ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

HUBERT DELANGE

Un théorème sur les fonctions arithmétiques multiplicatives et ses applications

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 78, nº 1 (1961), p. 1-29

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1961_3_78_1_1_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1961, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

ANNALES
SCIENTIFIQUES
DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
3ᵉ série, t. 78, 1961, p. 1 à 29.

UN THÉORÈME SUR LES FONCTIONS ARITHMÉTIQUES MULTIPLICATIVES ET SES APPLICATIONS

PAR M. HUBERT DELANGE.

1. INTRODUCTION. — Une « fonction arithmétique » est une fonction définie sur l'ensemble des entiers naturels.

On sait qu'une fonction arithmétique f, réelle ou complexe, est dite *multiplicative* si l'on a

$$f(mn) = f(m)f(n) \quad \text{toutes les fois que } (m, n) = 1.$$

Si f n'est pas toujours nulle, ceci entraîne que $f(1) = 1$.

La fonction est alors complètement déterminée quand on connaît ses valeurs pour les nombres premiers et leurs puissances.

Il est clair que, pour qu'on ait $|f(n)| \leq 1$ quel que soit n, il faut et il suffit que ceci ait lieu lorsque n est un nombre premier ou une puissance d'un nombre premier.

La fonction arithmétique f est dite *additive* si l'on a

$$f(mn) = f(m) + f(n) \quad \text{toutes les fois que } (m, n) = 1.$$

Elle est encore complètement déterminée quand on connaît ses valeurs pour les nombres premiers et leurs puissances, et la fonction g définie par

$$g(n) = \exp[a f(n)],$$

où a est une constante, est une fonction multiplicative non nulle.

Un exemple bien connu de fonction multiplicative est la fonction $\varphi(n)$ d'Euler.

La fonction égale au nombre des diviseurs premiers de n est additive.

1.1. Nous établirons ici le théorème suivant :

Soit f une fonction arithmétique réelle ou complexe, non identiquement nulle, supposée multiplicative.

Supposons en outre que :

1. $|f(n)| \leq 1$ *quel que soit n;*
2. *Il existe une constante réelle ou complexe ρ telle que, quand x tend vers $+\infty$,*

$$\sum_{p \leq x} f(p) = \rho \frac{x}{\log x} + o\left[\frac{x}{\log x}\right] \quad (1)$$ [1];

3. *Si* $\rho = 1$,

$$\sum \frac{1 - \mathcal{R} f(p)}{p} = +\infty.$$

Alors, on a pour x infini

$$\sum_{n \leq x} f(n) = o[x] \quad (2)$$

et, Q étant l'ensemble des entiers naturels qui ne sont divisibles par aucun carré autre que 1,

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n \in Q}} f(n) = o[x]. \quad (3)$$

Les applications que nous donnerons de ce théorème concernent la distribution des valeurs de certaines fonctions arithmétiques réelles additives [2].

---

[1] Nous utilisons la lettre p comme symbole générique d'un nombre premier. Donc, dans une expression telle que $\sum g(p)$ ou $\prod g(p)$, p parcourt l'ensemble des nombres premiers, ou l'ensemble des nombres premiers satisfaisant aux conditions écrites sous le $\sum$ ou le $\prod$.

Indiquons aussi que nous considérons comme nulle toute somme qui ne contient aucun terme, et comme égal à 1 tout produit qui ne contient aucun facteur.

Nous prenons $z^0 = 1$ même pour $z = 0$.

[2] Ce théorème, et une partie des applications que nous en donnons ici, ont été publiés sans démonstration dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (t. 246, 1958, p. 514-517).

2. Remarques prélimimaires. — 2.1. Remarquons d'abord que, si $\varpi(x)$ est le nombre des nombres premiers aux plus égaux à x, l'hypothèse 1 entraîne que

$$\left|\sum_{p\leq x} f(p)\right| \leq \varpi(x),$$

et, par suite, le nombre ρ qui figure dans (1) est nécessairement de module au plus égal à 1.

2.2. L'égalité (1) entraîne que, pour x infini,

$$\sum_{p\leq x} \frac{f(p)}{p} = \rho \log\log x + o[\log\log x]. \tag{4}$$

En effet, si $x > 2$, on a pour chaque $p \leq x$

$$\frac{f(p)}{p} = \frac{f(p)}{x} + \int_p^x \frac{f(p)}{t^2}\,dt,$$

et l'on en déduit par addition

$$\sum_{p\leq x} \frac{f(p)}{p} = \frac{\Phi(x)}{x} + \int_2^x \frac{\Phi(t)}{t^2}\,dt, \qquad \text{où} \quad \Phi(x) = \sum_{p\leq x} f(p).$$

Mais l'égalité (1) s'écrit

$$\Phi(x) = \rho \frac{x}{\log x} + o\left[\frac{x}{\log x}\right]$$

et l'on a

$$\int_2^x \frac{dt}{t\log t} = \log\log x - \log\log 2.$$

(4) entraîne à son tour que, pour x infini,

$$\sum_{p\leq x} \frac{1 - \mathcal{R} f(p)}{p} = [1 - \mathcal{R}\rho]\log\log x + o[\log\log x].$$

Comme $|\rho| \leq 1$, si $\rho \neq 1$, on a $1 - \mathcal{R}\rho > 0$.

Par conséquent, *si les hypothèses du théorème sont satisfaites, on a certainement*

$$\sum \frac{1 - \mathcal{R} f(p)}{p} = +\infty.$$

2.3. Observons enfin que, *compte tenu de l'hypothèse* 1, *l'égalité* (1) *est équivalente à*

$$\sum_{p\leq x} f(p)\log p = \rho x + o[x]. \tag{5}$$

Cela résulte immédiatement de ce qu'on a pour x infini

$$\Phi(x)\log x - \sum_{p\leq x} f(p)\log p = o[x]. \tag{6}$$

En effet, si $x > 2$, on a pour chaque $p \leqq x$

$$f(p)\log\frac{x}{p} = \int_p^x \frac{f(p)}{t}\,dt.$$

Par addition on obtient

$$\sum_{p \leqq x} f(p)\log\frac{x}{p} = \int_2^x \frac{\Phi(t)}{t}\,dt, \qquad \text{ou} \quad \Phi(x)\log x - \sum_{p \leqq x} f(p)\log p = \int_2^x \frac{\Phi(t)}{t}\,dt.$$

Mais, du fait que $|\Phi(x)| \leqq \varpi(x) = \mathrm{o}[x]$, on a

$$\int_2^x \frac{\Phi(t)}{t}\,dt = \mathrm{o}[x].$$

3. Théorème préliminaire. — 3.1. Nous établirons d'abord le théorème suivant :

Soit f une fonction arithmétique réelle ou complexe, non identiquement nulle, multiplicative et satisfaisant à

$$|f(n)| \leqq 1 \qquad \textit{pour tout } n.$$

Posons

$$\theta_f(x) = \sum_{p \leqq x} f(p)\log p.$$

Alors on a pour x infini,

$$\sum_{n \leqq x} f(n) = \frac{1}{\log x}\sum_{n \leqq x} f(n)\,\theta_f\left(\frac{x}{n}\right) + \mathrm{o}[x]. \tag{7}$$

3.2. Pour chaque nombre premier p, définissons la suite

$$c_1^{(p)},\quad c_2^{(p)},\quad \ldots,\quad c_r^{(p)},\quad \ldots$$

par

$$c_1^{(p)} = f(p)$$

et, pour $r > 1$,

$$c_r^{(p)} = rf(p^r) - \sum_{j=1}^{r-1} c_j^{(p)} f(p^{r-j}). \tag{8}$$

3.2.1. On a pour tout $n \geqq 1$,

$$f(n)\log n = \sum_{p^j/n} c_j^{(p)} f\left(\frac{n}{p^j}\right)\log p \quad [3]. \tag{9}$$

Cela résulte immédiatement de ce que, si p_0 est l'un des diviseurs premiers de n et $n = p_0^r m$, avec m non divisible par p_0, la somme des termes correspondant à $p = p_0$ dans cette expression est égale à $rf(n)\log p_0$.

---

[3] Ici, bien entendu, la sommation porte à la fois sur p et j, qui prennent tous les systèmes de valeurs tels que p^j divise n, p étant, comme toujours, un nombre premier, et j étant un entier positif.

En effet, si $r=1$, on a le seul terme

$$c_1^{(p_0)} f(m) \log p_0 = f(p_0) f(m) \log p_0 = f(n) \log p_0,$$

et, si $r>1$, on a la somme

$$\sum_{j=1}^{r} c_j^{(p_0)} f(p_0^{r-j} m) \log p_0 = [f(m) \log p_0] \left\{ \sum_{j=1}^{r-1} c_j^{(p_0)} f(p_0^{r-j}) + c_r^{(p_0)} \right\};$$

d'après (8), ceci est égal à

$$r f(p_0^r) f(m) \log p_0 = r f(n) \log p_0.$$

3.2.2. La formule (9) peut aussi s'écrire

$$f(n) \log n = \sum_{p^j q = n} c_j^{(p)} f(q) \log p.$$

On déduit immédiatement de là que, pour tout $x>0$,

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ 2 \nmid n}} f(n) \log n = \sum_{\substack{q \leq x \\ 2 \nmid q}} f(q)\, \psi_f\left(\frac{x}{q}\right), \tag{10}$$

où

$$\psi_f(x) = \sum_{\substack{p^j \leq x \\ p > 2}} c_j^{(p)} \log p.$$

Nous poserons

$$\psi_f(x) = \theta_f(x) + \delta(x),$$

de sorte que (10) s'écrira

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ 2 \nmid n}} f(n) \log n = \sum_{\substack{q \leq x \\ 2 \nmid q}} f(q)\, \theta_f\left(\frac{x}{q}\right) + \eta(x), \tag{11}$$

où

$$\eta(x) = \sum_{\substack{q \leq x \\ 2 \nmid q}} f(q)\, \delta\left(\frac{x}{q}\right). \tag{12}$$

3.2.3. Nous allons montrer maintenant que, pour x infini,

$$\delta(x) = o[x].$$

Comme $c_1^{(p)} = f(p)$, on voit d'abord que, pour $x \geqq 2$,

$$\delta(x) = -f(2) \log 2 + \sum_{\substack{p^j \leq x \\ p \geqq 2 \\ j > 1}} c_j^{(p)} \log p.$$

Il suffit donc de montrer que, pour x infini,

$$\sum_{\substack{p^j \leq x \\ p \geqq 2 \\ j > 1}} c_j^{(p)} \log p = o[x].$$

Pour cela, nous remarquons d'abord que, quels que soient p et r,

$$|c_r^{(p)}| \leqq 2^r - 1.$$

Cette inégalité s'obtient immédiatement, par récurrence sur r, en tenant compte du fait que $c_1^{(p)} = f(p)$ et de la formule (8). Nous l'utiliserons sous la forme

$$|c_r^{(p)}| \leqq 2^r.$$

On a ainsi, pour $x > 9$,

$$\left| \sum_{\substack{p^j \leqq x \\ p \geqq 2 \\ j > 1}} c_j^{(p)} \log p \right| \leqq \sum_{\substack{p^j \leqq x \\ p \geqq 2 \\ j > 1}} 2^j \log p = \sum_{3 \leqq p \leqq \sqrt{x}} \left\{ \sum_{2 \leqq j \leqq \frac{\log x}{\log p}} 2^j \right\} \log p.$$

Mais

$$\sum_{2 \leqq j \leqq \frac{\log x}{\log p}} 2^j \leqq 2^{\frac{\log x}{\log p} + 1} = 2x^{\frac{\log 2}{\log p}}.$$

On obtient donc, pour $x > 9$,

$$\left| \sum_{\substack{p^j \leqq x \\ p \geqq 2 \\ j > 1}} c_j^{(p)} \log p \right| \leqq 2x^{\frac{\log 2}{\log 3}} \log 3 + 2x^{\frac{\log 2}{\log 5}} \sum_{p \leqq \sqrt{x}} \log p,$$

d'où le résultat annoncé, puisque

$$\frac{\log 2}{\log 5} < \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{p \leqq \sqrt{x}} \log p = \mathrm{O}\left[\sqrt{x}\right].$$

3.2.4. Par ailleurs, $\delta(x)$ est évidemment borné sur tout intervalle fini, puisque $\theta_f(x)$ et $\psi_f(x)$ le sont. Le rapport $\frac{\delta(x)}{x}$ est donc borné pour $x \geqq 1$: il existe un nombre positif M tel que

$$|\delta(x)| \leqq \mathrm{M}x \qquad \text{pour} \quad x \geqq 1.$$

3.2.5. Ceci étant, on voit que, pour x infini,

$$\eta(x) = \mathrm{o}[x \log x].$$

En effet, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe un x_0 positif tel que, pour $x \geqq x_0$, $|\delta(x)| \leqq \varepsilon x$.

Alors on peut écrire pour $x > 0$

$$\eta(x) = \sum_{\substack{q \leqq \frac{x}{x_0} \\ 2 \nmid q}} f(q)\, \delta\left(\frac{x}{q}\right) + \sum_{\substack{\frac{x}{x_0} < q \leqq x \\ 2 \nmid q}} f(q)\, \delta\left(\frac{x}{q}\right),$$

d'où

$$|\eta(x)| \leqq \varepsilon x \sum_{q \leqq \frac{x}{x_0}} \frac{1}{q} + \mathrm{M} x \sum_{\frac{x}{x_0} < q \leqq x} \frac{1}{q}.$$

Ceci entraîne évidemment

$$\overline{\lim_{x \to +\infty}} \frac{|\eta(x)|}{x \log x} \leqq \varepsilon.$$

3.2.6. Il est évident par ailleurs que $\eta(x)$ est borné sur tout intervalle fini, puisque $\delta(x)$ l'est.

3.3. Nous écrirons maintenant $2^r // n$ pour exprimer que $2^r / n$ et $2^{r+1} \nmid n$.

Si l'on remarque que les conditions

$$n \leqq x \qquad \text{et} \qquad 2^r // n$$

sont équivalentes à

$$n = 2^r m, \qquad \text{avec} \quad m \leqq \frac{x}{2^r} \qquad \text{et} \qquad 2 \nmid m,$$

on voit que

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{n \leqq x \\ 2^r // n}} f(n) \log n &= \sum_{\substack{m \leqq \frac{x}{2^r} \\ 2 \nmid m}} f(2^r m) \log(2^r m), \\
&= f(2^r) \sum_{\substack{m \leqq \frac{x}{2^r} \\ 2 \nmid m}} f(m) [r \log 2 + \log m], \\
&= f(2^r) \sum_{\substack{m \leqq \frac{x}{2^r} \\ 2 \nmid m}} f(m) \log m + r f(2^r) \log 2 \sum_{\substack{m \leqq \frac{x}{2^r} \\ 2 \nmid m}} f(m).
\end{aligned}$$

En tenant compte de (11), on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{n \leqq x \\ 2^r // n}} f(n) \log n &= f(2^r) \sum_{\substack{q \leqq \frac{x}{2^r} \\ 2 \nmid q}} f(q)\, \theta_f\left(\frac{x}{2^r q}\right) + f(2^r)\, \eta\left(\frac{x}{2^r}\right) + r f(2^r) \log 2 \sum_{\substack{m \leqq \frac{x}{2^r} \\ 2 \nmid m}} f(m), \\
&= \sum_{\substack{2^r q \leqq x \\ 2 \nmid q}} f(2^r q)\, \theta_f\left(\frac{x}{2^r q}\right) + f(2^r)\, \eta\left(\frac{x}{2^r}\right) + r f(2^r) \log 2 \sum_{\substack{m \leqq \frac{x}{2^r} \\ 2 \nmid m}} f(m), \\
&= \sum_{\substack{n \leqq x \\ 2^r // n}} f(n)\, \theta_f\left(\frac{x}{n}\right) + f(2^r)\, \eta\left(\frac{x}{2^r}\right) + r f(2^r) \log 2 \sum_{\substack{m \leqq \frac{x}{2^r} \\ 2 \nmid m}} f(m).
\end{aligned}$$

Si l'on remarque maintenant que, pour chaque $n \leqq x$, il existe exactement un $r \geqq 0$ et satisfaisant à $2^r \leqq x$ tel que $2^r // n$, on déduit de là que

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqq x} f(n)\log n &= \sum_{2^r\leqq x}\left\{\sum_{\substack{n\leqq x\\ 2^r//n}} f(n)\log n\right\},\\ &= \sum_{2^r\leqq x}\left\{\sum_{\substack{n\leqq x\\ 2^r//n}} f(n)\,\theta_f\left(\frac{x}{n}\right)\right\} + \sum_{2^r\leqq x} f(2^r)\,\eta\left(\frac{x}{2^r}\right) + \log 2\sum_{2^r\leqq x}\left\{r f(2^r)\sum_{\substack{m\leqq \frac{x}{2^r}\\ 2\nmid m}} f(m)\right\},\\ &= \sum_{n\leqq x} f(n)\,\theta_f\left(\frac{x}{n}\right) + \sum_{2^r\leqq x} f(2^r)\,\eta\left(\frac{x}{2^r}\right) + \log 2\sum_{2^r\leqq x}\left\{r f(2^r)\sum_{\substack{m\leqq \frac{x}{2^r}\\ 2\nmid m}} f(m)\right\}.\end{aligned}$$

3.3.1. On voit maintenant que, pour x infini,

$$\sum_{2^r\leqq x} f(2^r)\,\eta\left(\frac{x}{2^r}\right) = o[x\log x].$$

En effet, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe un $x_1 > 1$ tel que, pour $x \geqq x_1$, $|\eta(x)| \leqq \varepsilon x \log x$.

On peut alors écrire, pour $x > 1$,

$$\sum_{2^r\leqq x} f(2^r)\,\eta\left(\frac{x}{2^r}\right) = \sum_{2^r\leqq \frac{x}{x_1}} f(2^r)\,\eta\left(\frac{x}{2^r}\right) + \sum_{\frac{x}{x_1}<2^r\leqq x} f(2^r)\,\eta\left(\frac{x}{2^r}\right),$$

d'où

$$\begin{aligned}\left|\sum_{2^r\leqq x} f(2^r)\,\eta\left(\frac{x}{2^r}\right)\right| &\leqq \varepsilon\sum_{2^r\leqq \frac{x}{x_1}} \frac{x}{2^r}\log\frac{x}{2^r} + \sum_{\frac{x}{x_1}<2^r\leqq x}\left|\eta\left(\frac{x}{2^r}\right)\right|,\\ &\leqq 2\varepsilon x\log x + \sum_{\frac{x}{x_1}<2^r\leqq x}\left|\eta\left(\frac{x}{2^r}\right)\right|.\end{aligned}$$

Ceci entraîne

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\,\frac{1}{x\log x}\left|\sum_{2^r\leqq x} f(2^r)\,\eta\left(\frac{x}{2^r}\right)\right| \leqq 2\varepsilon.$$

3.2. On a par ailleurs

$$\left|\sum_{2^r\leqq x}\left\{r f(2^r)\sum_{\substack{m\leqq \frac{x}{2^r}\\ 2\nmid m}} f(m)\right\}\right| \leqq \sum_{2^r\leqq x}\frac{rx}{2^r} \leqq x\sum_{1}^{+\infty}\frac{r}{2^r}.$$

3.4. On voit donc finalement que, pour x infini,

$$\sum_{n\leqq x} f(n)\log n = \sum_{n\leqq x} f(n)\,\theta_f\left(\frac{x}{n}\right) + o[x\log x].$$

La relation (7) se déduit immédiatement de là en remarquant que, si l'on pose

$$F(x)=\sum_{n\leq x} f(n),$$

on a pour x infini

$$F(x)\log x=\sum_{n\leq x} f(n)\log n+O[x].$$

En effet, si $x>1$, on a pour chaque $n\leq x$

$$f(n)\log\frac{x}{n}=\int_n^x\frac{f(n)}{t}\,dt.$$

Par addition on obtient

$$F(x)\log x-\sum_{n\leq x} f(n)\log n=\int_1^x\frac{F(t)}{t}\,dt.$$

Mais, comme $|F(x)|\leq x$, on a

$$\left|\int_1^x\frac{F(t)}{t}\,dt\right|\leq x-1.$$

3.5. Remarquons qu'on a non seulement (7) mais

$$(7')\qquad \sum_{n\leq x} f(n)=\frac{1}{\log x}\sum_{n\leq x} f(n)\,\theta_f\left(\frac{x}{n}\right)+o\left[\frac{x}{\log x}H_f(x)\right],\qquad \text{où}\quad H_f(x)=\sum_{n\leq x}\frac{|f(n)|}{n}.$$

On a $H_f(1)=1$ et H_f est une fonction non décroissante.

$H_f(x)$ peut donc tendre vers $+\infty$ ou vers une limite finie >0 quand x tend vers $+\infty$.

On voit d'abord que le raisonnement du paragraphe 3.2.5 permet d'établir dans les deux cas que, pour x infini,

$$\eta(x)=o[x H_f(x)].$$

On arrive ainsi à

$$\sum_{n\leq x} f(n)\log n=\sum_{n\leq x} f(n)\,\theta_f\left(\frac{x}{n}\right)+o[x H_f(x)].$$

On remarque par ailleurs que, lorsque $H_f(x)$ tend vers une limite finie quand x tend vers $+\infty$, on a

$$F(x)=o[x],\qquad \text{d'où}\qquad \int_1^x\frac{F(t)}{t}\,dt=o[x].$$

(7′) entraîne (7) car on a évidemment

$$H_f(x)=O[\log x].$$

4. Démonstration du théorème principal. — 4.1. Remarquons d'abord qu'il suffit d'établir la relation (2).

En effet, quand la fonction f satisfait aux hypothèses du théorème, il en est de même de la fonction f_1 définie par

$$f_1(n) = \begin{cases} f(n) & \text{si} \quad n \in Q, \\ 0 & \text{si} \quad n \notin Q, \end{cases}$$

et la relation (3) n'est autre que (2) appliquée à f_1 au lieu de f.

4.2. Supposons donc que f satisfait aux hypothèses du théorème et proposons-nous d'établir la relation (2).

4.2.1. Comme les hypothèses du théorème préliminaire établi plus haut sont satisfaites, on a la relation (7) et l'on voit qu'il suffit de montrer que pour x infini,

$$\sum_{n \leq x} f(n)\, \theta_f\left(\frac{x}{n}\right) = o\,[x \log x]. \tag{13}$$

4.2.2. Mais, d'après ce qui a été dit au paragraphe 2.3, on a pour x infini

$$\theta_f(x) = \rho x + o\,[x].$$

Ceci entraîne

$$\sum_{n \leq x} \left| \theta_f\left(\frac{x}{n}\right) - \rho \frac{x}{n} \right| = o\,[x \log x]. \tag{14}$$

En effet, étant donné ε positif, il existe un $x_2 > 0$ tel que

$$|\theta_f(x) - \rho x| \leq \varepsilon x \qquad \text{pour} \quad x \geq x_2.$$

Alors on peut écrire pour $x > 0$

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \left| \theta_f\left(\frac{x}{n}\right) - \rho \frac{x}{n} \right| &= \sum_{n \leq \frac{x}{x_2}} \left| \theta_f\left(\frac{x}{n}\right) - \rho \frac{x}{n} \right| + \sum_{\frac{x}{x_2} < n \leq x} \left| \theta_f\left(\frac{x}{n}\right) - \rho \frac{x}{n} \right|, \\ &\leq \varepsilon x \sum_{n \leq \frac{x}{x_2}} \frac{1}{n} + \sum_{\frac{x}{x_2} < n \leq x} \left| \theta_f\left(\frac{x}{n}\right) - \rho \frac{x}{n} \right|, \end{aligned}$$

ce qui entraîne

$$\overline{\lim_{x \to +\infty}} \frac{1}{x \log x} \sum_{n \leq x} \left| \theta_f\left(\frac{x}{n}\right) - \rho \frac{x}{n} \right| \leq \varepsilon,$$

car

$$\sum_{\frac{x}{x_2} < n \leq x} \left| \theta_f\left(\frac{x}{n}\right) - \rho \frac{x}{n} \right| = O\,[x],$$

du fait que $\theta_f(x)$ est borné sur tout intervalle fini.

4.2.3. En écrivant

$$\left|\sum_{n\leqq x} f(n)\theta_f\left(\frac{x}{n}\right) - \rho x \sum_{n\leqq x}\frac{f(n)}{n}\right| = \left|\sum_{n\leqq x} f(n)\left[\theta_f\left(\frac{x}{n}\right) - \rho\frac{x}{n}\right]\right| \leqq \sum_{n\leqq x}\left|\theta_f\left(\frac{x}{n}\right) - \rho\frac{x}{n}\right|,$$

et tenant compte de (14), on voit que (13) sera établie si l'on montre que, pour x infini,

$$\sum_{n\leqq x}\frac{f(n)}{n} = o[\log x]. \tag{15}$$

4.2.4. Pour arriver à ce résultat, nous utiliserons le lemme suivant :

Soit la série de Dirichlet $\sum_1^{+\infty}\frac{a_n}{n^s}$, *où les* a_n *sont des coefficients réels ou complexes satisfaisant à*

$$|a_n| \leqq K \qquad \textit{pour tout } n \geqq 1.$$

Si l'on a pour s *réel tendant vers* 1 *par valeurs supérieures*

$$\sum_1^{+\infty}\frac{a_n}{n^s} = o\left[\frac{1}{s-1}\right],$$

on a pour x *infini*

$$\sum_{n\leqq x}\frac{a_n}{n} = o[\log x].$$

Ce lemme s'établit très facilement de la façon suivante :

Posons $a_n = u_n + iv_n$, avec u_n et v_n réels.

Alors on a, pour s tendant vers 1 par valeurs supérieures,

$$\sum_1^{+\infty}\frac{u_n}{n^s} = o\left[\frac{1}{s-1}\right] \qquad \text{et} \qquad \sum_1^{+\infty}\frac{v^n}{n^s} = o\left[\frac{1}{s-1}\right],$$

d'où

$$\sum_1^{+\infty}\frac{u_n+K}{n^s} \sim \frac{K}{s-1} \qquad \text{et} \qquad \sum_1^{+\infty}\frac{v_n+K}{n^s} \sim \frac{K}{s-1}.$$

Autrement dit, pour s tendant vers zéro par valeurs positives,

$$\sum_1^{+\infty}\frac{u_n+K}{n}\frac{1}{n^s} \sim \frac{K}{s} \qquad \text{et} \qquad \sum_1^{+\infty}\frac{v_n+K}{n}\frac{1}{n^s} \sim \frac{K}{s}.$$

Comme, pour chaque n,

$$u_n + K \geqq 0 \qquad \text{et} \qquad v_n + K \geqq 0,$$

ceci entraîne, d'après un théorème bien connu de Hardy et Littlewood, qu'on a pour t infini

$$\sum_{\log n\leqq t}\frac{u_n+K}{n} \sim Kt \qquad \text{et} \qquad \sum_{\log n\leqq t}\frac{v_n+K}{n} \sim Kt,$$

ou, en prenant $t = \log x$, qu'on a pour x infini

$$\sum_{n \leq x} \frac{u_n + \mathrm{K}}{n} \sim \mathrm{K} \log x \qquad \text{et} \qquad \sum_{n \leq x} \frac{v_n + \mathrm{K}}{n} \sim \mathrm{K} \log x,$$

d'où

$$\sum_{n \leq x} \frac{u_n}{n} = o[\log x] \qquad \text{et} \qquad \sum_{n \leq x} \frac{v_n}{n} = o[\log x].$$

4.2.5. Grâce au lemme précédent, nous sommes ramenés finalement à prouver que, quand s tend vers 1 par valeurs supérieures,

$$\sum_{1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s} = o\left[\frac{1}{s-1}\right],$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{1}{\zeta(s)} \sum_{1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s} = o[1].$$

Mais on a pour $\mathcal{R}s > 1$

$$\sum_{1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \prod \left[1 + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{f(p)}{p^{js}}\right],$$

et par suite

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s} &= \prod \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)\left[1 + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{f(p^j)}{p^{js}}\right], \\ &= \left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\left[1 + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{f(2^j)}{2^{js}}\right] \prod_{p>2} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)\left[1 + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{f(p^j)}{p^{js}}\right]. \end{aligned}$$

Quand s tend vers 1 par valeurs supérieures,

$$\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\left[1 + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{f(2^j)}{2^{js}}\right] \quad \text{tend vers} \quad \frac{1}{2}\left[1 + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{f(2^j)}{2^j}\right].$$

Pour étudier le produit infini, nous remarquerons que, pour $\mathcal{R}s > 1$,

$$1 + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{f(p^j)}{p^{js}} = \exp\left\{\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{c_j^{(p)}}{jp^{js}}\right\}, \tag{16}$$

où les $c_j^{(p)}$ sont ceux qui ont été définis au paragraphe 3.2.

En effet, tandis que la série entière

$$1 + \sum_{j=1}^{+\infty} f(p^j) z^j$$

a évidemment un rayon de convergence $\geqq 1$, la série entière

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{c_j^{(p)}}{j} z^j$$

a un rayon de convergence $\geqq \frac{1}{2}$, puisque, comme on l'a vu au paragraphe 3.2.3, $|c_j^{(p)}| \leqq 2^j - 1$.

Si l'on pose

$$\mathcal{F}_p(z) = 1 + \sum_{j=1}^{+\infty} f(p^j) z^j \qquad \text{et} \qquad \mathrm{C}_p(z) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{c_j^{(p)}}{j} z^j,$$

la relation (8) montre que, pour $|z| < \frac{1}{2}$,

$$\mathrm{C}'_p(z) \mathcal{F}_p(z) = \mathcal{F}'_p(z).$$

Il en résulte que le produit $\mathcal{F}_p(z) \exp[-\mathrm{C}_p(z)]$ a une dérivée nulle, donc est constamment égal à sa valeur pour $z = 0$, c'est-à-dire à 1. Autrement dit, on a pour $|z| < \frac{1}{2}$

$$\mathcal{F}_p(z) = \exp[\mathrm{C}_p(z)].$$

On obtient (16) en prenant $z = \frac{1}{p^s}$.

Il résulte de là qu'on a pour $\mathcal{R}s > 1$

$$\prod_{p>2} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \left[1 + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{f(p^j)}{p^{js}}\right] = \exp\left\{\sum_{p>2} \frac{c_j^{(p)} - 1}{jp^{js}}\right\} = \exp\left\{\sum_{p>2} \frac{c_1^{(p)} - 1}{p^s}\right\} \exp\left\{\sum_{\substack{p \geqq 2 \\ j > 1}} \frac{c_j^{(p)} - 1}{jp^{js}}\right\}.$$

Le second facteur est borné car

$$\left|\sum_{\substack{p \geqq 2 \\ j > 1}} \frac{c_j^{(p)} - 1}{jp^{js}}\right| \leqq \sum_{\substack{p \geqq 2 \\ j > 1}} \frac{2^{j-1}}{p^j} = \sum_{p>2} \frac{2}{p(p-2)}.$$

Le premier facteur tend vers zéro quand s tend vers 1 par valeurs supérieures, car, pour s réel, son module est

$$\exp\left\{\sum_{p>2} \frac{\mathcal{R}c_1^{(p)} - 1}{p^s}\right\} = \exp\left\{-\sum_{p>2} \frac{1 - \mathcal{R}f(p)}{p^s}\right\},$$

et, d'après ce qu'on a vu au paragraphe 2.2, on a

$$\sum \frac{1 - \mathcal{R}f(p)}{p} = +\infty.$$

Notre démonstration est ainsi terminée.

4.3. Il est facile de voir que le théorème resterait vrai si l'on remplaçait les hypothèses 2 et 3 par les suivantes :

2'. *Si* $\Psi(x) = \frac{\log x}{x} \sum_{p \leq x} f(p)$, *pour tout* $\lambda > 1$, *on a quand* x *tend vers* $+\infty$

$$\Psi(x^\lambda) - \Psi(x) = o[1]. \tag{17}$$

3'. *On a*

$$\sum \frac{1 - \mathcal{R} f(p)}{p} = +\infty.$$

Il est clair que l'hypothèse 2' équivaut à celle que (17) a lieu pour tout $\lambda > 0$ car si (17) a lieu pour $\lambda = \lambda_0 > 1$, il en est de même pour $\lambda = \frac{1}{\lambda_0}$

D'autre part, compte tenu de l'hypothèse 1, l'égalité (17) est équivalente a

$$\frac{1}{x^\lambda} \theta_f(x^\lambda) - \frac{1}{x} \theta_f(x) = o[1], \tag{18}$$

puisque l'hypothèse 1 entraîne (6), qui s'écrit, en divisant par x,

$$\Psi(x) - \frac{1}{x} \theta_f(x) = o[1].$$

Il résulte d'un théorème de Karamata que, lorsque (18) a lieu pour tout $\lambda > 0$, elle a lieu uniformément pour $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$ quels que soient λ_1 et λ_2 satisfaisant à $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, ce qui permet de montrer que, pour x infini,

$$\sum_{n \leq x} \left| \theta_f\left(\frac{x}{n}\right) - \frac{1}{n} \theta_f(x) \right| = o[x \log x],$$

et de ramener encore la démonstration de (13) à celle de (15).

4.3.1. On pourrait même prendre des hypothèses encore un peu plus générales, mais moins simples.

4.3.2. On arriverait ainsi à remplacer les résultats que nous donnerons comme applications par des résultats plus généraux, mais d'énoncés plus compliqués.

5. Remarques générales en vue des applications. — Dans toute cette section, A est un ensemble d'entiers naturels possédant une densité positive D, c'est-à-dire tel que le nombre des nombres de A au plus égaux à x soit équivalent pour x infini à $\mathrm{D}x$.

5.1. Soit g une fonction arithmétique à valeurs entières.

Supposons que, quel que soit z réel ou complexe satisfaisant à $|z| \leq 1$ et $z \neq 1$, on ait pour x infini

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n \in \mathrm{A}}} z^{g(n)} = o[x]. \tag{19}$$

Alors on a les résultats suivants :

α. Quel que soit q entier > 1 et quel que soit r entier, l'ensemble des n appartenant à A et tels que

$$g(n) \equiv r \pmod{q}$$

possède une densité égale à $\frac{D}{q}$.

β. Quel que soit λ irrationnel, les nombres $\lambda g(n)$ sont répartis uniformément modulo 1 quand n parcourt A. Autrement dit, pour tout t réel satisfaisant à $0 \leqq t \leqq 1$, l'ensemble des n appartenant à A et tels que

$$\lambda g(n) - \text{partie entière de } \lambda g(n) \leqq t$$

possède une densité égale à tD.

β résulte immédiatement d'une extension triviale d'un théorème bien connu de H. Weyl, en prenant dans (19)

$$z = \exp(2m\pi i\lambda),$$

avec m entier positif quelconque.

α s'obtient en remarquant que le nombre des $n \leqq x$ appartenant à A et tels que

$$g(n) \equiv r \pmod{q}$$

est égal à

$$\frac{1}{q}\sum_{j=0}^{q-1} \sum_{\substack{n \leqq x \\ n \in A}} \exp\left\{ j\frac{2\pi i}{q}[g(n) - r]\right\},$$

et que, pour $1 \leqq j \leqq q-1$, en faisant dans (19) $z = \exp\left\{\frac{2\pi ij}{q}\right\}$ et multipliant par $\exp\left\{-\frac{2\pi ijr}{q}\right\}$, on obtient

$$\sum_{\substack{n \leqq x \\ n \in A}} \exp\left\{ j\frac{2\pi i}{q}[g(n) - r]\right\} = o[x].$$

Il est à noter que le résultat α est valable pour un q donné et r quelconque sous la seule hypothèse que (19) a lieu pour $z = \exp\left\{\frac{2\pi ij}{q}\right\}$, avec $j \not\equiv 0 \pmod{q}$, et que β est valable sous la seule hypothèse que (19) a lieu pour $z = \exp(2\pi iu)$, avec u irrationnel.

5.2. Soient maintenant g et h deux fonctions arithmétiques à valeurs entières.

5.2.1. Supposons d'abord que, quels que soient u et v réels ou complexes satisfaisant à $|u| \leqq 1$, $|v| \leqq 1$, et u *ou* $v \neq 1$, on ait pour x infini

$$\sum_{\substack{n \leqq x \\ n \in A}} u^{g(n)} v^{h(n)} = o[x]. \tag{20}$$

Alors on a les résultats suivants :

γ. Quels que soient q et q' entiers >1 et quels que soient r et r' entiers, l'ensemble des n appartenant à A et tels que

$$g(n) \equiv r \pmod{q} \quad \text{et} \quad h(n) \equiv r' \pmod{q'}$$

possède une densité égale à $\frac{D}{qq'}$.

δ. Quels que soient λ et μ irrationnels, si l'on pose

$$\xi_n = \lambda g(n) - \text{partie entière de } \lambda g(n) \quad \text{et} \quad \eta_n = \mu h(n) - \text{partie entière de } \mu h(n),$$

les points (ξ_n, η_n) se répartissent uniformément dans le carré $0 \leqq \xi \leqq 1$, $0 \leqq \eta \leqq 1$, quand n parcourt A; autrement dit, pour t et t' réels satisfaisant à $0 \leqq t \leqq 1$ et $0 \leqq t' \leqq 1$, l'ensemble des n appartenant à A et tels que

$$\xi_n \leqq t \quad \text{et} \quad \eta_n \leqq t'$$

possède une densité égale à $tt'D$.

Ici encore, δ résulte immédiatement d'une extension triviale d'un résultat connu de H. Weyl, en prenant dans (20)

$$u = \exp(2m\pi i\lambda) \quad \text{et} \quad v = \exp(2m'\pi i\mu),$$

avec m et m' entiers rationnels quelconques non nuls simultanément.

γ s'obtient en remarquant que le nombre des $n \leqq x$ appartenant à A et tels que

$$g(n) \equiv r \pmod{q} \quad \text{et} \quad h(n) \equiv r' \pmod{q'}$$

est égal à

$$\frac{1}{qq'} \sum_{\substack{0 \leqq j \leqq q-1 \\ 0 \leqq j' \leqq q'-1}} \sum_{\substack{n \leqq x \\ n \in A}} \exp\left\{ j \frac{2\pi i}{q} [g(n) - r] + j' \frac{2\pi i}{q'} [h(n) - r'] \right\},$$

et que, quand $0 \leqq j \leqq q-1$, $0 \leqq j' \leqq q'-1$ et j ou $j' \neq 0$, en faisant dans (20)

$$u = \exp\left[\frac{2\pi i j}{q}\right] \quad \text{et} \quad v = \exp\left[\frac{2\pi i j'}{q'}\right],$$

et multipliant par $\exp\left\{-\frac{2\pi i jr}{q} - \frac{2\pi i j' r'}{q'}\right\}$, on obtient

$$\sum_{\substack{n \leqq x \\ n \in A}} \exp\left\{ j \frac{2\pi i}{q} [g(n) - r] + j' \frac{2\pi i}{q'} [h(n) - r'] \right\} = o[x].$$

5.2.2. Supposons maintenant qu'on ait (20) pour u et v réels ou complexes satisfaisant à $|u| \leqq 1$, $|v| \leqq 1$ et $uv \neq 1$.

Alors on a les résultats suivants :

γ'. Quels que soient q et $q' > 1$ et *premiers entre eux* et quels que soient r et r' entiers, l'ensemble des n appartenant à A et tels que

$$g(n) \equiv r \pmod{q} \quad \text{et} \quad h(n) \equiv r' \pmod{q'}$$

possède une densité égale à $\frac{D}{qq'}$.

δ'. Quels que soient λ et μ irrationnels *et tels que l'équation*

$$\lambda X + \mu Y = Z$$

n'ait aucune autre solution en entiers rationnels que $X = Y = Z = 0$, les points (ξ_n, η_n), où ξ_n et η_n sont définis comme plus haut, se répartissent uniformément dans le carré $0 \leqq \xi \leqq 1$, $0 \leqq \eta \leqq 1$ quand n parcourt A.

Ces résultats s'obtiennent exactement comme γ et δ au paragraphe précédent. Les hypothèses supplémentaires qui y figurent servent à assurer que $uv \neq 1$, de sorte que (20) a lieu, quand on prend u et v comme il a été dit.

6. Étude de fonctions liées a certains ensembles de nombres premiers. — 6.1. E étant un ensemble de nombres premiers, nous lui associons les fonctions arithmétiques ω_E et Ω_E définies de la façon suivante :

$\omega_E(n)$ est le nombre des diviseurs premiers de n appartenant à E et $\Omega_E(n)$ est le nombre total des facteurs appartenant à E dans la décomposition de n en facteurs premiers.

Autrement dit, si n n'est divisible par aucun nombre de E,

$$\omega_E(n) = \Omega_E(n) = 0,$$

et, si $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r} m$, où $p_1, p_2, \ldots, p_r$ sont des nombres de E tous différents, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ des entiers positifs, et m un entier positif qui n'est divisible par aucun nombre de E,

$$\omega_E(n) = r \quad \text{et} \quad \Omega_E(n) = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_r.$$

ω_E et Ω_E sont des fonctions additives.

De plus, il est clair que, lorsque n appartient à l'ensemble Q, on a

$$\omega_E(n) = \Omega_E(n).$$

Lorsque E est l'ensemble de tous les nombres premiers, nous écrivons simplement $\omega(n)$ et $\Omega(n)$. Autrement dit, nous désignons par $\omega(n)$ et $\Omega(n)$ le nombre des diviseurs premiers de n et le nombre total des facteurs dans la décomposition de n en facteurs premiers.

6.1.1. Nous désignons, d'autre part, par $\varpi_E(x)$ le nombre des nombres de E au plus égaux à x.

6.2. Nous disons que l'ensemble E de nombres premiers appartient à la classe $(\mathcal{C})$ si :

1° E possède une densité par rapport à l'ensemble de tous les nombres premiers; autrement dit, il existe un $\delta \geqq 0$ tel que, pour x infini,

$$\varpi_E(x) = \delta\varpi(x) + o[\varpi(x)] = \delta\frac{x}{\log x} + o\left[\frac{x}{\log x}\right]; \tag{21}$$

2° Dans le cas où $\delta = 0$, on a

$$\sum_{p \in E} \frac{1}{p} = +\infty. \tag{22}$$

Nous dirons plus précisément que E est un ensemble de la classe $(\mathcal{C})$ *de densité* δ.

6.2.1. Remarquons que la relation (21) entraîne

$$\sum_{\substack{p \leqq x \\ p \in E}} \frac{1}{p} = \delta \log\log x + o[\log\log x].$$

Cela résulte de ce qui a été dit au paragraphe 2.2, en y remplaçant f par la fonction f_0 telle que

$$f_0(p) = \begin{cases} 1 & \text{si } p \in E, \\ 0 & \text{si } p \notin E. \end{cases}$$

Par conséquent, on a toujours (22) lorsque E appartient à la classe $(\mathcal{C})$.

6.2.2. Il est clair que l'ensemble de tous les nombres premiers appartient à la classe $(\mathcal{C})$.

Il en est de même de l'ensemble des nombres premiers satisfaisant à

$$p \equiv l \pmod{k},$$

où k est un entier quelconque > 1 et l un entier quelconque premier avec k.

Plus généralement, la classe $(\mathcal{C})$ contient celle des ensembles que nous avons appelé ailleurs « ensembles réguliers » ([4]).

La réunion d'un nombre fini d'ensembles disjoints de la classe $(\mathcal{C})$ appartient aussi à la classe $(\mathcal{C})$.

6.3. E étant un ensemble de la classe $(\mathcal{C})$, on voit immédiatement que, si z est un nombre réel ou complexe satisfaisant à $|z| \leqq 1$ et $z \neq 1$, les fonctions arithmétiques égales à $z^{\omega_E(n)}$ et $z^{\Omega_E(n)}$ satisfont aux hypothèses de notre théorème fondamental.

Il en est de même de la fonction égale à $u^{\omega_E(n)} v^{\Omega_E(n)}$, où u et v sont des nombres réels ou complexes tels que $|u| \leqq 1$, $|v| \leqq 1$ et $uv \neq 1$.

([4]) *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, (3), t. 73, 1956, p. 15-74.

Par suite, si $|z| \leqq 1$ et $z \neq 1$, on a pour x infini

$$\sum_{n \leqq x} z^{\omega_E(n)} = o[x]; \qquad \sum_{n \leqq x} z^{\Omega_E(n)} = o[x] \qquad \text{et} \qquad \sum_{\substack{n \leqq x \\ n \in Q}} z^{\omega_E(n)} = o[x],$$

et, si $|u| \leqq 1$, $|v| \leqq 1$ et $uv \neq 1$, on a pour x infini

$$\sum_{n \leqq x} u^{\omega_E(n)} v^{\Omega_E(n)} = o[x].$$

6.3.1. Compte tenu de ce qui a été dit aux paragraphes 5.1 et 5.2.2, on déduit de là le théorème suivant :

THÉORÈME 1. — *Soit* E *un ensemble de nombres premiers appartenant à la classe* ($\mathcal{C}$).

1° *Quel que soit q entier* > 1 *et quel que soit r entier, l'ensemble des entiers naturels n satisfaisant à*

$$\omega_E(n) \equiv r \pmod{q} \tag{23}$$

et l'ensemble de ceux qui satisfont à

$$\Omega_E(n) \equiv r \pmod{q}$$

possèdent une densité égale à $\frac{1}{q}$, *tandis que l'ensemble des nombres de* Q *qui satisfont à* (23) *a une densité égale à* $\frac{1}{q}\frac{6}{\pi^2}$.

2° *Quel que soit le nombre irrationnel* λ, *les nombres* $\lambda\omega_E(n)$ *et les nombres* $\lambda\Omega_E(n)$ *sont distribués uniformément modulo* 1 *quand n parcourt l'ensemble des entiers naturels et quand n parcourt* Q.

3° *Quels que soient q et q' entiers* > 1 *et premiers entre eux, et quels que soient r et r' entiers, l'ensemble des entiers naturels n satisfaisant à*

$$\omega_E(n) \equiv r \pmod{q} \qquad et \qquad \Omega_E(n) \equiv r' \pmod{q'}$$

possède une densité égale à $\frac{1}{qq'}$.

4° *Quels que soient les nombres irrationnels* λ *et* μ *tels que l'équation*

$$\lambda X + \mu Y = Z$$

n'ait aucune autre solution en entiers rationnels que $X = Y = Z = 0$, *les points* (ξ_n, η_n), *où*

$$\xi_n = \lambda\omega_E(n) - \text{partie entière de } \lambda\omega_E(n) \qquad et \qquad \eta_n = \mu\Omega_E(n) - \text{partie entière de } \mu\Omega_E(n),$$

se répartissent uniformément dans le carré $0 \leqq \xi \leqq 1$, $0 \leqq \eta \leqq 1$, *quand n parcourt l'ensemble des entiers naturels.*

6.4. Considérons maintenant deux ensembles E_1 et E_2 de la classe $(\mathcal{C})$, et supposons que l'un au moins des ensembles $E_1 - E_2$ et $E_2 - E_1$ appartienne aussi à la classe $(\mathcal{C})$.

Ceci entraîne évidemment que $E_1 \cap E_2$ possède une densité par rapport à l'ensemble de tous les nombres premiers, de sorte que $E_1 - E_2$ et $E_2 - E_1$ en possèdent l'un et l'autre.

Soient g l'une des fonctions ω_{E_1} et Ω_{E_1}, et h l'une des fonctions ω_{E_2} et Ω_{E_2}.

On voit que la fonction arithmétique égale à $u^{g(n)} v^{h(n)}$, où $|u| \leqq 1$, $|v| \leqq 1$ et u ou $v \neq 1$, satisfait aux hypothèses de notre théorème principal, de sorte qu'on a pour x infini

$$\sum_{n \leqq x} u^{g(n)} v^{h(n)} = o[x] \qquad \text{et} \qquad \sum_{\substack{n \leqq x \\ n \in Q}} u^{g(n)} v^{h(n)} = o[x].$$

6.4.1. Compte tenu de ce qui a été dit au paragraphe 5.2.1, on déduit de là le théorème suivant :

THÉORÈME 2. — *Soient* E_1 *et* E_2 *deux ensembles de nombres premiers appartenant à la classe* $(\mathcal{C})$ *et tels que l'un au moins des ensembles* $E_1 - E_2$ *et* $E_2 - E_1$ *appartienne aussi à la classe* $(\mathcal{C})$.

Soient g l'une des fonctions ω_{E_1} *et* Ω_{E_1} *et h l'une des fonctions* ω_{E_2} *et* Ω_{E_2}.

1° *Quels que soient q et q' entiers* > 1 *et quels que soient r et r' entiers, l'ensemble des entiers naturels tels que*

$$g(n) \equiv r \pmod{q} \qquad \textit{et} \qquad h(n) \equiv r' \pmod{q'}$$

possède une densité égale à $\frac{1}{qq'}$, *et l'ensemble des nombres de* Q *satisfaisant aux mêmes conditions possède une densité égale à* $\frac{1}{qq'}\frac{6}{\pi^2}$.

2° *Quels que soient* λ *et* μ *irrationnels, les points* (ξ_n, η_n), *où*

$$\xi_n = \lambda g(n) - \text{partie entière de } \lambda g(n) \qquad \textit{et} \qquad \eta_n = \mu h(n) - \text{partie entière de } \mu h(n),$$

se répartissent uniformément dans le carré $0 \leqq \xi \leqq 1$, $0 \leqq \eta \leqq 1$ *lorsque n parcourt l'ensemble des entiers naturels et lorsque n parcourt l'ensemble* Q.

7. AUTRES THÉORÈMES. — 7.1. Notre théorème principal a pour conséquence immédiate le théorème général suivant :

THÉORÈME 3. — *Soit* F *une fonction arithmétique réelle additive.*

Supposons que, pour chaque entier positif m, il existe une constante réelle ou complexe ρ_m *telle qu'on ait pour x infini*

$$\sum_{p \leqq x} \exp[2m\pi i F(p)] = \rho_m \frac{x}{\log x} + o\left[\frac{x}{\log x}\right], \tag{24}$$

et, si $\rho_m = 1$, *on ait*

$$\sum \frac{\sin^2 m\pi F(p)}{p} = +\infty.$$

Alors les nombres $F(n)$ *sont distribués uniformément modulo* 1 *quand n parcourt l'ensemble des nombres naturels et quand n parcourt l'ensemble* Q.

En effet, pour chaque entier positif m, la fonction égale à $\exp[2m\pi i F(n)]$ satisfait aux hypothèses de notre théorème principal et l'on a pour x infini

$$\sum_{n \leq x} \exp[2m\pi i F(n)] = o[x] \quad \text{et} \quad \sum_{\substack{n \leq x \\ n \in Q}} \exp[2m\pi i F(n)] = o[x].$$

7.1.1. Un cas particulier simple dans lequel la fonction réelle additive F satisfait aux hypothèses du théorème précédent est celui où $F(p)$ tend vers zéro quand p tend vers $+\infty$ et

$$\sum \frac{F(p)^2}{p} = +\infty.$$

On retrouve ainsi un théorème connu d'Erdös ([5]).

7.1.2. Comme autre application, indiquons le résultat suivant :

Si $S(n)$ *est la somme des diviseurs premiers de n, et* λ *un nombre irrationnel quelconque, les nombres* $\lambda S(n)$ *sont distribués uniformément modulo* 1 *quand n parcourt l'ensemble des entiers naturels et quand n parcourt l'ensemble* Q.

Cela tient à ce que, quel que soit le nombre irrationnel α, on a pour x infini

$$\sum_{p \leq x} \exp(2\pi i \alpha p) = o\left[\frac{x}{\log x}\right].$$

7.1.3. On montrerait aisément que l'hypothèse qu'on ait (24) pour chaque m entier positif est équivalente à celle que les nombres $F(p)$ possèdent une distribution modulo 1, ce qui peut s'exprimer aussi de la façon suivante :

Il existe une mesure μ sur la circonférence $|z| = 1$ telle que, pour tout arc γ de cette circonférence tel que l'ensemble formé de ses extrémités soit de mesure nulle, le quotient par $\varpi(x)$ du nombre des nombres premiers au plus égaux à x pour lesquels $\exp[2\pi i F(p)] \in \gamma$ tende vers $\mu(\gamma)$ quand x tend vers $+\infty$.

On ne peut avoir $\rho_m = 1$ que si μ est une mesure discrète, dont le support est contenu dans l'ensemble des racines $m^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

7.2. On a aussi le théorème général suivant :

THÉORÈME 4. — *Soit* F *une fonction arithmétique réelle additive, à valeurs entières.*

([5]) *Ann. Math.*, (2), t. 47, 1946, p. 1-20.

q étant un entier > 1, supposons que :

1° *Pour chaque entier m, l'ensemble E_m des nombres premiers tels que*

$$F(p) \equiv m \pmod{q}$$

possède une densité par rapport à l'ensemble de tous les nombres premiers, soit δ_m;

2° *Si le plus grand commun diviseur d de q et des m positifs et $\leq q-1$ pour lesquels $\delta_m > 0$ est > 1, il existe au moins un m premier avec d tel que*

$$\sum_{p \in E_m} \frac{1}{p} = +\infty.$$

Alors, quel que soit l'entier r, l'ensemble des entiers naturels tels que

$$F(n) \equiv r \pmod{q}$$

possède une densité égale à $\frac{1}{q}$, et l'ensemble des nombres de Q qui satisfont à la même condition possède une densité égale à $\frac{1}{q}\frac{6}{\pi^2}$.

Pour établir le résultat indiqué, il suffit de montrer que, pour tout $j \not\equiv 0 \pmod{q}$, la fonction f_j définie par

$$f_j(n) = \exp\left\{\frac{2\pi ji}{q} F(n)\right\}$$

satisfait aux hypothèses de notre théorème principal, ce qui permet de conclure que, pour x infini,

$$\sum_{n \leq x} \exp\left\{\frac{2\pi ji}{q} F(n)\right\} = o[x] \qquad \text{et} \qquad \sum_{\substack{n \leq x \\ n \in Q}} \exp\left\{\frac{2\pi ji}{q} F(n)\right\} = o[x],$$

d'où, en multipliant par $\exp\left\{-\frac{2\pi jri}{q}\right\}$,

$$\sum_{n \leq x} \exp\left\{j\frac{2\pi i}{q}[F(n)-r]\right\} = o[x] \qquad \text{et} \qquad \sum_{\substack{n \leq x \\ n \in Q}} \exp\left\{j\frac{2\pi i}{q}[F(n)-r]\right\} = o[x].$$

f_j est bien multiplicative et non identiquement nulle, et satisfait à l'hypothèse 1.

De plus, on a pour x infini

$$\sum_{p \leq x} f_j(p) = \rho_j \frac{x}{\log x} + o\left[\frac{x}{\log x}\right], \qquad \text{avec} \quad \rho_j = \sum_{m=0}^{q-1} \delta_m \exp\left\{\frac{2\pi jmi}{q}\right\}.$$

Comme tous les δ_m sont ≥ 0 et $\sum_{m=0}^{q-1} \delta_m = 1$, on ne peut avoir $\rho_j = 1$ que si

$$jm \equiv 0 \pmod{q} \tag{25}$$

pour tous les m satisfaisant à $1 \leqq m \leqq q-1$ et tels que $\delta_m > 0$. Mais la congruence (25) est équivalente à

$$m \equiv 0 \pmod{q'}, \qquad \text{où } q' = \frac{q}{(q, j)} \qquad \text{(de sorte que } q' > 1\text{)}.$$

On voit donc que, si $\rho_j = 1$, q' divise d, qui est donc >1, et l'on ne peut avoir (25) avec $(m, d) = 1$. Alors, m étant tel que $(m, d) = 1$ et

$$\sum_{p \in E_m} \frac{1}{p} = +\infty,$$

on a

$$\sum_{p \in E_m} \frac{1 - \mathcal{R} f_j(p)}{p} = +\infty,$$

puisque, quand p appartient à E_m,

$$1 - \mathcal{R} f_j(p) = 1 - \cos \frac{2\pi j m}{q} > 0,$$

et par suite on a

$$\sum \frac{1 - \mathcal{R} f_j(p)}{p} = +\infty.$$

7.2.1. Remarquons que les hypothèses du théorème sont satisfaites en particulier si, pour chaque entier m, l'ensemble E_m possède une densité par rapport à l'ensemble de tous les nombres premiers, *la densité de* E_1 *étant positive*. En effet, on a alors $d = 1$.

7.2.2 Comme exemple d'application de ce théorème, citons le résultat suivant :

Soit $S_k(n)$ *la somme des puissances* $k^{\text{ièmes}}$ *des diviseurs premiers de n* (k entier $\geqq 1$).

Alors, quel que soit l'entier $q > 1$ *et quel que soit l'entier* r, *l'ensemble des entiers naturels n tels que*

$$S_k(n) \equiv r \pmod{q}$$

possède une densité égale à $\frac{1}{q}$, *et l'ensemble des nombres de* Q *satisfaisant à la même condition possède une densité égale à* $\frac{1}{q}\frac{6}{\pi^2}$.

8. **Étude de fonctions additives pour n parcourant une progression arithmétique.** — Nous nous bornerons ici à l'étude des fonctions ω_E et Ω_E déjà considérées plus haut.

8.1. Nous commencerons par établir le lemme suivant :

Lemme. — *Soient* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ m *nombres réels ou complexes de module* 1 *et tels que* $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m = 0$.

Soient, d'autre part, $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m$ *m nombres réels* $\geqq 0$ *et* $\leqq \frac{1}{m}$.

Alors on a $\left|\sum_1^m \alpha_j \delta_j\right| \leqq \frac{1}{2}$.

On ne peut avoir

$$\sum_1^m \alpha_j \delta_j = \frac{1}{2}\alpha, \qquad \textit{avec} \quad |\alpha| = 1,$$

que si :

1° *m est pair ;*

2° α_j *est égal à* α *pour* $\frac{m}{2}$ *des j et à* $-\alpha$ *pour les autres ;*

3° *on a*

$$\delta_j = \begin{cases} \frac{1}{m} & \textit{quand} \quad \alpha_j = \alpha, \\ 0 & \textit{quand} \quad \alpha_j = -\alpha. \end{cases}$$

Démonstration. — Soit θ un nombre réel quelconque et posons

$$\mathcal{R}[e^{-i\theta}\alpha_j] = \beta_j.$$

On a évidemment $|\beta_j| \leqq 1$, et $\beta_j = 1$ seulement si $\alpha_j = e^{i\theta}$, $\beta_j = -1$ seulement si $\alpha_j = -e^{i\theta}$.

De plus,

$$\mathcal{R}\left[e^{-i\theta}\sum_1^m \alpha_j \delta_j\right] = \sum_1^m \beta_j \delta_j \leqq \frac{1}{m}\sum_{\beta_j > 0} \beta_j, \tag{26}$$

l'égalité ne pouvant avoir lieu que si δ_j est égal à $\frac{1}{m}$ quand $\beta_j > 0$ et à 0 quand $\beta_j < 0$.

Mais on a $\sum_1^m \beta_j = 0$, et par suite

$$\sum_{\beta_j > 0} \beta_j = \sum_{\beta_j < 0} |\beta_j| = \frac{1}{2}\sum_1^m |\beta_j| \leqq \frac{m}{2}, \tag{27}$$

l'égalité ne pouvant avoir lieu que si tous les β_j sont égaux à ± 1.

On voit donc d'abord que, quel que soit θ réel,

$$\mathcal{R}\left[e^{-i\theta}\sum_1^m \alpha_j \delta_j\right] \leqq \frac{1}{2},$$

ce qui entraîne que

$$\left|\sum_1^m \alpha_j \delta_j\right| \leqq \frac{1}{2}.$$

D'autre part, si l'on a

$$\sum_{1}^{m} \alpha_j \delta_j = \frac{1}{2} e^{i\theta},$$

on a

$$\mathcal{R}\left[e^{-i\theta} \sum_{1}^{m} \alpha_j \delta_j\right] = \frac{1}{2},$$

ce qui nécessite qu'il y ait égalité dans (26) et (27), donc que tous les β_j soient égaux à ± 1, et par suite tous les α_j à $\pm e^{i\theta}$, et que δ_j soit égal à $\frac{1}{m}$ quand $\beta_j = 1$, c'est-à-dire quand $\alpha_j = e^{i\theta}$, et à o quand $\beta_j = -1$, c'est-à-dire quand $\alpha_j = -e^{i\theta}$.

Comme $\sum_{1}^{m} \alpha_j = 0$, il doit y avoir le même nombre de α_j égaux à $e^{i\theta}$ et à $-e^{i\theta}$.

8.2. Considérons maintenant un ensemble E de nombres premiers appartenant à la classe $(\mathcal{C})$, et soit g l'une des fonctions ω_E et Ω_E.

Soit, d'autre part, k un entier > 1.

Supposons que, pour chaque j premier avec k, l'ensemble des nombres de E satisfaisant à

$$p \equiv j \pmod{k}$$

possède une densite δ_j par rapport à l'ensemble de tous les nombres premiers.

Il est clair que $0 \leqq \delta_j \leqq \frac{1}{\varphi(k)}$, où φ est la fonction d'Euler.

Définissons la fonction arithmétique f par

$$f(n) = \chi(n) z^{g(n)},$$

où z est un nombre réel ou complexe satisfaisant à

$$|z| \leqq 1 \quad \text{et} \quad z \neq 1,$$

et χ un caractère modulo k.

Cette fonction est multiplicative et non identiquement nulle et satisfait à $|f(n)| \leqq 1$ pour tout n.

8.2.1. Si χ est le caractère principal, on a

$$f(p) = \begin{cases} z & \text{si } p \in E \quad \text{et} \quad p \nmid k, \\ 1 & \text{si } p \notin E \quad \text{et} \quad p \nmid k, \\ 0 & \text{si } p / k, \end{cases}$$

et l'on voit que f satisfait aux hypothèses de notre théorème principal.

On a donc pour x infini,

$$(28) \qquad \sum_{n \leqq x} \chi(n) z^{g(n)} = o[x] \quad \text{et} \quad \sum_{\substack{n \leqq x \\ n \in Q}} \chi(n) z^{g(n)} = o[x].$$

8.2.2. Si χ n'est pas le caractère principal, on voit qu'on a pour x infini

$$\sum_{p\leqq x} f(p) = \rho\frac{x}{\log x} + o\left[\frac{x}{\log x}\right],$$

avec

$$\rho = \sum_{\substack{1\leqq j<k\\(k,j)=1}} \delta_j z\chi(j) + \sum_{\substack{1\leqq j<k\\(k,j)=1}} \left[\frac{1}{\varphi(k)} - \delta_j\right]\chi(j) = (z-1)\sum_{\substack{1\leqq j<k\\(k,j)=1}} \delta_j\chi(j).$$

On a $|z-1|\leqq 2$ et, d'après le lemme établi au paragraphe 8.1,

$$\left|\sum_{\substack{1\leqq j<k\\(k,j)=1}} \delta_j\chi(j)\right| \leqq \frac{1}{2}.$$

Comme on ne peut avoir $|z-1|=2$ que si $z=-1$, on voit qu'on ne peut avoir $\rho=1$ que si

$$z=-1 \quad \text{et} \quad \sum_{\substack{1\leqq j<k\\(k,j)=1}} \delta_j\chi(j) = -\frac{1}{2},$$

ce qui nécessite, toujours d'après le lemme, que χ soit un caractère réel et que δ_j soit égal à $\frac{1}{\varphi(k)}$ quand $\chi(j)=-1$ et à 0 quand $\chi(j)=+1$.

Maintenant, si χ est un caractère réel et $z=-1$, on a

$$1-\mathcal{R}f(p) = \begin{cases} 0 & \text{si } \chi(p)=-1 \text{ et } p\in E, \text{ ou } \chi(p)=+1 \text{ et } p\notin E,\\ 2 & \text{si } \chi(p)=-1 \text{ et } p\notin E, \text{ ou } \chi(p)=+1 \text{ et } p\in E.\end{cases}$$

On voit donc qu'on a

$$\sum \frac{1-\mathcal{R}f(p)}{p} < +\infty$$

si $\sum_{p\in E_1}\frac{1}{p} < +\infty$, E_1 étant l'ensemble des nombres premiers p tel que $\chi(p)=-1$ et $p\notin E$ ou $\chi(p)=+1$ et $p\in E$ ([6]).

C'est le seul cas où la fonction f peut ne pas satisfaire aux hypothèses de notre théorème principal.

8.2.3. Pour abréger, nous dirons qu'on est dans le cas exceptionnel s'il existe un caractère réel modulo k, distinct du caractère principal, tel que, E_1 étant l'ensemble des nombres premiers p tels que $\chi(p)=-1$ et $p\notin E$ ou $\chi(p)=+1$ et $p\in E$, on ait

$$\sum_{p\in E_1}\frac{1}{p} < +\infty.$$

([6]) Alors, d'après ce qui a été dit au paragraphe 2.2, on a $\rho=1$.

Nous pouvons alors énoncer les résultats suivants :

Si l'on n'est pas dans le cas exceptionnel, quel que soit z satisfaisant à $|z| \leqq 1$ et $z \neq 1$, on a (28) pour tout caractère χ modulo k.

Si l'on est dans le cas exceptionnel, la même chose a lieu pour $|z| \leqq 1$ et $z \neq 1$ et -1.

8.2.4. Si maintenant l est un entier premier avec k, lorsque les relations (28) ont lieu pour tous les caractères modulo k, en multipliant par $\frac{1}{\chi(l)}$ et en ajoutant les relations correspondant aux différents caractères, puis divisant par $\varphi(k)$, on obtient

$$\sum_{\substack{n \leqq x \\ n \equiv l \,(\mathrm{mod}\, k)}} z^{g(n)} = o[x] \qquad \text{et} \qquad \sum_{\substack{n \leqq x \\ n \in Q \\ n \equiv l \,(\mathrm{mod}\, k)}} z^{g(n)} = o[x].$$

Ces deux relations ont donc lieu pour $|z| \leqq 1$ et $z \neq 1$ si l'on n'est pas dans le cas exceptionnel, pour $|z| \leqq 1$ et $z \neq 1$ et -1 si l'on est dans le cas exceptionnel.

Si alors on se réfère à ce qui a été dit au paragraphe 5.1, on obtient les résultats suivants :

Quand on n'est pas dans le cas exceptionnel, quel que soit q entier > 1 et quel que soit r entier, l'ensemble des entiers naturels tels que

$$n \equiv l \pmod{k} \qquad \text{et} \qquad g(n) \equiv r \pmod{q}$$

possède une densité égale à $\frac{1}{qk}$ et l'ensemble des nombres de Q satisfaisant aux mêmes conditions possède une densité égale à

$$\frac{1}{q}\,\frac{6}{\pi^2}\,\frac{1}{k}\prod_{p/k}\frac{1}{1-\frac{1}{p^2}} \quad (^7).$$

Quand on est dans le cas exceptionnel, on a les mêmes résultats à condition que q soit impair.

Dans tous les cas, quel que soit λ irrationnel, les nombres $\lambda g(n)$ sont distribués uniformément modulo 1 quand n parcourt l'ensemble des entiers naturels satisfaisant à

$$n \equiv l \pmod{k}$$

et quand n parcourt l'ensemble des nombres de Q satisfaisant à la même condition.

---

(7) On sait que l'ensemble des nombres de Q tels que $n \equiv l \pmod{k}$ a pour densité $\frac{6}{\pi^2}\frac{1}{k}\prod_{p/k}\frac{1}{1-\frac{1}{p^2}}$.

8.2.5. En définitive, on a établi le théorème suivant :

Théorème 5. — *Soit* E *un ensemble de nombres premiers appartenant à la classe* $(\mathcal{C})$, *et soit* g *l'une des fonctions* ω_E *et* Ω_E.

Soit, d'autre part, k *un entier* > 1.

Supposons que, pour chaque j *premier avec* k, *l'ensemble des nombres de* E *satisfaisant à*

$$p \equiv j \pmod{k}$$

possède une densité par rapport à l'ensemble de tous les nombres premiers.

Alors, pour tout entier l *premier avec* k, *on a les résultats suivants :*

1° *Quel que soit* q *entier impair* > 1 *et quel que soit* r *entier, l'ensemble des entiers naturels tels que*

$$n \equiv l \pmod{k} \qquad \text{et} \qquad g(n) \equiv r \pmod{q}$$

possède une densité égale à $\frac{1}{qk}$ *et l'ensemble des nombres de* Q *satisfaisant aux mêmes conditions possède une densité égale à*

$$\frac{1}{q}\frac{6}{\pi^2}\frac{1}{k}\prod_{p/k}\frac{1}{1-\frac{1}{p^2}}.$$

2° *Quel que soit le nombre irrationel* λ, *les nombres* $\lambda g(n)$ *sont répartis uniformément modulo* 1 *quand* n *parcourt l'ensemble des entiers naturels satisfaisant à*

$$n \equiv l \pmod{k}$$

et quand n *parcourt l'ensemble des nombres de* Q *satisfaisant à la même condition.*

Le résultat 1° *reste valable pour* q *pair s'il n'existe pas de caractère réel modulo* k, *distinct du caractère principal, tel que,* E_1 *étant l'ensemble des nombres premiers pour lesquels* $\chi(p) = -1$ *et* $p \notin E$ *ou* $\chi(p) = +1$ *et* $p \in E$, *on ait*

$$\sum_{p \in E_1} \frac{1}{p} < +\infty.$$

8.2.6. Remarquons que, si E est l'ensemble de tous les nombres premiers, les hypothèses du théorème 5 sont satisfaites pour tout entier $k > 1$ et l'on n'est jamais dans le cas exceptionnel.

Remarquons aussi que, d'après la discussion du paragraphe 8.2.2 et la note ([6]), le cas exceptionnel ne peut se produire que si E est de densité $\frac{1}{2}$.

8.2.7. Pour donner un exemple du cas exceptionnel, prenons pour E l'ensemble des nombres premiers satisfaisant à

$$p \equiv 3 \pmod{4}$$

et prenons $g = \Omega_E$ et $k = 4$.

E est bien de la classe $(\mathcal{C})$.

L'ensemble des nombres de E satisfaisant à

$$p \equiv 1 \pmod 4$$

est vide, donc de densité zéro par rapport à l'ensemble de tous les nombres premiers, et l'ensemble de ceux qui satisfont à

$$p \equiv 3 \pmod 4$$

est égal à E, et de densité $\frac{1}{2}$ par rapport à l'ensemble de tous les nombres premiers.

Mais on voit de suite que $\Omega_E(n)$ est toujours pair quand

$$n \equiv 1 \pmod 4$$

et toujours impair quand

$$n \equiv 3 \pmod 4,$$

de sorte que le résultat 1° ne peut être vrai si q est pair.

8.2.8. Notre énoncé contient l'hypothèse que l est premier avec k. On traiterait aisément le cas où il n'en est pas ainsi en remarquant que, si

$$k = dk' \quad \text{et} \quad l = dl', \quad \text{avec} \quad d = (k, l),$$

la congruence

$$n \equiv l \pmod k$$

est équivalente à

$$n = dn' \quad \text{avec} \quad n' \equiv l' \pmod{k'},$$

et l'on a

$$\Omega_E(dn') = \Omega_E(n') + \Omega_E(d) \quad \text{et} \quad \omega_E(dn') = \omega_{E'}(n') + \omega_E(d),$$

E' étant l'ensemble des nombres de E qui ne divisent pas d.

8.3. On pourrait aussi considérer simultanément deux fonctions g et h correspondant à deux ensembles E_1 et E_2, comme dans le théorème 2. On supposerait que pour chaque j premier avec k et chacun des ensembles E_1, E_2 et $E_1 \cap E_2$, l'ensemble des nombres de cet ensemble satisfaisant à

$$p \equiv j \pmod k$$

possède une densité par rapport à l'ensemble de tous les nombres premiers.

Il apparaîtrait plusieurs cas exceptionnels.