

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

IVAN SINGER

**Sur une classe d'applications linéaires continues des espaces  $L_F^p$  ( $1 \leq p < +\infty$ )**

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3<sup>e</sup> série*, tome 77, n° 3 (1960), p. 235-256

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1960\\_3\\_77\\_3\\_235\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1960_3_77_3_235_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1960, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

SUR  
UNE CLASSE D'APPLICATIONS LINÉAIRES CONTINUES  
DES ESPACES  $L_F^p (1 \leq p < +\infty)$

PAR M. IVAN SINGER.

Introduction.

1. Soient  $Z$  un espace localement compact,  $\mathcal{B}$  le clan des parties boréliennes relativement compactes de  $Z$ ,  $\nu$  une mesure de Radon positive sur  $Z$ ,  $E$  et  $F$  deux espaces de Banach et  $E'$  le dual fort de  $E$ . Pour toute application linéaire  $f$  de  $L_F^p(\nu)$  ( $1 \leq p < +\infty$ ) dans  $E'$ , posons <sup>(1)</sup>, d'après [3],

$$(1) \quad |||f||| = \sup \sum_{i=1}^n \|f[\varphi_{e_i}(\cdot) y_i]\|,$$

où le sup est pris pour toutes les classes d'équivalence des fonctions « simples »

$$y(\cdot) = \sum_{i=1}^n \varphi_{e_i}(\cdot) y_i \quad (e_i \in \mathcal{B}, y_i \in F, e_i \cap e_j = \emptyset \text{ pour } i \neq j),$$

telles que  $N_p(y(\cdot), \nu) \leq 1$ . On a évidemment

$$\|f\| \leq |||f||| \leq +\infty.$$

Dans ce qui suit, à l'exception du paragraphe 3,  $\nu$  sera la seule mesure de Radon qui interviendra ; pour abréger, nous écrirons dans la suite (sauf dans le paragraphe 3)  $L_F^p$  au lieu de  $L_F^p(\nu)$ ,  $N_p(y(\cdot))$  au lieu de  $N_p(y(\cdot), \nu)$ , et  $L^p$  au lieu de  $L_c^p$ .

---

<sup>(1)</sup> Nous utiliserons la notation  $y(\cdot)$  pour les applications de  $Z$  dans  $F$ , ainsi que pour les classes d'équivalence de telles applications. Nous désignerons par  $\varphi_e(\cdot)$  la (classe d'équivalence de la) fonction caractéristique de l'ensemble  $e \in \mathcal{B}$ .

Pour les notations et les notions utilisées dans la suite et non expliquées [par exemple  $L_F^p(\nu)$ ,  $N_p(y(\cdot), \nu)$ , ...], voir [1].

Désignons par  $\mathcal{A}^p (1 \leq p < +\infty)$  l'espace de toutes les applications linéaires  $f$  de  $L_F^p$  dans  $E'$  telles que

$$(2) \quad |||f||| < +\infty,$$

muni des opérations vectorielles naturelles et de la norme (2).  $\mathcal{A}^p$  est un espace de Banach.

2. Dans une Note récente [3], N. Dinuleanu et C. Foias ont donné le théorème suivant de représentation intégrale (voir [3], théorème 4) :

(A) Soient les espaces  $E$  et  $F$  « séparables ». On a  $f \in \mathcal{A}^p$  si et seulement si  $f$  peut s'écrire sous la forme

$$(3) \quad \langle x, f[y(\cdot)] \rangle = \int_Z \langle x, U(\zeta)y(\zeta) \rangle d\nu(\zeta) \quad [y(\cdot) \in L_F^p, x \in E],$$

où  $U(\cdot)$  est une application de  $Z$  dans l'espace de Banach  $\mathcal{L}(F, E')$  (de toutes les applications linéaires continues de  $F$  dans  $E'$ , muni de la norme habituelle), telle que

$$N_{p'}(U(\cdot)) < +\infty \quad \left( \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \right).$$

Dans ce cas on a

$$(4) \quad |||f||| = N_{p'}(U(\cdot)).$$

On indique dans [3] que la démonstration de ce théorème utilise le théorème 1 de [3] (ce dernier est une généralisation du théorème de Lebesgue-Nikodým aux mesures vectorielles).

3. Dans le présent travail nous nous proposons de donner quelques *théorèmes d'équivalence* concernant l'espace de Banach  $\mathcal{A}^p$ , dans le cas où  $E$  et  $F$  sont des espaces de Banach arbitraires. Nous démontrerons d'abord (§ 1, théorème 1), par une voie directe, que l'espace  $\mathcal{A}^p$  est équivalent (i. e. isomorphe et isométrique) au dual de l'espace  $L_D^p$ , où  $D$  est un espace de Banach convenable (en d'autres termes, ce théorème nous montre que les applications de  $L_F^p$  dans  $E'$ , appartenant à l'espace  $\mathcal{A}^p$ , ne sont autres que les formes linéaires continues sur  $L_D^p$ ); en outre, lorsque  $E$  et  $F$  sont séparables,  $D$  sera aussi séparable. Ensuite nous en déduisons, à l'aide des théorèmes de caractérisation du dual de l'espace  $L_D^p$  que nous avons donnés dans [7], quelques autres caractérisations (§ 2, théorèmes 2, 3 et 3') de l'espace de Banach  $\mathcal{A}^p$ . Comme une application, nous donnerons (§ 3, théorème 4) une généralisation du théorème classique de Lebesgue-Nikodým. Enfin, nous considérerons le cas particulier où les espaces  $E$  et  $F$  sont séparables (§ 4).

1. Le premier théorème d'équivalence.

1. Soient E et F deux espaces de Banach arbitraires. On a le

**THÉORÈME 1.** — On a  $f \in \mathcal{A}^p$  si et seulement si la forme linéaire  $\Phi$  sur  $L_F^p \otimes E$  définie par

$$(5) \quad \left\langle \sum_{i=1}^n y_i(\cdot) \otimes x_i, \Phi \right\rangle = \sum_{i=1}^n \langle x_i, f[y_i(\cdot)] \rangle \quad (y_i(\cdot) \in L_F^p, x_i \in E, i = 1, \dots, n)$$

est continue pour la norme sur  $L_F^p \otimes E$  induite <sup>(2)</sup> par  $L_{F \hat{\otimes} E}^p$ . La correspondance  $f \leftrightarrow \Phi$  est une équivalence.

Par conséquent, l'espace  $\mathcal{A}^p$  est équivalent à l'espace  $(L_{F \hat{\otimes} E}^p)'$ ; l'équivalence entre ces deux espaces est donnée par la correspondance  $f \leftrightarrow \bar{\Phi}$ , où  $\bar{\Phi}$  désigne le prolongement par continuité de la forme linéaire  $\Phi$  définie par (5) à l'espace  $L_{F \hat{\otimes} E}^p$  entier.

*Démonstration.* — 1° Soit  $f \in \mathcal{A}^p$ , c'est-à-dire une application linéaire de  $L_F^p$  dans  $E'$ , satisfaisant à (2), et soit  $\Phi$  la forme linéaire sur  $L_F^p \otimes E$  définie par (5). Considérons une fonction simple

$$X(\cdot) = \sum_{i=1}^n \varphi_{e_i}(\cdot) w_i,$$

(2) C'est-à-dire, pour la norme

$$\left\| \sum_{i=1}^n y_i(\cdot) \otimes x_i \right\|_{L_{F \hat{\otimes} E}^p} = \left[ \int_Z \left\| \sum_{i=1}^n y_i(\zeta) \otimes x_i \right\|_{F \hat{\otimes} E}^p d\nu(\zeta) \right]^{\frac{1}{p}};$$

en fait,  $L_F^p \otimes E$  se plonge dans  $L_{F \hat{\otimes} E}^p$  par l'application naturelle

$$\sum_{i=1}^n y_i(\cdot) \otimes x_i \rightarrow \left[ \sum_{i=1}^n y_i(\cdot) \otimes x_i \right](\cdot),$$

où

$$\left[ \sum_{i=1}^n y_i(\cdot) \otimes x_i \right](\zeta) = \sum_{i=1}^n y_i(\zeta) \otimes x_i.$$

Pour abréger, nous écrivons

$$\sum_{i=1}^n y_i(\cdot) \otimes x_i \quad \text{au lieu de} \quad \left[ \sum_{i=1}^n y_i(\cdot) \otimes x_i \right](\cdot).$$

Comme  $L^p \otimes (F \hat{\otimes} E)$  est dense dans  $L_{F \hat{\otimes} E}^p$  et comme  $L^p \otimes F \otimes E$  est dense dans  $L^p \otimes (F \hat{\otimes} E)$  pour la norme induite par  $L_{F \hat{\otimes} E}^p$ , il est manifeste, compte tenu de  $L^p \otimes F \subset L_F^p$ , que  $L_F^p \otimes E$  est dense dans  $L_{F \hat{\otimes} E}^p$ .

Pour ce qui concerne les produits tensoriels normés, voir [4].

où

$$w_i = \sum_{k=1}^{m_i} y_k^{(i)} \otimes x_k^{(i)} \in F \otimes E \quad (i=1, \dots, n)$$

et où les  $e_i \in \mathcal{B}$  sont deux à deux sans point commun. On a alors, par (5) et (1),

$$\begin{aligned} |\langle X(\cdot), \Phi \rangle| &= \left| \left\langle \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{m_i} \varphi_{e_i}(\cdot) y_k^{(i)} \otimes x_k^{(i)}, \Phi \right\rangle \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{m_i} \langle x_k^{(i)}, f[\varphi_{e_i}(\cdot) y_k^{(i)}] \rangle \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{m_i} |\langle x_k^{(i)}, f[\varphi_{e_i}(\cdot) y_k^{(i)}] \rangle| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{m_i} \|x_k^{(i)}\|_E \|f[\varphi_{e_i}(\cdot) y_k^{(i)}]\|_{E'} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{m_i} \|f[\varphi_{e_i}(\cdot) y_k^{(i)} \|x_k^{(i)}\|]\| \\ &\leq \|f\| N_p \left( \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{m_i} \varphi_{e_i}(\cdot) \|y_k^{(i)}\| \|x_k^{(i)}\| \right) \\ &= \|f\| \left[ \int_{\mathbf{Z}} \sum_{i=1}^n \varphi_{e_i}(\zeta) \left\| \sum_{k=1}^{m_i} y_k^{(i)} \|x_k^{(i)}\| \right\|^p d\nu(\zeta) \right]^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \|f\| \left[ \int_{\mathbf{Z}} \sum_{i=1}^n \varphi_{e_i}(\zeta) \left( \sum_{k=1}^{m_i} \|y_k^{(i)}\| \cdot \|x_k^{(i)}\| \right)^p d\nu(\zeta) \right]^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Or, comme

$$\|w_i\|_{F \otimes E} = \inf \sum_{k=1}^{m_i} \|y_k^{(i)}\| \cdot \|x_k^{(i)}\|,$$

le inf étant pris pour toutes les expressions

$$\sum_{k=1}^{m_i} y_k^{(i)} \otimes x_k^{(i)} \in F \otimes E$$

telles que

$$w_i = \sum_{k=1}^{m_i} y_k^{(i)} \otimes x_k^{(i)},$$

et comme les  $e_i \in \mathcal{B}$  sont deux à deux sans point commun, il s'ensuit que <sup>(3)</sup>

$$|\langle X(\cdot), \Phi \rangle| \leq \|f\| \left[ \int_Z \sum_{i=1}^n \varphi_{e_i}(\zeta) \|\omega_i\|_{F \hat{\otimes} E}^p d\nu(\zeta) \right]^{\frac{1}{p}} = \|f\| N_p(X(\cdot)).$$

Par conséquent, compte tenu de  $f \in \mathcal{X}^p$ , la forme linéaire  $\Phi$  définie par (5) est bornée, donc continue, sur un sous-espace vectoriel partout dense <sup>(4)</sup> de  $L_{F \hat{\otimes} E}^p$  pour la norme induite par  $L_{F \hat{\otimes} E}^p$ . Donc  $\Phi$  est continue aussi sur  $L_F^p \otimes E$  pour la norme sur  $L_F^p \otimes E$  induite par  $L_{F \hat{\otimes} E}^p$  et, de plus, de l'inégalité ci-dessus il s'ensuit que

$$(6) \quad \|\Phi\| \leq \|f\|.$$

2° Soit  $f$  une application linéaire de  $L_F^p$  dans  $E'$ , telle que la forme linéaire  $\Phi$  sur  $L_F^p \otimes E$  définie par (5) soit continue pour la norme sur  $L_F^p \otimes E$  induite par  $L_{F \hat{\otimes} E}^p$ . Soient  $e_i \in \mathcal{B} (i = 1, \dots, n)$  deux à deux disjoints et soient  $y_i \in F, x_i \in E, \|x_i\| = 1 (i = 1, \dots, n)$ . On aura alors, en posant

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= \frac{\langle x_i, f[\varphi_{e_i}(\cdot) y_i] \rangle}{|\langle x_i, f[\varphi_{e_i}(\cdot) y_i] \rangle|} \quad \left( \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} = 0 \right) \quad (i = 1, \dots, n), \\ \sum_{i=1}^n |\langle x_i, f[\varphi_{e_i}(\cdot) y_i] \rangle| &= \sum_{i=1}^n \langle \varepsilon_i x_i, f[\varphi_{e_i}(\cdot) y_i] \rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^n \varphi_{e_i}(\cdot) y_i \otimes \varepsilon_i x_i, \Phi \right\rangle \leq \|\Phi\| N_p \left( \sum_{i=1}^n \varphi_{e_i}(\cdot) y_i \otimes \varepsilon_i x_i \right) \\ &= \|\Phi\| \left[ \int_Z \sum_{i=1}^n \varphi_{e_i}(\zeta) \|y_i \otimes \varepsilon_i x_i\|_{F \hat{\otimes} E}^p d\nu(\zeta) \right]^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \|\Phi\| \left[ \int_Z \sum_{i=1}^n \varphi_{e_i}(\zeta) \|y_i\|^p d\nu(\zeta) \right]^{\frac{1}{p}} = \|\Phi\| N_p \left( \sum_{i=1}^n \varphi_{e_i}(\cdot) y_i \right). \end{aligned}$$

<sup>(3)</sup> En effet, en supposant le contraire, c'est-à-dire que

$$|\langle X(\cdot), \Phi \rangle| > \|f\| \left[ \int_Z \sum_{i=1}^n \varphi_{e_i}(\zeta) \|\omega_i\|_{F \hat{\otimes} E}^p d\nu(\zeta) \right]^{\frac{1}{p}},$$

on aboutit rapidement, compte tenu aussi du fait que  $\sum_{i=1}^n e_i$  est un ensemble relativement compact, à une contradiction.

<sup>(4)</sup> Comme  $F \otimes E$  est dense dans  $F \hat{\otimes} E$  et comme toute fonction simple peut s'écrire à l'aide de  $e_i \in \mathcal{B}$  disjoints convenables ([1], chap. IV, § 4, n° 8, lemme 1), l'ensemble de toutes les fonctions simples à valeurs dans  $F \otimes E$  est dense dans l'ensemble de toutes les fonctions simples à valeurs dans  $F \hat{\otimes} E$  pour la norme induite par  $L_{F \hat{\otimes} E}^p$ . Or, ce dernier est dense dans  $L_{F \hat{\otimes} E}^p$  ([1], chap. IV, § 4, n° 9, corollaire 1), donc l'ensemble de toutes les fonctions simples  $X(\cdot)$  ci-dessus constitue un sous-espace vectoriel partout dense de  $L_{F \hat{\otimes} E}^p$ .

Comme pour tout  $\varepsilon > 0$  on peut choisir les  $x_i \in E$ ,  $\|x_i\| = 1$  ( $i = 1, \dots, n$ ) de telle façon que

$$|\langle x_i, f[\varphi_{e_i}(\cdot) y_i] \rangle| > \|f[\varphi_{e_i}(\cdot) y_i]\| - \frac{\varepsilon}{n} \quad (i = 1, \dots, n),$$

il s'ensuit que

$$\sum_{i=1}^n \|f[\varphi_{e_i}(\cdot) y_i]\| \leq \|\Phi\| N_p \left( \sum_{i=1}^n \varphi_{e_i}(\cdot) y_i \right),$$

d'où, comme les  $e_i \in \mathcal{B}$  (disjoints deux à deux) et les  $y_i \in F$  ont été arbitraires,

$$(7) \quad \|f\| \leq \|\Phi\| < +\infty,$$

c'est-à-dire  $f \in \mathcal{A}^p$ .

3° Comme la correspondance  $f \leftrightarrow \Phi$  définie par (5) est évidemment biunivoque et linéaire, une comparaison des inégalités (6) et (7) achève la démonstration.

*Remarque 1.* — L'espace Banach convenable,  $D$ , dont on a parlé dans l'Introduction, n'est autre que l'espace  $F \hat{\otimes} E$ .

*Remarque 2.* — Une comparaison du théorème 1 ci-dessus et du théorème 1 de [6] nous montre qu'on a une certaine analogie entre les applications linéaires  $f$  de  $L_F^p$  dans  $E'$ , appartenant à l'espace  $\mathcal{A}^p$ , et les applications linéaires majorées de  $C_F(Q)$  dans  $E'$ ; en effet, l'espace de ces dernières, muni des opérations vectorielles naturelles et de la norme de la plus petite majorante, est équivalent, en vertu de [6], théorème 1, au dual de  $C_{F \hat{\otimes} E}(Q)$ .

*Remarque 3.* — On peut aussi énoncer la première partie du théorème 1 sous la forme suivante, évidemment équivalente :

On a  $f \in \mathcal{A}^p$  si et seulement si la forme linéaire  $\Phi$  sur  $L^p \otimes F \otimes E$  définie par

$$\left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i(\cdot) y_i \otimes x_i, \Phi \right\rangle = \sum_{i=1}^n \langle x_i, f[\alpha_i(\cdot) y_i] \rangle \quad (\alpha_i(\cdot) \in L^p, y_i \in F, x_i \in E, i = 1, \dots, n)$$

est continue pour la norme sur  $L^p \otimes F \otimes E$  induite par  $L_{F \hat{\otimes} E}^p$ . La correspondance  $f \leftrightarrow \Phi$  est une équivalence.

3. A tout  $y(\cdot) \in L_F^p$  et  $x \in E$  on a fait correspondre, dans ce qui précède, la classe  $y(\cdot) \otimes x \in L_{F \hat{\otimes} E}^p$  définie par

$$[y(\cdot) \otimes x](\zeta) = y(\zeta) \otimes x.$$

On a évidemment

$$(8) \quad \begin{aligned} N_p(y(\cdot) \otimes x) &= \left[ \int_Z \|y(\zeta) \otimes x\|_{F \hat{\otimes} E}^p d\nu(\zeta) \right]^{\frac{1}{p}} \\ &= \left[ \int_Z \|y(\zeta)\|_F^p \|x\|_E^p d\nu(\zeta) \right]^{\frac{1}{p}} = \|x\| N_p(y(\cdot)), \end{aligned}$$

donc  $(y(\cdot), x) \rightarrow y(\cdot) \otimes x$  est une application bilinéaire de norme  $\leq 1$  de  $L_F^p \times E$  dans  $L_{F \hat{\otimes} E}^p$ , donc elle définit une application linéaire de norme  $\leq 1$  de  $L_F^p \hat{\otimes} E$  dans  $L_{F \hat{\otimes} E}^p$ , que nous appellerons l'application linéaire canonique de  $L_F^p \hat{\otimes} E$  dans  $L_{F \hat{\otimes} E}^p$ .

Cela étant, on a le

COROLLAIRE 1. — Pour qu'on ait l'égalité

$$\alpha^p = \mathcal{L}(L_F^p, E'),$$

il faut et il suffit que l'application linéaire canonique de  $L_F^p \hat{\otimes} E$  dans  $L_{F \hat{\otimes} E}^p$  soit un isomorphisme vectoriel topologique du premier espace sur le second.

En effet, en vertu du théorème 1 et de l'équivalence

$$(L_F^p \hat{\otimes} E)' \equiv \mathcal{L}(L_F^p, E'),$$

la condition est suffisante. D'autre part, en vertu des mêmes équivalences, l'égalité

$$\alpha^p = \mathcal{L}(L_F^p, E')$$

signifie que l'application linéaire canonique de  $L_F^p \hat{\otimes} E$  dans  $L_{F \hat{\otimes} E}^p$  est un isomorphisme faible. Comme  $L_F^p \hat{\otimes} E$  et  $L_{F \hat{\otimes} E}^p$  sont des espaces normés, cela entraîne que c'est un isomorphisme fort, donc un isomorphisme *sur*, puisque l'image de  $L_F^p \hat{\otimes} E$  dans  $L_{F \hat{\otimes} E}^p$  est dense.

## 2. Théorèmes d'équivalence dérivés.

1. Soient  $E$  et  $F$  deux espaces de Banach arbitraires,  $Z$  un espace localement compact et  $\nu$  une mesure de Radon positive sur  $Z$ .

Soit  $g$  une fonction définie sur  $\mathcal{B}$ , dont la valeur dans  $e \in \mathcal{B}$  est un élément  $g_e$  de l'espace  $\mathcal{L}(F, E')$ .

Si  $1 \leq p' < +\infty$ , nous poserons

$$(9) \quad |g|_{p'} = p' - \text{Var } g_e = \sup_{e \in \mathcal{B}} \left( \sum_{i=1}^n \frac{\|g_{e_i}\|_{\mathcal{L}(F, E')}}{[\nu(e_i)]^{p'-1}} \right)^{\frac{1}{p'}}$$

où le sup est pris pour toutes les collections finies d'ensembles disjoints  $e_i \in \mathcal{B}$  (on y pose  $\frac{0}{0} = 0$ ); remarquons que  $|g|_1$  ne dépend pas de la mesure  $\nu$ . Enfin, si  $p' = +\infty$ , nous poserons

$$(10) \quad |g|_\infty = \sup_{e \in \mathcal{B}} \frac{\|g_e\|_{\mathcal{L}(F, E')}}{\nu(e)}.$$

(où, de nouveau,  $\frac{0}{0} = 0$ ).

Soit  $p'$  un nombre positif tel que  $1 \leq p' \leq +\infty$ .

Nous désignerons par  $V''_{\mathcal{L}(F, E')}$  l'espace de toutes les fonctions d'ensemble  $g$  définies sur  $\mathcal{B}$  et à valeurs dans  $\mathcal{L}(F, E')$ , complètement additives sur  $\mathcal{B}$  [au sens habituel, c'est-à-dire pour la convergence au sens de la norme de  $\mathcal{L}(F, E')$ ] et telles que (9) [resp. (10)] soit finie, muni des opérations vectorielles naturelles et de la norme (9) [resp. (10)].  $V''_{\mathcal{L}(F, E')}$  est un espace de Banach.

Comme l'espace  $\mathcal{L}(F, E')$  est équivalent à l'espace  $(F \hat{\otimes} E)'$ , il s'ensuit que l'espace  $V''_{\mathcal{L}(F, E')}$  est équivalent à l'espace  $V''_{(F \hat{\otimes} E)'}.$  L'équivalence  $g \leftrightarrow \bar{g}$  entre ces deux espaces est donnée par la relation

$$(11) \quad \langle x, g_e(y) \rangle = \langle y \otimes x, \bar{g}_e \rangle \quad (e \in \mathcal{B}, x \in E, y \in F).$$

2. Soit  $1 \leq p < +\infty$ . Dans ce qui suit, nous entendrons par  $p'$  le nombre  $\frac{p}{p-1}$  si  $p > 1$  et  $+\infty$  si  $p = 1$ .

Dans [7] nous avons démontré (voir [7], théorème 5) que l'espace  $(L^p_{F \hat{\otimes} E})'$  est équivalent à l'espace  $V''_{(F \hat{\otimes} E)'}.$  Rappelons que l'équivalence  $\bar{\Phi} \leftrightarrow \bar{g}$  entre ces deux espaces est donnée par la relation (5)

$$(12) \quad \langle X(\cdot), \bar{\Phi} \rangle = \int_Z \langle X(\zeta), d\bar{g}_\zeta \rangle \quad (X(\cdot) \in L^p_{F \hat{\otimes} E}).$$

Du théorème 1 et de ce qui précède il s'ensuit que l'espace  $\mathcal{C}^p$  est équivalent à l'espace  $V''_{\mathcal{L}(F, E')}$  et que l'équivalence  $f \leftrightarrow g$  entre ces deux espaces s'obtient en composant l'équivalence  $f \leftrightarrow \bar{\Phi}$  définie dans le théorème 1, l'équivalence  $\bar{\Phi} \leftrightarrow \bar{g}$  définie par (12), et l'équivalence  $\bar{g} \leftrightarrow f$  définie par (11).

On peut aussi exprimer cette équivalence  $f \leftrightarrow g$  directement, par une seule formule. Dans ce but, définissons l'intégrale

$$\int_Z dg_\zeta y(\zeta)$$

d'une  $y(\cdot) \in L^p_F$  ( $1 \leq p < +\infty$ ) par rapport à une  $g \in V''_{\mathcal{L}(F, E')}$  (où  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$  si  $p > 1$  et  $p' = +\infty$  si  $p = 1$ ). Pour toute fonction  $y(\cdot)$  continue et à support compact  $K$ , nous poserons

$$\int_Z dg_\zeta y(\zeta) = \int_K dg_\zeta y(\zeta),$$

où le membre droit est l'intégrale classique de Radon-Gowurin (6); elle existe

(5) Pour la définition de l'intégrale  $\int_Z \langle X(\zeta), d\bar{g}_\zeta \rangle$ , voir [7].

(6) Rappelons brièvement sa définition : pour toute fonction simple

$$y(\cdot) = \sum_{i=1}^n \varphi_{e_i}(\cdot) y_i \quad \left( y_i \in F, e_i \in \mathcal{B}, \bigcup_{i=1}^n e_i = K \right)$$

puisque  $V_{\mathcal{E}(F, E')}^{p'} \subset V_{\mathcal{E}(F, E')}^1$  sur  $\mathcal{B}_K$ . On constate facilement qu'on a, pour toute partie compacte  $K$  de  $Z$  et toute fonction simple  $y(\cdot) = \sum_{i=1}^n \varphi_{e_i}(\cdot) y_i$ , où les  $e_i \in \mathcal{B}$  sont disjoints et tels que  $\sum_{i=1}^n e_i = K$ , donc aussi pour toute fonction  $y(\cdot)$  continue et à support compact,

$$(13) \quad \left\| \int_Z dg_{\zeta} y(\zeta) \right\|_{E'} \leq |g|_{p'} N_p(y(\cdot)).$$

L'intégrale ainsi définie est donc une application linéaire bornée du sous-espace vectoriel partout dense  $\mathcal{K}_F(Z)$  de  $L_F^p$  constitué par toutes les fonctions continues et à support compact, dans  $E'$ , donc elle peut être *prolongée par continuité*, de façon unique, en une application linéaire continue de  $\mathcal{L}_F^p$  dans  $E'$ . Nous définissons l'intégrale

$$\int_Z dg_{\zeta} y(\zeta)$$

d'une  $y(\cdot) \in L_F^p$  par rapport à  $g \in V_{\mathcal{E}(F, E')}^{p'}$  par la valeur pour  $\eta(\cdot)$  de ce prolongement, où  $\eta(\cdot) \in \mathcal{L}_F^p$  est une fonction quelconque de la classe  $y(\cdot)$ ; cette valeur est bien déterminée, en vertu de (13). De plus, on a alors l'inégalité (13) aussi pour tout  $y(\cdot) \in L_F^p$ . Comme les équivalences (5), (12) et (11) nous donnent, pour  $e_i \in \mathcal{B}, y_i \in F (i=1, \dots, n), x \in E$ ,

$$\begin{aligned} \left\langle x, f \left[ \sum_{i=1}^n \varphi_{e_i}(\cdot) y_i \right] \right\rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n \varphi_{e_i}(\cdot) y_i \otimes x, \Phi \right\rangle \\ &= \int_Z \left\langle \sum_{i=1}^n \varphi_{e_i}(\zeta) y_i \otimes x, d\bar{g}_{\zeta} \right\rangle = \sum_{i=1}^n \langle y_i \otimes x, \bar{g}_{e_i} \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle x, g_{e_i}(y_i) \rangle = \left\langle x, \sum_{i=1}^n g_{e_i}(y_i) \right\rangle. \end{aligned}$$

on pose

$$\int_K dg_{\zeta} y(\zeta) = \sum_{i=1}^n g_{e_i}(y_i)$$

[cette intégrale ne dépend pas de la représentation  $\sum \varphi_{e_i}(\cdot) y_i$  de la fonction simple  $y(\cdot)$ ], et pour toute fonction continue et à support contenu dans  $K$ , on pose

$$\int_K dg_{\zeta} y(\zeta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_K dg_{\zeta} y_n(\zeta),$$

où  $\{y_n(\cdot)\}$  est une suite de fonctions simples à supports contenus dans  $K$ , uniformément convergente vers  $y(\cdot)$ . Comme

$$V_{\mathcal{E}(F, E')}^1 \subset V_{\mathcal{E}(F, E')}^{p'} \quad \text{sur } \mathcal{B}_K \stackrel{df}{=} \{e \in \mathcal{B} \mid e \subset K\},$$

cette limite existe et ne dépend pas de la suite  $\{y_n(\cdot)\}$ .

c'est-à-dire

$$f \left[ \sum_{i=1}^n \varphi_{e_i}(\cdot) y_i \right] = \sum_{i=1}^n g_{e_i}(y_i) = \int_Z dg_{\zeta} \sum_{i=1}^n \varphi_{e_i}(\zeta), y_i$$

il s'ensuit, par prolongement par continuité et par passage au quotient, que <sup>(7)</sup>

$$f[y(\cdot)] = \int_Z dg_{\zeta} y(\zeta) \quad [y(\cdot) \in L_F^p].$$

On a ainsi obtenu le

**THÉOREME 2.** — *L'espace  $\mathcal{A}^p$  est équivalent à l'espace  $V_{\mathcal{E}(F, E)}^{p'}$ , où  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ . L'équivalence  $f \leftrightarrow g$  entre ces deux espaces est donnée par la relation*

$$(14) \quad f[y(\cdot)] = \int_Z dg_{\zeta} y(\zeta) \quad [y(\cdot) \in L_F^p].$$

*Remarque 4.* — Il est intéressant d'écrire explicitement que l'équivalence (14) est, en particulier, une isométrie; pour  $1 < p < +\infty$  cela nous donne, en effet, la relation

$$\sup_{\substack{\sum_{i=1}^n \varphi_{e_i}(\cdot) y_i \\ e_i \text{ disjoints} \in \mathcal{E}}} \|f[\varphi_{e_i}(\cdot) y_i]\| = \sup_{\substack{e_i \in \mathcal{E} \\ \|y_i\| \leq 1 \\ e_i \text{ disjoints}}} \left( \sum_{i=1}^n \frac{\|f[\varphi_{e_i}(\cdot) y_i]\|^{p'}}{[\nu(e_i)]^{p'-1}} \right)^{\frac{1}{p'}};$$

pour  $p = 1$  on obtient

$$\|f\| = \sup_{\substack{e \in \mathcal{E} \\ \|y\| \leq 1}} \frac{\|f[\varphi_e(\cdot) y]\|}{\nu(e)} \quad (\text{voir aussi la remarque 9}).$$

*Remarque 5.* — On peut procéder aussi inversement. Notamment, on peut démontrer d'abord le théorème 2 par une voie directe, en posant, pour une  $f \in \mathcal{A}^p$  donnée,

$$g_e(y) \stackrel{df}{=} f[\varphi_e(\cdot) y] \quad (e \in \mathcal{E}, y \in F),$$

et déduire ensuite le théorème 1 à l'aide des équivalences (14), (11) et (12).

3. Désignons par  $\mathcal{J}_E^1$  l'espace de toutes les [classes d'équivalence définies à l'aide de la norme (15), des] fonctions  $x'(\cdot)$  à valeurs dans  $E'$ , *scalairement  $\nu$ -intégrables* sur  $Z$ ; muni des opérations vectorielles naturelles et de la norme

$$(15) \quad \|x'(\cdot)\|_{\mathcal{J}_E^1} = \sup_{\|x\| \leq 1} \int_Z |\langle x, x'(\zeta) \rangle| d\nu(\zeta),$$

c'est, comme on le sait, un espace de Banach.

<sup>(7)</sup> En outre, il s'ensuit que

$$\int_Z \langle y(\zeta) \otimes x, dg_{\zeta} \rangle = \left\langle x, \int_Z dg_{\zeta} y(\zeta) \right\rangle \quad [y(\cdot) \in L_F^p].$$

Pour toute application linéaire  $T$  de  $L_F^p$  ( $1 \leq p < +\infty$ ) dans  $\mathcal{J}_E^1$ , posons

$$(16) \quad |T| = \sup \int_Z \left| \sum_{i=1}^n \langle x_i, [T y_i(\cdot)](\zeta) \rangle \right| d\nu(\zeta),$$

où le sup est pris pour toutes les

$$\sum_{i=1}^n y_i(\cdot) \otimes x_i \in L_F^p \otimes E$$

telles que

$$N_p \left( \sum_{i=1}^n y_i(\cdot) \otimes x_i \right) \leq 1;$$

ici  $N_p$  désigne la norme sur  $L_F^p \otimes E$  induite par  $L_F^p \hat{\otimes} E$ . On a évidemment

$$\|T\| \leq |T| \leq +\infty.$$

Désignons par  $\mathcal{G}(L_F^p, \mathcal{J}_E^1)$  l'espace de toutes les applications linéaires  $T$  de  $L_F^p$  dans  $\mathcal{J}_E^1$  telles que

$$(17) \quad |T| < +\infty,$$

muni des opérations vectorielles naturelles et de la norme (17).  $\mathcal{G}(L_F^p, \mathcal{J}_E^1)$  est un espace de Banach.

LEMME 1. — L'espace  $\mathcal{G}(L_F^p, \mathcal{J}_E^1)$  est équivalent à l'espace  $\mathcal{L}(L_F^p \hat{\otimes} E, L^1)$ . L'équivalence  $T \leftrightarrow \bar{T}$  entre ces deux espaces est donnée par la relation

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} \left[ \bar{T} \left( \sum_{i=1}^n y_i(\cdot) \otimes x_i \right) \right] (\zeta) &= \sum_{i=1}^n \langle x_i, [T y_i(\cdot)](\zeta) \rangle \quad \text{presque partout} \\ [y_i(\cdot) \in L_F^p, x_i \in E, i=1, \dots, n], \end{aligned} \right.$$

$\bar{T}$  étant prolongée par continuité à l'espace  $L_F^p \hat{\otimes} E$  entier.

Démonstration. — L'application  $T \rightarrow \bar{T}$  de  $\mathcal{G}(L_F^p, \mathcal{J}_E^1)$  dans  $\mathcal{L}(L_F^p \hat{\otimes} E, L^1)$ , définie par (18) est évidemment biunivoque, additive et sur. En outre, comme

$$\begin{aligned} \|\bar{T}\| &= \sup_{N_p \left( \sum_{i=1}^n y_i(\cdot) \otimes x_i \right) \leq 1} N_1 \left( \left[ \bar{T} \left( \sum_{i=1}^n y_i(\cdot) \otimes x_i \right) \right] (\cdot) \right) \\ &= \sup_{N_p \left( \sum_{i=1}^n y_i(\cdot) \otimes x_i \right) \leq 1} \int_Z \left| \left[ \bar{T} \left( \sum_{i=1}^n y_i(\cdot) \otimes x_i \right) \right] (\zeta) \right| d\nu(\zeta) \\ &= \sup_{N_p \left( \sum_{i=1}^n y_i(\cdot) \otimes x_i \right) \leq 1} \int_Z \left| \sum_{i=1}^n \langle x_i, [T y_i(\cdot)](\zeta) \rangle \right| d\nu(\zeta) = |T|, \end{aligned}$$

elle est aussi isométrique, donc une équivalence, ce qui achève la démonstration.

Nous dirons qu'une application  $T$  de  $L_F^p$  dans  $\mathcal{J}_{E'}^1$  est *régulière*, si l'on a, pour tout  $\psi(\cdot) \in L^\infty$ ,  $\gamma(\cdot) \in L_F^p$  et  $x \in E$ ,

$$(19) \quad \langle x, [T(\psi(\cdot)\gamma(\cdot))](\zeta) \rangle = \langle x, \psi(\zeta)[T\gamma(\cdot)](\zeta) \rangle \quad \text{presque partout.}$$

L'ensemble de toutes les applications linéaires et régulières de  $L_F^p$  dans  $\mathcal{J}_{E'}^1$ , qui vérifient (17), muni des opérations vectorielles naturelles et de la norme (17), constitue un sous-espace vectoriel *fermé* de l'espace de Banach  $\mathcal{G}(L_F^p, \mathcal{J}_{E'}^1)$ , donc un espace de Banach, que nous désignerons par  $\mathcal{G}_r(L_F^p, \mathcal{J}_{E'}^1)$ .

D'autre part, rappelons qu'on désigne [7] par  $\mathcal{L}_r(L_{F \otimes E}^p, L^1)$  l'espace de toutes les applications linéaires continues et régulières de  $L_{F \otimes E}^p$  dans  $L^1$ , muni des opérations vectorielles naturelles et de la norme naturelle (c'est un espace de Banach); une application  $\bar{T}$  de  $L_{F \otimes E}^p$  dans  $L^1$  est dite [7] *régulière*, si l'on a, pour tout  $\psi(\cdot) \in L^\infty$  et  $X(\cdot) \in L_{F \otimes E}^p$ ,

$$(20) \quad [\bar{T}(\psi(\cdot)X(\cdot))](\zeta) = \psi(\zeta)[\bar{T}X(\cdot)](\zeta) \quad \text{presque partout.}$$

LEMME 2. — *L'espace  $\mathcal{G}_r(L_F^p, \mathcal{J}_{E'}^1)$  est équivalent à l'espace  $\mathcal{L}_r(L_{F \otimes E}^p, L^1)$ . L'équivalence  $T \leftrightarrow \bar{T}$  entre ces deux espaces est donnée par la relation (18).*

*Démonstration.* — C'est une conséquence du lemme 1 et des définitions.

4. Dans [7] nous avons démontré (voir [7], théorèmes 2 et 4) que l'espace  $(L_{F \otimes E}^p)'$  est équivalent à l'espace  $\mathcal{L}_r(L_{F \otimes E}^p, L^1)$ . Rappelons que l'équivalence  $\bar{\Phi} \leftrightarrow \bar{T}$  entre ces deux espaces est donnée par la relation

$$(21) \quad \langle X(\cdot), \bar{\Phi} \rangle = \int_Z [\bar{T}X(\cdot)](\zeta) d\nu(\zeta) \quad [X(\cdot) \in L_{F \otimes E}^p].$$

Il s'ensuit, compte tenu du théorème 1 et du lemme 2, que l'espace  $\mathcal{A}^p$  est équivalent à l'espace  $\mathcal{G}_r(L_F^p, \mathcal{J}_{E'}^1)$  et que l'équivalence  $f \leftrightarrow T$  entre ces deux espaces s'obtient en composant l'équivalence  $f \leftrightarrow \bar{\Phi}$  définie dans le théorème 1, l'équivalence  $\bar{\Phi} \leftrightarrow \bar{T}$  définie par (21), et l'équivalence  $\bar{T} \leftrightarrow T$  définie par (18).

On peut aussi exprimer cette équivalence  $f \leftrightarrow T$  directement, par une seule formule. En effet, en vertu de (5), (21) et (18) on a, pour tout  $\gamma(\cdot) \in L_F^p$  et  $x \in E$ ,

$$\begin{aligned} \langle x, f[\gamma(\cdot)] \rangle &= \langle \gamma(\cdot) \otimes x, \Phi \rangle \\ &= \int_Z [\bar{T}(\gamma(\cdot) \otimes x)](\zeta) d\nu(\zeta) \\ &= \int_Z \langle x, [T\gamma(\cdot)](\zeta) \rangle d\nu(\zeta). \end{aligned}$$

On a ainsi obtenu le

**THÉOREME 3.** — *L'espace  $\mathcal{A}^p$  est équivalent à l'espace  $\mathcal{G}_r(L_F^p, \mathcal{J}_{E'}^1)$ . L'équivalence  $f \leftrightarrow T$  entre ces deux espaces est donnée par la relation*

$$(22) \quad \langle x, f[y(\cdot)] \rangle = \int_Z \langle x, [Ty(\cdot)](\zeta) \rangle d\nu(\zeta) \quad [y(\cdot) \in L_F^p, x \in E].$$

*Remarque 6.* — Il est, de nouveau (cf. la remarque 4), intéressant d'écrire explicitement que l'équivalence (22) est, en particulier, une isométrie. En effet, désignons l'espace  $\mathcal{A}^p$  par  $\mathcal{A}(L_F^p, E')$ . On peut définir, plus généralement, l'espace  $\mathcal{A}(L_F^p, B)$ , où  $B$  est un espace de Banach *quelconque*, comme l'espace de toutes les applications linéaires  $T$  de  $L_F^p$  dans  $B$  telles que

$$(2') \quad ||| T ||| < +\infty,$$

où l'on a posé

$$(1') \quad ||| T ||| = \sup_{\substack{N_p \left( \sum_{i=1}^n \varphi_{e_i}(\cdot) y_i \right) \leq 1 \\ e_i \text{ disjoints } \in \mathcal{B}}} \sum_{i=1}^n \| T[\varphi_{e_i}(\cdot) y_i] \|,$$

muni des opérations vectorielles naturelles et de la norme (2').  $\mathcal{A}(L_F^p, B)$  est un espace de Banach. Soit, en particulier,  $B = \mathcal{J}_{E'}^1$ . Alors on peut aussi définir l'espace  $\mathcal{A}_r(L_F^p, \mathcal{J}_{E'}^1)$ , comme le sous-espace vectoriel fermé de l'espace  $\mathcal{A}(L_F^p, \mathcal{J}_{E'}^1)$  constitué par les applications  $T \in \mathcal{A}(L_F^p, \mathcal{J}_{E'}^1)$  régulières.

Cela étant, du théorème 3 on tire le

**COROLLAIRE 2.** — *L'espace  $\mathcal{G}_r(L_F^p, \mathcal{J}_{E'}^1)$  est identique à l'espace  $\mathcal{A}_r(L_F^p, \mathcal{J}_{E'}^1)$ .*

En effet, en vertu du théorème 3, à toute  $T \in \mathcal{G}_r(L_F^p, \mathcal{J}_{E'}^1)$  correspond biunivoquement une  $f \in \mathcal{A}^p$  vérifiant (22) et telle que  $||| f ||| = |T|$ . Par (22) on a, pour tout  $e \in \mathcal{B}, y \in F$ ,

$$\begin{aligned} \| f[\varphi_e(\cdot) y] \|_{E'} &= \sup_{\|x\| \leq 1} | \langle x, f[\varphi_e(\cdot) y] \rangle | \\ &= \sup_{\|x\| \leq 1} \left| \int_Z \langle x, [T(\varphi_e(\cdot) y)](\zeta) \rangle d\nu(\zeta) \right| \\ &= \sup_{\|x\| \leq 1} \int_Z | \langle x, [T(\varphi_e(\cdot) y)](\zeta) \rangle | d\nu(\zeta) \\ &= \| [T(\varphi_e(\cdot) y)](\cdot) \|_{\mathcal{J}_{E'}^1}; \end{aligned}$$

la pénultième égalité est immédiate en vertu de

$$\| x \| \cong \left\| \frac{\langle x, [T(\varphi_e(\cdot) y)](\zeta) \rangle}{| \langle x, [T(\varphi_e(\cdot) y)](\zeta) \rangle |} x \right\|.$$

Il s'ensuit, par les définitions (2) et (2'), que

$$||| T ||| = ||| f ||| < +\infty,$$

d'où  $T \in \mathcal{A}_r(L_F^p, \mathcal{J}_{E'}^1)$  et, compte tenu de  $\|f\| = |T|$ ,

$$\|T\| = |T|.$$

Réciproquement, on vérifie facilement que pour toute  $T \in \mathcal{A}_r(L_F^p, \mathcal{J}_{E'}^1)$  la formule (22) définit une application linéaire  $f$  de  $L_F^p$  dans  $E'$ . Alors les calculs ci-dessus nous montrent que

$$\|f\| = \|T\| < +\infty, \quad \text{donc } f \in \mathcal{A}^p.$$

En vertu du théorème 3 il s'ensuit que

$$T \in \mathcal{G}_r(L_F^p, \mathcal{J}_{E'}^1) \quad \text{et} \quad |T| = \|T\|,$$

ce qui achève la démonstration du corollaire 2.

Il s'ensuit qu'on a aussi le

**THÉORÈME 3'.** — *L'espace  $\mathcal{A}^p = \mathcal{A}(L_F^p, E')$  est équivalent à l'espace  $\mathcal{A}_r(L_F^p, \mathcal{J}_{E'}^1)$ . L'équivalence  $f \leftrightarrow T$  entre ces deux espaces est donnée par (22).*

*Remarque 7.* — On peut aussi démontrer le théorème 3 par une voie directe, et déduire ensuite le théorème 1 à l'aide des équivalences (22), (18) et (21). De même, on peut démontrer par une voie directe le corollaire 2, ainsi que le théorème 3'.

Compte tenu du lemme 1, on peut aussi faire (cf. [7], remarque 4), la

*Remarque 8.* — *Pour toute application linéaire  $T$  de  $L_F^p$  dans  $\mathcal{J}_{E'}^1$ , vérifiant (17), la formule (22) définit une application  $f \in \mathcal{A}^p$ , telle que*

$$\|f\| \leq |T|.$$

5. Le cas particulier où  $p = 1$  sera d'une importance particulière dans le paragraphe suivant. Il nous sera donc utile de faire quelques remarques concernant ce cas.

*Remarque 9 (voir [3]).* — *On a toujours*

$$\mathcal{A}^1 \equiv \mathcal{L}(L_F^1, E').$$

En effet, cette identité résulte de  $\|f\| \leq \|f\|$  (voir l'Introduction) et de

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \|f[\varphi_{e_i}(\cdot) y_i]\|_{E'} &\leq \|f\| \sum_{i=1}^n N_1(\varphi_{e_i}(\cdot) y_i) \\ &= \|f\| \sum_{i=1}^n \nu(e_i) \|y_i\| = \|f\| N_1 \left( \sum_{i=1}^n \varphi_{e_i}(\cdot) y_i \right) \end{aligned}$$

( $e_i \in \mathcal{B}$  disjoints,  $y_i \in F$ ).

Il s'ensuit que dans le cas particulier où  $p = 1$ , les théorèmes 1, 2, 3 et 3' nous donnent en même temps des caractérisations de l'espace  $\mathcal{L}(L_F^1, E')$ .

Désignons par  $\mathcal{L}_r(L_F^p, \mathcal{J}_{E'}^1)$  le sous-espace vectoriel fermé de l'espace  $\mathcal{L}(L_F^p, \mathcal{J}_{E'}^1)$  constitué par les applications  $T \in \mathcal{L}(L_F^p, \mathcal{J}_{E'}^1)$  régulières.

Remarque 10. — On a toujours

$$\mathcal{G}_r(L_F^1, \mathcal{J}_{E'}^1) \equiv \mathcal{A}_r(L_F^1, \mathcal{J}_{E'}^1) \equiv \mathcal{L}_r(L_F^1, \mathcal{J}_{E'}^1).$$

En effet, la première identité est un cas particulier du corollaire 2, et la dernière identité résulte des relations

$$\|T\| \leq \|T\|$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \|\|T(\varphi_{e_i}(\cdot) y_i)\|_{\mathcal{J}_{E'}^1}\| &\leq \|T\| \sum_{i=1}^n N_1(\varphi_{e_i}(\cdot) y_i) \\ &= \|T\| \sum_{i=1}^n \nu(e_i) \|y_i\| = \|T\| N_1\left(\sum_{i=1}^n \varphi_{e_i}(\cdot) y_i\right). \end{aligned}$$

( $e_i \in \mathcal{B}$  disjoints,  $y_i \in F$ ).

### 3. Application : Une généralisation du théorème Lebesgue-Nikodým.

1. Soient E et F deux espaces de Banach arbitraires et soit  $g \in V_{\mathcal{L}(F, E')}^1$ , c'est-à-dire une fonction d'ensemble définie sur  $\mathcal{B}$  et à valeurs dans  $\mathcal{L}(F, E')$ , complètement additive et à variation bornée. Alors la fonction d'ensemble  $\mu$  définie par

$$(23) \quad \mu(e) = \sup \sum_{i=1}^n \|g_{e_i}\|_{\mathcal{L}(F, E')} \quad (e \in \mathcal{B}),$$

où le sup est pris pour toutes les collections finies d'ensembles disjoints  $e_i \in \mathcal{B}$  telles que  $e_i \subset e$ , est finie, positive et complètement additive sur  $\mathcal{B}$ , et l'on a évidemment

$$(24) \quad \|g_e\|_{\mathcal{L}(F, E')} \leq \mu(e) \quad (e \in \mathcal{B}).$$

On dit que  $g$  est régulière, si, en outre,  $\mu$  définit une mesure de Radon (positive) sur Z.

LEMME 3. — Pour toute  $g \in V_{\mathcal{L}(F, E')}^1$  régulière il existe une application linéaire continue et régulière T de l'espace  $L_F^1(\mu)$  dans l'espace  $\mathcal{J}_{E'}^1(\mu)$ , univoquement déterminée par  $g$ , telle qu'on ait, pour tout  $y(\cdot) \in L_F^1(\mu)$  et  $x \in E$ ,

$$(25) \quad \left\langle x, \int_Z dg_\zeta y(\zeta) \right\rangle = \int_Z \langle x, [Ty(\cdot)](\zeta) \rangle d\mu(\zeta)$$

et que

$$(26) \quad \|T\| = |g|_\infty(\mu) \leq 1.$$

*Démonstration.* — Les inégalités (24) signifient que  $g$  est lipschitzienne par rapport à la mesure de Radon positive  $\mu$  et que  $|g|_\infty(\mu) \leq 1$ . Donc, en vertu du théorème 2,  $g$  définit une application  $f \in \mathcal{C}^1(\mu)$  vérifiant (14) et  $\|f\| = |g|_\infty(\mu)$ . Pour obtenir la conclusion voulue, on n'a qu'à appliquer le théorème 3 et la remarque 10.

*Remarque 11.* — Il peut aussi arriver que

$$\|T\| = |g|_\infty(\mu) < 1.$$

On n'a qu'à prendre, par exemple,

$$Z = [0, 1], \quad F = \mathbb{R}, \quad E = L^2_{\mathbb{R}}([0, 1], \lambda),$$

où  $\lambda$  désigne la mesure de Lebesgue sur  $[0, 1]$ , et  $g_e = \varphi_e(\cdot)$  ( $e \in \mathcal{B}$ ); on vérifie facilement qu'alors

$$|g|_\infty(\mu) \leq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

2. Soit  $\nu$  une mesure de Radon positive sur  $Z$ . On dit qu'une  $g \in V^1_{\mathcal{F}(F, E)}$  est *absolument continue* par rapport à  $\nu$ , si la fonction d'ensemble  $\mu$  définie par (23) est absolument continue par rapport à  $\nu$  au sens habituel. *Dans ce cas*, nous dirons qu'une application  $T$  de  $L^1_F(\mu)$  dans  $\mathcal{J}^1_E(\nu)$  est *régulière*, si l'on a, pour tout  $\psi(\cdot) \in L^\infty(\nu)$ ,  $\gamma(\cdot) \in L^1_F(\mu)$  et  $x \in E$ ,

$$(27) \quad \langle x, [T(\psi(\cdot)\gamma(\cdot))] (\zeta) \rangle = \langle x, \psi(\zeta) [T\gamma(\cdot)] (\zeta) \rangle \quad \nu\text{-presque partout.}$$

**THÉORÈME 4.** — *Soit  $\nu$  une mesure de Radon positive sur  $Z$  et soit  $g \in V^1_{\mathcal{F}(F, E)}$  régulière. Si  $g$  est absolument continue par rapport à  $\nu$ , il existe une application linéaire continue et régulière  $T$  de l'espace  $L^1_F(\mu)$  dans l'espace  $\mathcal{J}^1_E(\nu)$ , univoquement déterminée par  $g$ , telle qu'on ait, pour tout  $\gamma(\cdot) \in L^1_F(\mu)$  et  $x \in E$ ,*

$$(28) \quad \left\langle x, \int_Z dg_\zeta \gamma(\zeta) \right\rangle = \int_Z \langle x, [T\gamma(\cdot)] (\zeta) \rangle d\nu(\zeta)$$

et que

$$(29) \quad \|T\| = |g|_\infty(\mu) \leq 1.$$

*Démonstration.* — En vertu du lemme 3 il existe une application linéaire continue et régulière  $T_0$  de  $L^1_F(\mu)$  dans  $\mathcal{J}^1_E(\mu)$ , telle qu'on ait, pour tout  $\gamma(\cdot) \in L^1_F(\mu)$  et  $x \in E$ ,

$$(30) \quad \left\langle x, \int_Z dg_\zeta \gamma(\zeta) \right\rangle = \int_Z \langle x, [T_0\gamma(\cdot)] (\zeta) \rangle d\mu(\zeta)$$

et que

$$\|T_0\| = |g|_\infty(\mu) \leq 1.$$

Nous disons que pour tout  $\gamma(\cdot) \in \mathcal{K}_F(Z)$  et  $x \in E$ , le support de la fonction  $\langle x, [T_0\gamma(\cdot)] (\zeta) \rangle$  est contenu dans le support  $S(\gamma(\cdot))$  de  $\gamma(\cdot)$ . En effet, en

vertu de  $y(\cdot) = \varphi_{S(y(\cdot))}(\cdot)y(\cdot)$  et de la régularité de  $T_0$  on a

$$\begin{aligned} \langle x, [T_0 y(\cdot)](\zeta) \rangle &= \langle x, [T_0(\varphi_{S(y(\cdot))}(\cdot)y(\cdot))](\zeta) \rangle \\ &= \langle x, \varphi_{S(y(\cdot))}(\zeta) [T_0 y(\cdot)](\zeta) \rangle, \end{aligned}$$

ce qui nous montre que pour  $\zeta \notin S(y(\cdot))$  on a nécessairement

$$\langle x, [T_0 y(\cdot)](\zeta) \rangle = 0,$$

d'où l'affirmation, puisque  $S(y(\cdot))$  est fermé. Nous utiliserons cette remarque dans ce qui suit.

Comme  $\mu$  est absolument continue par rapport à  $\nu$ , il existe, en vertu du théorème de Lebesgue-Nikodým ([1], chap. V, § 5, n° 5, théorème 2), une fonction  $\alpha(\cdot)$  localement  $\nu$ -intégrable sur  $Z$ , telle qu'on ait, pour tout  $y(\cdot) \in \mathcal{K}_F(Z)$  et  $x \in E$ ,

$$(31) \quad \begin{aligned} \int_Z \langle x, [T_0 y(\cdot)](\zeta) \rangle d\mu(\zeta) &= \int_Z \alpha(\zeta) \langle x, [T_0 y(\cdot)](\zeta) \rangle d\nu(\zeta) \\ &= \int_Z \langle x, \alpha(\zeta) [T_0 y(\cdot)](\zeta) \rangle d\nu(\zeta). \end{aligned}$$

Posons, pour tout  $y(\cdot) \in \mathcal{K}_F(Z)$  et  $x \in E$ ,

$$(32) \quad \langle x, [T y(\cdot)](\zeta) \rangle = \langle x, \alpha(\zeta) [T_0 y(\cdot)](\zeta) \rangle \quad \nu\text{-presque partout.}$$

L'application  $T$  de  $\mathcal{K}_F(Z)$  dans  $\mathcal{J}_E^1(\nu)$  définie par (32) est linéaire, puisque  $T_0$  l'est. En outre, comme  $T_0$  est régulière, on a pour tout  $y(\cdot) \in \mathcal{K}_F(Z)$ ,  $x \in E$  et  $\psi(\cdot) \in L^\infty(\nu)$ ,

$$(33) \quad \begin{aligned} \langle x, [T(\psi(\cdot)y(\cdot))](\zeta) \rangle &= \langle x, \alpha(\zeta) [T_0(\psi(\cdot)y(\cdot))](\zeta) \rangle \\ &= \alpha(\zeta) \langle x, [T_0(\psi(\cdot)y(\cdot))](\zeta) \rangle \\ &= \alpha(\zeta) \langle x, \psi(\zeta) [T_0 y(\cdot)](\zeta) \rangle \\ &= \langle x, \psi(\zeta) \alpha(\zeta) [T_0 y(\cdot)](\zeta) \rangle \\ &= \langle x, \psi(\zeta) [T y(\cdot)](\zeta) \rangle \end{aligned}$$

$\nu$ -presque partout.

Il est facile de voir que  $T$  est aussi bornée sur  $\mathcal{K}_F(Z)$ . Posons, en effet, pour  $y(\cdot) \in \mathcal{K}_F(Z)$  et  $x \in E$ ,

$$\psi_1(\zeta) = \frac{\langle x, [T y(\cdot)](\zeta) \rangle}{|\langle x, [T y(\cdot)](\zeta) \rangle|} \quad \nu\text{-presque partout} \left( \frac{0}{0} = 0 \right).$$

Comme le support de  $\psi_1(\cdot)$  est contenu dans le support de  $y(\cdot)$ , et comme  $|\psi_1(\zeta)| \leq 1$ , il résulte alors, par (33), (32), (31) et (30), que

$$\begin{aligned} \int_Z |\langle x, [T y(\cdot)](\zeta) \rangle| d\nu(\zeta) &= \int_Z \psi_1(\zeta) \langle x, [T y(\cdot)](\zeta) \rangle d\nu(\zeta) \\ &= \int_Z \langle x, [T(\psi_1(\cdot)y(\cdot))](\zeta) \rangle d\nu(\zeta) \\ &= \int_Z \langle x, [T_0(\psi_1(\cdot)y(\cdot))](\zeta) \rangle d\mu(\zeta) \\ &= \left\langle x, \int_Z dg_\zeta \psi_1(\zeta) y(\zeta) \right\rangle \leq \|x\| \cdot \|g\|_\infty(\mu) N_1(\psi_1(\cdot)y(\cdot), \mu) \\ &\leq \|x\| \cdot \|g\|_\infty(\mu) N_1(y(\cdot), \mu), \end{aligned}$$

d'où, pour tout  $y(\cdot) \in \mathcal{K}_F(Z)$ ,

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \int_Z |\langle x, [T y(\cdot)](\zeta) \rangle| d\nu(\zeta) \leq |g|_\infty(\mu) N_1(y(\cdot), \mu).$$

Il s'ensuit que T définit, de façon unique, par prolongement par continuité à  $L_F^1(\mu)$  et par passage au quotient  $L_F^1(\mu)$ , une application linéaire continue de  $L_F^1(\mu)$  dans  $\mathcal{J}_E^1(\nu)$ , que nous désignerons encore par T, vérifiant (28) [puisqu'il *voit* (30), (31) et (32)] et

$$\|T\| \leq |g|_\infty(\mu).$$

D'autre part, on a aussi l'inégalité opposée

$$|g|_\infty(\mu) \leq \|T\|,$$

donc (29); en effet, cela résulte du théorème 2 combiné avec la remarque 9 et du fait qu'on a, pour tout  $y(\cdot) \in L_F^1(\mu)$  et tout  $x \in E$  tel que  $\|x\| \leq 1$ ,

$$\begin{aligned} \left| \left\langle x, \int_Z dg_\zeta y(\zeta) \right\rangle \right| &= \left| \int_Z \langle x, [T y(\cdot)](\zeta) \rangle d\nu(\zeta) \right| \\ &\leq \sup_{\|x\| \leq 1} \int_Z |\langle x, [T y(\cdot)](\zeta) \rangle| d\nu(\zeta) \\ &\leq \|T\| N_1(y(\cdot), \mu). \end{aligned}$$

En vertu de (33) et (29), l'application T définie ci-dessus est aussi régulière.

Montrons enfin, que l'application T est univoquement déterminée par g. Supposons, en effet, qu'on a (28) pour

$$T, T_1 \in \mathcal{L}_r(L_F^1(\mu), \mathcal{J}_E^1(\nu)).$$

Compte tenu de la régularité de T et  $T_1$  on a alors, pour tout  $\psi(\cdot) \in L^\infty(\nu)$ ,  $y(\cdot) \in L_F^1(\mu)$  et  $x \in E$ ,

$$\begin{aligned} \int_Z \psi(\zeta) \langle x, [T y(\cdot)](\zeta) \rangle d\nu(\zeta) &= \int_Z [T(\psi(\cdot)y(\cdot))](\zeta) d\nu(\zeta) \\ &= \left\langle x, \int_Z dg_\zeta \psi(\zeta) y(\zeta) \right\rangle = \int_Z [T_1(\psi(\cdot)y(\cdot))](\zeta) d\nu(\zeta) \\ &= \int_Z \psi(\zeta) \langle x, [T_1 y(\cdot)](\zeta) \rangle d\nu(\zeta), \end{aligned}$$

d'où, pour tout  $y(\cdot) \in L_F^1(\mu)$  et  $x \in E$ ,

$$\langle x, [T y(\cdot)](\zeta) \rangle = \langle x, [T_1 y(\cdot)](\zeta) \rangle \quad \nu\text{-presque partout,}$$

donc

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \int_Z |\langle x, [T y(\cdot)](\zeta) \rangle - \langle x, [T_1 y(\cdot)](\zeta) \rangle| d\nu(\zeta) = 0.$$

Or, cela signifie qu'on a, au sens de la norme de  $\mathcal{J}_E^1(\nu)$ ,

$$T y(\cdot) = T_1 y(\cdot) \quad [y(\cdot) \in L_F^1(\mu)],$$

c'est-à-dire que  $T = T_1$ .

Le théorème 4 est démontré.

4. Le cas particulier où les espaces E et F sont séparables.

1. Déduisons d'abord des résultats ci-dessus le théorème de représentation (A) (voir l'Introduction) <sup>(8)</sup>. Nous nous bornerons à démontrer la nécessité de (3), puisque sa suffisance est immédiate même dans le cas général où E et F sont deux espaces de Banach arbitraires.

Soient donc E et F séparables. Dans ce cas l'espace  $F \hat{\otimes} E$  est séparable, donc, en vertu d'un théorème de R. Fortet et E. Mourier [5], toute forme linéaire continue  $\bar{\Phi}$  sur  $L_{F \hat{\otimes} E}^p$  s'écrit sous la forme

$$\langle X(\cdot), \bar{\Phi} \rangle = \int_Z \langle X(\zeta), X'(\zeta) \rangle d\nu(\zeta) \quad [X(\cdot) \in L_{F \hat{\otimes} E}^p],$$

où  $X'(\cdot)$  est une application faiblement mesurable de Z dans  $(F \hat{\otimes} E)'$  telle que

$$N_{p'}(X'(\cdot)) < +\infty \quad \left( \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \right)$$

et que

$$\|\bar{\Phi}\| = N_{p'}(X'(\cdot)).$$

Or, par l'identification bien connue des espaces  $(F \hat{\otimes} E)'$  et  $\mathcal{L}(F, E')$ , à chaque  $X'(\zeta)$  correspond une  $U(\zeta) \in \mathcal{L}(F, E')$  telle que

$$\langle x, U(\zeta)y \rangle = \langle y \otimes x, X'(\zeta) \rangle \quad (y \in F, x \in E)$$

et que

$$\|U(\zeta)\| = \|X'(\zeta)\|.$$

Par conséquent, on a aussi

$$\langle x, U(\zeta)y(\zeta) \rangle = \langle y(\zeta) \otimes x, X'(\zeta) \rangle \quad (y(\cdot) \in L_F^p, x \in E)$$

et

$$N_{p'}(U(\cdot)) = N_{p'}(X'(\cdot)).$$

---

<sup>(8)</sup> Nous n'examinerons pas dans ce travail le problème des conditions plus larges sur E et F dans lesquelles restent encore valables le théorème de représentation (A) et les corollaires qui suivent.

Cela étant, soit  $f \in \mathcal{A}^p$ . En vertu du théorème 1 il s'ensuit qu'on a

$$\begin{aligned} \langle x, f[y(\cdot)] \rangle &= \langle y(\cdot) \otimes x, \bar{\Phi} \rangle \\ &= \int_Z \langle y(\zeta) \otimes x, X'(\zeta) \rangle d\nu(\zeta) \\ &= \int_Z \langle x, U(\zeta) y(\zeta) \rangle d\nu(\zeta) \end{aligned}$$

et que

$$\|f\| = \|\bar{\Phi}\| = N_{p'}(X'(\cdot)) = N_{p'}(U(\cdot)),$$

ce qui achève la démonstration du théorème (A).

2. En vertu du théorème 2 on a le

**COROLLAIRE 3.** — Soient les espaces  $E$  et  $F$  séparables. On a  $g \in V_{\mathcal{L}(F, E)}^{p'}$  (où  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ ) si, et seulement si, il existe une application  $U(\cdot)$  de  $Z$  dans  $\mathcal{L}(F, E')$  telle que  $N_{p'}(U(\cdot)) < +\infty$  et qu'on ait, pour tout  $y(\cdot) \in L_F^p$  et  $x \in E$ ,

$$(34) \quad \left\langle x, \int_Z dg_{\zeta} y(\zeta) \right\rangle = \int_Z \langle x, U(\zeta) y(\zeta) \rangle d\nu(\zeta).$$

Dans ce cas on a

$$(35) \quad |g|_{p'} = N_{p'}(U(\cdot)).$$

C'est une généralisation du théorème classique de F. Riesz sur l'équivalence des espaces  $L^{p'}$  et  $V^{p'}(p' > 1)$ .

En vertu du théorème 3 on a le

**COROLLAIRE 4.** — Soient les espaces  $E$  et  $F$  séparables. On a  $T \in \mathcal{G}_r(L_F^p, \mathcal{J}_{E'}^1)$  si, et seulement si, il existe une application  $U(\cdot)$  de  $Z$  dans  $\mathcal{L}(F, E')$  telle que  $N_{p'}(U(\cdot)) < +\infty$  et qu'on ait, pour tout  $y(\cdot) \in L_F^p$  et  $x \in E$ ,

$$(36) \quad \int_Z \langle x, [T y(\cdot)](\zeta) \rangle d\nu(\zeta) = \int_Z \langle x, U(\zeta) y(\zeta) \rangle d\nu(\zeta).$$

Dans ce cas on a

$$(37) \quad |T| = N_{p'}(U(\cdot)).$$

Remarquons que lorsque  $E$  est séparable, une application  $T$  de  $L_F^p$  dans  $\mathcal{J}_{E'}^1$  est régulière si, et seulement si, pour tout  $\psi(\cdot) \in L^\infty$  et  $y(\cdot) \in L_F^p$ ,

$$[T(\psi(\cdot) y(\cdot))](\zeta) = \psi(\zeta) [T y(\cdot)](\zeta) \quad \text{presque partout.}$$

Nous dirons qu'une application linéaire  $T$  de l'espace  $L_F^p$  dans l'espace  $\mathcal{J}_{E'}^1$  est *décomposable*, s'il existe une application  $U(\cdot)$  de  $Z$  dans  $\mathcal{L}(F, E')$ , telle qu'on ait, pour tout  $y(\cdot) \in L_F^p$ ,  $x \in E$ ,

$$(38) \quad \langle x, [T y(\cdot)](\zeta) \rangle = \langle x, U(\zeta) y(\zeta) \rangle \quad \text{presque partout.}$$

Remarquons que, lorsque  $E$  est séparable,  $T$  est décomposable si, et seulement si, pour tout  $\gamma(\cdot) \in L_F^p$  on a

$$(38') \quad [T\gamma(\cdot)](\zeta) = U(\zeta)\gamma(\zeta) \quad \text{presque partout.}$$

A l'aide du corollaire 4 on peut aussi démontrer le

COROLLAIRE 5<sup>(9)</sup>. — Soient les espaces  $E$  et  $F$  séparables. Une application  $T \in \mathcal{G}(L_F^p, \mathcal{J}_E^1)$  est décomposable si, et seulement si  $T \in \mathcal{G}_r(L_F^p, \mathcal{J}_E^1)$ . Dans ce cas on a

$$|T| = N_{p'}(U(\cdot)),$$

où  $U(\cdot)$  est l'application qui figure dans (38').

Remarque 12. — Réciproquement, chacun des théorèmes 2 et 3, conjointement avec le corollaire 3 respectivement 4 (ou 5, qui implique le corollaire 4 comme on le voit sans peine), entraînent le théorème (A).

3. Il est facile de retrouver les théorèmes du type Lebesgue-Nikodým donnés dans [3] (voir [3], théorèmes 1 et 2), comme cas particuliers des résultats du paragraphe 3 du présent travail. Nous omettons les détails.

Mentionnons aussi le fait suivant : si  $E'$  est séparable et si la mesure  $\nu$  est bornée, on a  $\mathcal{J}_{E'}^1 \equiv L_{E'}^1$ ; d'autre part (voir les remarques 9 et 10) on a toujours

$$\mathcal{L}^1 \equiv \mathcal{L}(L_F^1, E') \quad \text{et} \quad \mathcal{G}_r(L_F^1, \mathcal{J}_{E'}^1) \equiv \mathcal{L}_r(L_F^1, \mathcal{J}_{E'}^1).$$

Par conséquent, si  $E'$  est séparable, si la mesure  $\nu$  est bornée et si, en outre,  $F = E'$ , le théorème 3 constitue une amélioration d'un théorème de J. Dieudonné ([2], théorème 2) concernant la représentation intégrale des applications  $f \in \mathcal{L}(L_F^1, F)$  moyennant les applications  $T \in \mathcal{L}_r(L_F^1, L_F^1)$ .

Pour d'autres cas particuliers des résultats de ce travail, voir aussi la fin du travail [7].

Signalons, enfin, que le cas des applications de  $L_F^p$  ( $1 \leq p < +\infty$ ) dans un espace de Banach quelconque  $E$  sera considéré dans un autre travail.

#### BIBLIOGRAPHIE.

- [1] N. BOURBAKI, *Intégration, Éléments de Mathématique*, livre VI, chap. I-IV, Paris, 1952; chap. V, Paris, 1956.  
 [2] J. DIEUDONNÉ, *Sur le théorème de Lebesgue-Nikodým*. III (*Ann. Univ. Grenoble*, t. 23, 1947-1948, p. 25-53).

---

(<sup>9</sup>) On peut aussi démontrer, par une voie directe, un résultat plus général, mais nous ne nous occuperons pas de ce problème dans le présent travail. Le corollaire 5 peut aussi se déduire du lemme 1 et d'un théorème de décomposabilité, connu, des éléments de  $\mathcal{L}(L_F^p \hat{\otimes} E, L^1)$ .

- [3] N. DINCULEANU et G. FOIAS, *Mesures vectorielles et opérations linéaires sur  $L_E^p$*  (*C. R. Acad. Sc.*, t. 248, 1959, p. 1759-1762).
- [4] A. GROTHENDIECK, *Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques* (*Bol. Soc. Mat. São-Paulo*, t. 8, 1956, p. 1-79).
- [5] R. FORTET et E. MOURIER, *Résultats complémentaires sur les éléments aléatoires dans un espace de Banach* (*Bull. Sc. Math.*, t. 78, 1954, p. 14-30).
- [6] I. SINGER, *Sur les applications linéaires majorées des espaces de fonctions continues* (*Rend. Accad. Naz. Lincei*, t. 27, 1959, p. 35-41).
- [7] I. SINGER, *Les duals de certains espaces de Banach de champs de vecteurs. II* (*Bull. Sc. Math.*, t. 83, 1959, p. 73-96).

