe de e dans $\mathcal{C}_\theta = {}_\theta\mathcal{C}$ a pour élément maximal

$$\theta .\!\cdot \theta = \theta \cdot\!. \, \theta = \theta.$$

On a

$$a\theta \equiv a \equiv \theta a (\mathcal{C}_\theta = {}_\theta\mathcal{C}), \qquad \theta .\!\cdot \theta a = \theta .\!\cdot a = \theta \cdot\!. \, a\theta$$

et

$$\theta \cdot\!. \, \theta a = \theta \cdot\!. \, a\theta = \theta .\!\cdot a.$$

Posons $\theta .\!\cdot a\theta = x$, $\theta \cdot\!. \, \theta a = y$. On a successivement

$$a\theta x \subseteq \theta, \qquad \theta a \theta x \subseteq \theta, \qquad \theta a \theta x \theta a \theta \subseteq \theta a \theta, \qquad x \theta a \theta \subseteq \theta a \theta .\!\cdot \theta a \theta \subseteq \theta,$$
$$x\theta a \subseteq \theta \cdot\!. \, \theta = \theta \qquad \text{et} \qquad x \subseteq y;$$

de même, on montrerait que $x \supseteq y$, donc

$$\theta .\!\cdot a\theta = \theta \cdot\!. \, \theta a \qquad \text{et} \qquad \theta .\!\cdot a = \theta \cdot\!. \, a, \qquad \forall a \in A.$$

Nous avons donc prouvé que si A admet un élément nomal à droite x, il admet un idempotent maximal qui est équirésiduel, à savoir : $x:x$.

Réciproquement, si A admet un idempotent maximal équirésiduel θ, cet élément vérifie les trois conditions du théorème I, 5 :

Pour la première, il est immédiat de le voir;

Pour la seconde, il suffit de prendre $k=e$;

Pour la troisième, il suffit de se rappeler que $(\theta:p)\cdot.(\theta:p)$ est un idempotent, $\forall p\in A$, et que $(\theta:p)p\subseteq\theta$, donc

$$\theta:[(\theta:p)p]\supseteq\theta:\theta=\theta \qquad \text{et} \qquad (\theta:p)\cdot.(\theta:p)\supseteq\theta:\theta=\theta.$$

Corollaire. — *Un gerbier* A *contient un élément nomal d'un côté si, et seulement si, il contient un élément nomal, à savoir l'idempotent maximal de* A.

Définition I, 2. — Nous appelons gerbier *nomal* un gerbier A contenant un élément nomal.

Théorème I, 7. — *Si un gerbier* A *admet un idempotent maximal commutant avec tous les éléments de* A, *c'est un gerbier nomal.*

Démonstration. — Il suffit de montrer que l'idempotent maximal θ est équirésiduel, d'après ce qui a été vu à la démonstration du théorème I, 6.

Premier point : Soit $c\in A$, tel que $c^2\subseteq c\theta=\theta c$, $c\supseteq\theta$. On a alors $c=\theta$. En effet,

$$(c\theta)^2=c^2\theta^2=c^2\theta\subseteq c\theta.$$

Posons $c\theta=y$, on a $y^2\subseteq y$.

Mais de $c\supseteq\theta$ on déduit

$$c\theta\supseteq\theta^2=\theta\supseteq e \qquad \text{et} \qquad y\supseteq e,$$

donc

$$y^2=y \qquad \text{et} \qquad c\theta\subseteq\theta, \qquad \text{soit} \quad c\theta=\theta.$$

Mais $\theta\supseteq e$, donc $\theta c\supseteq c$ et $\theta\supseteq c$, donc $\theta=c$.

Deuxième point : On a

$$az\subseteq\theta \leftrightarrow aza\subseteq\theta a \leftrightarrow za\subseteq\theta,$$

c'est-à-dire

$$\theta\,.\cdot\,a=\theta\,\cdot.\,a, \qquad \forall a\in A.$$
$$az\subseteq\theta \qquad \text{entraîne} \quad aza\subseteq\theta a.$$

Réciproquement, $aza\subseteq\theta a$ entraîne $azaz\subseteq\theta az$, donc

$$(az)^2\subseteq\theta(az).$$

Posons $y'=az\cup\theta$; on a

$$y'^2=(az)^2\cup az\theta\cup\theta^2=\theta az\cup\theta^2=\theta y'.$$

Si, dans la démonstration du premier point, on prend $c = y'$, on peut écrire $\theta = y'$ et, par suite, $az \subseteq \theta$. On démontrerait de même que $\theta a \supseteq aza$ est équivalent à $za \subseteq \theta$.

Remarque. — Nous verrons dans la deuxième partie de ce chapitre que $\mathcal{O}$ étant un ordre maximal, les $\mathcal{O}$-idéaux forment un gerbier résidué à élément unité $\mathcal{O}$, qui est l'idempotent maximal. Ce gerbier est donc nomal.

(★) Théorème I, 8. — *Si dans un gerbier* A, *une congruence* $\mathcal{R}$ *est telle que* $A/\mathcal{R}$ *soit un groupe, et qu'il existe un élément* α *maximal dans sa classe, alors* $\mathcal{R} = \mathcal{C}_\alpha = {}_\alpha\mathcal{C}$ *et le gerbier est nomal.*

Démonstration. — *Premier point :* Montrons d'abord que $\alpha \cdot\!\!.\, \alpha = \alpha \,.\!\!\cdot\, \alpha$ est élément maximal de la classe de $e(\mathcal{R})$.

En effet, soit $e_1 \equiv e(\mathcal{R})$, on a $e_1\alpha \equiv \alpha(\mathcal{R})$. Donc

$$e_1\alpha \subseteq \alpha \qquad \text{et} \qquad e_1 \subseteq \alpha \cdot\!\!.\, \alpha.$$

D'autre part, $\alpha = (\alpha \cdot\!\!.\, \alpha)\alpha$, car, en posant $\alpha \cdot\!\!.\, \alpha = x$, on a $x\alpha \subseteq \alpha$, et comme on vient de voir

$$e \subseteq \alpha \cdot\!\!.\, \alpha, \qquad \alpha \subseteq (\alpha \cdot\!\!.\, \alpha)\alpha,$$

on déduit $\alpha = (\alpha \cdot\!\!.\, \alpha)\alpha$; par suite,

$$e_1\alpha \equiv (\alpha \cdot\!\!.\, \alpha)\alpha(\mathcal{R}), \qquad \text{d'où} \qquad e_1 \equiv \alpha \cdot\!\!.\, \alpha(\mathcal{R}),$$

puisque $A/\mathcal{R}$ est un groupe. On prouverait de même que

$$e_1 \equiv \alpha \,.\!\!\cdot\, \alpha(\mathcal{R}) \qquad \text{et} \qquad \alpha \,.\!\!\cdot\, \alpha = \alpha \cdot\!\!.\, \alpha.$$

Deuxième point : Étant donné une congruence $\mathcal{R}$, telle que la classe de y ne contienne que des éléments inférieurs ou égaux à y, si toute classe modulo $\mathcal{R}$ contient un résiduel à gauche (respectivement à droite) de y, on a $\mathcal{R} = \mathcal{C}_y$ (respectivement $\mathcal{R} = {}_y\mathcal{C}$).

Nous entendrons par congruence une équivalence régulière par rapport à la multiplication et à l'union de A. Si le résultat n'était pas vrai, une classe modulo $\mathcal{C}_y$ se décomposerait en plusieurs classes modulo $\mathcal{R}$, car on a d'après le théorème I, 1, $a\mathcal{R}b \to a\mathcal{C}_y b$. Alors cette classe contiendrait plusieurs résiduels à gauche distincts de y, ce qui est impossible (th. I, 3).

Troisième point : Soit une classe A′ modulo $\mathcal{R}$ et $a \in A'$, il existe $a^\star \in A$, tel que $aa^\star \equiv a^\star a \equiv e(\mathcal{R})$. On a donc

$$aa^\star \subseteq \alpha \cdot\!\!.\, \alpha = \alpha \,.\!\!\cdot\, \alpha,$$
$$a^\star a \subseteq \alpha \cdot\!\!.\, \alpha = \alpha \,.\!\!\cdot\, \alpha,$$

donc

$$a^\star \subseteq (\alpha \,.\!\!\cdot\, \alpha) \,.\!\!\cdot\, a \qquad \text{et} \qquad aa^\star \subseteq a[(\alpha \,.\!\!\cdot\, \alpha) \,.\!\!\cdot\, a] \subseteq \alpha \,.\!\!\cdot\, \alpha,$$

ce qui prouve que

$$a[(\alpha \cdot. \alpha) .\cdot a] \equiv e(\mathcal{R}),$$

puisque chaque classe de $(\mathcal{R})$ est convexe. Ceci montre que

$$[(\alpha \cdot. \alpha) .\cdot a) \in A'^{-1}$$

inverse de A′ dans le groupe $A/\mathcal{R}$. On déduit que

$$(\alpha \cdot. \alpha) .\cdot [(\alpha \cdot. a) .\cdot a] \in A';$$

toute classe contient un résiduel à droite de α et même de $\alpha .\cdot \alpha = \alpha \cdot. \alpha$. On démontrerait de même que toute classe de $\mathcal{R}$ contient un résiduel à gauche de α et même de $\alpha .\cdot \alpha$. On a donc, d'après le deuxième point,

$$\mathcal{R} = \mathfrak{A}_\alpha = {}_\alpha\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_{\alpha : \alpha} = {}_{\alpha : \alpha}\mathfrak{A}.$$

Quatrième point : $\beta = \alpha .\cdot \alpha = \alpha \cdot. \alpha$ est un idempotent maximal symétrique : On a vu $\mathcal{R} = \mathfrak{A}_\beta = {}_\beta\mathfrak{A}$. De plus, dans $A/\mathcal{R}$ la classe de β est la classe de l'élément unité e, et c'est aussi la classe de tous les éléments idempotents qui sont donc inférieurs à β (premier point). Nous avons vu, enfin, qu'un idempotent maximal symétrique est équirésiduel) (démonstration du théorème I, 6). Le gerbier A est donc nomal.

(★) Théorème I, 9. — *Soit un gerbier* A *nomal,* α *son idempotent maximal;* $A/\mathfrak{A}_\alpha$ *est un groupe.*

Démonstration. — Posons $a_1 = \alpha .\cdot a\alpha$. On a

$$\alpha .\cdot a_1 a = \alpha .\cdot (\alpha .\cdot a\alpha) a = \alpha .\cdot e,$$

d'après la condition de nomalité à droite. Donc $a_1 a \equiv e(\mathfrak{A}_\alpha)$; de même, on a $aa_1 \equiv e(\mathfrak{A}_\alpha)$. La classe de a_1 est l'inverse de la classe de a et $A/\mathfrak{A}_\alpha$ est un groupe.

Partie II.

Section 1 : Les définitions d'Asano.

Asano a étudié d'une part les anneaux, qui sont des ordres maximaux [1], et d'autre part les demi-groupes, qui sont des ordres maximaux [3]. Ces études sont bâties sur deux séries de définitions analogues. Nous donnons ici les définitions de base d'Asano, en nous plaçant dans le cas des demi-groupes. Les définitions correspondantes du cas des anneaux se laissent facilement imaginer, à partir de celles-ci.

Définition II, 1. — Soit $\mathcal{O}$ un demi-groupe, et soit M le demi-groupe des éléments de M simplifiables des deux côtés. Soit M′ un sous-demi-groupe de M. Un demi-groupe S est dit demi-groupe quotient à gauche de $\mathcal{O}$ selon M′, si :

1° S contient $\mathcal{O}$;
2° S a un élément unité 1 ;
3° tout élément α de M′ a un inverse α^{-1} dans S : $\alpha\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\alpha = 1$;
4° Pour tout élément x de S, il existe α, $\alpha \in M'$, tel que $\alpha x \in \mathcal{O}$.

Remarque II, 1. — La définition d'un demi-groupe quotient à droite de $\mathcal{O}$ selon M′ s'imagine sans peine. On démontre que S existe, étant donnés $\mathcal{O}$ et M′ si, et seulement si, pour un élément a de $\mathcal{O}$ quelconque, et pour un élément α de M′ quelconque, il existe des éléments a' et α', $a' \in \mathcal{O}$, $\alpha' \in M'$, tels que $a'\alpha = \alpha' a$ [2]. Ce demi-groupe quotient à gauche de $\mathcal{O}$ selon M′ est alors déterminé à un isomorphisme près par $\mathcal{O}$ et M′.

Remarque II, 2. — Si S est un demi-groupe quotient à gauche de $\mathcal{O}$ selon M′, alors étant donnés n éléments $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ de M′, il existe des éléments de $\mathcal{O}$, $c_1, \ldots, c_n$, tels que

$$\gamma = c_1\alpha_1 = c_2\alpha_2 = \ldots = c_n\alpha_n, \qquad \text{avec} \quad \gamma \in M'.$$

Définition II, 2. — Si $M' = M$, S est appelé le *demi-groupe quotient à gauche de* $\mathcal{O}$.

Si S est demi-groupe quotient à gauche et à droite de $\mathcal{O}$, S est appelé le *demi-groupe quotient de* $\mathcal{O}$.

Définition II, 3. — Un sous-ensemble $\mathcal{O}$ de S est appelé un *ordre* de S, si :

1° $\mathcal{O}$ forme un sous-demi-groupe avec élément unité;
2° S est un demi-groupe quotient de $\mathcal{O}$ selon $S^\star \cap \mathcal{O}$, $S^\star$ désignant l'ensemble de tous les éléments de S ayant un inverse.

(Dans la suite, un élément de S ayant un inverse, sera dit *régulier*.)

Définition II, 4. — Soit $\mathcal{O}$ un ordre de S, un sous-ensemble A de S est appelé un *$\mathcal{O}$-ensemble à gauche* (à droite), si l'on a $\mathcal{O}A \subseteq A$ ($A\mathcal{O} \subseteq A$).

Définition II, 5. — Un $\mathcal{O}$-ensemble à gauche (à droite) A est appelé un *$\mathcal{O}$-idéal à gauche* (à droite) de S, si A contient un élément régulier de S et s'il existe un élément régulier λ tel que $A\lambda \subseteq \mathcal{O}$ ($\lambda A \subseteq \mathcal{O}$). A est appelé un *$\mathcal{O}$-$\mathcal{O}'$-idéal*, s'il est un $\mathcal{O}$-idéal à gauche et un $\mathcal{O}'$-idéal à droite. Un $\mathcal{O}$-$\mathcal{O}$-idéal est appelé aussi un *$\mathcal{O}$-idéal bilatère* et même plus brièvement un *$\mathcal{O}$-idéal*.

Remarque II, 3. — On peut supposer dans la définition II, 5 que λ appartient à $\mathcal{O}$. Si $\mathcal{O}$ est un anneau commutatif noethérien, les $\mathcal{O}$-idéaux d'un côté, les $\mathcal{O}$-idéaux bilatères, coïncident avec les idéaux fractionnaires de $\mathcal{O}$.

Remarque II, 4. — Soient A et B deux $\mathcal{O}$-idéaux à gauche de S (à droite, bilatères). Alors $A \cup B$ et $A \cap B$, $\cup$ et $\cap$ ayant le sens habituel, sont des $\mathcal{O}$-idéaux à gauche de S (à droite, bilatères) : il suffit de se reporter aux définitions et à la remarque II, 2.

Soient A un $\mathcal{O}$-$\mathcal{O}'$-idéal, B un $\mathcal{O}'$-$\mathcal{O}''$-idéal, $AB = \{ab,\ a \in A,\ b \in B\}$ est un $\mathcal{O}$-$\mathcal{O}''$-idéal : il existe, en effet, μ tel que $B\mu \subseteq \mathcal{O}'$, donc $AB\mu \subseteq A\mathcal{O}' \subseteq A$. et il existe λ tel que $A\lambda \subseteq \mathcal{O}$, donc, $AB\mu\lambda \subseteq \mathcal{O}$, $\mu\lambda$ étant régulier comme λ et μ. En particulier, le produit de deux $\mathcal{O}$-idéaux est un $\mathcal{O}$-idéal.

Définition II, 6. — Deux sous-ensembles M et N de S sont dits *équivalents*, s'il existe des éléments réguliers λ, μ, λ', μ', tels que

$$\lambda N \mu \subseteq M \qquad \text{et} \qquad \lambda' M \mu' \subseteq N.$$

Remarque II, 5. — En particulier, deux ordres $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ de S sont dits équivalents, s'ils le sont en tant que sous-ensembles de S. Dans ce cas, λ et μ, éléments réguliers satisfaisant à $\lambda\mathcal{O}'\mu \subseteq \mathcal{O}$ peuvent être pris dans $\mathcal{O}$ (et de même λ' et μ' dans $\mathcal{O}'$), car il existe des éléments réguliers α et β de $\mathcal{O}$, tels que $\alpha\lambda$ et $\mu\beta$ appartiennent à $\mathcal{O}$. On a alors

$$\alpha\lambda\mathcal{O}'\mu\beta \subseteq \alpha\mathcal{O}\beta \subseteq \mathcal{O}.$$

Théorème II, 1 (Asano). — *Soit* A *un $\mathcal{O}$-idéal à gauche, formons*

$$\mathcal{O}_l = \{x,\ x \in S,\ xA \subseteq A\} \qquad \textit{et} \qquad \mathcal{O}_r = \{x,\ x \in S,\ Ax \subseteq A\}.$$

$\mathcal{O}_l$ est un ordre contenant $\mathcal{O}$ et équivalent à $\mathcal{O}$. $\mathcal{O}_l$ est de plus un $\mathcal{O}$-idéal gauche. $\mathcal{O}_r$ est un ordre équivalent à $\mathcal{O}$ et A *est un $\mathcal{O}_l$— $\mathcal{O}_r$-idéal.*

Démonstration. — $\mathcal{O}_l$ et $\mathcal{O}_r$ sont des demi-groupes contenant 1. Si λ et μ sont des éléments réguliers, tels que $\mu \in A$, $A\lambda \subseteq \mathcal{O}$, on peut écrire

$$\mathcal{O}_l\mu\lambda \subseteq \mathcal{O}_l A\lambda \subseteq A\lambda \subseteq \mathcal{O}.$$

De plus, $\mathcal{O}$ est contenu dans $\mathcal{O}_l$: $\mathcal{O}_l$ est donc un ordre équivalent à $\mathcal{O}$ et c'est aussi un $\mathcal{O}$-idéal à gauche.

On peut écrire successivement

$$A\lambda A \subseteq \mathcal{O}A \subseteq A, \quad \lambda A \subseteq \mathcal{O}_r \qquad \text{et} \qquad A\lambda \subseteq \mathcal{O}_l, \quad \lambda\mathcal{O}_\mu \subseteq \lambda A \subseteq \mathcal{O}_r.$$

Montrons que le demi-groupe, contenant 1, $\mathcal{O}_r$ est un ordre : pour tout x appartenant à S, il existe α, appartenant à $S^\star \cap \mathcal{O}$, tel que $a = \alpha\mu x \mu^{-1}$ appartient à $\mathcal{O}$. Par suite, en posant

$$\alpha' = \lambda\alpha\mu, \qquad \alpha' \in S^\star \cap \mathcal{O}_r,$$

$a' = \lambda a \mu$ appartient à $\mathcal{O}_r$, et l'on a $\alpha' x = a'$. De même, pour tout x appartenant à S, il existe $\alpha'' \in S^\star \cap \mathcal{O}_r$, tel que $x\alpha''$ appartient à $\mathcal{O}_r$.

On a aussi

$$\mu\mathcal{O}_r \subseteq A\mathcal{O}_r \subseteq A, \qquad \text{donc} \quad \mu\mathcal{O}_r\lambda \subseteq A\lambda \subseteq \mathcal{O}$$

et, enfin, $A\mathcal{O}_r \subseteq A$ et $\mathcal{O}_l A \subseteq A$. Tout ce qui précède montre que $\mathcal{O}_r$ est un ordre équivalent à $\mathcal{O}$ et que A est un $\mathcal{O}_l$-$\mathcal{O}_r$-idéal.

Définition II, 7. — $\mathcal{O}_l$ et $\mathcal{O}_r$ sont respectivement appelés *ordre à gauche* et *ordre à droite* de A.

Définition II, 8. — Un $\mathcal{O}$-idéal à gauche (à droite) A est dit *entier*, si c'est un demi-groupe, ou encore, si l'on a $A^2 \subseteq A$.

Remarque II, 6. — Les conditions suivantes sont équivalentes : 1° $A \subseteq \mathcal{O}_l$; 2° $A^2 \subseteq A$; 3° $A \subseteq \mathcal{O}_r$.

Définition II, 9. — Un ordre de S est dit un *ordre maximal*, si tout ordre le contenant et équivalent à lui, lui est égal.

THÉORÈME II, 2 (Asano). — *Soit $\mathcal{O}$ un ordre de* S, *les conditions suivantes sont équivalentes :*

1° *$\mathcal{O}$ est un ordre maximal;*

2° *Il n'existe pas de $\mathcal{O}$-idéal à gauche (à droite) entier, contenant $\mathcal{O}$, qui ne soit pas égal à $\mathcal{O}$;*

3° *L'ordre à gauche d'un $\mathcal{O}$-idéal à gauche quelconque est $\mathcal{O}$, et l'ordre à droite d'un $\mathcal{O}$-idéal à droite quelconque est $\mathcal{O}$;*

4° *L'ordre à droite et l'ordre à gauche d'un $\mathcal{O}$-idéal bilatère quelconque est $\mathcal{O}$.*

Démonstration. — La condition 1 entraîne la condition 2. Celle-ci entraîne la condition 3, qui entraîne la condition 4. Montrons que la condition 4 entraîne la condition 1. D'abord, sous l'hypothèse exprimée par la condition 4, si M est un $\mathcal{O}$-ensemble à gauche contenu dans S et tel qu'on ait $\lambda M \subseteq \mathcal{O}$, $\lambda \in S^* \cap \mathcal{O}$; on a aussi $M\lambda \subseteq \mathcal{O}$. En effet, on peut écrire successivement

$$\mathcal{O}\lambda\mathcal{O}M\lambda \subseteq \mathcal{O}\lambda M\lambda \subseteq \mathcal{O}\lambda \subseteq \mathcal{O}\lambda\mathcal{O}, \qquad \text{donc} \quad M\lambda \subseteq \mathcal{O},$$

Soit maintenant $\mathcal{O}'$ un ordre équivalent à $\mathcal{O}$ et contenant $\mathcal{O}$: il existe des éléments λ et μ appartenant à $S^* \cap \mathcal{O}$, tels que $\lambda\mathcal{O}'\mu \subseteq \mathcal{O}$. D'après ce qu'on vient de voir, on a $\mathcal{O}'\mu\lambda \subseteq \mathcal{O}$ et, de même, $\mu\lambda\mathcal{O}' \subseteq \mathcal{O}$. $\mathcal{O}'$ est donc un $\mathcal{O}$-idéal bilatère dont l'ordre à gauche est, par suite, $\mathcal{O}$. Mais de $\mathcal{O}'\mathcal{O}' \subseteq \mathcal{O}'$, on déduit

$$\mathcal{O}' \subseteq \mathcal{O} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{O}' = \mathcal{O}.$$

Remarque II, 7. — D'après ce théorème et la remarque II, 6, un $\mathcal{O}$-idéal à gauche (à droite, bilatère) est entier si, et seulement si, il est contenu dans $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}$ étant un ordre maximal. De plus, chaque $\mathcal{O}$-ensemble à gauche équivalant à un ordre maximal $\mathcal{O}$ et contenant un élément régulier est un $\mathcal{O}$-idéal à gauche se reporter au début de la démonstration du théorème II, 2).

Remarque II, 8. — Comme il est équivalent d'écrire $Ac \in \mathcal{O}_l$, ou $AcA \subseteq A$, ou $cA \subseteq \mathcal{O}_r$, A étant un $\mathcal{O}$-idéal à gauche (à droite) quelconque, $\mathcal{O}$ étant un ordre quelconque de S, $\mathcal{O}_l$ et $\mathcal{O}_r$ étant respectivement les ordres à gauche et à droite de A, l'ensemble noté A^{-1} de tous les c de S, tels que $AcA \subseteq A$ est aussi l'ensemble de tous les éléments c de S, tels que $Ac \subseteq \mathcal{O}_l$, ou encore l'ensemble de tous les éléments c de S, tels que $cA \subseteq \mathcal{O}_r$. On pourra vérifier que A^{-1} est un $\mathcal{O}_r$-$\mathcal{O}_l$-idéal. En prenant la notation des résiduels,

$$A^{-1} = \mathcal{O}_l \,.\!\cdot A = \mathcal{O}_r \cdot\!. \, A.$$

Définition II, 10, — Un ordre $\mathcal{O}$ de S est dit *régulier*, quand pour chaque élément x de S, il existe des éléments réguliers α et β de $\mathcal{O}$, tels que

$$x\mathcal{O}\alpha \subseteq \mathcal{O}, \qquad \beta\mathcal{O}x \subseteq \mathcal{O}.$$

Théorème II, 3 (Asano). — *Soit $\mathcal{O}$ un ordre de* S, *les conditions suivantes sont équivalentes :*

1° *$\mathcal{O}$ est régulier*;

2° *Pour chaque x, $x \in$ S, il existe un $\mathcal{O}$-idéal bilatère contenant x;*

3° *Pour tout élément μ de $S^\star$, $\mathcal{O}\mu\mathcal{O}$ est un $\mathcal{O}$-idéal bilatère;*

4° *Si* M *est un sous-ensemble de* S *et si $\lambda M \mu \subseteq \mathcal{O}$, λ, $\mu \in S^\star \cap \mathcal{O}$, il existe des éléments réguliers α et β appartenant à $\mathcal{O}$, tels que $\alpha M \subseteq \mathcal{O}$ et $M\beta \supseteq \mathcal{O}$;*

5° *Pour chaque élément régulier α de $\mathcal{O}$, il existe α' et α'' appartenant à $S^\star \cap \mathcal{O}$, tels que $\mathcal{O}\alpha \supseteq \alpha'\mathcal{O}$, $\alpha\mathcal{O} \supseteq \mathcal{O}\alpha''$;*

6° *Chaque $\mathcal{O}$-idéal à gauche (à droite) contient un $\mathcal{O}$-idéal bilatère.*

Nous ne donnerons pas la démonstration de ce théorème qui n'offre pas de difficultés.

Définition II, 11. — Un $\mathcal{O}$-idéal à gauche (à droite) A est dit *normal*, $\mathcal{O}$ étant un ordre quelconque de S, si les ordres à gauche et à droite de $\mathcal{O}$ sont maximaux,

Section 2 : L'équivalence d'Artin dans les ordres maximaux.

Nous supposons que $\mathcal{O}$ est un ordre maximal de S. Alors, l'ordre à gauche (à droite) d'un $\mathcal{O}$-idéal à gauche (à droite) est $\mathcal{O}$; les $\mathcal{O}$-idéaux bilatères ont donc $\mathcal{O}$ pour ordre à droite et à gauche (th, II, 2).

Les $\mathcal{O}$-idéaux à gauche (à droite, bilatères) entiers sont ceux qui sont compris dans $\mathcal{O}$ (remarque II, 7).

Soit (L) le treillis des $\mathcal{O}$-idéaux à gauche, ($\mathfrak{T}$) le sous-treillis des $\mathcal{O}$-idéaux bilatères, (L$'$) le sous-treillis des $\mathcal{O}$-idéaux à gauche entiers, ($\mathfrak{T}'$) le sous-treillis des $\mathcal{O}$-idéaux bilatères entiers (remarque II, 4)

Dans la suite, nous noterons par une majuscule d'imprimerie un $\mathcal{O}$-idéal d'un côté, et par une majuscule italique un $\mathcal{O}$-idéal bilatère.

Considérons dans (L) la relation d'équivalence $\mathcal{R}$:

$$A,\ B \in (L), \qquad A \equiv B(\mathcal{R}) \rightleftharpoons A^{-1} = B^{-1}$$

(ou encore $\mathcal{O} .\cdot A = \mathcal{O} .\cdot B$) (remarque II, 8).

Soit $\mathcal{R}'$ la restriction de $\mathcal{R}$ à $(\mathcal{C})$

$$\mathcal{A},\ \mathcal{B} \in (\mathcal{C}), \qquad \mathcal{A} \equiv \mathcal{B}(\mathcal{R}') \rightleftharpoons \mathcal{A}^{-1} = \mathcal{B}^{-1}$$

(ou encore $\mathcal{O} .\cdot \mathcal{A} = \mathcal{O} \cdot . \mathcal{A} = \mathcal{O} .\cdot \mathcal{B} = \mathcal{O} \cdot . \mathcal{B}$) (remarque II, 8).

Soit $\overline{A}$ la classe de A, $A \in (L)$; $(\overline{L})$ sera l'ensemble quotient $(L)/\mathcal{R}$, $(\overline{L'})$ l'ensemble quotient $(L')/\mathcal{R}$, $(\overline{\mathcal{C}})$ et $(\overline{\mathcal{C}'})$ désigneront les ensembles quotients $(\mathcal{C})/\mathcal{R}'$ et $(\mathcal{C}')/\mathcal{R}'$ respectivement. $\overline{\overline{\mathcal{A}}}$ désignera la classe de $\mathcal{A}$ modulo $\mathcal{R}'$ [$\overline{\mathcal{A}}$ désignant la classe de $\mathcal{A}$ modulo $\mathcal{R}$, $\mathcal{A}$ étant considéré comme élément de (L)].

Section 3 : Propriétés de la relation $\mathcal{R}$ (Asano).

Propriété II, 1. — *Toute classe* $\overline{A}$ *a un élément maximal*

$$A^{\star} = (A^{-1})^{-1} = \mathcal{O} \cdot . (\mathcal{O} .\cdot A), \qquad A \in (L).$$

Démonstration. — En effet, d'abord, $(A^{-1})^{-1}$ est un $\mathcal{O}$-idéal à gauche comme A, puisque A^{-1} est un $\mathcal{O}$-idéal à droite (remarque II, 8). Ensuite,

$$\mathcal{O} .\cdot A = \mathcal{O} .\cdot A^{\star} = \mathcal{O} .\cdot [\mathcal{O} \cdot . (\mathcal{O} .\cdot A)],$$

d'après une propriété bien connue des résiduels. Enfin, $A \subseteq \mathcal{O} \cdot . (\mathcal{O} .\cdot A) = A^{\star}$. On déduit de cette propriété que $A^{\star\star} = \mathcal{O} \cdot . (\mathcal{O} .\cdot A^{\star})$ est égal à $A^{\star}$.

Propriété II, 2. — *$\mathcal{R}$ est régulière pour l'union de* (L); *dans* $(\overline{L})$ *on peut définir une union* $\overline{\cup}$

$$\overline{A}\ \overline{\cup}\ \overline{B} = \overline{A \cup B}, \qquad A,\ B \in (L),$$

et une relation d'ordre $\leqq$, $\overline{A} \leqq \overline{B}$ *si* $\overline{A}\ \overline{\cup}\ \overline{B} = \overline{B}$, *ou encore si* $A^{\star} \subseteq B^{\star}$.

Démonstration. — En effet, si $B \equiv B'(\mathcal{R})$, B, $B' \in (L)$, on a; quel que soit $A \in (L)$,

$$A \cup B \equiv A \cup B'(\mathcal{R}),$$

car

$$\mathcal{O} .\cdot (A \cup B) = (\mathcal{O} .\cdot A) \cap (\mathcal{O} .\cdot B) = (\mathcal{O} .\cdot A) \cap (\mathcal{O} .\cdot B') = \mathcal{O} .\cdot (A \cup B').$$

En particulier, $A \cup B \equiv A^{\star} \cup B^{\star}$ et cet élément est égal à $(A \cup B)^{\star}$.

Propriété II, 3. — *On peut définir dans* $(\overline{L})$ *une intersection* $\overline{\cap}$ *de la façon suivante :*

$$A,\ B \in (L), \qquad \overline{A}\ \overline{\cap}\ \overline{B} = \overline{A^{\star} \cap B^{\star}}.$$

De plus, $A^\star \cap B^\star$ *est élément maximal de sa classe* $\overline{A}\,\overline{\cap}\,\overline{B}$. *Ainsi* $(\overline{L})$ *est un treillis,* $(\overline{L}')$ *un sous-treillis de* $(\overline{L})$.

Démonstration. — Montrons que $\overline{A}\,\overline{\cap}\,\overline{B}$ est la borne inférieure de $\overline{A}$ et $\overline{B}$. Soit

$$\overline{C} \leqq \overline{A}, \qquad \overline{C} \leqq \overline{B}, \qquad \overline{C},\quad \overline{A},\quad \overline{B} \in (\overline{L}).$$

On en déduit

$$C^\star \subseteq A^\star, \qquad C^\star \subseteq B^\star \qquad \text{et} \qquad C^\star \subseteq A^\star \cap B^\star,$$

ou encore

$$\overline{C} \leqq \overline{A^\star \cap B^\star} = \overline{A}\,\overline{\cap}\,\overline{B}.$$

Montrons maintenant que $C = A^\star \cap B^\star$ est maximal dans sa classe : on a

$$C \subseteq A^\star, \qquad C \subseteq B^\star,$$

et

$$\mathcal{O} .\cdot C \supseteq \mathcal{O} .\cdot A^\star, \qquad \mathcal{O} \cdot. (\mathcal{O} .\cdot C) \subseteq \mathcal{O} \cdot. (\mathcal{O} .\cdot A^\star),$$

c'est-à-dire $C^\star \subseteq A^\star$, d'après les propriétés bien connues de la résiduation, et d'après la propriété II, 1. De même, on a $C^\star \subseteq B^\star$, donc $C^\star \subseteq A^\star \cap B^\star$ et, par ailleurs,

$$C^\star \supseteq A^\star \cap B^\star = C.$$

On en déduit donc

$$C^\star = A^\star \cap B^\star = C.$$

PROPRIÉTÉ II, 4. — $(\overline{\mathfrak{G}})$ *est un groupe réticulé commutatif.*

Démonstration. — Les $\mathcal{O}$-idéaux bilatères de l'ordre maximal $\mathcal{O}$ forment un gerbier G′ non commutatif en général, à élément unité $\mathcal{O}$, et résidué. En effet, A, $\mathcal{B}$ étant deux $\mathcal{O}$-idéaux bilatères, montrons que

$$A .\cdot \mathcal{B} = \{ x,\ x \in S,\ \mathcal{B}x \subseteq A \}$$

est un $\mathcal{O}$-idéal bilatère : en effet, $A .\cdot \mathcal{B}$ est un $\mathcal{O}$-ensemble à droite et à gauche. Si λ appartient à $S^\star \cap \mathcal{O}$, tel que $\mathcal{B}\lambda \subset \mathcal{O}$, et si μ appartient à $S^\star \cap A$, on a $\mathcal{B}\lambda\mu \subseteq A$, donc $A .\cdot \mathcal{B}$ possède l'élément régulier $\lambda\mu$. Si μ' appartient à $S^\star \cap \mathcal{B}$, et si λ' est un élément de $S^\star \cap \mathcal{O}$, tel que $\lambda' A \subseteq \mathcal{O}$, on peut écrire $\lambda'\mu' x \subseteq \mathcal{O}$, et ceci, compte tenu de la remarque II, 7, montre que $A .\cdot \mathcal{B}$ est un $\mathcal{O}$-idéal bilatère : de même, $A \cdot. \mathcal{B}$ est un $\mathcal{O}$-idéal bilatère.

Le début de la remarque II, 7 prouve que $\mathcal{O}$ est l'idempotent maximal de G′. Le théorème I, 7 prouve que G′ est un gerbier nomal, le théorème I, 9 montre que $(\overline{\mathfrak{G}})$ est un groupe.

$\mathcal{R}'$ est régulière, par rapport à l'union de $\mathfrak{G}$ d'après la propriété II, 2 et par rapport à l'intersection de $(\mathfrak{G})$: nous renvoyons pour ce dernier point à la démonstration d'Asano, ([3], p. 13). $(\overline{\mathfrak{G}})$ est un groupe réticulé.

Dans les sections suivantes, nous supposerons que (L′), donc $(\mathfrak{G}')$, donc $(\overline{\mathfrak{G}}')$ vérifient la condition de chaîne ascendante : d'après le théorème 12 de [9]

(p. 230), on en déduit que $(\overline{\mathcal{T}})$ est un groupe réticulé commutatif. Mais cette propriété est vraie, sans l'hypothèse supplémentaire que (L′) vérifie la condition de la chaîne ascendante, car $\overline{\mathcal{T}}$ est conditionnellement complet ([3], p. 10 et [4], p. 233).

Propriété II, 5. — $(\overline{\mathrm{L}}')$ *et* $(\overline{\mathcal{T}}')$ *sont des treillis modulaires.*

$(\overline{\mathcal{T}})$ *est un treillis distributif donc modulaire* ([9], p, 148), *donc aussi* $(\overline{\mathcal{T}}')$.

Démontrons que $(\overline{\mathrm{L}}')$ est modulaire : il faut montrer que :

$$\overline{\mathrm{A}},\ \overline{\mathrm{B}},\ \overline{\mathrm{C}} \in (\overline{\mathrm{L}}'),\quad \overline{\mathrm{A}} \leqq \overline{\mathrm{C}} \qquad \text{entraînent} \quad \overline{\mathrm{A}}\,\overline{\cup}\,(\overline{\mathrm{B}}\,\overline{\cap}\,\overline{\mathrm{C}}) = (\overline{\mathrm{A}}\,\overline{\cup}\,\overline{\mathrm{B}})\,\overline{\cap}\,\overline{\mathrm{C}}.$$

Or, par définition, $\overline{\mathrm{B}}\,\overline{\cap}\,\overline{\mathrm{C}}$ est égal à $\overline{\mathrm{B}^\star \cap \mathrm{C}^\star}$, en désignant par $\mathrm{A}^\star$, $\mathrm{B}^\star$, $\mathrm{C}^\star$ l'élément maximal de $\overline{\mathrm{A}}^\star$, $\overline{\mathrm{B}}^\star$, $\overline{\mathrm{C}}^\star$ respectivement. Donc le premier membre de l'égalité (1) est égal à $\overline{\mathrm{A}^\star \cup (\mathrm{B}^\star \cap \mathrm{C}^\star)}$. Comme on a $\mathrm{A}^\star \subseteq \mathrm{C}^\star$ et comme (L′) est modulaire, il est aussi égal à $\overline{(\mathrm{A}^\star \cup \mathrm{B}^\star) \cap \mathrm{C}^\star}$, c'est-à-dire à $(\overline{\mathrm{A}}\,\overline{\cup}\,\overline{\mathrm{B}})\,\overline{\cap}\,\overline{\mathrm{C}}$.

Section 4 : Propriétés de la relation $\mathcal{R}$ (*suite*).

Les propriétés énoncées à la section 3 sont dues à Asano.

Nous avons remarqué de surcroît les propriétés suivantes :

Propriété II, 6. = *On peut définir le produit* $\overline{\overline{\mathcal{A}}}\,.\,\overline{\mathrm{X}}$ *d'un élément* $\overline{\overline{\mathcal{A}}}$ *de* $(\overline{\mathcal{T}})$ *par un élément* $\overline{\mathrm{X}}$ *de* $(\overline{\mathrm{L}})$ *de la façon suivante : c'est la classe* $\overline{\mathcal{A}\mathrm{X}}$ *du produit* $\mathcal{A}\mathrm{X}$, $\mathcal{A}\mathrm{X} \in (\mathrm{L})$, $\mathcal{A} \in \overline{\overline{\mathcal{A}}}$, $\mathrm{X} \in \overline{\mathrm{X}}$.

Démonstration. — Si $\mathcal{A}$ appartient à $(\mathcal{T})$, et si X appartient à (L), il est facile de vérifier d'abord que $\mathcal{A}\mathrm{X}$ appartient à (L). Il faut, ensuite, montrer que, si X et Y appartiennent à (L), avec $\mathcal{A} \in (\mathcal{T})$ et $\mathrm{X} \equiv \mathrm{Y}(\mathcal{R})$, on a $\mathcal{A}\mathrm{X} \equiv \mathcal{A}\mathrm{Y}(\mathcal{R})$, et d'autre part que si

$$\mathrm{X} \in (\mathrm{L}), \qquad \mathcal{A},\ \mathcal{B} \in (\mathcal{T}), \qquad \mathcal{A} \equiv \mathcal{B}(\mathcal{R}'),$$

on a

$$\mathcal{A}\mathrm{X} \equiv \mathcal{B}\mathrm{X}(\mathcal{R}).$$

Pour la seconde partie, il suffit de remarquer que

$$\mathcal{O} \mathbin{.\!\cdot} \mathcal{A}\mathrm{X} = \mathcal{O} \mathbin{.\!\cdot} \mathcal{B}\mathrm{X},$$

et ceci résulte de

$$(\mathcal{O} \mathbin{.\!\cdot} \mathcal{A}) \mathbin{.\!\cdot} \mathrm{X} = (\mathcal{O} \mathbin{.\!\cdot} \mathcal{B}) \mathbin{.\!\cdot} \mathrm{X} = \mathcal{O} \mathbin{.\!\cdot} \mathcal{A}\mathrm{X} = \mathcal{O} \mathbin{.\!\cdot} \mathcal{B}\mathrm{X}.$$

Pour la première partie, posons

$$\mathcal{O} \mathbin{.\!\cdot} \mathcal{A}\mathrm{X} = \mathrm{V}, \qquad \mathcal{O} \mathbin{.\!\cdot} \mathcal{A}\mathrm{Y} = \mathrm{V}'.$$

On a successivement

$$A\mathrm{XV} \subseteq \mathcal{O}, \qquad \mathrm{XV} \subseteq \mathcal{O} \mathbin{.\cdot} A = \mathcal{O} \mathbin{\cdot .} A, \qquad \mathrm{XV}A \subseteq \mathcal{O}, \qquad \mathrm{V}A \subseteq \mathcal{O} \mathbin{.\cdot} \mathrm{X} = \mathcal{O} \mathbin{.\cdot} \mathrm{Y},$$
$$\mathrm{YV}A \subseteq \mathcal{O}, \qquad \mathrm{YV} \subseteq \mathcal{O} \mathbin{\cdot .} A = \mathcal{O} \mathbin{.\cdot} A, \qquad A\mathrm{YV} \subseteq \mathcal{O}, \qquad \mathrm{V} \subseteq \mathcal{O} \mathbin{.\cdot} A\mathrm{Y}, \qquad \mathrm{V} \subseteq \mathrm{V}',$$

et de même $\mathrm{V}' \subseteq \mathrm{V}$.

Propriété II, 7. — *On a les propriétés suivantes du produit* $\bar{\bar{A}}.\overline{\mathrm{X}}$:

(C_1) $\bar{\bar{A}}.(\overline{\mathrm{X}} \mathbin{\overline{\cup}} \overline{\mathrm{Y}}) = \bar{\bar{A}}.\overline{\mathrm{X}} \mathbin{\overline{\cup}} \bar{\bar{A}}.\overline{\mathrm{Y}}$;

(C_2) $(\bar{\bar{A}} \mathbin{\overline{\cup}} \bar{\bar{\mathscr{B}}}).\overline{\mathrm{X}} = \bar{\bar{A}}.\overline{\mathrm{X}} \mathbin{\overline{\cup}} \bar{\bar{\mathscr{B}}}.\overline{\mathrm{X}}$;

(C_3) $(\bar{\bar{A}}.\bar{\bar{\mathscr{B}}}).\overline{\mathrm{X}} = \bar{\bar{A}}.(\bar{\bar{\mathscr{B}}}.\overline{\mathrm{X}})$;

(C_4) $\bar{\bar{\mathcal{O}}}.\overline{\mathrm{X}} = \overline{\mathrm{X}}$;

(C_5) *Pour tout couple* $\overline{\mathrm{X}} \in (\overline{\mathrm{L}}')$, $\bar{\bar{A}} \in (\bar{\mathscr{C}}')$, *il existe un* $\overline{\mathrm{Y}} \in (\overline{\mathrm{L}}')$, *tel que* $\bar{\bar{A}}.\overline{\mathrm{Y}} \mathrel{\underline{\angle}} \overline{\mathrm{X}}$ *et l'ensemble des* $\overline{\mathrm{Y}}$ *ayant ces propriétés admet un élément maximal noté* $\overline{\mathrm{X}} \mathbin{.\cdot} \bar{\bar{A}}$;

(C_6) *Pour tout couple* $\overline{\mathrm{X}} \in (\overline{\mathrm{L}}')$, $\overline{\mathrm{Y}} \in (\overline{\mathrm{L}}')$, *si de plus* $\mathcal{O}$ *est un ordre régulier, il existe un* $\bar{\bar{A}} \in (\bar{\mathscr{C}}')$, *tel que* $\bar{\bar{A}}.\overline{\mathrm{Y}} \mathrel{\underline{\angle}} \overline{\mathrm{X}}$ *et l'ensemble des* $\bar{\bar{A}}$ *ayant ces propriétés, admet un élément maximal noté* $\overline{\mathrm{X}} \mathbin{\cdot .} \overline{\mathrm{Y}}$.

Démonstration. — Pour démontrer les propriétés (C_1), (C_2), (C_3), (C_4) il suffit de prendre des représentants dans les différentes classes.

Démontrons (C_5) : Soit $\mathrm{X}^\star$ l'élément maximal de $\overline{\mathrm{X}}$, on a $\mathrm{X}^\star \subseteq \mathcal{O}$. Soit A un élément de $(\mathscr{C}')$ appartenant à la classe $\bar{\bar{A}}$ de $(\bar{\mathscr{C}}')$.

Considérons l'ensemble des éléments x de $\mathcal{O}$, tels que $Ax \subseteq \mathrm{X}^\star$: c'est un $\mathcal{O}$-idéal à gauche Y compris dans $\mathcal{O}$, et contenant $\mathrm{X}^\star$, et l'on a $A\mathrm{Y} \subseteq \mathrm{X}^\star$, donc $\bar{\bar{A}}.\overline{\mathrm{Y}} \mathrel{\underline{\angle}} \overline{\mathrm{X}}$. Réciproquement, soit $\overline{\mathrm{Y}}' \in (\overline{\mathrm{L}}')$, tel que $\bar{\bar{A}}.\overline{\mathrm{Y}}' \subseteq \overline{\mathrm{X}}$. Pour un représentant Y' de $\overline{\mathrm{Y}}'$, on a $A\,\mathrm{Y}' \subseteq \mathrm{X}^\star$, A étant le représentant de la classe $\bar{\bar{A}}$ déjà considéré plus haut. On déduit

$$\mathrm{Y}' \subseteq \mathrm{Y}, \qquad \text{d'où} \qquad \overline{\mathrm{Y}}' \subseteq \overline{\mathrm{Y}}.$$

Démontrons (C_6) sous l'hypothèse supplémentaire que $\mathcal{O}$ est régulier. Soit $\mathrm{X}^\star$ l'élément maximal de $\overline{\mathrm{X}}$, on a $\mathrm{X}^\star \subseteq \mathcal{O}$. Soit $\mathrm{Y} \in (\mathrm{L}')$ un représentant de $\overline{\mathrm{Y}} \in (\overline{\mathrm{L}}')$, on a $\mathrm{Y} \subseteq \mathcal{O}$.

Considérons l'ensemble des x, $x \in \mathcal{O}$, tels que $x\mathrm{Y} \subseteq \mathrm{X}^\star$. C'est un $\mathcal{O}$-ensemble à droite et à gauche, compris dans $\mathcal{O}$; pour montrer que c'est un $\mathcal{O}$-idéal bilatère, il suffit de montrer qu'il contient un élément régulier β. $\mathcal{O}$ étant régulier, et α étant un élément régulier de $\mathrm{X}^\star$, il existe un élément régulier β de $\mathrm{X}^\star$, tel que $\mathrm{X}^\star \supseteq \mathcal{O}\alpha \supseteq \beta\mathcal{O}$ (th. II, 3) et, par suite, $\beta\mathrm{Y} \subseteq \beta\mathcal{O} \subseteq \mathrm{X}^\star$ et β appartient à A. Ceci étant, on a alors

$$A\mathrm{Y} \subseteq \mathrm{X}^\star, \qquad \text{donc} \qquad \bar{\bar{A}}.\overline{\mathrm{Y}} \mathrel{\underline{\angle}} \overline{\mathrm{X}}.$$

Réciproquement, soit $\overline{\overline{A'}} \in (\overline{\mathfrak{T}'})$ tel que $\overline{\overline{A'}}.\overline{Y} \leqq \overline{X}$, alors A' étant un représentant dans $(\mathfrak{T}')$ de $\overline{\overline{A'}}$, on en déduit $A'Y \subseteq X^*$, et par suite,

$$A' \subseteq A, \qquad \text{donc} \quad \overline{\overline{A'}} \leqq \overline{\overline{A}}.$$

Dans les démonstrations précédentes, nous nous sommes placés dans le cas d'un demi-groupe $\mathcal{O}$. Les démonstrations dans le cas d'un anneau se font en calquant ces dernières.

Propriété II, 8. — *Soit* $\overline{X}'$, $\overline{B} \in (\overline{L}')$, $\overline{\overline{A}} \in (\overline{\mathfrak{T}}')$, *tels que* $\overline{\overline{A}}.\overline{B} \geqq \overline{X}'$; *il existe* $\overline{X}$ *tel que*

$$\overline{X} \in (\overline{L}'), \qquad \overline{X} \leqq \overline{B}, \qquad \overline{X}' = \overline{\overline{A}}.\overline{X}.$$

On exprime ceci, en disant que tout élément $\overline{\overline{A}}$, $\overline{\overline{A}} \in (\overline{\mathfrak{T}}')$, *est* $(\overline{L}')$*-principal* ([13], § 1 *et* 7, p. 107).

Démonstration. — Considérons

$$\overline{\overline{A}}^{-1} \in (\overline{\mathfrak{T}}) \qquad \text{et} \qquad \overline{X} = \overline{\overline{A}}^{-1}.\overline{X}';$$

on a

$$\overline{\overline{A}}.\overline{X} = \overline{\overline{A}}.(\overline{\overline{A}}^{-1}.\overline{X}') = (\overline{\overline{A}}.\overline{\overline{A}}^{-1}.)\overline{X}' = \overline{X}'.$$

De plus,

$$\overline{X} = \overline{\overline{A}}^{-1}.\overline{X}' \leqq \overline{\overline{A}}^{-1}.(\overline{\overline{A}}.\overline{B}) = \overline{B}.$$

Section 5 : Étude fine des ordres maximaux réguliers.

$\mathcal{O}$ est supposé, dans cette partie, sauf mention contraire, un ordre maximal régulier noethérien à gauche.

Conformément au Mémoire [13], nous introduisons les définitions suivantes :

Définition II, 12. — Un élément $\overline{\overline{A}}$, $\overline{\overline{A}} \in (\overline{\mathfrak{T}}')$ sera dit premier, si $\overline{\overline{\mathcal{B}}}$, $\overline{\overline{\mathcal{C}}} \in (\overline{\mathfrak{T}}')$, $\overline{\overline{\mathcal{B}}}.\overline{\overline{\mathcal{C}}} \leqq \overline{\overline{A}}$ entraînent $\overline{\overline{\mathcal{B}}} \leqq \overline{\overline{A}}$ ou $\overline{\overline{\mathcal{C}}} \leqq \overline{\overline{A}}$.

Définition II, 13. — Un élément $\overline{X}$, $\overline{X} \in (\overline{L}')$ sera dit primaire, si

$$\overline{\overline{A}}.\overline{X}' \leqq \overline{X}, \qquad \overline{X}' \in (\overline{L}'), \qquad \overline{\overline{A}} \in (\overline{\mathfrak{T}}'), \qquad \overline{X}' \not\leqq \overline{X},$$

entraînent l'existence d'un entier k, tel que $\overline{\overline{A}}^k \leqq \overline{X}\cdot.\overline{\mathcal{O}}$, ou tel que, ce qui est équivalent, $\overline{A}^k \leqq \overline{X}$.

Propriété II, 9. — *Soit* $\overline{X}$ *un élément primaire de* $(\overline{L}')$, *l'ensemble des éléments* $\overline{\overline{A}}$ *de* $(\overline{\mathfrak{T}}')$, *pour lesquels il existe un entier naturel* k, *tel que* $\overline{\overline{A}}^k \leqq \overline{X}\cdot.\overline{\mathcal{O}}$, *a un élément maximal* $\overline{\overline{\mathfrak{P}}}$ *qui est un élément premier de* $(\overline{\mathfrak{T}}')$. *Cet élément se nomme le « radical » de* $\overline{X}$.

Démonstration. — La démonstration est donnée au Mémoire [13] (p. 90); on remarquera, en effet, que les treillis $(\overline{\mathfrak{T}}')$ et $(\overline{\mathrm{L}}')$ satisfont aux hypothèses générales vérifiées par les treillis (τ) et (L) de ce Mémoire (p. 81-83), d'après les propriétés énoncées à la partie II, section 4 de ce chapitre.

THÉORÈME II, 4. — *Tout élément de $(\overline{\mathrm{L}}')$ est intersection d'un nombre fini d'éléments primaires, et la décomposition peut être réduite. Il y a unicité des éléments de $(\overline{\mathfrak{T}}')$ radicaux de ces composants primaires.*

Démonstration. — Il suffit de se reporter au Mémoire [13] (p. 108, th. 7.1 et p. 112, 113, th. 8.1 et 8.2), en utilisant les propriétés de la partie II, section 4, et notamment la propriété II, 9.

Définition II, 14 [7]. — Un élément $\mathfrak{P}$ de $(\mathfrak{T}')$ est dit *premier*, si :

$$\mathcal{A},\ \mathcal{B} \in (\mathfrak{T}'), \qquad \mathcal{A}\mathcal{B} \subseteq \mathfrak{P}$$

entraînent, soit $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{P}$, soit $\mathcal{B} \subseteq \mathfrak{P}$.

Définition II, 15 [7]. — Un élément X de (L') est dit *primaire*, si :

$$\mathcal{A} \in (\mathfrak{T}'), \qquad \mathrm{Y} \in (\mathrm{L}'), \qquad \mathcal{A}\mathrm{Y} \subseteq \mathrm{X}, \qquad \mathrm{Y} \nsubseteq \mathrm{X}$$

entraînent qu'il existe un entier naturel k tel que $\mathcal{A}^k \subseteq \mathrm{X}$,

Définition II, 16 [7]. — Un élément $\mathcal{C}$ de $(\mathfrak{T}')$ sera dit *primaire à gauche dans* $(\mathfrak{T}')$, si :

$$\mathcal{A} \in (\mathfrak{T}'), \qquad \mathcal{B} \in (\mathfrak{T}'), \qquad \mathcal{A}\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}, \qquad \mathcal{B} \nsubseteq \mathcal{C}$$

entraînent qu'il existe un entier naturel k, tel que $\mathcal{A}^k \subseteq \mathcal{C}$.

Définiton II, 17 [7]. — Un élément $\mathcal{C}$ de $(\mathfrak{T}')$ sera dit *primaire à droite dans* $(\mathfrak{T}')$, si :

$$\mathcal{A} \in (\mathfrak{T}'), \qquad \mathcal{B} \in (\mathfrak{T}'), \qquad \mathcal{B}\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}, \qquad \mathcal{B} \nsubseteq \mathcal{C}$$

entraînent qu'il existe un entier naturel k tel que $\mathcal{A}^k \subseteq \mathcal{C}$.

Définition II, 18 [7]. — Un élément $\mathcal{C}$ de $(\mathfrak{T}')$ sera dit primaire dans $(\mathfrak{T}')$ s'il est à la fois primaire à droite et primaire à gauche.

THÉORÈME II, 5. — *Toute classe première $\overline{\overline{\mathfrak{P}}}$ de $(\overline{\mathfrak{T}}')$ différente de $\overline{\overline{\mathcal{O}}}$ a pour élément maximal $\mathfrak{P}^\star$ de $(\mathfrak{T}')$, $\mathfrak{P}^\star \neq \mathcal{O}$,. premier. Réciproquement, tout élément premier $\mathfrak{P}$ de $(\mathfrak{T}')$ non équivalent à $\mathcal{O}$ modulo $\mathcal{R}'$ est maximal dans sa classe $\overline{\overline{\mathfrak{P}}}$. $\overline{\overline{\mathfrak{P}}}$ est un élément premier de $(\overline{\mathfrak{T}}')$, et si l'on a $\mathcal{C} \in (\mathfrak{T}')$, tel que $\mathfrak{P} \subset \mathcal{C} \subseteq \mathcal{O}$, on déduit $\mathcal{C} \equiv \mathcal{O}$ modulo $\mathcal{R}'$.*

---

[7] Dans cette définition, $\mathcal{O}$ est un ordre quelconque, noethérien à gauche.

Démonstration. — Nous pouvons remarquer que l'élément $\mathfrak{P}^\star$ de la classe $\overline{\mathfrak{P}}$ d'un $\mathcal{O}$-idéal bilatère $\mathfrak{P}$ est l'élément maximal de la classe $\overline{\overline{\mathfrak{P}}}$. Supposons qu'on ait

$$A,\ \mathcal{B} \in (\mathfrak{G}'), \qquad A\mathcal{B} \subseteq \mathfrak{P}^\star$$

et, par exemple, $A \not\subseteq \mathfrak{P}^\star$. On en déduit

$$\overline{\overline{A}}.\overline{\overline{\mathcal{B}}} \leqq \overline{\overline{\mathfrak{P}}} \quad \text{et} \quad \overline{\overline{A}} \not\leqq \overline{\overline{\mathfrak{P}}},$$

ce qui entraîne, puisque $\overline{\overline{\mathfrak{P}}}$ est premier,

$$\overline{\overline{\mathcal{B}}} \leqq \overline{\overline{\mathfrak{P}}}, \quad \text{donc} \quad \mathcal{B} \subseteq \mathfrak{P}^\star.$$

Réciproquement, soit $\mathfrak{P}$ un élément premier de $(\mathfrak{G}')$, non équivalent à $\mathcal{O}$ modulo $\mathcal{R}'$. Soit A un élément de $(\mathfrak{G}')$ appartenant à $\overline{\overline{\mathfrak{P}}}$: on a

$$\mathfrak{P}^{-1} = A^{-1} \quad \text{et} \quad \mathfrak{P}\mathfrak{U} = \mathfrak{V}A,$$

en posant

$$\mathfrak{U} = A^{-1}A, \qquad \mathfrak{V} = \mathfrak{P}\mathfrak{P}^{-1};$$

on a

$$\mathfrak{U} \equiv \mathfrak{V} \equiv \mathcal{O}(\mathcal{R}'), \qquad \text{donc} \quad \mathfrak{V}A \subseteq \mathfrak{P}.$$

Or, $A \not\subseteq \mathfrak{P}$ est impossible, puisque cela entraînerait $\mathfrak{V} \subseteq \mathfrak{P}$, donc $\overline{\overline{\mathfrak{P}}} = \overline{\overline{\mathcal{O}}}$. On déduit donc que A est compris dans $\mathfrak{P}$ ou encore que $\mathfrak{P}$ est maximal dans sa classe $\overline{\overline{\mathfrak{P}}}$. D'autre part, $\overline{\overline{\mathfrak{P}}}$ est élément premier de $(\overline{\mathfrak{G}}')$, car $\overline{\overline{A}}.\overline{\overline{\mathcal{B}}} \leqq \overline{\overline{\mathfrak{P}}}$, $\overline{\overline{A}} \not\leqq \overline{\overline{\mathfrak{P}}}$ entraînent, en prenant des représentants A dans $\overline{\overline{A}}$, $\mathcal{B}$ dans $\overline{\overline{\mathcal{B}}}$: $A\mathcal{B} \subseteq \mathfrak{P}$, $A \not\subseteq \mathfrak{P}$ et, par suite. $\mathcal{B} \subseteq \mathfrak{P}$ et $\overline{\overline{\mathcal{B}}} \leqq \overline{\overline{\mathfrak{P}}}$.

On sait que $\overline{\overline{\mathfrak{P}}}$, élément premier de $(\overline{\mathfrak{G}}')$, est maximal dans $(\overline{\mathfrak{G}}')$ c'est une propriété bien connue des éléments entiers d'un groupe réticulé).

Par suite, $\mathfrak{P} \subset \mathcal{C} \subseteq \mathcal{O}$, $\mathfrak{P}$ étant un élément premier de $(\mathfrak{G}')$, $\mathcal{C} \in (\mathfrak{G}')$ entraînent

$$\overline{\overline{\mathfrak{P}}} < \overline{\overline{\mathcal{C}}} \leqq \overline{\overline{\mathcal{O}}} \quad \text{et} \quad \overline{\overline{\mathcal{C}}} = \overline{\overline{\mathcal{O}}}.$$

Théorème II, 6. — *Toute classe primaire dans $(\overline{\mathfrak{G}}')$ différente de $\overline{\mathcal{O}}$, a pour élément maximal un élément primaire dans $(\mathfrak{G}')$. Réciproquement, tout élément de $(\mathfrak{G}')$ primaire à gauche (à droite) dans $(\mathfrak{G}')$ non équivalent à $\mathcal{O}$ modulo $\mathcal{R}'$ est maximal dans sa classe. Celle-ci est un élément primaire de $(\overline{\mathfrak{G}}')$ et tout élément primaire à gauche (à droite) dans $(\mathfrak{G}')$ est primaire dans $\mathfrak{G}'$.*

Démonstration. — Dans le cas où $\mathcal{O}$ est commutatif, la démonstration peut être prise dans le Mémoire [8]. Rappelons que $(\overline{\mathfrak{G}}')$ est commutatif et que, par suite, « primaire dans $(\overline{\mathfrak{G}}')$ » s'entend au sens habituel.

Soient $\overline{\overline{\mathcal{C}}}$ un élément primaire dans $(\overline{\mathfrak{G}}')$, $\mathcal{C}^\star$ l'élément maximal de $\overline{\overline{\mathcal{C}}}$, soient A, $\mathcal{B} \in (\mathfrak{G}')$, tels que $A\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}^\star$, $\mathcal{B} \not\subseteq \mathcal{C}^\star$. On déduit $\overline{\overline{A}}.\overline{\overline{\mathcal{B}}} \leqq \overline{\overline{\mathcal{C}}}$, avec $\overline{\overline{\mathcal{B}}} \not\leqq \overline{\overline{\mathcal{C}}}$, d'où, k étant un entier naturel, $\overline{\overline{A}}^k \leqq \overline{\overline{\mathcal{C}}}$ et, par suite, $A^k \subseteq \mathcal{C}^\star$, ce qui montre que $\mathcal{C}^\star$ est primaire à gauche dans $(\mathfrak{T}')$. De même, on montrerait que $\mathcal{C}^\star$ est primaire à droite dans $(\mathfrak{T}')$.

Réciproquement, soit $\mathcal{C}$ un élément primaire à droite dans $(\mathfrak{T}')$ non équivalent à $\mathcal{O}$ modulo $\mathcal{R}'$ et soit $\overline{\overline{\mathcal{C}}}$ sa classe dans $(\overline{\overline{\mathfrak{T}}}')$. Soit $\mathcal{C}^\star$ l'élément maximal de $\mathcal{C}$. Montrons que $\mathcal{C}^\star \subseteq \mathcal{C}$. De $\mathcal{C}^{-1} = \mathcal{C}^{\star-1}$, on déduit

$$\mathcal{C}^\star \mathcal{C}^{\star-1} \mathcal{C} = \mathcal{C}^\star \mathcal{C}^{-1} \mathcal{C}.$$

Or, $\mathcal{E} = \mathcal{C}^{-1} \mathcal{C}$ est un $\mathcal{O}$-idéal bilatère appartenant à $(\mathfrak{T}')$ et l'on a $\mathcal{C}^\star \mathcal{E} \subseteq \mathcal{C}$, car $\mathcal{C}^\star \mathcal{C}^{\star-1}$ est un élément de $(\mathfrak{T}')$. Comme pour tout entier naturel k, on a $\mathcal{E}^k \nsubseteq \mathcal{C}$, on en déduit $\mathcal{C}^\star \subseteq \mathcal{C}$. Soient alors $\overline{\overline{A}}, \overline{\overline{\mathcal{B}}} \in (\overline{\overline{\mathfrak{T}}}')$, tels que

$$\overline{\overline{A}}.\overline{\overline{\mathcal{B}}} \leqq \overline{\overline{\mathcal{C}}}, \qquad \overline{\overline{A}} \nleqq \overline{\overline{\mathcal{C}}}.$$

On en déduit, A, $\mathcal{B}$ étant des représentants de $\overline{\overline{A}}$ et $\overline{\overline{\mathcal{B}}}$, respectivement : $A\,\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$, $A \nsubseteq \mathcal{C}$ et, $\mathcal{C}$ étant primaire à droite dans $(\mathfrak{T}')$, $\mathcal{B}^k \subseteq \mathcal{C}$, pour un entier naturel k, donc $\overline{\overline{\mathcal{B}}}^k \subseteq \overline{\overline{\mathcal{C}}}$, ce qui montre que $\overline{\overline{\mathcal{C}}}$ est primaire. Par suite, d'après la première partie de la démonstration, $\mathcal{C}$ est aussi primaire à gauche dans $(\mathfrak{T}')$ donc primaire dans $(\mathfrak{T}')$.

THÉORÈME II, 7. — *Toute classe primaire* $\overline{\mathrm{X}}$ *de* $(\overline{\mathrm{L}}')$ *différente de* $\overline{\mathcal{O}}$, *a pour élément maximal un élément primaire de* (L') $\mathrm{X}^\star$, *non équivalent à* $\mathcal{O}$ *modulo* $\mathcal{R}$. *Le radical de* $\overline{\mathrm{X}}$ *a pour élément maximal le radical* de $\mathrm{X}^\star$ *qui n'est pas équivalent à* $\mathcal{O}$ *modulo* $\mathcal{R}$.

Démonstration. — Rappelons que le radical $\mathfrak{T}$ de $\mathrm{X}^\star$ est le plus grand des éléments A de $(\mathfrak{T}')$ pour lesquels il existe un entier naturel k, tel que $A^k \subseteq \mathrm{X}^\star$. C'est un élément premier de $(\mathfrak{T}')$, si $\mathrm{X}^\star$ est primaire ([13], p. 90). Soit $\overline{\mathrm{X}} \in (\overline{\mathrm{L}}')$, primaire, et soit $\mathrm{X}^\star$ l'élément maximal de $\overline{\mathrm{X}}$. On a $\mathrm{X}^\star \subseteq \mathcal{O}$. Soient

$$A \in (\mathfrak{T}'), \qquad \mathrm{Y} \in (\mathrm{L}'), \qquad \text{avec} \quad \mathrm{Y} \nsubseteq \mathrm{X}^\star, \qquad A\mathrm{Y} \subseteq \mathrm{X}^\star.$$

On en déduit $\overline{\overline{A}}.\overline{\mathrm{Y}} \leqq \overline{\mathrm{X}}$, $\overline{\mathrm{Y}} \nleqq \overline{\mathrm{X}}$ et, par suite, il existe un entier naturel k tel que $\bar{A}^k \leqq \overline{\mathrm{X}}$, donc on a $A^k \subseteq \mathrm{X}^\star$ et $\mathrm{X}^\star$ est primaire. La dernière partie du théorème est facile à démontrer.

THÉORÈME II, 7 *bis*. — *Si les* $\mathcal{O}$*-idéaux à gauche entiers sont normaux, tout élément primaire de* (L') *non équivalent à* $\mathcal{O}$ *modulo* $\mathcal{R}$ *est maximal dans sa classe et celle-ci est élément primaire de* $(\overline{\mathrm{L}}')$ *non égal à* $\overline{\mathcal{O}}$.

Démonstration. — Soit X un élément primaire de (L') équivalent à $\mathcal{O}$ modulo $\mathcal{R}$.

Soit Y un élément de (L') équivalent à X modulo $\mathcal{R}$: $\mathrm{X}^{-1} = \mathrm{Y}^{-1}$. On tire de là $\mathrm{X}\mathrm{X}^{-1}\mathrm{Y} = \mathrm{X}\mathrm{Y}^{-1}\mathrm{Y}$. Mais $\mathrm{X}\mathrm{X}^{-1} = A$ est un élément de $(\mathfrak{T}')$ équivalent à $\mathcal{O}$

modulo $\mathcal{R}$: en effet, c'est d'abord un $\mathcal{O}$-ensemble contenant évidemment un élément régulier et contenu dans $\mathcal{O}$ (remarque II, 8), et de plus, on peut écrire

$$\mathcal{O} .\cdot \mathrm{XX}^{-1} = \mathrm{X}^{-1} .\cdot \mathrm{X}^{-1} = \mathcal{O},$$

car $\mathrm{X}^{-1} .\cdot \mathrm{X}^{-1}$ est l'ordre à droite du $\mathcal{O}$-idéal à droite X^{-1} (th. II, 2), ce qui montre que XX^{-1} est équivalent à $\mathcal{O}$ modulo $\mathcal{R}'$:

Par ailleurs, on a $\mathrm{Y}^{-1}\mathrm{Y} \subseteq \mathcal{O}'$, $\mathcal{O}'$ étant l'ordre à droite de Y. Or, nous allons montrer que, sous les hypothèses faites, deux $\mathcal{O}$-idéaux à gauche entiers équivalents modulo $\mathcal{R}$, X et Y, ont même ordre à droite $\mathcal{O}'$: appelons $\mathcal{O}''$ l'ordre à droite de X, les ordres à gauche de X et Y étant égaux à $\mathcal{O}$ (th. II, 2). $\mathcal{O}'$ et $\mathcal{O}''$ sont d'ailleurs maximaux, puisque X et Y sont normaux. On sait (remarque II, 8) que X^{-1} est un $\mathcal{O}''$-$\mathcal{O}$-idéal, que Y^{-1} est un $\mathcal{O}'$-$\mathcal{O}$-idéal. De $\mathrm{X}^{-1} = \mathrm{Y}^{-1}$, on déduit $\mathcal{O}'\mathrm{X}^{-1} = \mathrm{X}^{-1}$ et, par suite, $\mathcal{O}' \subseteq \mathrm{X}^{-1}.\cdot\mathrm{X}^{-1}$; Or, $\mathrm{X}^{-1}.\cdot\mathrm{X}^{-1}$ est l'ordre à gauche du $\mathcal{O}''$-idéal à gauche X^{-1} ; $\mathcal{O}''$ étant maximal, cet ordre à gauche est $\mathcal{O}''$ et, par suite, $\mathcal{O}' \subseteq \mathcal{O}''$ et de même $\mathcal{O}'' \subseteq \mathcal{O}'$, donc $\mathcal{O}' = \mathcal{O}''$. On a vu (th. II, 1), que X était un $\mathcal{O}'$-idéal à droite, par suite, on a

$$\mathrm{XY}^{-1}\mathrm{Y} \subseteq \mathrm{X}\mathcal{O}' = \mathrm{X} \qquad \text{et} \qquad A\mathrm{Y} \subseteq \mathrm{X}.$$

On ne peut avoir $\mathrm{Y} \not\subseteq \mathrm{X}$, car X étant primaire, il en résulterait pour un certain entier naturel k, $A^k \subseteq \mathrm{X}$ et, par suite, $\overline{A}^k \subseteq \overline{\mathrm{X}}$, c'est-à-dire $\overline{\mathrm{X}} = \overline{\mathcal{O}}$, et ceci est impossible. On a donc $\mathrm{Y} \subseteq \mathrm{X}$ et X est élément maximal dans sa classe. Montrons maintenant que $\overline{\mathrm{X}}$ est élément primaire de $(\overline{\mathrm{L}}')$. Soient

$$\overline{\overline{A}}' \in (\overline{\mathfrak{T}}'), \qquad \overline{\mathrm{Y}} \in (\overline{\mathrm{L}}'), \qquad \text{avec} \quad \overline{\mathrm{Y}} \not\leq \overline{\mathrm{X}}, \qquad \overline{\overline{A}}'.\overline{\mathrm{Y}} \leqq \overline{\mathrm{X}}.$$

On en déduit, en prenant des représentants A', Y dans $\overline{\overline{A}}'$ et $\overline{\mathrm{Y}}$ respectivement : $A'\mathrm{Y} \subseteq \mathrm{X}$ et $\mathrm{Y} \not\subseteq \mathrm{X}$, X étant, comme on l'a vu, élément maximal de sa classe. Par suite, X étant primaire, il existe un entier naturel k, tel que $A'^k \subseteq \mathrm{X}$ et, par suite, $\overline{A}'^k \leqq \overline{\mathrm{X}}$, ce qui montre que $\overline{\mathrm{X}}$ est primaire.

Remarque II, 9. — On peut démontrer que, si $\mathcal{O}$ est un ordre maximal, dont tous les $\mathcal{O}$-idéaux à gauche sont normaux, $\mathcal{R}$ est régulière pour l'intersection de (L) : c'est le cas, par exemple, si $\mathcal{O}$ est un anneau, ordre maximal régulier, dont les $\mathcal{O}$-idéaux à gauche entiers vérifient la condition de chaîne descendante (Jacobson, *Theory of Rings*, p. 132).

Théorème II, 8. — *Soit a un élément régulier de $\mathcal{O}$, le $\mathcal{O}$-idéal à gauche $\mathcal{O}a$ est intersection d'un nombre fini de $\mathcal{O}$-idéaux à gauche entiers primaires. La décomposition peut être réduite. Les radicaux de ces composants primaires sont bien déterminés, et sont des $\mathcal{O}$-idéaux entiers premiers minimaux.* (*Tout $\mathcal{O}$-idéal premier contenu dans l'un d'eux lui est égal*).

Démonstration. — Nous entendrons « décomposition réduite » au sens du Mémoire [13] (p. 112). Il est facile de montrer que $\mathcal{O}a$ est maximal dans sa classe. D'après le théorème II, 4, on peut écrire

$$\overline{\mathcal{O}\, a} = \overline{\bigcap_{i=1}^{h}} \overline{X}_i,$$

où $\overline{X}_i$ est un élément primaire de $(\overline{L}')$ dont le radical est un élément premier de $(\overline{\mathfrak{C}}')$, $\overline{\overline{\mathfrak{P}}}_i$, $\overline{\overline{\mathfrak{P}}}_i \neq \overline{\overline{\mathcal{O}}}$. D'après la définition de l'intersection dans $(\overline{L}')$, l'élément maximal de $\overline{\bigcap_{i=1}^{h}} \overline{X}_i$ est $\bigcap_{i=1}^{h} X_i^*$, X_i^* désignant l'élément maximal de $\overline{X}_i$ $(i = 1, \ldots, h)$. On a donc

$$\mathcal{O}\, a = \bigcap_{i=1}^{h} X_i^*.$$

D'après le théorème II, 7, X_i^* est primaire, et son radical $\mathfrak{P}_i$ a pour classe le radical $\overline{\overline{\mathfrak{P}}}_i$ de $\overline{X}_i$ $(i = 1, \ldots, h)$. D'après le théorème II, 5, $\mathfrak{P}_i$ $(i = 1, \ldots, h)$ ne peut contenir un $\mathcal{O}$-idéal premier distinct de lui-même.

Lemme II, 1. — *Tout $\mathcal{O}$-idéal entier A, $A \neq \mathcal{O}$, contient un $\mathcal{O}$-idéal maximal dans sa classe modulo $\mathcal{R}'$, non équivalent à $\mathcal{O}$. Tout $\mathcal{O}$-idéal entier premier minimal n'est pas équivalent à $\mathcal{O}$ modulo $\mathcal{R}'$.*

Démonstration. — Soit a un élément régulier de A. $\mathcal{O}a$ contient un $\mathcal{O}$-idéal bilatère, puisque $\mathcal{O}$ est régulier (th. II, 3), et l'union de tous les $\mathcal{O}$-idéaux bilatères, contenus dans $\mathcal{O}a$ est un $\mathcal{O}$-idéal bilatère A'; on a successivement :

$$A' \subseteq \mathcal{O}\, a, \qquad A'^{-1} \supseteq (\mathcal{O}\, a)^{-1}$$

et

$$(A'^{-1})^{-1} \subseteq [\mathcal{O}\, a^{-1}]^{-1} = \mathcal{O}\, a.$$

Donc $(A'^{-1})^{-1}$, qui est un $\mathcal{O}$-idéal bilatère contenu dans $\mathcal{O}a$, est compris dans A'. On déduit que $(A'^{-1})^{-1} = A'$, et A' est maximal dans sa classe modulo $\mathcal{R}'$, qui est différente de $\overline{\overline{\mathcal{O}}}$. On a donc

$$\overline{\overline{A'}} = \overline{\overline{\mathfrak{P}}}_1^{\rho_1} \ldots \overline{\overline{\mathfrak{P}}}_r^{\rho_r},$$

les $\overline{\overline{\mathfrak{P}}}_i$ étant des éléments premiers de $(\overline{\mathfrak{C}}')$ et les ρ_i des entiers convenables.

Soit maintenant $\mathfrak{P}$ un $\mathcal{O}$-idéal bilatère premier entier minimal, et soit A' un $\mathcal{O}$-idéal bilatère contenu dans $\mathfrak{P}$ ayant les propriétés décrites ci-dessus. Désignons par $\mathfrak{P}_i$ l'élément maximal de $\overline{\overline{\mathfrak{P}}}_i$ $(i = 1, \ldots, r)$; d'après le théorème II, 5, $\mathfrak{P}_i$ est premier. On a

$$\mathfrak{P}_1^{\rho_1}, \ldots, \mathfrak{P}_r^{\rho_r} \subseteq A' \subseteq \mathfrak{P}$$

et, par suite, $\mathfrak{P}_i \subseteq \mathfrak{P}$ pour un certain i $(1 \leq i \leq r)$, et $\mathfrak{P}$ étant minimal, $\mathfrak{P}_i = \mathfrak{P}$.

Remarque II, 10. — Soit $\mathfrak{P}$ un $\mathcal{O}$-idéal bilatère entier premier minimal, et soit A un $\mathcal{O}$-idéal bilatère $\mathfrak{P}$-tertiaire (d'un côté). Alors A est $\mathfrak{P}$-primaire dans ($\mathfrak{C}'$). Nous ne donnerons pas la démonstration, facile, une fois rappelée la définition d'un $\mathcal{O}$-idéal $\mathfrak{P}$-tertiaire (*voir* [13] et [14]).

Section 6 : Caractérisation des ordres maximaux réguliers noethériens à gauche.

Définition II, 19. — Soit $\mathcal{O}$ un ordre de S quelconque dont tous les éléments sont réguliers, sauf (éventuellement) le zéro. Soit $\mathfrak{P}$ un $\mathcal{O}$-idéal premier compris dans $\mathcal{O}$, M un sous-ensemble de S et soit $C\mathfrak{P} = \mathcal{O} - \mathfrak{P}$ le complémentaire de $\mathfrak{P}$ dans $\mathcal{O}$. Nous notons

$$M_{\mathfrak{P}} = \{ x,\ x \in S, \text{ tel que, il existe } s \in \mathfrak{P} \text{ avec } s\,\mathcal{O}\,x \subseteq M \},$$
$$_{\mathfrak{P}}M = \{ x,\ x \in S, \text{ tel que, il existe } s \in C\mathfrak{P} \text{ avec } x\,\mathcal{O}s \subseteq M \},$$

$M_{\mathfrak{P}}$ et $_{\mathfrak{P}}M$ peuvent être l'ensemble vide.

Remarque II, 11. — On pourra vérifier que $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$ et $_{\mathfrak{P}}\mathcal{O}$ sont des ordres de S contenant $\mathcal{O}$, que $M_{\mathfrak{P}}$ est un $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$-idéal à gauche, contenant M, si M est un $\mathcal{O}$-idéal à gauche.

LEMME II, 2. — *Soit* M *un $\mathcal{O}$-idéal à gauche contenu dans $\mathcal{O}$, $\mathfrak{P}'$-primaire, $\mathcal{O}$ étant noethérien à gauche, si $\mathfrak{P}'$ est contenu dans $\mathfrak{P}$, on a* $M_{\mathfrak{P}} \cap \mathcal{O} = M$, *si $\mathfrak{P}'$ n'est pas contenu dans $\mathfrak{P}$, on a* $M_{\mathfrak{P}} = \mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$.

Démonstration. — Sous les hypothèses faites, il existe un entier naturel k, tel que $\mathfrak{P}'^k \subseteq M$. Si $\mathfrak{P}'$ n'est pas contenu dans $\mathfrak{P}$, on peut trouver un élément s dans $\mathfrak{P}'^k$ n'appartenant pas à $\mathfrak{P}$ (démonstration par récurrence sur k) : on a $s\mathcal{O}1 \subseteq \mathfrak{P}'^k \subseteq M$ et, par suite, 1 appartient à $M_{\mathfrak{P}}$ et $M_{\mathfrak{P}} = \mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$. Si $\mathfrak{P}'$ est contenu dans $\mathfrak{P}$, $s\mathcal{O}x \subseteq M$, $s \in \mathfrak{P}$, $x \in \mathcal{O}$, entraînent, puisque s n'appartient pas à $\mathfrak{P}'$, et que M est $\mathfrak{P}'$-primaire, $x \in M$ et $M_{\mathfrak{P}} \cap \mathcal{O} = M$.

THÉORÈME II, 9. — *Soit $\mathcal{O}$ un ordre régulier, noethérien à gauche, dont tous les éléments (sauf le zéro) sont réguliers. Pour que $\mathcal{O}$ soit un ordre maximal, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient simultanément réalisées :*

(C_1) : *Pour tout ordre $\mathcal{O}'$ équivalent à $\mathcal{O}$ et tel que $\mathcal{O}' \supseteq \mathcal{O}$, et pour tout $\mathcal{O}$-idéal bilatère premier minimal $\mathfrak{P}$, contenu dans $\mathcal{O}$, on* $a\mathcal{O}'_{\mathfrak{P}} = {_{\mathfrak{P}}\mathcal{O}'}$;

(C_2) : *Pour tout élément régulier a de $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}a$ est intersection d'un nombre fini de $\mathcal{O}$-idéaux à gauche primaires contenus dans $\mathcal{O}$, dont les radicaux sont des $\mathcal{O}$-idéaux bilatères, compris dans $\mathcal{O}$, premiers minimaux;*

(C_3) : *$\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$ est un ordre maximal, pour tout $\mathcal{O}$-idéal bilatère premier minimal $\mathfrak{P}$, compris dans $\mathcal{O}$.*

Démonstration. — 1° Les conditions sont *nécessaires* : en se reportant au Mémoire [3], on voit facilement que la définition que nous avons donnée pour $\mathcal{O}_{\mathfrak{T}}$ coïncide dans le cas où $\mathcal{O}$ est un ordre maximal régulier avec la définition d'Asano pour $\mathcal{O}_{\mathfrak{T}}$. On peut donc appliquer ses résultats : on a $\mathcal{O}_{\mathfrak{T}} = {}_{\mathfrak{T}}\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}_{\mathfrak{T}}$ est un ordre maximal, ce qui montre que les conditions (C_1) et (C_3) sont vérifiées. (C_2) résulte du théorème II, 8.

2° Les conditions sont *suffisantes* : Soit $\mathcal{O}'$ un ordre contenant $\mathcal{O}$ et équivalent à $\mathcal{O}$. D'après (C_1) on a $\mathcal{O}'_{\mathfrak{T}} = {}_{\mathfrak{T}}\mathcal{O}'$, $\mathfrak{T}$ étant un $\mathcal{O}$-idéal premier bilatère minimal compris dans $\mathcal{O}$ quelconque. $\mathcal{O}$ étant régulier, $\mathcal{O}'$ est un $\mathcal{O}$-idéal bilatère, donc, d'aprés la remarque II, 11, en tenant compte que $\mathcal{O}'_{\mathfrak{T}} = {}_{\mathfrak{T}}\mathcal{O}'$ et $\mathcal{O}_{\mathfrak{T}} = {}_{\mathfrak{T}}\mathcal{O}$, $\mathcal{O}'_{\mathfrak{T}}$ est un $\mathcal{O}_{\mathfrak{T}}$-idéal bilatère, dont l'ordre à droite est $\mathcal{O}_{\mathfrak{T}}$,d'après la condition (C_3) et le théorème II, 2.

Or, on a

$$\mathcal{O}_{\mathfrak{T}'}\mathcal{O}' \subseteq \mathcal{O}'_{\mathfrak{T}'}, \qquad \text{donc} \quad \mathcal{O}'_{\mathfrak{T}}\cdot\mathcal{O}_{\mathfrak{T}'} = \mathcal{O}_{\mathfrak{T}} \supseteq \mathcal{O}'.$$

Soit donc $x = ba^{-1}$, b, $a \in \mathcal{O}$, un élément de $\mathcal{O}'$ quelconque. D'après ce qui précède, x appartient à $\mathcal{O}_{\mathfrak{T}}$ et, par suite, b appartient à $\mathcal{O}_{\mathfrak{T}}a = (\mathcal{O}a)_{\mathfrak{T}}$. Or, d'après (C_2), $\mathcal{O}a$ est égal à $\bigcap_{i=1}^{n} X_i$, où les X_i sont des $\mathcal{O}$-idéaux à gauche, compris dans $\mathcal{O}$, $\mathfrak{T}_i$-primaires. D'après le lemme II, 2, on a pour $i = 1, \ldots, n$

$$(\mathcal{O}\,a)_{\mathfrak{T}_i} = (X_i)_{\mathfrak{T}_i} \qquad \text{et} \qquad (\mathcal{O}\,a)_{\mathfrak{T}_i} \cap \mathcal{O} = (X_i)_{\mathfrak{T}_i} \cap \mathcal{O} = X_i.$$

Mais alors b appartenant à $(\mathcal{O}a)_{\mathfrak{T}_i}$ pour $i = 1, \ldots, n$, b appartient à X_i pour $i = 1, \ldots, n$, donc à $\mathcal{O}a$ et x appartient a $\mathcal{O}$, ce qui montre que $\mathcal{O}' = \mathcal{O}$.

Remarque II, 12. — La caractérisation énoncée au théorème II, 9 est la caractérisation notée B″ dans l'introduction du chapitre III et de la thèse.

Remarque II, 13. — Il résulte d'un théorème de Goldie [10] qu'un anneau à élément unité, non commutatif, noethérien à droite et à gauche, dont tous les éléments, autres que le zéro, ne sont ni diviseurs de zéro à droite, ni diviseurs de zéro à gauche, admet un anneau quotient S (définition II, 1), donc, est un ordre de S.

R. Croisot m'a fait remarquer que, de même, un semi-groupe non commutatif, à élément unité, noethérien à droite et à gauche, admet un groupe quotient S et, par suite, est un ordre de S.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] K. Asano, *Zur Arithmetik in Schiefringen*, I (*Osaka Math. J.*, t. **1**, 1949, p. 98-134).

[2] K. Asano, *Ueber die Quotientbildung von Schiefringen* (*J. Math. Soc. Japan*, t. **1**, 1949, p. 73-78).

[3] K. Asano et K. Murata, *Arithmetical ideal theory in semigroups* (*J. Inst. Polytechnic. Osaka City Univ.*, *serie* A, t. **4**, 1953, p. 9-23).

[4] G. Birkhoff, *Lattice Theory* (*Amer. Math. Soc. colloq. publications*, *vol.* 25).

[5] A. H. Clifford, *Arithmetical and ideal theory of commutative semi-groups* (*Annals Math.*, t. **41**, 1940, p. 594-610).

[6] Dedekind, *Ueber den Zusammenhang zwischen der Theorie der Ideale und der höheren Kongruenzen* (*Abh Kgl. Ges. Wissenschaften Göttingen*, 1878).

[7] P. Dubreil, *Algèbre* 2e édition, Gauthier-Villars, Paris, 1953.

[8] P. Dubreil, *Initiation à la théorie des demi-groupés ordonnés*, Cremonese, Rome, 1957).

[9] M.-L. Dubreil-Jacotin, L. Lesieur et R. Croisot, *Théorie des treillis et des structures algébriques ordonnés*, Gauthier-Villars, Paris, 1953.

[10] A. W. Goldie, *The structure of prime rings with maximum condition* (*Proc. nat. Acad. Sc. U. S. A.*, t. **44**, 1958).

[11] W. Krull, *Idealtheorie*, Springer, Berlin, 1935.

[12] L. Lesieur, *Séminaire P. Dubreil, M.-L. Dubreil-Jacotin, C. Pisot*, 1954-1955, *exposé* 11.

[13] L. Lesieur et R. Croisot, *La théorie neothérienne des anneaux*, *des demi-groupes et des modules dans le cas non commutatif*, I (*Colloque d'Agèbre Supérieure*, Bruxelles, 1956).

[14] L. Lesieur et R. Croisot, *La théorie neothérienne des anneaux des demi-groupes et des modules dans le cas non commutatif*, II (*Math. Ann.*, t. **134**, 1958, p. 458-476).

[15] P. Lorenzen, *Abstrakte Begründung der multiplikativen Idealtheorie Math. Z.*, t. **45**, 1939).

[16] I. Molinaro, *C. R. Acad. Sc.*, t. **238**, 1954, p. 1284-1285 et 1767-1769.

[17] S. Mori et T. Dodo, *Bedingungen für ganze Abgeschlossenheit in Integritätsbereichen* (*J. Sc. Hiroshima Univ.* t. **7**, 1937, p. 15-28).

[18] M. Nagata, *Basic theorems on general commutative rings* (*Mem. Coll. Sc. Univ Kyoto*, *série* A, t. **29**, 1955, p. 59-77).

[19] O. G. Northcott, *Idealtheorie*, Cambridge University Press, 1953.

[20] O. Ore, *Ueber den Zusammenhang zwischen den definirenden Gleichungen in der Idealtheorie in algebrischen Körpern* I (*Math. Ann.* t. **96**, 1926, p. 313 et suiv.).

[21] M. Yosida et M. Sakuma, *On integrally closed noetherian rings* (*J. Sc. Hiroshima Univ.*, t. **17**, 1954, p. 311-315).

[22] B. L. Van der Waerden, *Moderne Algebra* t. II, Springer, Berlin, 1931,

[23] M. Ward et R. P. Dilworth, *Residuated Lattices* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. **45**, 1939, p. 335-354).

[24] G. Maury, *C. R. Acad. Sc.*, t. **245**, 1957, p. 265; t. **247**, 1958, p. 254; t. **248**, 1959, p. 3260; t. **249**, 1959, p. 2702.