ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

EDWIN J. AKUTOWICZ

Sur l'approximation par certaines fonctions entières

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 77, nº 3 (1960), p. 281-301
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1960_3_77_3_281_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1960, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
3e série, t. 77, 1960, p. 281 à 301.

SUR L'APPROXIMATION PAR CERTAINES FONCTIONS ENTIÈRES

PAR M. EDWIN J. AKUTOWICZ.

1. Introduction.

1. Pendant ces dernières années l'étude de l'approximation polynomiale sur tout l'axe réel a été assez poussée grâce aux efforts de plusieurs mathématiciens (1). Dans ce champ, la question dominante était le célèbre problème de S. Bernstein portant sur les conditions auxquelles une fonction $\varpi(x)$, non négative et mesurable sur $-\infty < x < \infty$, doit satisfaire pour que l'égalité

$$(1.1) \qquad \inf_{P} \sup_{x} \varpi(x) \, | g(x) - P(x) | = 0$$

soit valable pour toutes les fonctions $g(x)$, continues sur la droite réelle, telles que

$$(1.2) \qquad \lim_{|x| \to \infty} \varpi(x) g(x) = 0,$$

P désignant un polynome.

Une des solutions les plus remarquables de ce problème de Bernstein est une condition nécessaire et suffisante donnée par Pollard [8] et Mergelyan [1]. Rappelons ce résultat. Désignons par $\mathfrak{M}$, l'ensemble de tous les polynomes $P(x)$ tels que

$$\frac{\varpi(x)}{1 + |x|} \cdot | P(x) | \leq 1, \qquad -\infty < x < \infty.$$

Posons

$$m(z) = \sup_{P \in \mathfrak{M}} | P(z) |$$

pour chaque valeur complexe de z (2).

(1) La théorie d'approximation polynomiale est tellement riche que nous nous contenterons de citer la bibliographie du Mémoire [1].

(2) La considération des valeurs de z non réelles est essentielle, bien que seulement les valeurs de $m(t)$ pour t réel interviennent dans l'énoncé.

Pour que les polynomes soient denses dans le sens (1.1) *dans l'ensemble de toutes les fonctions continues possédant la propriété* (1.2) *il faut et il suffit que*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log m(t)}{1+t^2}\,dt = +\infty.$$

En adaptant la démonstration donnée par Mergelyan de ce théorème on peut résoudre une classe de problèmes d'approximation qui paraissaient d'abord s'écarter largement du problème primitif de Bernstein. Ce qui reste d'essentiel c'est, d'une part le fait que la classe des fonctions avec lesquelles on fait l'approximation possède certaines propriétés simples d'invariance, et d'autre part que le comportement de ces fonctions à l'infini soit assez régulier. Le lecteur observera dans la suite le rôle que jouent ces propriétés.

2. Soit a un nombre réel positif donné, et désignons par E_a l'ensemble des fonctions $\varphi(t)$ qui sont de la forme

$$\varphi(t) = \int e^{it\lambda}\, d\mu(\lambda) \tag{1.3}$$

où le support de la mesure complexe finie $\mu (= \mu_\varphi)$ est contenu à l'intérieur de l'intervalle $[-a, a]$. Soit H un espace de Banach des fonctions définies sur la droite réelle tel que $E_a \subset H$. Il est naturel de se poser les questions suivantes :

Sous quelles restrictions portant sur la norme de H *est-il vrai que*

$$\inf_{\varphi \in E_a} \| \psi - \varphi \| = 0 \qquad \textit{pour tout} \quad \psi \in H\ ? \tag{1.4}$$

Si l'approximation universelle (1.4) *n'est pas valable, quelles sont alors les propriétés distinctives des fonctions qui appartiennent à la fermeture* $\overline{E}_a$ *de* E_a *dans* H ?

Nous étudierons les espaces H suivants :

Étant donnée une mesure borélienne ω, non négative, de masse totale finie et un nombre p, $1 \leq p < \infty$, on considère l'espace $H = L^p(d\omega)$ dont les éléments sont les fonctions ψ mesurables par rapport à ω telles que

$$\|\psi\| = \|\psi\|_{p,\omega} = \left(\int |\psi(t)|^p \, d\omega(t) \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

(Ici, et partout dans ce qui suit, le signe d'intégration sans limites se rapporte à la droite réelle entière.)

Étant donnée une fonction continue $\Omega(t)$, $-\infty < t < \infty$, à valeurs non nulles telle que

$$\lim_{|t| \to \infty} \frac{\varphi(t)}{\Omega(t)} = 0$$

pour tout $\varphi \in E_a$, on considère aussi l'espace de Banach $H = C_\Omega$ consistant des fonctions $\psi(t)$ définies et continues sur la droite réelle et telles que

$$\lim_{|t| \to \infty} \frac{\psi(t)}{\Omega(t)} = 0,$$

C_Ω étant muni de la norme

$$\|\psi\| = \|\psi\|_\Omega = \max_t \left| \frac{\psi(t)}{\Omega(t)} \right|.$$

Évidemment $E_a \subset H$ toujours.

3. Dans le but d'indiquer une propriété de la norme de H permettant de reconnaître la densité ou la non-densité de l'ensemble E_a dans H on fait la construction suivante. Notons par $\mathfrak{A}$ l'ensemble de toutes les fonctions $\varphi \in E_a$ qui satisfont à l'inégalité

$$\left\| \frac{\varphi}{1 + |t|} \right\| \leq 1. \tag{1.5}$$

Posons alors

$$b(z) = \sup_{\varphi \in \mathfrak{A}} |\varphi(z)|$$

pour chaque valeur complexe de z. Sans restreindre la généralité nous pouvons supposer que $b(z) \geq 1$ partout.

Théorème 1. — *Pour que la classe* E_a *soit dense dans* H *par rapport à la norme de* H, *il faut et il suffit que*

$$\int \frac{\log b(t)}{1 + t^2} \, dt = +\infty. \tag{1.6}$$

Explicitons que la condition (1.6) dépend de la norme de l'espace H et de la constante a.

La section 5 est consacrée à une autre condition (théorème 3) nécessaire et suffisante pour que $\overline{E}_a = H$, H étant un espace $L^p(d\omega)$, $1 < p < \infty$. Si l'on désigne par $C(z_0)$ l'ensemble des éléments de E_a tels que $\varphi(z_0) = 1$ ($\operatorname{Im} z_0 \neq 0$), cette condition est simplement que

$$\inf_{\varphi \in C(z_0)} \left\| \frac{\varphi}{t - z_0} \right\| = 0.$$

C'est une condition plus maniable pour certaines applications que (1.6).

Dans le cas où la fermeture de E_a est différente de H, chaque fonction de cette fermeture est la restriction à l'axe réel d'une fonction entière de type exponentiel dont le diagramme indicateur se trouve dans le segment $(-ia, ia)$ de l'axe imaginaire. C'est évidemment le meilleur résultat possible.

Les théorèmes 1, 2 et 3 ont été énoncés dans une Note [7] parue dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*.

2. Démonstration de la suffisance de (1.6).

1. Supposons que l'approximation universelle (1.4) soit impossible dans H. D'après un principe bien connu il existe alors un élément θ non nul appartenant à l'espace dual $H^\star$ tel que

$$\theta(\varphi) = 0$$

pour tout $\varphi \in E_a$. Nous exprimons ceci en écrivant $\theta \in E_a^\perp$. Voici un lemme qui nous sera utile.

LEMME 1. — *Pour chaque $\theta \in E_a^\perp$ il existe une fonction $B_\theta(z)$ holomorphe dans le demi-plan supérieur telle que*

$$\varphi(z) B_\theta(z) = \theta\left(\frac{\varphi}{t-z}\right) \qquad (\operatorname{Im} z > 0), \tag{2.1}$$

pour tout $\varphi \in E_a$.

Démonstration. — Considérons d'abord le cas où $H = L^p(d\omega)$, $1 \leqq p < \infty$.

Dans nos hypothèses $H^\star = L^q(d\omega)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, et

$$\theta(\varphi) = \int \theta\varphi \, d\omega = 0 \quad (^3), \qquad \varphi \in E_a. \tag{2.2}$$

Puisque la mesure ω est par hypothèse finie, il faut que θ appartienne à $L^1(d\omega)$. Donc la transformée de Fourier

$$G(\lambda) = \int e^{-i\lambda t} \theta(t) \, d\omega(t), \qquad -\infty < \lambda < \infty,$$

est une fonction continue et bornée. En introduisant l'expression (1.3) de $\varphi(t)$ dans (2.2) on obtient, par un changement d'ordre d'intégration aisé à justifier, l'égalité

$$\int G \, d\mu = \int \theta \check{\varphi} \, d\omega = 0, \qquad (\check{\varphi}(t) = \varphi(-t)).$$

Puisque φ, donc μ, est arbitraire on en déduit que $G(\lambda) = 0$, $-a < \lambda < a$.

Nous allons utiliser la transformée de Fourier-Carleman de la fonction G, à savoir,

$$\begin{cases} B^+(z) = \displaystyle\int_0^\infty e^{iz\lambda} G(\lambda) \, d\lambda, & z = x + iy, \quad y > 0, \\ B^-(z) = -\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^{iz\lambda} G(\lambda) \, d\lambda, & y < 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

---

(3) On utilise ici le fait que la classe E_a est invariante par rapport à la conjugaison-complexe sur l'axe réel : $\varphi(t) \to \overline{\varphi(t)}$, $-\infty < t < \infty$.

Désignons par $C(R, \eta)$, $R > 0$, $\eta > 0$, le contour consistant du demi-cercle $|z - i\eta| = R$, $0 \leq \arg(z - i\eta) \leq \pi$ et du segment $y = \eta$, $-R < x < R$. D'après le théorème de Cauchy,

$$\varphi(z)\, B^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(R,\eta)} \frac{\varphi(\zeta)\, B^+(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta,$$

z étant à l'intérieur de $C(R, \eta)$ et φ étant arbitraire dans E_a. On évalue la contribution à cette intégrale provenant du demi-cercle comme suit :

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^\pi \frac{\varphi(R e^{i\theta} + i\eta)\, B^+(R e^{i\theta} + i\eta)\, R e^{i\theta}}{R e^{i\theta} + i\eta - z}\, d\theta \right| \\
&\quad \leq \mathrm{Cte} \int_0^\pi |\varphi(R e^{i\theta} + i\eta)|\, e^{-Ra\sin\theta}\, d\theta \int_a^\infty e^{-\eta\lambda}\, |G(\lambda)|\, d\lambda \\
&\quad \leq \mathrm{Cte} \int_0^\pi e^{-Ra\sin\theta}\, d\theta \int_{-a_\varphi}^{a_\varphi} e^{-R\lambda\sin\theta}\, |d\mu(\lambda)| \\
&\quad \leq \mathrm{Cte} \int_0^\pi e^{-R(a-a_\varphi)\sin\theta}\, d\theta,
\end{aligned}$$

où les constantes qui interviennent sont indépendantes de R. Puisque $a_\varphi < a$ (le support de φ étant à l'intérieur de $[-a, a]$), la majorante obtenue tend vers zéro lorsque R s'éloigne à l'infini. Il en résulte que

$$\varphi(z)\, B^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\varphi(\xi + i\eta)\, B^+(\xi + i\eta)}{\xi + i\eta - z}\, d\xi \qquad (\operatorname{Im} z > \eta).$$

En employant le contour $\bar{C}(R, \eta)$, la réflexion de $C(R, \eta)$ dans l'axe réel, on démontre de la même façon que

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\varphi(\xi + i\eta)\, B^-(\xi - i\eta)}{\xi + i\eta - z}\, d\xi \qquad (\operatorname{Im} z > \eta).$$

Donc

$$\begin{aligned}
\varphi(z)\, B^+(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\varphi(\xi + i\eta)}{\xi + i\eta - z} [B^+(\xi + i\eta) - B^-(\xi - i\eta)]\, d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\varphi(\xi + i\eta)}{\xi + i\eta - z}\, d\xi \int G(\lambda)\, e^{i\xi\lambda - \eta|\lambda|}\, d\lambda \\
&= \frac{1}{\pi i} \int \frac{\varphi(\xi + i\eta)}{\xi + i\eta - z}\, d\xi \int \theta(t) \frac{\eta}{\eta^2 + (\xi - t)^2}\, d\omega(t) \\
&= \frac{1}{\pi i} \int \theta(t)\, d\omega(t) \int \frac{\varphi(\xi + i\eta)}{\xi + i\eta - z} \frac{\eta}{\eta^2 + (\xi - t)^2}\, d\xi.
\end{aligned}$$

On constate que l'intégrale

$$\frac{1}{\pi} \int \frac{\varphi(\xi + i\eta)}{\xi + i\eta - z} \frac{\eta}{\eta^2 + (\xi - t)^2}\, d\xi \tag{2.4}$$

tend, en restant bornée, vers $\dfrac{\varphi(t)}{t - z}$, $-\infty < t < \infty$, lorsque $\eta \to 0$. En effet, d'une part, ceci est vrai pour

$$\frac{1}{\pi}\int \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z}\,\frac{\eta}{\eta^2 + (\xi - t)^2}\,d\xi, \tag{2.5}$$

et, d'autre part, on peut mettre la différence entre (2.4) et (2.5) sous la forme

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_{-a_\varphi}^{a_\varphi}(e^{-\eta\lambda}-1)\,d\mu(\lambda)\int\frac{e^{i\xi\lambda}}{\xi - z}\,\frac{\eta}{\eta^2+(\xi-t)^2}\,d\xi\\ +\frac{1}{\pi}\int\varphi(\xi+i\eta)\,\frac{-i\eta}{(\xi+i\eta-z)(\xi-z)}\,\frac{\eta}{\eta^2+(\xi-t)^2}\,d\xi,\end{aligned}$$

où les deux parties tendent, chacune, vers zéro, en restant bornées, lorsque $\eta \to 0$. D'où le lemme dans le cas $H = L^p(d\omega)$, $1 \leq p < \infty$, $B_\theta(z)$ étant égal à $B^+(z)$.

Si $H = C_\Omega$, alors chaque $\theta \in H^*$ est déterminé par une mesure complexe, que nous notons encore par θ, sur la droite, telle que

$$\theta(\varphi) = \int \varphi(t)\,d\theta(t)$$

et

$$\int |\Omega(t)|.|d\theta(t)| < \infty.$$

Si l'on pose

$$G(\lambda) = \int e^{-\lambda i t}\,d\theta(t)$$

la démonstration ci-dessus s'applique encore.

Remarque. — Bien entendu, on peut remplacer $\operatorname{Im} z > 0$ par $\operatorname{Im} z < 0$ dans l'énoncé du lemme 1.

De ce lemme il s'ensuit que

$$|\varphi(z)\,B_\theta(z)| \leq A(z, \mathfrak{A}) \leq A(i, \mathfrak{A}) < \infty \qquad (\operatorname{Im} z \geq 1),$$

pour tout $\varphi \in \mathfrak{A}$, où la quantité $A(z, \mathfrak{A})$ ne dépend pas de $\varphi \in \mathfrak{A}$.

Posons $A = A(i, \mathfrak{A})$ et

$$a(t) = \frac{A}{|B_\theta(t+i)|}, \qquad -\infty < t < \infty.$$

Alors, d'après un théorème de Paley et Wiener,

$$\int \frac{\log|B_\theta(t+i)|}{1+t^2}\,dt > -\infty,$$

ce qui entraîne

$$\int \frac{\log a(t)}{1+t^2}\,dt < +\infty. \tag{2.6}$$

Mais $\log|\varphi(z)|$ est sousharmonique et $\log|\varphi(x+i)| \leq \log a(x)$ pour x réel.

Donc ([4])

$$\log|\varphi(x+iy)| \leqq a_0 - ay + \frac{1-y}{\pi}\int \frac{\log a(t)}{(t-x)^2+(1-y)^2}\,dt$$

dans le demi-plan $y < 1$, a_0 étant une certaine constante. En particulier, pour $y = 0$,

$$\log|\varphi(x)| \leqq a_0 + \frac{1}{\pi}\int \frac{\log a(t)}{(t-x)^2+1}\,dt \equiv \mathrm{K}(x).$$

De (2.6) il viendra

$$\int \frac{\mathrm{K}(t)}{1+t^2}\,dt < +\infty,$$

ce qui entraîne

$$\int \frac{\log b(t)}{1+t^2}\,dt < +\infty.$$

Nous avons donc établi que E_a est forcément dense dans H lorsque (1.6) est valable.

3. Démonstration de la nécessité de (1.6).

Nous démontrerons la réciproque du théorème 1 après avoir établi quelques lemmes ([5]).

Lemme 2. — *Désignons par* H_0 *l'ensemble des fonctions de la forme*

$$\varphi(t) = \int e^{it\lambda}\,\Phi(\lambda)\,d\lambda$$

où le support de Φ *se trouve à l'intérieur de* $[-a, a]$ *et la dérivée* Φ' *est à carre intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue. Alors* H_0 *est dense dans* E_a *par rapport à la norme de* H ([6]).

Désignons par H_1 le sous-ensemble de E_a où les mesures μ [*voir* (1.3)] sont concentrées dans un nombre fini de points de l'intervalle $(-a, a)$. Soit μ_0 une mesure concentrée au point β, $-a < \beta < a$. Soient 0 et c les valeurs de μ_0. Alors la fonction φ_0 correspondante est $c\,e^{i\beta t}$.

Considérons la fonction « triangulaire » $\Delta_\varepsilon(\varepsilon > 0)$:

$$\Delta_\varepsilon(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{c(-\lambda+\beta+\varepsilon)}{\varepsilon^2} & \text{si } \beta \leqq \lambda \leqq \beta+\varepsilon, \\[2mm] \dfrac{c(\lambda-\beta+\varepsilon)}{\varepsilon^2} & \text{si } \beta-\varepsilon \leqq \lambda \leqq \beta, \\[2mm] 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

([4]) On considère $\varphi(z)\,e^{-iaz}$, qui est évidemment une fonction bornée dans le demi-plan $y < 1$.

([5]) Quelques-uns de ces lemmes sont des analogues proches des résultats de [1].

([6]) Il serait intéressant de voir comment les théorèmes 1 et 2 se mettent en défaut lorsque la classe E_a diminue.

La transformée de Fourier de Δ_ε est

$$\varphi_\varepsilon(t) = c\, e^{i\beta t} \frac{2(1-\cos\varepsilon t)}{\varepsilon^2 t^2}.$$

Evidemment $\varphi_\varepsilon \in H_0$. Il est aisé à vérifier que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \| c\, e^{i\beta t} - \varphi_\varepsilon(t) \| = 0$$

pour tous nos espaces H. Donc toute fonction de H_1 est la limite par rapport à la norme de H d'une suite de fonctions de H_0. C'est-à-dire, $\bar{H}_0 \supset H_1$.

Soit φ maintenant une fonction arbitraire de E_a. Alors $\varphi(t)$ est, sur $-\infty < t < \infty$, la limite ponctuelle d'une suite uniformément bornée des sommes de Riemann-Stieltjes ([7]). Cette limite est d'ailleurs uniforme sur t-intervalles finis. D'où il résulte que H_1 est dense dans E_a par rapport à la norme de H. Donc H_0 est aussi dense dans E_a dans le même sens.

C. Q. F. D.

LEMME 3. — *Soient a_1 et a_2 des nombres complexes avec* $\operatorname{Im} a_1 > 0$. *Soit φ une fonction de la forme*

$$\varphi(t) = \int e^{it\lambda}\, d\mu(\lambda), \tag{3.1}$$

où le support de la mesure complexe finie $\mu(=\mu_\varphi)$ est contenu dans un intervalle fini $[-\alpha, \alpha]$, et telle que $\varphi(a_1) = 0$. Alors la fonction

$$\psi(t) = \frac{t-a_2}{t-a_1}\varphi(t)$$

est de la même forme (3.1) *avec le support de la mesure μ_ψ contenu dans le même intervalle $[-\alpha, \alpha]$* ([8]).

Posons

$$\Lambda(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t > 0, \\ \dfrac{a_1 - a_2}{i} e^{-ia_1 t} & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

La convolution $\Lambda \star \mu$ étant donnée par la formule,

$$\Lambda \star \mu(x) = \int \Lambda(x-y)\, d\mu(y),$$

un calcul aisé donne pour chaque t réel le résultat :

$$\frac{t-a_2}{t-a_1}\varphi(t) = \int e^{itx}\, \Lambda \star \mu(x)\, dx + \varphi(t). \tag{3.2}$$

([7]) Toute somme de Riemann-Stieltjes, comme fonction de t, appartient à H_1.

([8]) Des considérations analogues se trouvent dans l'article [4].

Puisque Λ est égal à zéro pour les valeurs positives de son argument, et puisque μ a son support dans $[-\alpha, \alpha]$, nous avons

$$\Lambda \star \mu(x) = 0 \quad \text{si} \quad x > \alpha$$

et

$$\Lambda \star \mu(x) = \int_{\max(x,-\alpha)}^{\alpha} \Lambda(x-y)\, d\mu(y) \quad \text{si} \quad x \leq \alpha.$$

Donc, si $x < -\alpha$,

$$\begin{aligned} \Lambda \star \mu(x) &= \int_{-\alpha}^{\alpha} \Lambda(x-y)\, d\mu(y) \\ &= \frac{a_1 - a_2}{i} \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-ia_1(x-y)}\, d\mu(y) \\ &= \frac{a_1 - a_2}{i} e^{-ta_1 x} \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{ia_1 y}\, d\mu(y) = 0. \end{aligned}$$

Donc on peut mettre le membre à droite de l'égalité (3.2) sous la forme (3.1) exigée. C. Q. F. D.

LEMME 4. — *La fonction $(b(z))^{-1}$ est continue pour z non réel et prend les mêmes valeurs aux points conjugués z et $\bar{z}$.*

Désignons par a_1 et a_2 deux nombres complexes dont les parties imaginaires sont positives. Soit φ un élément arbitraire de $\mathfrak{A}$.

Posons

$$\psi(t) = 1 + \frac{t - a_2}{t - a_1} \frac{\varphi(t) - \varphi(a_1)}{\varphi(a_1)}.$$

D'après le lemme 3, ψ appartient à E_a. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\left\| \frac{1}{1+|t|} \right\| \leq 1$. Alors

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\psi}{1+|t|} \right\| &= \left\| \frac{a_2 - a_1}{(1+|t|)(t-a_1)} + \frac{t-a_2}{(1+|t|)(t-a_1)} \frac{\varphi(t)}{\varphi(a_1)} \right\| \\ &\leq |a_2 - a_1| \left\| \frac{1}{(1+|t|)(t-a_1)} \right\| + \frac{1}{|\varphi(a_1)|} \sup_t \left| \frac{t-a_2}{t-a_1} \right| \left\| \frac{\varphi}{1+|t|} \right\| \\ &\leq \frac{|a_2 - a_1|}{\operatorname{Im} a_1} + \left(1 + \frac{|a_2 - a_1|}{\operatorname{Im} a_1}\right) \frac{1}{|\varphi(a_1)|}. \end{aligned}$$

D'où résulte :

$$\frac{1}{b(a_2)} \leq \frac{1}{|\varphi(a_1)|} + 2\frac{|a_2 - a_1|}{\operatorname{Im} a_1}.$$

Et puisque φ est arbitraire ceci implique

$$\frac{1}{b(a_2)} - \frac{1}{b(a_1)} \leq 2\frac{|a_2 - a_1|}{\operatorname{Im} a_1},$$

d'où, permutant a_1 et a_2,

$$\left|\frac{1}{b(a_2)} - \frac{1}{b(a_1)}\right| \leqq 2\frac{|a_2 - a_1|}{\operatorname{Im} a_1},$$

ce qui prouve la continuité de $\frac{1}{b(z)}$ dans le demi-plan supérieur. La dernière partie du lemme 4 est une conséquence immédiate de la remarque ([3]) à la page 284.

Lemme 5. — *Si l'on a $b(z_0) = +\infty$ pour un point z_0 non réel, il existe un continuum sur lequel $b(z) = +\infty$.*

Vu la continuité de $\frac{1}{b}$, l'ensemble des points du disque $|z - z_0| \leqq \rho$ où $\frac{1}{b(z)} = 0$ est fermé ([9]). Soit Γ_0 la composante connexe de cet ensemble qui contient le point z_0. Supposons que Γ_0 ne contient pas un point de la périphérie $|z - z_0| = \rho$. Dans cette hypothèse, il existe une courbe de Jordan fermée, γ, qui ne rencontre ni l'un ni l'autre des ensembles $|z - z_0| = \rho$ et Γ_0, qui entoure Γ_0, et sur laquelle $b(z)$ est fini. En raison de la continuité de b sur γ, on voit que

$$b(z) \leqq M < \infty, \qquad z \in \gamma, \tag{3.3}$$

pour une constante M. Mais $b(z)$ étant la borne supérieure d'un ensemble de fonctions sousharmoniques est lui-même sousharmonique. (3.3) entraîne, par le principe du maximum, que $b(z_0) \leqq M$, donc une contradiction. L'hypothèse faite sur Γ_0 est donc intenable. Donc, pour chaque ρ, $0 \leqq \rho < \operatorname{Im} z_0$, il existe un point $z \in \Gamma_0$ tel que $|z - z_0| = \rho$. C. Q. F. D.

Lemme 6. — *Si l'on a $b(z_0) = +\infty$, $\operatorname{Im} z_0 \neq 0$, alors pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe une fonction φ_ε dans E_a telle que*

$$\left\|\frac{1}{t - z_0} - \varphi_\varepsilon\right\| < \varepsilon. \tag{3.4}$$

Soit $N > 0$. L'hypothèse entraîne qu'il existe une fonction φ_1 dans $\mathfrak{A}$ telle que $|\varphi_1(z_0)| > N$. Définissons φ_2 par

$$\varphi_2(t) = \frac{\varphi_1(z_0) - \varphi_1(t)}{(t - z_0)\,\varphi_1(z_0)}.$$

D'un théorème de Paley et Wiener il s'ensuit que $\varphi_2 \in E_a$. Mais puisque $\varphi_1 \in \mathfrak{A}$, nous avons l'évaluation

$$\left\|\frac{1}{t - z_0} - \varphi_2\right\| \leqq \sup_t \frac{1 + |t|}{|t - z_0|}\,\frac{1}{N}.$$

Donc le lemme 6 se trouve établi.

([9]) Bien entendu, ρ est choisi de telle façon que le disque n'a pas de points communs avec l'axe réel.

LEMME 7. — *Si* $\operatorname{Im} z_0 \neq 0$ *et si pour chaque* $\varepsilon > 0$ *il existe une fonction* $\varphi_\varepsilon \in E_a$ *telle qu'on a l'inégalité* (3.4), *alors* $b(z_0) = +\infty$.

D'après le lemme 2, nous pouvons supposer que φ_ε est de la forme

$$\varphi_\varepsilon(t) = \int e^{it\lambda}\,\Phi(\lambda)\,d\lambda.$$

où Φ possède les propriétés énoncées. Il s'ensuit que $t\varphi_\varepsilon(t)$ appartient à E_a. Posons

$$D(z_0) = \sup_t \frac{|t - z_0|}{1 + |t|},$$

et

$$\varphi(t) = \frac{1 - (t - z_0)\varphi_\varepsilon(t)}{\varepsilon\, D(z_0)}.$$

Alors φ appartient à E_a et

$$\left\| \frac{\varphi}{1 + |t|} \right\| \leq 1.$$

Donc φ appartient à $\mathfrak{A}$, et l'égalité

$$|\varphi(z_0)| = \frac{1}{\varepsilon\, D(z_0)}$$

montre que $b(z_0)$ est forcément égal à $+\infty$.

THÉORÈME 2. — *Si l'on a* $b(z_0) = +\infty$ *pour un point* z_0 *non réel, alors* $\overline{E}_a = H$. *Réciproquement, si* $\overline{E}_a = H$, *alors* $b(z) = +\infty$ *pour chaque* z *non réel.*

D'après le lemme 5 il existe un continuum Γ tel que, en vue du lemme 6,

$$\inf_{\varphi \in E_a} \left\| \frac{1}{t - z} - \varphi \right\| = 0$$

pour chaque $z \in \Gamma$, pourvu que $b(z_0) = +\infty$. Supposons, dans ces conditions, que la fermeture de E_a soit différente de H. Alors il y aurait un élément θ dans l'espace dual H^* de H, $\theta \neq 0$, tel que la fonction

$$\theta\left(\frac{1}{t - z}\right) = \begin{cases} \displaystyle\int \frac{1}{t - z}\,d\theta(t), & \displaystyle\int |\Omega(t)|.|d\theta(t)| < \infty, \qquad \text{si} \quad H = C_\Omega, \\ \displaystyle\int \frac{\theta(t)}{t - z}\,d\omega(t), & \theta \in L^q(d\omega), \quad \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1, \qquad \text{si} \quad H = L^p(d\omega), \end{cases}$$

s'évanouit sur Γ. En vue de la dernière partie du lemme 4, ceci entraînerait que

$$\theta\left(\frac{1}{t - z}\right) \equiv 0.$$

Donc θ serait égal à zéro, ce qui constitue une contradiction. Donc $\overline{E}_a = H$.

C. Q. F. D.

La réciproque est une conséquence immédiate du lemme 7.

Il est aisé maintenant de terminer la démonstration du théorème 1. En effet, supposons que E_a soit dense dans H. Alors, par le théorème 2, $b(i) = +\infty$. Soit φ un élément arbitraire de $\mathfrak{A}$. Alors

$$\log|\varphi(x+iy)| \leqq ay + \frac{y}{\pi}\int \frac{\log|\varphi(t)|}{y^2+(x-t)^2}\,dt \qquad (y > 0).$$

En mettant ici $x=0$, $y=1$, on obtient

$$\log|\varphi(i)| \leqq a + \frac{1}{\pi}\int \frac{\log b(t)}{1+t^2}\,dt,$$

ce qui est possible seulement si (1.6) est valable. C. Q. F. D.

4. Une seconde démonstration.

On peut éclaircir le sens de la condition qui intervient dans le théorème 2 en donnant une autre démonstration de sa suffisance [c'est-à-dire, $b(z_0) = +\infty$ pour un z_0 non réel entraîne $\bar{E}_a = H$].

Plaçons-nous dès lors dans l'hypothèse $\bar{E}_a \neq H$. Alors pour chaque $\theta \in E_a^\perp$ nous avons la fonction $B_\theta(z)$ (*voir* lemme 1). Fixons z égal à z', $\operatorname{Im} z' > 0$. Nous allons étudier la condition extrémale que voici :

$$\sup_\theta |B_\theta(z')|,$$

θ étant soumis aux restrictions $\theta \in E_a^\perp$ et $\|\theta\| = 1$. Il existe un θ_0 extrémal pour lequel

$$B_{\theta_0}(z') = \sup_\theta |B_\theta(z')|; \tag{4.1}$$

bien entendu, θ_0 dépend de z'. Mais, quoi qu'il en soit,

$$B_{\theta_0}(z) \equiv B_0(z) \neq 0 \text{ dans le demi-plan } \operatorname{Im} z > 0. \tag{4.2}$$

(Un résultat analogue est valable dans le demi-plan inférieur.)

Or, supposons par contre qu'il existe z_1 tel que $B_0(z_1) = 0$, $\operatorname{Im} z_1 > 0$. Définissons

$$\sigma(\lambda) = \sigma(\lambda;\, z_1) = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda > 0, \\ i\,e^{-iz_1\lambda} & \text{si } \lambda < 0. \end{cases}$$

Rappelons que

$$B_0(z) = \int_a^\infty e^{iz\lambda} G_0(\lambda)\,d\lambda, \qquad \operatorname{Im} z > 0,$$

où

$$G_0(\lambda) = \begin{cases} \displaystyle\int e^{-i\lambda t}\,d\theta_0(t) & \text{si } H = C_\Omega, \\ \displaystyle\int e^{-i\lambda t}\,\theta_0(t)\,d\omega(t) & \text{si } H = L^p(d\omega),\ 1 \leqq p < \infty. \end{cases} \tag{4.3}$$

Dans la suite n'interviennent que les valeurs de $G_0(\lambda)$ pour $\lambda > a$. [La fonction $G_0(\lambda)$ pour $\lambda < -a$ joue son rôle lorsqu'il s'agit de $\operatorname{Im} z < 0$.] Nous avons

$$\int_a^\infty e^{izt}\,dt\int_t^\infty G_0(\lambda)\,\sigma(t-\lambda)\,d\lambda = \int_a^\infty G_0(\lambda)\,e^{iz\lambda}\,d\lambda\int_{a-\lambda}^0 i\,e^{i(z-z_1)t}\,dt$$
$$= \frac{1}{z-z_1}\int_a^\infty G_0(\lambda)\,e^{iz\lambda}(1-e^{i(z-z_1)(a-\lambda)})\,d\lambda$$
$$= \frac{B_0(z)}{z-z_1} - \frac{e^{-iz_1 a}}{z-z_1}\int_a^\infty G_0(\lambda)\,e^{iz_1\lambda}\,d\lambda = \frac{B_0(z)}{z-z_1}.$$

D'autre part, en introduisant l'expression (4.3) de $G_0(\lambda)$, nous avons

$$\int_t^\infty G_0(\lambda)\,\sigma(t-\lambda)\,d\lambda = i\int_t^\infty e^{-iz_1(t-\lambda)}\,d\lambda\int e^{-i\lambda u}\,\theta_0(u)\,d\omega(u)$$
$$= ie^{-iz_1 t}\int\theta_0(u)\,d\omega(u)\int_t^\infty e^{i(z_1-u)\lambda}\,d\lambda = \int\frac{\theta_0(u)}{u-z_1}\,e^{-itu}\,d\omega(u)$$

si $H = L^p(d\omega)$, et *mutatis mutandis* si $H = C_\Omega$.

Par conséquent,

$$\frac{z-\bar z_1}{z-z_1}B_0(z) = \int_a^\infty e^{izt}\,dt\int\frac{u-\bar z_1}{u-z_1}\,\theta_0(u)\,e^{-itu}\,d\omega(u),$$

et ainsi de suite. Il est essentiel d'observer qu'en posant

$$\theta_1(u) = \frac{u-\bar z_1}{u-z_1}\,\theta_0(u)$$

on conserve les propriétés $\theta_1 \in E_a$ et $\|\theta_1\| = 1$.

En effet,

$$\left|\frac{u-\bar z_1}{u-z_1}\right| \equiv 1, \qquad -\infty < u < \infty,$$

et pour chaque $\varphi \in E_a$ on a

$$\theta_1(\varphi) = \int\theta_1(t)\,\varphi(t)\,d\omega(t) = (z_1-\bar z_1)\int\frac{\theta_0(t)\,\varphi(t)}{t-z_1}\,d\omega(t)$$
$$+\int\theta_0(t)\,\varphi(t)\,d\omega(t) = (z_1-\bar z_1)\,B_0(z_1)\,\varphi(z_1) = 0.$$

Si z_1 est un zéro de B_0 d'ordre $m \geqq 1$, on arrive, de cette façon, à l'égalité

$$\left(\frac{z-\bar z_1}{z-z_1}\right)^m B_0(z) = \int_a^\infty e^{izt}\,dt\int\left(\frac{u-\bar z_1}{u-z_1}\right)^m \theta_0(u)\,e^{-itu}\,d\omega(u).$$

Ceci montre d'une part que, nécessairement, $B_0(z') \neq 0$, et d'autre part, en posant

$$\theta_m(u) = \left(\frac{u-\bar z_1}{u-z_1}\right)^m \theta_0(u),$$

que

$$|B_{\theta_m}(z')| = \left|\frac{z' - \bar{z}_1}{z' - z_1}\right|^m |B_{\theta_0}(z')| > |B_{\theta_0}(z')|.$$

Mais ceci est en contradiction avec la propriété extrémale de θ_0. Donc (4.2) se trouve établi.

Soit maintenant θ_0 un élément arbitraire de $E_a^{\perp}$ tel que (4.2) soit valable. C'est une conséquence immédiate du lemme 1 que

$$|\varphi(z) B_0(z)| \leq A(z, \mathfrak{A}) < +\infty, \qquad \varphi \in \mathfrak{A},$$

où la quantité $A(z, \mathfrak{A})$ ne dépend pas de $\varphi \in \mathfrak{A}$. Donc

$$b(z) |B_0(z)| \leq A(z, \mathfrak{A}),$$

d'où $b(z) < +\infty$ pour tout z non réel. Donc si $b(z_0) = +\infty$ pour *une* valeur non réelle z_0 alors $\bar{E}_a = H$. C. Q. F. D.

Supposons $H = L^p(d\omega)$, $1 < p < \infty$, et, en outre, $\bar{E}_a \neq H$. En vue de la réflexivité de H nous avons

$$\sup_{\theta} |B_\theta(z)| = \inf_{\varphi \in E_a} \left\| \frac{1}{t - z} - \varphi \right\|, \tag{4.4}$$

θ étant soumis aux restrictions $\theta \in E_a^{\perp}$, $\|\theta\| = 1$ [10]. L'égalité (4.4) met bien en évidence l'importance de la fonctionnelle $B_\theta(z)$ dans cette théorie et implique le résultat suivant que nous avons d'ailleurs établi précédemment sans la restriction aux espaces $L^p(d\omega)$, $1 < p < \infty$.

---

[10] Nous esquissons la démonstration (*voir* [5], [6]). Soient X un espace de Banach et l une fonctionnelle définie sur un sous-espace $F \subset X$. D'après Hahn-Banach il existe $l^* \in X^*$ tel que $l^*(\theta) = l(\theta)$ si $\theta \in F$, et $\|l^*\| = \sup[\theta \in F, \|\theta\| = 1] |l(\theta)|$. Soit $m \in X^*$ un prolongement arbitraire de l; alors

$$\|l^*\| \leq \inf \|m\|,$$

m étant soumis aux conditions dites. Soit $l_0 \in X^*$ un prolongement fixe de l. Chaque m de cet espèce est de la forme $m = l_0 - n$ où $n \in F^{\perp}$. Donc

$$\|l^*\| \leq \inf_{n \in F^{\perp}} \|l_0 - n\|.$$

Mais si $n^* = l_0 - l^*$, on a $n^*(\theta) = 0$ pour $\theta \in F$, donc $n^* \in F^{\perp}$, et en même temps $\|l^*\| = \|l_0 - n^*\|$. D'où

$$\sup_{\substack{\theta \in F \\ \|\theta\| = 1}} |l(\theta)| = \inf_{n \in F^{\perp}} \|l_0 - n\|.$$

On applique cette égalité dans le cas où $X = L^q(d\omega)$, $F = E_a^{\perp}$,

$$l(\theta) = B_\theta(z) = \int \frac{\theta(t)}{t - z} d\omega(t), \; l_0 = \frac{1}{t - z};$$

en tenant compte de la réflexivité $E_a^{\perp\perp} = \bar{E}_a$.

COROLLAIRE. — *Si la fonction de* t, $\frac{1}{t-z}$, *appartient à* $\overline{E}_a$ *pour une valeur non réelle de* z *alors* $\overline{E}_a = H$.

5. Une condition nécessaire et suffisante dans $L^p(d\omega)$, $1 < p < \infty$.

Soit encore z_0 non réel, et désignons par $C(z_0)$ l'ensemble des éléments de E_a tels que $\varphi(z_0) = 1$.

THÉORÈME 3. — *Dans les espaces* $L^p(d\omega)$, $1 < p < \infty$, *l'égalité*

$$\inf_{\varphi \in C(z_0)} \left\| \frac{\varphi}{t - z_0} \right\| = 0 \tag{5.1}$$

est équivalente à $\overline{E}_a = H$.

Il est loisible de supposer $\operatorname{Im} z_0 > 0$.

Supposons que (5.1) est valable et soit θ un élément de $E_a^{\perp}$.

On a, par le lemme 1,

$$\varphi(z)\, B_\theta(z) = \theta\left(\frac{\varphi}{t - z}\right) \qquad (\operatorname{Im} z > 0,\ \varphi \in E_a),$$

donc

$$B_\theta(z_0) = \theta\left(\frac{\varphi}{t - z_0}\right) \qquad [\varphi \in C(z_0)].$$

En choisissant $\varphi_n \in C(z_0)$ tel que

$$\lim_{n \to \infty} \left\| \frac{\varphi_n}{t - z_0} \right\| = 0,$$

il s'ensuit

$$B_\theta(z_0) = \theta\left(\frac{1}{t - z_0}\right) = 0$$

pour chaque $\theta \in E_a^{\perp}$. Ceci entraîne

$$\frac{1}{t - z_0} \in E_a^{\perp\perp} = \overline{E}_a.$$

D'après les résultats précédents (*voir* par exemple le corollaire à la fin de la section 4), $\overline{E}_a = H$.

Réciproquement, supposons que

$$\inf_{\varphi \in C(z_0)} \left\| \frac{\varphi}{t - z_0} \right\| > 0 \tag{5.2}$$

pour *un* point z_0, $\operatorname{Im} z_0 \neq 0$. Dans ces conditions il existe un élément unique $\psi_0 \in H$, $\psi_0 \neq 0$, pour lequel la valeur extrémale est atteinte :

$$\left\| \frac{\psi_0}{t - z_0} \right\| = \inf_{\varphi \in C(z_0)} \left\| \frac{\varphi}{t - z_0} \right\|.$$

Choisissons φ dans un sous-ensemble dense de E_a tel que $(t-z_0)\varphi(t)$ appartient à E_a. Alors, par la définition de ψ_0,

$$\left\|\frac{\psi_0}{t-z_0}\right\| \leq \left\|\frac{\varphi_n+\eta(t-z_0)\varphi}{t-z_0}\right\|$$

pour tout $\varphi_n \in C(z_0)$ et pour tout nombre complexe η. Nous prenons φ_n tel que

$$\lim_{n\succ\infty} \|\varphi_n-\psi_0\| = 0.$$

Puisque

$$\left|\frac{\varphi_n}{t-z_0}\right|^{p-2}\frac{\overline{\varphi}_n}{t-\overline{z}_0} \text{ tend vers } \left|\frac{\psi_0}{t-z_0}\right|^{p-2}\frac{\overline{\psi}_0}{t-\overline{z}_0}$$

faiblement dans $L^p(d\omega)$, on en déduit que

$$0 \leq p\eta\int\left|\frac{\psi_0}{t-z_0}\right|^{p-2}\frac{\overline{\psi}_0}{t-\overline{z}_0}\varphi\, d\omega(t)+o(\eta) \qquad (\eta\rightarrow 0).$$

En écrivant

$$\theta_1 = \left|\frac{\psi_0}{t-z_0}\right|^{p-2}\frac{\overline{\psi}_0}{t-\overline{z}_0}$$

l'inégalité au-dessus est possible seulement si

$$\theta_1(\varphi)=0, \qquad \varphi\in E_a.$$

Donc il existe un élément non nul dans le dual de $L^p(d\omega)$ qui s'évanouit sur E_a. Donc $\overline{E}_a \neq H$. C. Q. F. D.

Remarque. — Si (5.2) est valable pour une valeur non réelle de z_0, cette inégalité est aussi valable pour toute valeur non réelle de z_0.

Exemple. — Considérons la mesure absolument continue $d\omega(t)=\dfrac{dt}{1+t^2}$. Prenons dans le théorème 3 $z_0=i$, $p=2$. Soit $\varphi\in C(i)$ de la forme

$$\varphi(t)=\int e^{it\lambda}\Phi(\lambda)\,d\lambda, \qquad \text{avec} \quad \int|\Phi|^2\,d\lambda<\infty.$$

Alors, comme il est facile de le voir,

$$\frac{\varphi(t)}{(t-i)^2}=\int e^{itu}\,\Phi\star T(u)\,du,$$

où

$$T(u)=\begin{cases} ue^u & \text{si } u<0, \\ 0 & \text{si } u>0. \end{cases}$$

Donc, par la formule de Parseval,

$$\left\|\frac{\varphi}{t-i}\right\|^2=\int|\Phi\star T|^2\,du.$$

Mais, puisque

$$\Phi \star \mathrm{T}(u) = e^u \int_{\max(-a,\, u)}^{a} \Phi(y)\,(u-y)\,e^{-y}\,dy,$$

on obtient

$$\left\| \frac{\varphi}{t-i} \right\|^2 \geq \int_{-\infty}^{-a} e^{2u} \left| \int e^{-y}(u-y)\,\Phi(y)\,dy \right|^2 du$$

$$= \int_{-\infty}^{-a} e^{2u} \left| u - \int y e^{-y}\,\Phi(y)\,dy \right|^2 du \geq \inf_{-\infty<c<\infty} \int_{-\infty}^{-a} e^{2u}\,|u-c|^2\,du > 0.$$

Donc E_a n'est pas dense dans $\mathrm{L}^2\left(\dfrac{dt}{1+t^2}\right)$.

6. Le cas où $\overline{\mathrm{E}}_a \neq \mathrm{H}$.

Lorsque la classe E_a n'est pas dense dans H, il est inévitable de se demander quelles sont les propriétés particulières des fonctions appartenant à la fermeture $\overline{\mathrm{E}}_a$. Pour répondre à cette question nous allons démontrer le théorème suivant dans lequel $\mathrm{H} = \mathrm{L}^p(d\omega)$, $1 \leq p < \infty$, ou bien $\mathrm{H} = \mathrm{C}_\Omega$.

Théorème 4. — *Si l'on a $\overline{\mathrm{E}}_a \neq H$, alors chaque fonction appartenant à $\overline{\mathrm{E}}_a$ est* [*sauf sur un ensemble de mesure nulle par rapport à* ω *si* $\mathrm{H} = \mathrm{L}^p(d\omega)$] *la restriction à l'axe réel d'une fonction entière de type exponentiel dont le diagramme indicateur se trouve dans le segment* $(-ia,\, ia)$ *de l'axe imaginaire.*

Soit θ_0 un élément extrémal défini à partir de n'importe quel point z' du demi-plan supérieur [*voir* la section 4, (4.1)]. Par le lemme 1 nous avons

$$\varphi(z)\,\mathrm{B}_0(z) = \frac{1}{i} \int \frac{\varphi\theta_0}{t-z}\,d\omega(t) \qquad (\mathrm{Im}\, z > 0) \tag{6.1}$$

pour tout $\varphi \in \mathrm{E}_a$ [11]. Soit f un élément de $\overline{\mathrm{E}}_a$, et désignons par φ_n une suite de E_a telle que $\lim \| f - \varphi_n \| = 0$. Il s'ensuit que

$$|\varphi_n(z) - \varphi_m(z)|.|\mathrm{B}_0(z)| \leq \frac{1}{\mathrm{Im}\, z} \left(\int |\varphi_n(t) - \varphi_m(t)|^p\,d\omega(t) \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{6.2}$$

Puisque $\mathrm{B}_0(z)$ ne s'annule pas dans le demi-plan supérieur, ceci entraîne que $\lim \varphi_n(z)$ est une fonction holomorphe dans $\mathrm{Im}\, z > 0$. Le même raisonnement

---

[11] Dans la démonstration on suppose $\mathrm{H} = \mathrm{L}^p(d\omega)$; si $\mathrm{H} = \mathrm{C}_\Omega$ on emploie, au lieu de (6.1) l'égalité

$$\varphi(z)\,\mathrm{B}_0(z) = \frac{1}{i} \int \frac{\varphi(t)}{t-z}\,d\theta_0(t),$$

où

$$\int |\Omega(t)|.|d\theta_0(t)| < \infty.$$

est valable dans le demi-plan opposé. Il reste donc à examiner l'allure de la suite φ_n sur la droite réelle.

Dans ce but posons

$$c_0 = k \int \frac{\left|\log\left|B_0\left(\xi + \frac{1}{2} i\right)\right|\right|}{1+\xi^2} d\xi,$$

avec un choix convenable (*v.* inf.) de la constante k. La convergence $\varphi_n \to f$ dans H et l'égalité (6.1) entraînent

$$\text{(6.3)} \qquad \log|\varphi_n(x+iy)| \leqq \text{Cte} + |\log|B_0(x+iy)|| \qquad \left(y \geqq \frac{1}{2}\right).$$

Il s'ensuit que

$$\log|\varphi_n(x+iy)\, e^{-c_0(x+iy)^2}|$$
$$\leqq \text{Cte} + ay + c_0 y^2 - c_0 x^2 + \frac{y-\frac{1}{2}}{\pi} \int \frac{\left|\log\left|B_0\left(\xi+\frac{1}{2}i\right)\right|\right|}{\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 + (\xi - x)^2} d\xi \qquad \text{pour } y \geqq \frac{1}{2}.$$

Donc on peut choisir k tel que

$$\log|\varphi_n(x+i)\, e^{-c_0(x+i)^2}| \leqq \text{Cte}.$$

La suite

$$\varphi_n(z)\, e^{-c_0 z^2} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

est donc bornée sur l'horizontal $y = 1$. Par le même raisonnement elle est bornée sur $y = -1$. Par le théorème des trois lignes, elle est bornée sur $y = 0$, ce qui entraîne par la théorie des familles normales que $F(z) \equiv \lim \varphi_n(z)$ est holomorphe dans tout le plan. Les évaluations ci-dessus montrent que l'ordre de cette fonction limite est au plus égal à 2.

Par passage à la limite $n \to \infty$ dans (6.3) on obtient l'évaluation ([12])

$$\log|F(r e^{i\theta_0})| \leqq \text{Cte} + ay + \frac{y-1}{\pi} \int \frac{|\log|B_0(\xi+i)||}{(y-1)^2 + (x-\xi)^2} d\xi, \qquad r e^{i\theta_0} = x + iy,$$

valable pour $0 < \theta_0 < \pi$, $y \geqq 2$. Posons

$$P(\xi, r) = \frac{\xi^2}{y^2 + (x-\xi)^2} = \frac{\xi^2}{r^2 + \xi^2 - 2r\xi\cos\theta_0}$$

et

$$P_1(\xi, r) = \frac{\xi^2}{(y-1)^2 + (x-\xi)^2}.$$

([12]) Je remercie M. P. Malliavin d'avoir indiqué l'essentiel du reste de la démonstration.

Remarquons que :

(I) La fonction $P(\xi, r)$ est bornée en ξ, $-\infty < \xi < \infty$, uniformément par rapport à $r (r \geqq 1)$;

(II) $$\lim_{r\to\infty} P(\xi, r) = 0,$$

cette limite étant uniforme par rapport à ξ dans un intervalle arbitraire, fixe : $|\xi| \leqq A < \infty$;

(III) $$P_1(\xi, r) \leqq 4P(\xi, r);$$

(IV) $$\int \frac{|\log|B_0(\xi + i)||}{1+\xi^2} d\xi < \infty.$$

Ces faits entraînent que

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log|(F r e^{i\theta_0})|}{r} \leqq a \sin\theta_0 \qquad \text{dans} \quad 0 < \theta_0 < \pi, \tag{6.4}$$

et, *mutatis mutandis*, dans $\pi < \theta_0 < 2\pi$. Il s'ensuit par application du principe de Phragmèn-Lindelöf dans les angles

$$|\theta| \leqq \theta_0 < \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad |\theta - \pi| \leqq \theta_0 < \frac{\pi}{2}$$

que $F(z)$ est de type exponentiel. Ceci est loisible parce que l'ordre de $F(z)$ ne dépasse pas 2. Mais alors on voit que

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log|F(re^{i\theta})|}{r} \leqq a|\sin\theta|, \qquad 0 \leqq \theta \leqq 2\pi,$$

puisque la fonction indicateur est toujours continue. Donc le diagramme indicateur de $F(z)$ est contenu dans $(-ia, ia)$.

C. Q. F. D.

7. Applications.

Il y a un rapport entre les résultats de ce Mémoire et le problème d'unicité d'extrapolation des fonctions positives-définies [2]. Soit $F(t)$ positive-définie sur $(-A, A)$. C'est-à-dire, $F(t)$ est supposée continue et telle que

$$\sum_{j,k} F(t_j - t_k) z_j \bar{z}_k \geqq 0$$

pour toutes les valeurs complexes de $z_1, z_2, \ldots$, pourvu que $\frac{-A}{2} < t_j, t_k < \frac{A}{2}$. On démontre [3] qu'il existe toujours un prolongement de $F(t)$ à une fonction positive-définie sur tout l'axe réel. En d'autres termes, il existe toujours au moins une mesure ω finie $\geqq 0$ sur la droite et solution de l'équation

$$F(t) = \int e^{it\lambda} d\omega(\lambda) \qquad (-A < t < A). \tag{7.1}$$

Posons $a = \frac{A}{2}$ et soit E_a l'ensemble défini antérieurement. Dans l'espace de Hilbert $L^2(d\omega)$ le produit scalaire des éléments φ_1, $\varphi_2 \in E_a$ s'exprime par

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \int \varphi_1(t)\,\overline{\varphi_2(t)}\,d\omega(t) = \int_{-a}^{a} d\mu_1(\lambda_1) \int_{-a}^{a} d\overline{\mu_2(\lambda_2)}\,F(\lambda_1 - \lambda_2).$$

Il s'ensuit que la fermeture de E_a dans $L^2(d\omega)$ est indépendant de n'importe quelle solution particulière ω de (7.1) et dépend seulement des données, c'est-à-dire de $F(t)$, $-A < t < A$. Notons par b_ω la fonction définie à la fin de la section 1.

Théorème 5. — *Il existe au plus une mesure ω définissant une extrapolation de $F(t)$ telle que*

$$\int \frac{\log b_\omega(t)}{1 + t^2}\,dt = +\infty,$$

et telle que la famille N des ensembles de ω-mesure nulle est fixée.

Or, supposons que les mesures ω et ω_0 satisfont aux hypothèses faites. Par le théorème 1, E_a est nécessairement dense à la fois dans $L^2(d\omega)$ et dans $L^2(d\omega_0)$. Ceci entraîne pour chaque valeur de z non réelle que la fonction $\frac{1}{t-z}$ appartient à la fermeture de E_a dans ces deux espaces. C'est-à-dire nous avons deux suites φ_n et ψ_n dans E_a telles que

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \varphi_n - \frac{1}{t-z} \right\|_{2,\omega} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to\infty} \left\| \psi_n - \frac{1}{t-z} \right\|_{2,\omega_0} = 0.$$

Donc il existe deux sous-suites φ_{n_k} et ψ_{n_k} telles que

$$\varphi_{n_k}(t) \to \frac{1}{t-z}, \qquad t \notin N_1, \qquad \omega(N_1) = 0$$

et

$$\psi_{n_k}(t) \to \frac{1}{t-z}, \qquad t \notin N_2, \qquad \omega_0(N_2) = 0.$$

Posons $\chi_k = \frac{1}{2}(\varphi_{n_k} + \psi_{n_k})$. Alors χ_k est une suite de Cauchy dans E_a qui converge vers $\frac{1}{t-z}$ dans $L^2(d\omega)$ et aussi dans $L^2(d\omega_0)$. En vue de la remarque faite plus haut,

$$(\chi_k, 1)_{\omega_0} = (\chi_k, 1)_\omega;$$

donc, si $k \to \infty$, on obtient :

$$\left(\frac{1}{t-z}, 1\right)_{\omega_0} = \left(\frac{1}{t-z}, 1\right)_\omega,$$

c'est-à-dire

$$\int \frac{d\omega(t)}{t-z} = \int \frac{d\omega_0(t)}{t-z},$$

d'où $\omega = \omega_0$. C. Q. F. D.

On peut exprimer le théorème 5 autrement. En effet, considérons l'ensemble des fonctions $L(t)$ bornées et continues sur $-\infty < t < \infty$ qui sont transformées de Fourier-Stieltjes des mesures $\omega \geqq 0$ de masse totale finie avec la famille N des ensembles de ω-mesure nulle fixée :

$$L(t) = \int e^{it\lambda}\, d\omega(\lambda).$$

Fixons $a > 0$. Avec chaque ω de cette espèce et avec la norme hilbertienne de $L^2(d\omega)$ on construit la fonction $b(= b_{\omega, a})$. Soit $Q_{a,N}$ le sous-ensemble des $L(t)$ tels que

$$\int \frac{\log b(t)}{1+t^2}\, dt = +\infty.$$

THÉORÈME 6. — *La classe* $Q_{a,N}$ *est quasi-analytique dans le sens que chaque fonction appartenant à cette classe est déterminée d'une façon unique sur tout l'axe réel par ses valeurs sur l'intervalle* $(-2a, 2a)$.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] S. N. MERGELYAN, *L'approximation polynomiale pondérée* [*Ouspekhi Mat. Naouk*, t. 11, 1956, fasc. 5 (en russe)].

[2] E. J. AKUTOWICZ, *On extrapolating a positive definite function from a finite interval* (*Math. Scand.*, t. 7, 1959).

[3] M. KREIN, *Sur le problème du prolongement des fonctions hermitiennes positives et continues* [*C. R. Acad. Sc. U. R. S. S.* (*Doklady*) (N. S.), t. 26, 1940].

[4] E. J. AKUTOWICZ, *On the determination of the phase of a Fourier integral*, I (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 83, 1956).

[5] W. W. ROGOSINSKI and H. S. SHAPIRO, *On certain extremum problems for analytic functions* (*Acta Math.*, t. 90, 1953).

[6] S. Y. HAVINSON, *Problèmes extrémaux pour certaines classes des fonctions analytiques dans les domaines à connexion finie* (*Mat. Sbornik*, t. 36, n° 78, 1955).

[7] E. J. AKUTOWICZ, *Sur l'approximation par certaines fonctions entières* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 250, 1960).

[8] H. POLLARD, *The Bernstein Approximation Problem* (*Proc. Amer. Math. Soc.*, t. 6, 1955).