PAUL LÉVY

Esquisse d'une théorie de la multiplication des variables aléatoires

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 76, nº 1 (1959), p. 59-82

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1959_3_76_1_59_0>

ESQUISSE D'UNE THÉORIE

DE LA

MULTIPLICATION DES VARIABLES ALÉATOIRES

PAR M. PAUL LÉVY.

(DÉDIÉE A LA MÉMOIRE D'AUREL WINTNER.)

1. INTRODUCTION. — L'addition de deux ou plusieurs variables aléatoires (v. a.) est un des problèmes les plus classiques du calcul des probabilités. Par contre leur multiplication ne semble pas avoir été étudiée d'une manière systématique. L'objet du présent travail, où nous nous bornons à considérer le produit $X = UV$ de deux variables aléatoires indépendantes, est de commencer à combler cette lacune. Peut-être certaines parties, et notamment les formules fondamentales rappelées au n° 2, paraîtront-elles triviales. Nous pensons que, dans l'ensemble, la plupart des résultats sont nouveaux.

Il est entendu une fois pour toutes que U *et* V *sont indépendants.* Nous ne le répéterons pas chaque fois. Quand nous ne préciserons pas le contraire, leurs valeurs seront supposées réelles.

Au n° 2, nous indiquons les formules qui, dans le cas réel, permettent d'exprimer la loi dont dépend X en fonction des lois de U et V. Au n° 3, après avoir défini une fonction $G(x)$ qui définit la dissymétrie de X, nous l'exprimerons en fonction des fonctions analogues relatives à U et V.

Au n° 4, nous énonçons les problèmes précis qui seront considérés dans la suite. Les deux premiers (A et B) sont ceux qui, par l'introduction des logarithmes, se ramènent formellement aux problèmes fondamentaux de l'arithmétique classique des lois de probabilité. Le problème D se ramène de même à celui des lois indéfiniment divisibles, problème dont la solution est bien connue. Quant au problème C, c'est la recherche des cas où la loi de X est symétrique.

Si nous venons de parler de réduction *formelle* à des problèmes connus, c'est que, sauf dans le cas où U, V et par suite X, sont des nombres réels positifs ou nuls, leurs logarithmes sont des nombres complexes définis $\bmod 2\pi i$. Le cas de l'addition des variables aléatoires complexes définies mod $2\pi i$ n'ayant pas été spécialement étudié, c'est à l'étude de ce cas que nous conduisent tout naturellement les problèmes relatifs au produit $X = UV$.

Les n^{os} 4 à 8 contiennent l'étude des problèmes ainsi posés. Certains sont complètement résolus. D'autres appellent de nouvelles recherches. Nous utilisons souvent la méthode, reposant sur l'emploi des logarithmes, qui vient d'être indiquée. Mais au n° 6 nous appliquons une autre méthode, qui repose sur la relation bien connue qui existe entre les moments de U, V et X.

Enfin le n° 9 est consacré à l'analyse du Mémoire de A. Wintner [4] qui semble avoir été le dernier travail de cet éminent savant, décédé subitement quand il était encore en pleine activité. C'est ce Mémoire qui m'a donné l'idée du présent travail, bien qu'il n'y soit pas question de variables aléatoires. Mais, si Wintner part d'un problème tout mis en équations, un probabiliste ne peut pas ne pas y voir l'énoncé sous-jacent : *définir les v. a. de la forme* $X = UV$, *où* U *est une v. a. laplacienne réduite, qui dépendent de lois indéfiniment divisibles* (i. d.). C'est donc un problème qui se rattache à notre sujet.

Malheureusement il y a dans ce Mémoire, à côté de quelques inadvertances faciles à corriger, une lacune qui conduit à douter du théorème fondamental. La condition que Wintner a cru nécessaire et suffisante pour que X ait à la fois les deux propriétés qu'il considère est manifestement suffisante. Mais il n'est pas prouvé qu'elle soit nécessaire. Il y a donc un problème qui reste ouvert, et qui semble intéressant. De toute façon il y a un point qui reste acquis : la découverte d'une importante classe de lois de probabilité qui sont des solutions du problème de Wintner.

2. Notations et formules fondamentales. — Nous désignerons par $F(x)$, $F_1(x)$ et $F_2(x)$ les fonctions de répartition des v. a. réelles X, U et V, par x_h, u_k, v_l $(h, k, l = 1, 2, \ldots)$ les valeurs de ces variables ayant des probabilités positives, et par a_h, b_k, c_l les probabilités correspondantes. Si $X = UV$, on a

$$F(x-0) = \iint_{uv<x} dF_1(u)\, dF_2(v) \tag{1}$$

et

$$F(x+0) - F(x-0) = \sum_{u_k v_l = x} b_k c_l. \tag{2}$$

D'autre part, en introduisant les fonctions caractéristiques $F^\star(t)$, $F_1^\star(t)$ et $F_2^\star(t)$, c'est-à-dire les transformées de Fourier-Stieltjes de $F(x)$, $F_1(u)$ et $F_2(v)$, on a

$$F^\star(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_1^\star(vt)\, dF_2(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_2^\star(ut)\, dF_1(u). \tag{3}$$

Ces trois formules sont valables dans tous les cas, et, si les discontinuités de

$F_1(u)$ et $F_2(v)$ sont connues, la seconde définit celles de $F(x)$. Les x_h sont les produits $u_k v_l$, et, pour ces valeurs, la formule (2) détermine a_h qui est, par définition, le premier membre de cette formule.

Si les lois de U et V sont absolument continues, celle de X l'est aussi, et, les dérivées de $F(x)$, $F_1(u)$ et $F_2(v)$ étant désignées par $f(x)$, $f_1(u)$ et $f_2(v)$, on a

$$(4)\qquad f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(u) f_2\left(\frac{x}{u}\right)\frac{du}{u}=\int_{-\infty}^{+\infty} f_1\left(\frac{1}{u'}\right) f_2(xu')\frac{du'}{u'},$$

formule dans laquelle on peut évidemment intervertir f_1 et f_2. Dans le cas le plus général, $f_1(u)$ et $f_2(v)$ sont définis presque partout, et les intégrales qui figurent dans la formule (4) représentent une fonction sommable, qui n'est qu'une partie de $f(x)$, dont on a ainsi une borne inférieure. Il faut noter que, même si $f_1(u)$ et $f_2(v)$ sont presque partout nuls, il peut arriver que $f(x)$ soit partout positif.

Il est enfin évident que si, pour n entier et α réel, on pose

$$(5)\qquad \begin{cases} E_n=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^n\, dF(x), & E'_n=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^n\, dF_1(x), & E''_n=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^n\, dF_2(x), \\ \overline{E}_\alpha=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^\alpha\, dF(x), & \overline{E}'_\alpha=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^\alpha\, dF_1(x), & \overline{E}''_\alpha=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^\alpha\, dF_2(x), \end{cases}$$

on a

$$(6)\qquad E_n=E'_n E''_n, \qquad \overline{E}_\alpha=\overline{E}'_\alpha \overline{E}''_\alpha.$$

On sait que, pour $n>0$, E_n, E'_n et E''_n sont les *moments d'ordre n* de X, U et V, et $\overline{E}_n$, $\overline{E}'_n$, $\overline{E}''_n$ sont ceux de $|X|$, $|U|$ et $|V|$. Les premiers sont majorés par les seconds, auxquels ils sont égaux, soit si n est pair, soit si la v. a. considérée est presque sûrement (pr. s.) $\geqq 0$.

Il peut arriver que l'expression (6) de E_n soit de la forme $0\times\infty$. Sauf si le facteur nul correspond à une v. a. pr. s. nulle, $\overline{E}_n$ est alors infini, et si, $\alpha=n$ est un entier impair, E_n est indéterminé.

3. Symétrie et dissymétrie. — Nous allons introduire une fonction $G(x)$, définie pour $x\geqq 0$, qui caractérisera la dissymétrie de la loi de X, et qui sera identiquement nulle si cette loi est symétrique et dans ce cas seulement. Dans le cas absolument continu, la dérivée $g(x)$ de $G(x)$ sera définie par la formule

$$(7)\qquad g(x)=f(x)-f(-x),$$

c'est-à-dire que $\frac{g(x)}{2}$ est la partie impaire de $f(x)$. Il suffit évidemment de la connaître pour $x>0$. Cela nous conduit pour $G(x)$ à la définition

$$(8)\qquad G(0)=0, \qquad dG(x)=d[F(x)+F(-x)] \qquad (x>0).$$

Il est évident que cette fonction a bien la propriété que nous voulions réaliser. Elle est à variation bornée, mais, en général, n'est pas monotone.

Si nous désignons par α, α' et α'' les sauts de $G(x)$, $F(x)$ et $F(-x)$ au point x, on a évidemment $\alpha = \alpha' - \alpha''$. Si nous désignons par ξ_h $(h = 1, 2, \ldots)$ les points où $G(x)$ est discontinu, et par α_h les sauts qui leur correspondent, il en résulte que les ξ_h sont tous des $|x_h|$, mais ils peuvent n'être qu'une partie des $|x_h|$. En particulier, si $F(x)$ a un saut à l'origine, c'est-à-dire si

$$\Pr(X = 0) > 0,$$

cela n'a aucun effet sur $G(x)$, sinon de donner pour sa variation totale la borne supérieure $1 - \Pr(X = 0) < 1$.

S'il s'agit de la v. a. U, nous écrirons $G_1(u)$, η_k, β, β_k au lieu de $G(x)$, ξ_h, α, α_h; s'il s'agit de V, nous écrirons $G_2(v)$, ζ_l, γ, γ_l. Si un nombre positif x a une représentation et une seule de la forme $\eta_k \zeta_l$, il résulte de (2) que

$$\alpha' = \beta'_k \gamma'_l + \beta''_k \gamma''_l, \qquad \alpha'' = \beta'_k \gamma''_l + \beta''_k \gamma'_l, \tag{9}$$

et par suite

$$\alpha = \alpha' - \alpha'' = (\beta'_k - \beta''_k)(\gamma'_l - \gamma''_l) = \beta_k \gamma_l. \tag{10}$$

On en déduit que dans le cas général

$$\alpha = G(x + 0) - G(x - 0) = \sum_{\eta_k \zeta_l = x} \beta_k \gamma_l, \tag{11}$$

formule qui définit parfaitement les discontinuités de $G(x)$ en fonction de celles de $G_1(u)$ et $G_2(v)$.

En partant de la formule (1), et de la définition (7) de $G(x)$, on obtient de même la formule

$$G(x - 0) = \iint_{u,\, v > 0;\; uv < x} dG_1(u)\, dG_2(v) \qquad (x > 0), \tag{12}$$

qui dans le cas le plus général donne $G(x)$ en fonction de $G_1(u)$ et $G_2(v)$. En effectuant l'intégration par rapport à v, il vient

$$G(x) = \int_0^\infty G_2\left(\frac{x}{u}\right) dG_1(u), \tag{13}$$

formule où x peut être $x - 0$ ou $x + 0$. On peut déduire de ces formules une vérification de la formule (11); inversement, en partant de (11), on peut vérifier ces formules dans le cas totalement discontinu et, par un passage à la limite, arriver au cas général.

Si les fonctions $G_1(u)$ et $G_2(v)$ sont absolument continues, $G(x)$ l'est aussi, et l'on a entre leurs dérivées $g(x)$, $g_1(u)$, $g_2(v)$ la relation

$$g(x) = \int_0^\infty g_1(u) g_2\left(\frac{x}{u}\right) \frac{du}{u} = \int_0^\infty g_1\left(\frac{1}{u'}\right) g_2(xu') \frac{du'}{u'}. \tag{14}$$

Enfin, en introduisant les moments

$$(15) \qquad \mathcal{E}_n = \int_0^\infty x^n \, dG(x), \qquad \overline{\mathcal{E}}_n = \int_0^\infty x^n \, | dG(x) |,$$

on a évidemment

$$(16) \qquad | \mathcal{E}_n | \leqq \overline{\mathcal{E}}_n \leqq \overline{E}_n,$$

et les moments analogues relatifs à $G_1(x)$ et $G_2(x)$ étant désignés par $\mathcal{E}'_n$, $\overline{\mathcal{E}}'_n$, $\mathcal{E}''_n$, $\overline{\mathcal{E}}''_n$,

$$(17) \qquad \mathcal{E}_n = \mathcal{E}'_n \mathcal{E}''_n, \qquad \overline{\mathcal{E}}_n \leqq \overline{\mathcal{E}}'_n \overline{\mathcal{E}}''_n.$$

On remarque l'analogie entre toutes ces formules et celles du n° 2. Mais ici, x étant positif, $dG(x)$ et $g(x)$ sont de signes quelconques, et, pour l'étude des moments, il n'y a pas à distinguer le cas où l'indice n'est pair et celui où il est impair. Le produit $\mathcal{E}'_n \mathcal{E}''_n$ peut être indéterminé aussi bien pour n pair que pour n impair. Si pour fixer les idées $\mathcal{E}'_n = 0$, $\overline{\mathcal{E}}''_n = \infty$, $\mathcal{E}''_n$ est infini ou indéterminé, et $\mathcal{E}_n = \mathcal{E}'_n \mathcal{E}''_n$ l'est aussi, sauf toutefois dans le cas où $G_1(x)$ est identiquement nul; dans ce cas $G(x)$ l'est aussi et $\mathcal{E}_n = 0$.

Il faut remarquer que, d'après un théorème connu de T. Carleman que nous utiliserons plus loin, il y a des fonctions non constantes $G_1(x)$ dont tous les moments sont nuls. Il ne suffit donc pas que tous les $\mathcal{E}'_n$ soient nuls pour qu'on puisse conclure que $G_1(x)$ est identiquement nul et que les $\mathcal{E}_n$ sont nuls aussi, même si $\overline{\mathcal{E}}''_n$ est infini.

4. Problèmes posés par la multiplication des variables aléatoires. — Sauf au 5° du n° 7, où nous poserons de nouveaux problèmes, et au n° 9, dont nous avons indiqué l'objet spécial, nous nous bornerons à l'étude des problèmes suivants :

Problème A. — Les lois de X et de U étant données, reconnaître si X est de la forme UV, et dans ce cas déterminer la loi de V ou l'ensemble des lois possibles.

Problème B. — La loi de X étant seule donnée, reconnaître si X admet des représentations de la forme UV dans lesquelles aucun facteur ne soit un nombre certain.

Problème C. — Déterminer les conditions que doivent vérifier les lois de U et V pour que celle de X soit symétrique.

Problème D. — Déterminer les *lois indéfiniment divisibles de l'arithmétique multiplicative* (lois i. d. m.), c'est-à-dire celles pour lesquelles, ε et ε' étant des nombres positifs arbitrairement petits, la v. a. X dépendant d'une telle loi peut être mise sous la forme d'un produit de facteurs indépendants U_ν tels que

$$(18) \qquad \Pr\{ | U_\nu - 1 | > \varepsilon \} < \varepsilon'.$$

5. Problèmes A et B. La première méthode : réduction a une somme par l'emploi des logarithmes. — 1° Une v. a. X peut toujours se mettre sous la forme $\eta X'$, les deux facteurs étant indépendants, X' étant presque sûrement (pr. s.) $\neq 0$, et η n'ayant pas d'autres valeurs possibles que 0 et 1. La probabilité de la valeur 0 est $\alpha = \Pr(X = 0)$. Si $\alpha < 1$, la représentation de X par la formule $X = \eta X'$ est unique; la loi de X' est la loi conditionnelle dont dépend X dans l'hypothèse $X \neq 0$. Si au contraire $\alpha = 1$, la loi de X' est absolument quelconque.

Si U et V sont mis de même sous les formes $\eta_1 U'$ et $\eta_2 V'$, la relation $X = UV$ se décompose et $\eta = \eta_1 \eta_2$, et $X' = U'V'$, et l'on peut étudier séparément ces deux relations. L'étude de la première se résume dans la formule

$$1 - \alpha = \Pr(\eta = 1) = \Pr(\eta_1 = 1)\Pr(\eta_2 = 1) = (1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2), \tag{19}$$

qui résout immédiatement, pour les v. a. considérées, les problèmes A, B et D. On remarque en particulier que, sauf si $\alpha = 0$, le problème B a une infinité de solutions, $\Pr(\eta_1 = 1)$ étant quelconque dans $[1 - \alpha, 1]$, et que la loi de η est i. d. m. On est ainsi ramené à l'étude de la relation $X' = U'V'$, ce qui revient à dire que : *on peut supposer* $\alpha = \Pr(X = 0) = 0$, *ce que nous ferons maintenant*. On a alors aussi nécessairement $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

2° Supposons d'abord $\Pr(X > 0) = 1$. Cette condition ne pouvant pas être réalisée si le signe de U est effectivement aléatoire, U et V sont pr. s. tous les deux positifs ou tous les deux négatifs. Le second cas se ramenant au premier, nous ne chercherons que les représentations de X par un produit de facteurs positifs. Alors la formule $X = UV$ se ramène à la formule d'addition

$$\log X = \log U + \log V, \tag{20}$$

les logarithmes étant réels, et $\log U$ et $\log V$ étant indépendants. Les problèmes A, B et D sont alors ramenés à des problèmes classiques, dont on sait qu'ils se ramènent eux-mêmes à l'étude de la relation

$$\varphi(t) = \varphi_1(t)\varphi_2(t) \tag{21}$$

entre les fonctions caractéristiques de $\log X$, $\log U$ et $\log V$.

On sait que, sauf dans un cas particulier, cette formule résout le problème A. Les lois de X et U étant données, on en déduit $\varphi(t)$ et $\varphi_1(t)$, donc $\varphi_2(t)$. On sait, par la formule qui résout l'équation

$$\varphi_2(t) = \int_0^\infty e^{it\log v}\, dF_2(v), \tag{22}$$

reconnaître si $\varphi_2(v)$ est bien une fonction caractéristique, et dans ce cas évidemment exceptionnel on a ainsi $F_2(v)$.

Le cas particulier, signalé d'abord par A. Khintchine, où $\varphi_2(t)$ est indéterminé, est celui où $\varphi(t)$ et $\varphi_1(t)$, tous les deux égaux à l'unité pour $t=1$, sont tous les deux nuls en dehors d'un certain intervalle $(-\tau, +\tau)$. Un exemple beaucoup plus général que celui de Khintchine se déduit d'un vieux théorème bien connu de G. Pólya : *pour qu'une fonction* $\varphi(t)$, *réelle, paire, toujours* $\geqq 0$, *et égale à* 1 *pour* $t=0$, *soit une fonction caractéristique* (et alors celle d'une loi symétrique), *il suffit qu'elle soit convexe dans* $(0, \infty)$. Prenons alors pour $\varphi_1(t)$ et $\varphi_2(t)$ des fonctions vérifiant ces conditions, et de plus telles que

$$\varphi_1(\tau)=0, \qquad \varphi_2(\tau) > \varphi_2(\infty) \geqq 0, \tag{23}$$

d'où $\varphi_1(t)=0$ pour $t \geqq \tau$. Il existe une famille infinie non dénombrable de fonctions $\varphi_2^*(t)$, vérifiant aussi les conditions de Pólya, et égales à $\varphi_2(t)$ dans $(0, \tau)$. On a alors, sur tout l'axe des t,

$$\varphi_1(t)\varphi_2(t)=\varphi_1(t)\varphi_2^*(t), \tag{24}$$

de sorte que la donnée de $\varphi_1(t)$ et de $\varphi(t)=\varphi_1(t)\varphi_2(t)$ ne détermine pas $\varphi_2(t)$; il y a une infinité non dénombrable de fonctions $\varphi_2^*(t)$ possibles.

Nous ne savons pas si l'attention a déjà été attirée sur le fait que dans ces conditions le problème A n'est pas complètement résolu. $\varphi_2(t)$ est défini dans $(-\tau, +\tau)$, et, si c'est une fonction de Pólya, on saura que son prolongement est possible, et même d'une infinité de manières, si $\varphi_2(t) > 0$. Mais, en multipliant $\varphi_1(t)$ et $\varphi_2(t)$ par des fonctions caractéristiques complexes, on voit que la même indétermination peut se produire pour des fonctions complexes, et si $\varphi_2(t)$, sans être du type de Pólya, est ainsi connu dans un intervalle fini $(-\tau, +\tau)$, il n'est pas aussi facile de savoir si les valeurs obtenues sont des valeurs acceptables pour une fonction caractéristique.

Le problème B est également ramené par la formule (20) à un problème classique de la théorie de l'addition des variables aléatoires. S'il n'est pas résolu dans tous les cas, les résultats connus sont trop nombreux pour qu'on puisse les résumer ici. Rappelons seulement qu'il y a des lois indécomposables, des lois i. d., et des lois qui, sans être i. d., ont une des représentations de la forme cherchée pouvant constituer une infinité non dénombrable (exemple : $\log X$ uniformément réparti dans un intervalle fini). Pour les lois discontinues, le cas général est celui où elles sont indécomposables.

Enfin, toujours pour les variables aléatoires X pr. s. positives, le problème D est ramené au problème de la définition des lois i, d., dont la solution est bien connue.

3° Supposons maintenant X réel, $\neq 0$, et ayant des valeurs possibles des deux signes. On peut définir cette v. a. en définissant d'abord deux v. a. positives, X' et X'', et ensuite X par les formules

$$\Pr\{X=X'\}=\alpha_1, \qquad \Pr\{X=-X''\}=\alpha_2=1-\alpha_1 \qquad (0<\alpha_1<1). \tag{26}$$

Nous supposerons d'autre part $U > 0$; s'il s'agit du problème B, cela signifie que nous nous bornons à la recherche des solutions vérifiant cette condition. Alors V a le signe de X, et peut, comme X, être défini à l'aide de deux v. a. positives auxiliaires, que nous désignerons par V' et V'', telles que $V = V'$ ou $-V''$ suivant que $X = X'$ ou $-X''$. On devra donc avoir

$$X' \sim UV', \qquad X'' \sim UV'', \tag{26}$$

le signe $\sim$ représentant l'équivalence en loi. Comme il s'agit de v. a. > 0, ce problème se résout par les méthodes indiquées au 2°. Comme il y a deux conditions différentes à vérifier, le problème sera souvent impossible; bien entendu, si la loi de X est symétrique, ces deux conditions se réduisent à une, et l'on est exactement dans les mêmes conditions qu'au 2°.

En ce qui concerne le problème B, pour lequel la loi de U n'est pas donnée, si les lois de X' et X'' sont de natures analytiques différentes, il peut arriver qu'on puisse représenter séparément X' et X'' par des produits $U'V'$ et $U''V''$, mais sans qu'il soit possible de réaliser la condition $U' \sim U''$. Tel est le cas, par exemple, si $\log X'$ est une v. a. laplacienne, et si $\log X''$ est une v. a. bornée, ou à loi discontinue, donc sans composante laplacienne.

4° Étudions maintenant le problème A dans le cas des variables réelles les plus générales. Nous utilisons seulement la remarque faite au 1°, d'après laquelle on peut supposer que 0 n'est pas une valeur possible de X, U et V. Posons

$$\alpha = \alpha_1 - \alpha_2 = \Pr(X > 0) - \Pr(X < 0), \tag{27}$$

et désignons par β et γ les probabilités analogues relatives à U et V, de sorte que les probabilités respectives des signes $+$ et $-$ sont $\beta_1 = \frac{1+\beta}{2}$ et $\beta_2 = \frac{1-\beta}{2}$ pour U et $\gamma_1 = \frac{1+\gamma}{2}$ et $\gamma_2 = \frac{1-\gamma}{2}$ pour V. On a

$$\alpha = \alpha_1 - \alpha_2 = \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 - (\beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1) = (\beta_1 - \beta_2)(\gamma_1 - \gamma_2) = \beta\gamma. \tag{28}$$

Comme il faut que $|\gamma| \leqq 1$, une condition nécessaire, pour le problème A, est $|\alpha| \leqq |\beta|$, et, sauf si $\alpha = \beta = 0$ (cas où γ est quelconque dans $[-1, +1]$), γ est bien défini par la formule (27). Pour le problème B, $|\beta|$ est quelconque dans $[|\alpha|, 1]$.

Désignons maintenant par φ_1, φ_2, χ_1, χ_2, ψ_1, ψ_2 les fonctions caractéristiques de $\log X'$, $\log X''$, $\log U'$, $\log U''$, $\log V'$, $\log V''$ (V' et V'' étant à V ce que U' et U'' sont à U). On a

$$\left\{\begin{aligned} \varphi_1(t) &= \frac{\beta_1\gamma_1\chi_1(t)\psi_1(t) + \beta_2\gamma_2\chi_2(t)\psi_2(t)}{\beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2}, \\ \varphi_2(t) &= \frac{\beta_1\gamma_2\chi_1(t)\psi_2(t) + \beta_2\gamma_1\chi_2(t)\psi_1(t)}{\beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1}. \end{aligned}\right. \tag{29}$$

Ces deux formules résolvent le problème A. Les coefficients numériques venant d'être déduits de $\alpha = \beta\gamma$, et les données du problème A définissant $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\chi_1(t)$ et $\chi_2(t)$, ces formules définissent $\psi_1(t)$ et $\psi_2(t)$, et par suite, γ étant connu, la loi dont dépend V. Si la condition nécessaire $|\alpha| \leqq |\beta|$ déjà mentionnée est vérifiée, pour que le problème A soit résoluble, il faut et il suffit que les déterminations obtenues pour $\chi_1(t)$ et $\chi_2(t)$ soient des fonctions caractéristiques.

Il y a d'ailleurs aussi des cas d'indétermination. Si les lois données pour X et U sont symétriques, la relation $X = UV$ équivaut à $|X| \sim |UV|$, et, même si $|V|$ est bien défini par cette relation, elle ne nous apprend rien sur le signe de V; la probabilité conditionnelle de $V > 0$, dans l'hypothèse $|V| = v$, peut être une fonction mesurable $\geqq 0, \leqq 1$, à cela près quelconque, de $\Pr(|V| < v)$. D'ailleurs, d'après le 2° dont les résultats s'appliquent ici à $|V|$, il peut arriver que la loi dont dépend ce module ne soit pas déterminée. Il y a alors une double indétermination.

5° Étudions enfin le cas des v. a. complexes. Si R et θ sont le module et l'argument de X, θ est défini à un multiple près de 2π, et

$$\log X = \log R + i\theta = \rho + i\theta$$

est défini à un multiple près de $2\pi i$. Ses valeurs possibles peuvent alors être représentées par les points d'un cylindre Ω, et la loi de X peut être définie par la donnée de la probabilité $P(\omega)$ que $\log X$ appartienne à une aire $\omega \subset \Omega$, ou par une fonction de répartition $F(\xi, \eta)$, définie pour ξ réel et $-\pi \leqq \eta < \pi$, et égale à $P(\omega)$ calculé pour l'aire $\rho < \xi$, $-\pi \leqq \theta < \eta$. On sait qu'on peut aussi la définir par la suite des fonctions caractéristiques

$$\varphi_n(t) = \iint_\Omega e^{i(t\xi + n\eta)}\, P(d\omega); \tag{30}$$

ξ, η est un point de l'élément $d\omega$; n parcourt la suite des nombres entiers réels. Des conditions triviales, nécessaires mais non suffisantes, vérifiées par ces fonctions, sont : $\varphi_0(0) = 1$; $|\varphi_n(t)| \leqq 1$; continuité; caractère hermitien, c'est-à-dire que $\varphi_n(t)$ et $\varphi_{-n}(-t)$ sont imaginaires conjugués. Des formules connues permettent, ces fonctions étant données, de retrouver $F(\xi, \eta)$ et par suite $P(\omega)$, en passant par l'intermédiaire des fonctions

$$\omega_n(\xi) = \int_{-\pi-0}^{\pi-0} e^{in\eta}\, d_\eta F(\xi, \eta) \quad (^1). \tag{31}$$

(1) La formule qui permet de passer de

$$\varphi_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\xi}\, d\omega_n(\xi)$$

Si on les applique en partant d'une suite de fonctions données d'une manière quelconque, les conditions de possibilité, nécessaires et suffisantes, sont que ces formules soient applicables, et conduisent pour $P(\omega)$ à une fonction additive de ω, non négative, et telle que $P(\Omega)=1$ [condition qui équivaut à $\omega_0(0)=1$].

Si l'on désigne de même par $\chi_n(t)$ et $\psi_n(t)$ les fonctions caractéristiques liées à $\log U$ et $\log V$, la relation $X \sim UV$ équivaut à

$$\varphi_n(t)=\chi_n(t)\,\psi_n(t) \qquad (n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots), \tag{32}$$

formules qui résolvent en principe le problème A.

Pour que ce problème soit possible, il faut d'abord que $|\varphi_n(t)| \leqq |\chi_n(t)|$ (puisque les conditions triviales indiquées tout à l'heure pour les φ_n doivent être vérifiées par les ψ_n). Des valeurs des $\psi_n(t)$ étant alors obtenues, il faut et il suffit que ces valeurs vérifient les conditions nécessaires et suffisantes indiquées pour les $\varphi_n(t)$.

Il y a naturellement des cas d'indétermination, notamment les cas de symétrie, sur lesquels nous reviendrons au n° 7. Observons seulement ici qu'il n'y indétermination que si au moins un des $\psi_n(t)$ est indéterminé, ce qui implique $\varphi_n(t)=\chi_n(t)=0$, au moins sur une partie de l'axe des t et pour la valeur considérée de n.

6. Deuxième méthode pour le problème A : détermination de la loi de V par ses moments. — Le principe de cette méthode est bien simple : les lois de X et U étant données, les E_n et les E'_n sont connus, les E''_n s'en déduisent par la première

---

à $\omega_n(\xi)$ est bien connue; pour $n=0$, elle donne la fonction de répartition de $\rho=\log R$. Pour passer de $\omega_n(\xi)$ à $F(\xi,\eta)$, observons d'abord que si $F(\eta)$ est la fonction de répartition d'une v. a. θ définie mod 2π, c'est-à-dire si

$$F(\eta+2\pi)-F(\eta)=1,$$

si dans un intervalle semi-ouvert i de longueur 2π elle est la fonction de répartition de la détermination de θ appartenant à i, et si l'on pose

$$\omega_n=\int_i e^{in\eta}\,dF(\eta) \qquad (n \text{ entier} \neq 0),$$

on a, moyennant certaines conditions de continuité,

$$2\pi F(\eta)-\eta=\sum{}'\frac{i\omega_n}{n}(e^{-in\eta}-1)+c \qquad \left(\sum{}'=\sum_{-\infty}^{-1}+\sum_{1}^{\infty},\ c=\mathrm{C^{te}}\right),$$

et dans tous les cas

$$\int_0^u[2\pi F(\eta)-\eta]\,d\eta=\sum{}'\left(\frac{1-e^{-inu}}{n^2}-\frac{iu}{n}\right)\omega_n+cu,$$

formule qui, à une constante près, définit $F(\eta-0)$ et $F(\eta+0)$.

Ces formules se rattachent aux questions exposées dans [3], mais n'y ont pas été explicitement indiquées. En remplaçant ω_n par $\omega_n(\xi)$, elles donnent $F(\xi,\eta)$; il faut seulement remplacer aussi $\omega_0(0)=1$ par $\omega_0(\xi)$. Ainsi la première de ces formules s'écrit

$$2\pi F(\xi,\eta)-\omega_0(\xi)\eta=\sum{}'\frac{i\omega_n}{n}(e^{-in\eta}-1)+c.$$

des formules (6), et l'on sait que, dans des cas étendus, la loi de V est déterminée par ces moments. Mais il s'agit de discuter les conditions d'application de cette méthode.

1° Le cas des v. a. pr. s. nulles étant toujours écarté, la seule difficulté possible pour le calcul du moment majorant $\overline{\mathrm{E}}''_n$ se présente si $\overline{\mathrm{E}}_n$ ou $\overline{\mathrm{E}}'_n$ sont infinis. Si $\overline{\mathrm{E}}'_n$ est seul infini, le problème A n'admet pas de solution. Si $\overline{\mathrm{E}}_n$ est seul infini, la seconde formule (6) donne $\overline{\mathrm{E}}''_n = \infty$, et, si cela a lieu pour une valeur n_0 de n, il en est de même pour tout les $n > n_0$; dans ce cas la méthode des moments ne donne pas la solution de notre problème. Elle ne la donne évidemment pas non plus si, à partir d'une certaine valeur de n, $\overline{\mathrm{E}}_n$ et $\overline{\mathrm{E}}'_n$ sont tous les deux infinis; alors $\overline{\mathrm{E}}''_n$, et par suite aussi E''_n, sont indéterminés.

La méthode des moments n'est donc applicable que si les $\overline{\mathrm{E}}_n$ et les $\overline{\mathrm{E}}'_n$ sont tous finis, ce que nous supposerons maintenant. Les E_n et les E'_n sont alors finis et bien déterminés. Mais il y a aussi impossibilité ou indétermination si, pour n impair, $\mathrm{E}'_n = 0$; E''_n apparaît alors comme indéterminé si E_n s'annule en même temps que E'_n; dans le cas contraire le problème A n'a pas de solution.

Il peut d'ailleurs arriver que E'_n s'annule seulement pour certaines valeurs impaires de n. Si l'on peut trouver un entier impair p tel que tous les E'_{pq} $(q = 1, 2, \ldots)$ soient différents de zéro, on pourra calculer tous les E''_{pq}, c'est-à-dire tous les moments de V^p. Il peut alors arriver que la loi de V soit bien déterminée, bien que certains des E''_n se soient présentés sous une forme indéterminée.

Si tous les E'_{2p+1} sont nuls, il faut que les E_{2p+1} le soient aussi, et dans ce cas la méthode des moments peut au plus déterminer la loi de $|\mathrm{V}|$, sans donner aucun renseignement sur le signe de V. C'est ce qui a lieu notamment si les lois de X et U sont toutes les deux sont symétriques. Mais cette symétrie n'est pas nécessaire pour que tous les moments d'ordres impairs soient nuls. On peut en effet définir deux v. a. positives, X' et X'', ayant les mêmes moments, mais ayant pourtant deux lois distinctes. Une variable X ayant une chance sur deux d'être égale à X' et une chance sur deux d'être égale à $-\mathrm{X}''$ a tous ses moments d'ordres impairs nuls; mais sa loi n'est pas symétrique.

2° Plaçons-nous maintenant dans le cas où, non seulement les $\overline{\mathrm{E}}''_n$, mais aussi les E''_n, sont tous bien définis par les formules (6), On sait que les trois cas logiquement possibles sont effectivement possibles : il peut n'y avoir aucune loi admettant les moments E''_n; il peut y en avoir une et une seule; il peut enfin y en avoir plusieurs, ou même une infinité. Le premier cas apparaît comme le plus général : ainsi la condition nécessaire que les rapports $\dfrac{\overline{\mathrm{E}}''_{n+1}}{\overline{\mathrm{E}}''_n}$ $\Bigg($ou les rapports $\dfrac{\mathrm{E}''_{2p+2}}{\mathrm{E}''_{2p}}$, pour ne pas introduire les moments majorés$\Bigg)$ forment une suite non décroissante apparaît comme assez restrictive.

Notre but n'est pas ici de rappeler les travaux connus relatifs à la détermination d'une loi de probabilité par ces moments. Mais nous allons indiquer des cas où la seule donnée de la loi de X permet, sans rien savoir sur U, d'exclure le cas d'indétermination. Ils reposent sur la remarque que, l'hypothèse $\Pr(U=0)=1$ étant écartée si $\Pr(X=0)<1$, on a toujours pour les $\overline{E}'_n$ une borne inférieure de la forme ca^n $(c, a>0)$. On peut prendre pour a n'importe quel nombre tel que $\Pr(|U|\geq a)>0$, et prendre pour c la valeur correspondante de cette probabilité. On peut aussi observer que, les $\dfrac{\overline{E}'_{n+1}}{\overline{E}'_n}$ formant une suite non décroissante, on a toujours

$$\overline{E}'_n \geq \overline{E}'_p \left(\frac{\overline{E}'_{p+1}}{\overline{E}'_p}\right)^{n-p}. \tag{33}$$

La meilleure des bornes obtenues, pour les grandes valeurs de n, s'obtient en prenant a aussi grand que possible. Si $|U|$ a une borne supérieure qui puisse être atteinte avec une probabilité positive, mais non dépassée, c'est cette borne qu'on prendra pour a. Dans le cas contraire, que la borne supérieure de $|U|$ soit finie ou infinie, on peut prendre pour a n'importe quel nombre inférieur à cette borne, et c'est la formule (33) qui permet d'associer à des valeurs de a arbitrairement voisines de cette borne le plus grand coefficient c.

De la seconde formule (5), on déduit alors

$$E''_n \leq c' q^n \overline{E}_n \qquad \left(c'=\frac{1}{c},\ q=\frac{1}{a}\right), \tag{34}$$

formule qui donne pour $\overline{E}''_n$, et par suite pour E''_n, une majoration dans laquelle les coefficients numériques dépendent de la définition de U. Mais, sous la seule condition que X ne soit pas pr. s. $=0$, *sa forme* est indépendante de la loi de U; elle s'applique à V (et aussi à U) pour toutes les représentations de X par la formule $X \sim UV$.

3° Théorème 1. — *Si la fonction caractéristique de* X *est analytique et non constante, il en est de même de celle de* V (pour $t=0$, donc sur l'axe réel). Donc : *si le problème* A *admet une solution, la loi de* V *est bien définie par la donnée des* E''_n.

En effet, pour que la fonction caractéristique de X soit analytique, il faut et il suffit que la série

$$\sum_0^\infty \frac{\overline{E}_n}{n!} t^n,$$

qui représente $E\{e^{t|X|}\}$, soit convergente pour $|t|$ assez petit. D'après la formule (34), cette condition reste vérifiée si l'on remplace $\overline{E}_n$ par $\overline{E}''_n$. Le théorème énoncé en résulte.

4° La théorie des fonctions quasi analytiques conduit à une importante généralisation de ce théorème. Rappelons d'abord le théorème fondamental de A. Denjoy. Soit $\mathfrak{S}$ une suite de nombres positifs $a_n (n = 0, 1, 2, \ldots)$, et soit $C(\mathfrak{S})$ la classe des fonctions $f(t)$ de la variable réelle t, continues, indéfiniment dérivables, et telles que, sur tout l'axe réel, on ait

$$(35) \qquad |f^{(n)}(t)| \leqq a_n \qquad \left[n = 0, 1, 2, \ldots; f^{(0)}(t) = f(t); f^{(n+1)}(t) = \frac{d f^{(n)}(t)}{dt}\right].$$

On dit que c'est une *classe de fonctions quasi analytiques* si la différence de deux fonctions de cette classe ne peut pas s'annuler en un point en même temps que toutes ses dérivées sans être identiquement nulle. En d'autres termes, quel que soit t_0, $f(t)$ est bien déterminé sur tout l'axe réel si l'on connaît les $f^{(n)}(t_0)$.

THÉORÈME (de A. Denjoy). — *Si la série* $\sum \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}$ *est divergente,* $C(\mathfrak{S})$ *est une classe de fonctions quasi analytiques. Moyennant une condition de régularité imposée à la suite des* a_n, *cette condition suffisante est aussi nécessaire* ([2]).

Il est *a fortiori* suffisant que la série formée par les termes d'indices pairs soit divergente. Or, la fonction caractéristique $\varphi(t)$ de la v. a. X appartient à la classe $C(\mathfrak{S})$ obtenue en prenant pour $\mathfrak{S}$ la suite des $\overline{E}_n$. Comme $E_{2p} = \overline{E}_{2p}$, on voit que : si la série

$$(36) \qquad \sum \frac{1}{\sqrt[2p]{E_{2p}}}$$

est divergente, $\varphi(t)$ est bien défini par la suite des $\varphi^{(n)}(0) = i^n E_n$. Donc, dans ce cas, la loi de X est bien définie par ses moments. D'autre part, d'après la formule (34), la divergence de la série (36) entraîne la divergence de la série analogue formée avec les E''_{2p}, et la conclusion précédente s'étend à la v. a. V, et aussi à U. Donc :

THÉORÈME 2. — *Si la série* (36) *est divergente, la loi de* X *est bien définie par ses moments. Sauf si* $\Pr(X = 0) = 1$, *si de plus* X *admet des représentations par la formule* $X \sim UV$ (U et V étant indépendants), *chacune des lois possibles pour les facteurs* U *et* V *est aussi bien déterminée par ses moments.*

La première partie de cet énoncé a d'ailleurs été indiquée par T. Carleman (*Voir* par exemple [1], p. 81), mais sous une forme différente, en ce sens que les moments E_n sont définis par les formules (5), en partant de la fonction de

([2]) On ne change rien d'essentiel à ce théorème en remplaçant la définition de la classe $C(\mathfrak{S})$ par la suivante : c'est la classe des fonctions continues et indéfiniment dérivables pour lesquelles il existe deux constantes c et q (positives et finies) telles que

$$|f^{(n)}(t)| \leqq c q^n a_n.$$

répartition $F(x)$. Il est curieux que Carleman, ayant d'abord démontré le théorème de Denjoy, n'ait pas remarqué que le sien s'en déduisait bien simplement, et n'en ait donné qu'une démonstration indépendante de celle de Denjoy ([3]).

5° Le théorème 2 montre que la divergence de la série (36) est une condition suffisante pour que la conclusion de ce théorème soit applicable. Il est naturel de chercher une condition nécessaire et suffisante. Une condition nécessaire est évidemment que la loi de X soit elle-même bien déterminée par ses moments : parmi les représentations possibles de X par un produit UV figure en effet toujours la représentation triviale pour laquelle $U = X$, $V = 1$. Un problème qui se pose alors naturellement est le suivant : cette condition nécessaire n'est-elle pas aussi suffisante ? En d'autres termes :

Problème E. — *Si la loi de la v. a. X est déterminée par ses moments, et si X peut être mis sous la forme* UV (U et V étant indépendants), *peut-on affirmer que la loi de chaque facteur est déterminée par ses moments ?* ([4]).

Le problème précédent est lié aux suivants :

Problème F. — *Cela revient-il au même de dire que la v. a.* X *est déterminée par ses moments* E_n, *ou que* $|X|$ *est déterminé par les* $\overline{E}_n$, *ou enfin que* $|X|$ (ou, ce qui revient au même X^2) *est déterminé par* E_{2n} ?

La troisième propriété entraîne la seconde; mais la réciproque n'est pas évidente.

Problème G. — *Si les moments de* X'^2 *majorent ceux de* V^2, *et si* X'^2 *est déterminé par ses moments, peut-on affirmer que* V^2 *l'est aussi* ?

Supposons d'abord que les réponses à ces deux problèmes soient affirmatives, et montrons que, dans cette hypothèse, le problème E se résout aussi par l'affirmative. Les moments de V^2 sont en effet, d'après la formule (34), majorés par ceux de $X'^2 = q'^2 X^2$ où $q' = \mathrm{Max}(q, c'q)$. Si X est déterminé par ses moments, il en est de même de X^2, donc de X'^2, donc de V^2, donc enfin de V,

C. Q. F. D.

Nous n'avons d'ailleurs utilisé qu'en partie l'hypothèse que les réponses aux problèmes F et G sont affirmatives. Si une des hypothèses utilisées est fausse,

---

([3]) Il faut d'ailleurs se rappeler que le livre de Carleman est de 1926, et développe des leçons professées en 1923. Le fait qu'une fonction à variation bornée soit bien définie, à une constante près, par sa transformée de Fourier-Stieltjes, était connu, mais commençait à peine à être considéré comme un des théorèmes fondamentaux du calcul des probabilités.

([4]) C'est par suite d'une erreur que, dans une Note présentée à l'Académie le 7 avril 1959, j'ai répondu à cette question par l'affirmative. Je voulais simplement énoncer le théorème 2 ci-dessus, et ai omis de mentionner qu'il supposait la divergence de la série (36) [la présente Note, et la fin du n° 6, 5°, ont été rajoutées à la correction des épreuves].

on ne peut rien dire pour le problème E. Il faut en effet remarquer qu'en ce qui concerne les E'_n nous n'avons utilisé que l'inégalité $E'_{2p} > ca^{2p} (a, c > 0)$. Une utilisation plus complète des propriétés des E'_n peut conduire à des conclusions que cette inégalité ne suffirait pas à justifier, et, peut-être, à une réponse affirmative au problème E.

Il y a ainsi plusieurs problèmes importants qui semblent n'être pas résolus actuellement. Les théorèmes de Denjoy et de Carleman sur les fonctions quasi analytiques ont d'ailleurs été complétés par S. Mandelbrojt qui a notamment donné une condition nécessaire pour la quasi-analyticité de $C(\mathfrak{S})$: c'est la divergence de la série $\sum \frac{a_n}{a_{n+1}}$. Mais toutes les difficultés ne sont pas pour cela résolues. Le fait que les fonctions caractéristiques qui appartiennent à $C(\mathfrak{S})$ ne forment qu'une partie $C^\star(\mathfrak{S})$ de cette classe amène notamment à douter que la théorie des fonctions quasi analytiques conduise aisément à la solution des problèmes posés. D'ailleurs, dans la mesure où elle suggère une réponse, la forme de la condition de Denjoy peut faire penser que la réponse au problème G est affirmative; or, d'après la forme de la condition de Mandelbrojt, il semble qu'elle ne puisse l'être que grâce à la distinction entre $C(\mathfrak{S})$ et $C^\star(\mathfrak{S})$.

7. Recherche des cas de symétrie (problème C). — 1° Nous avons déjà utilisé le fait que, si un au moins des facteurs U et V dépend d'une loi symétrique, il en est de même du produit X. Dans le cas réel, c'est une conséquence immédiate de la formule (13). Si la loi de U est symétrique, $G_1(u)$, et par suite $G(x)$, sont identiquement nuls. Donc la loi de X est aussi symétrique. On peut le voir aussi en observant que la symétrie de U peut s'exprimer par $U \sim -U$, ce qui entraîne

$$X = UV \sim (-U)V = -X,$$

de sorte que la loi de X est aussi symétrique.

Dans le cas de variables aléatoires complexes, $U \sim e^{i\theta} U$ entraîne de même $X \sim e^{i\theta} X$. Si cela est vrai pour tout θ réel, on voit ainsi que, si la loi d'un des facteurs U et V a la symétrie de révolution autour de l'origine, le produit X a la même symétrie. S'il n'en est ainsi que pour les valeurs de θ multiples de $\frac{2\pi}{n}$ (n étant un entier donné), on obtient le même énoncé pour la symétrie étoilée, qui, pour $n = 2$, se réduit à la symétrie simple par rapport à l'origine.

2° La réciproque de ces énoncés n'est pas vraie. Dans le cas complexe, cela résulte d'un théorème sur l'addition des arguments que nous avons indiqué autrefois dans [3]. Si les arguments Θ, Θ' et Θ'' de X, U et V dépendent de lois absolument continues définies par les densités de probabilité

$$f(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n e^{nix}, \qquad f_1(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} a'_n e^{nix}, \qquad f_2(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} a''_n e^{nix},$$

avec nécessairement $a_0 = a'_0 = a''_0 = 1$, la formule d'addition

$$\Theta = \Theta' + \Theta'' \qquad (\mathrm{mod}\, 2\pi)$$

s'exprime par la relation $a_n = a'_n a''_n$. Il peut naturellement arriver qu'on ait $a'_n = 0$ pour certains n non nuls et $a''_n = 0$ pour les autres. Alors Θ sera uniformément réparti dans $(0, 2\pi)$ sans que ce soit le cas ni pour Θ', ni pour Θ''. Ce sera le cas par exemple si

$$f_1(\theta) = \frac{1 + \cos\theta}{2\pi}, \qquad f_2(\theta) = \frac{1 + \cos 3\theta}{2\pi}. \tag{37}$$

Si alors les modules de U et V sont indépendants de leurs arguments, X aura la symétrie de révolution autour de O sans qu'aucun des facteurs ait cette symétrie. Dans l'exemple précédent, et d'une manière générale s'il y a au moins un a'_p et un a''_p d'indices impairs qui ne soient pas nuls, on obtient le même résultat sans qu'aucun des facteurs ait la symétrie par rapport à l'origine. En prenant pour $f_1(\theta)$ et $f_2(\theta)$ des séries effectivement infinies, on peut même s'arranger pour que X ait la symétrie de révolution sans qu'aucun des facteurs ait de symétrie étoilée.

3° Même dans le cas réel, la réciproque du théorème énoncé au 1° n'est pas vraie non plus. C'est L. Schwartz qui a le premier attiré mon attention sur ce point. La démonstration est d'ailleurs très simple grâce à des remarques faites plus haut. Nous avons vu que, U, V_1 et V_2 étant des variables aléatoires positives, on peut avoir $UV_1 \sim UV_2$ sans $V_1 \sim V_2$. Prenons alors pour V une variable égale à $-V_1$ ou à V_2 suivant le résultat d'un tirage au sort à pile ou face; $X = UV$ dépend d'une loi symétrique, mais ni U, ni V, ne dépendent d'une telle loi.

4° Il peut tout de même être utile d'indiquer, dans le cas réel, des classes de lois assez étendues pour que leur fermeture soit l'ensemble de toutes les lois possibles, et pour lesquelles la loi de X ne peut être symétrique que si au moins un des facteurs U et V dépend d'une loi symétrique.

Exemple. — Utilisant toujours les notations des nos 2 et 3, *supposons que les* $|x_h|$, *rangés par ordre de grandeur croissante* (ou au contraire décroissante) *forment un ensemble bien ordonné*. Il en est alors de même des $|u_k|$ et des $|v_l|$ $\left[\text{puisque } \bigcup(|u_k|) \subset \bigcup\left(\left|\frac{x_h}{v_1}\right|\right)\right]$, et évidemment des ξ_h, η_k et ζ_l. L'indice 1 correspondra toujours au premier élément (c'est-à-dire le plus petit, ou au contraire le plus grand) des ensembles considérés.

Nous allons montrer que : *dans les conditions considérées, si la fonction* $G(x)$ *est continue, une au moins des fonctions* $G_1(u)$ *et* $G_2(v)$ *l'est aussi. Dans le cas des lois totalement discontinues*, cela revient à dire que : *toujours sous la même condition, si* X *dépend d'une loi symétrique, il en est de même pour au moins un des facteurs* U *et* V.

Supposons en effet que les fonctions $G_1(u)$ et $G_2(v)$ soient toutes les deux discontinues, c'est-à-dire que η_1 et ζ_1 existent. Comme ce sont tous les deux les plus petits (ou tous les deux les plus grands) des nombres η_k et ζ_l, le nombre $\xi_1 = \eta_1 l_1$ n'admet pas d'autre représentation de la forme $\eta_k \zeta_l$. Pour $h = 1$, la formule (11) se réduit donc à $\alpha_1 = \beta_1 \gamma_1 \neq 0$, et la fonction $G(x)$ n'est pas continue, C. Q. F. D.

On remarque que, notre énoncé partant d'une hypothèse relative à la variable aléatoire X, si cette variable a plusieurs représentations de la forme UV, la conclusion est valable pour toutes ces représentations.

Généralisation. — Le raisonnement précédent repose essentiellement sur l'existence d'un nombre x ayant une représentation et une seule de la forme $\eta_k \zeta_l$. Il est clair que cette condition peut être réalisée dans des cas plus généraux. Si par exemple les suites (finies ou infinies) des $|u_k|$ et des $|v_l|$ sont choisies au hasard d'après des lois continues, il est presque sûr que les $|u_k v_l|$ sont tous différents les uns des autres; donc les $\eta_k \zeta_l$, qui sont tous des $|u_k v_l|$ sont tous différents les uns des autres, et sont tous effectivement des ξ_h, c'est-à-dire des points de discontinuité de $G(x)$.

Il est d'ailleurs aussi presque sûr que les produits $\eta_k \eta_{k'} \zeta_l \zeta_{l'}$ sont tous différents. S'il en est ainsi, un produit tel que $\xi_h \xi_{i'} = \eta_k \zeta_l \times \eta_{k'} \zeta_{l'}$ est égal à $\xi_{h'} \xi_i = \eta_k \zeta_{l'} \times \eta_{k'} \zeta_l$, et n'est égal à aucun autre produit analogue $\xi_j \xi_{j'}$. La donnée des $\xi_h = \eta_k \zeta_l$ permet donc de disposer ces nombres dans un tableau à double entrée où k définira la ligne et l la colonne, ou inversement, et les η_k d'une part, les ζ_l d'autre part, sont bien définis en partant des ξ_h, à cela près qu'on peut les intervertir, ou les multiplier par des facteurs c et $\frac{1}{c}$ indépendants des indices k et l.

Bornons-nous alors au cas des lois totalement discontinues et considérons le produit $X = UV$ obtenu dans ces conditions. Il n'a pas d'autre décomposition en facteurs que $X = cU \times \frac{V}{c}$, et le résultat obtenu en considérant $X = UV$ s'applique à toutes ses décompositions possibles. En nous bornant au cas des lois totalement discontinues, nous obtenons ainsi une classe étendue de lois qui ne peuvent être symétriques que si un au moins des facteurs U et V dépend d'une loi symétrique.

8. Les lois indéfiniment divisibles au point de vue de la multiplication (abréviation : loi i. d. m.; il s'agit du problème D du n° 4). — 1° Le cas d'une variable X presque sûrement positive est trivial. Pour qu'elle ait le caractère cherché, il faut et il suffit que $\log X$ soit indéfiniment divisible au sens habituel (i. d.).

Comme une variable η ayant les valeurs 1 et 0 avec des probabilités $\alpha > 0$ et $1 - \alpha$ est évidemment i. d. m., le produit ηX est i. d. m. en même temps que X. Cette remarque s'étend au cas où X est, soit une v. a. réelle avec valeurs possibles des deux signes, soit une v. a. complexe. Nous pouvons donc toujours, pour la suite, supposer $\Pr(X = 0) = 0$.

2° *Cas d'une v. a. réelle et non nulle.* — Mettons alors $\log X$ sous la forme $\xi + i\eta$, $\eta = 0$ ou $\pi \pmod{2\pi}$. Il faut évidemment que $\xi + i\eta$ dépende d'une loi i. d., de sorte qu'on peut définir un processus additif et homogène, $\xi(t) + i\eta(t)$, tel que $\xi + i\eta$ soit l'accroissement de $\xi(t) + i\eta(t)$ pendant un intervalle de temps de longueur égale à 1.

Nous ne cherchons pour le moment que les décompositions de X en facteurs réels, de sorte que $\eta(t)$ ne peut varier que par sauts, que ces sauts sont tous égaux à $\pi \pmod{2\pi}$, et que leur nombre, en un temps fini, est une v. a. de Poisson à valeur probable θ finie. Les probabilités qu'il soit pair ou impair sont respectivement

$$e^{-\theta} \operatorname{ch} \theta = \frac{1 + e^{-2\theta}}{2}, \qquad e^{-\theta} \operatorname{sh} \theta = \frac{1 - e^{-2\theta}}{2},$$

de sorte que la loi dont dépend η est assujettie à la seule condition, nécessaire et suffisante

$$\Pr\{\eta = 0 \pmod{2\pi}\} > \frac{1}{2}. \tag{38}$$

Bien entendu, le résultat ne serait pas le même si, comme nous le ferons au 3°, nous admettions pour X les facteurs complexes; alors la valeur π serait la somme d'un nombre suffisamment grand de termes certains arbitrairement petits, et qu'il n'y aurait pas lieu d'exclure, et il faudrait seulement exiger que les deux valeurs possibles pour $\eta \pmod{2\pi}$ n'aient pas la même probabilité (*cf.* P. Lévy, [3], p. 39).

En ce qui concerne ξ, c'est naturellement une v. a. dépendant d'une loi i. d. quelconque. Mais il reste à préciser la corrélation qui peut exister entre ξ et η. A cet effet nous distinguerons dans $\xi(t)$ la somme $\xi_1(t)$ des sauts coïncidant dans le temps avec ceux de $\eta(t)$, et la différence $\xi_2(t) = \xi(t) - \xi_1(t)$, dont les sauts sont indépendants de ceux de $\xi_1(t)$ et de $\eta(t)$. Ainsi η est une somme de deux termes η_1 et η_2; le second dépend d'une loi i. d. absolument quelconque et indépendante de ξ et η_1. Quant à la loi de η_1, elle s'obtient en associant à chaque saut de ξ un saut de $\xi(t)$ dépendant d'une loi absolument quelconque [la valeur 0 n'étant pas exclue; $\xi(t) + i\eta(t)$ peut avoir des sauts purement imaginaires aussi bien que des sauts réels].

Nous reviendrons, après l'étude du cas où la variable X est complexe, sur la traduction analytique de ces résultats.

3° *Cas d'une v. a. complexe.* — La recherche des cas où une telle variable X dépend d'une loi i. d. m. se ramène à l'étude de ceux où $\log X = \xi + i\eta$, où η est toujours défini $\operatorname{mod} 2\pi$, mais peut prendre n'importe quelle valeur dans $[0, 2\pi]$, dépend d'une loi i. d. Sans la restriction que η ne soit défini que $\operatorname{mod} 2\pi$, on sait (*cf.* P. Lévy, [3], n° 62) que cette loi serait bien définie par la fonction

$$(39)\qquad \psi(z, z') = \log \mathrm{E}\{e^{i(z\xi+z'\eta)}\} = i(\mu z + \mu' z') - \mathrm{Q}_2(z, z') + \iint \left[e^{i(zu+z'v)} - 1 - \frac{i(zu+z'v)}{1+u^2+v^2}\right] \mathrm{N}(d\mathrm{S}),$$

formule où μ et μ' sont des nombres réels quelconques; Q_2 est une forme quadratique non négative; $d\mathrm{S}$ est l'élément d'aire du plan des uv, et $\mathrm{N}(\mathrm{S})$ est une fonction d'aire, additive, bornée dans toute aire où u^2+v^2 est borné inférieurement, et vérifiant la condition

$$\iint \frac{u^2+v^2}{1+u^2+v^2} \mathrm{N}(d\mathrm{S}) < \infty$$

qui assure la convergence de l'intégrale double (l'intégration étant étendue à tout le plan, sauf l'origine).

Dans l'expression (39) de $\psi(z, z')$, le premier terme représente une constante non aléatoire; le second un système laplacien de variables aléatoires, et l'intégrale la somme compensée des sauts du processus additif associé à $\xi + i\eta$ (comme au 2° ci-dessus). Dans les cas où le terme compensateur $\frac{i(zu+z'v)}{1+u^2+v^2}$ peut être supprimé sans que l'intégrale cesse d'être convergente, l'intégrale est simplement la somme des sauts; on se trouve supprimer un terme de la forme $i(\mu_1 z + \mu'_1 z)$, ce qu'on compensera en changeant en conséquence les valeurs de μ et μ'.

D'autre part, le fait que η soit défini seulement $\bmod 2\pi$ entraîne les conséquences suivantes (*cf.* P. Lévy, [3]) : il suffit de connaître $\psi(z, n)$, la variable continue z' étant remplacée par l'entier n, réel, à cela près quelconque; z reste une variable réelle quelconque. En outre, pour définir $\psi(z, n)$, on n'intègre par rapport à v que dans une période, par exemple $(-\pi, +\pi]$ ou $[0, 2\pi)$; en d'autres termes on se limite à une bande, $(-\pi < v \leqq \pi)$ par exemple, du plan des uv.

4° Si nous revenons maintenant au *cas où* X *est réel*, de sorte que 0 et π sont $(\bmod 2\pi)$ les seules valeurs possibles de η, l'intégrale double de la formule (39) se réduit à deux intégrales simples étendues l'une à l'axe des u (dont l'origine doit être exclue), l'autre à la droite $v = \pi$. Nous avons d'ailleurs vu au 2° que $\eta(t)$ ne varie que par sauts, le nombre probable de ces sauts étant fini. Il en résulte que la formule (39) se réduit ici à

$$(40)\qquad \psi(z, n) = \mu i z - \sigma^2 \frac{z^2}{2} + \left[\int_{-\infty}^{-0} + \int_{0}^{\infty}\right]\left(e^{izu} - 1 - \frac{izu}{1+u^2}\right) d\mathrm{N}_0(u) + \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{izu+ni\pi} - 1)\, d\mathrm{N}_1(u),$$

et qu'il suffit naturellement de connaître cette fonction pour $n = 0$ et pour $n = 1$ (elle ne dépend que de la parité de n). Dans cette formule, μ est un nombre réel quelconque; σ^2 (carré de l'écart type de la partie laplacienne de ξ) est $\geqq 0$. La fonction $N_1(u)$ est une fonction non décroissante bornée; sa variation totale, de $-\infty$ à $+\infty$, est le nombre probable des sauts de $\eta(t)$ quand t varie de 0 à 1, donc $\eta(t)$ de 0 à η. Quant à la fonction $N_0(u)$, elle est non décroissante de $-\infty$ à 0 et de 0 à $+\infty$, la discontinuité possible à l'origine ne jouant aucun rôle; on sait enfin qu'elle doit vérifier la condition

$$\left(\int_{-\infty}^{-0}+\int_{+0}^{\infty}\right)\frac{u^2}{1+u^2}\,d\,N_0(u)<\infty$$

qui, compte tenu de la condition précédente, est nécessaire et suffisante pour que l'intégrale en $d\,N_0(u)$ qui figure dans la formule (40) soit convergente.

On peut d'autre part définir autrement la loi la plus générale dont dépend $\xi+i\eta$. Il n'y a qu'à se donner : 1° le nombre probable θ' des sauts purement imaginaires de $\xi(t)+i\eta(t)$; leur somme est alors le produit de πi par un facteur ayant (mod 2) les valeurs 0 et 1 avec les probabilités respectives $e^{-\theta'}\operatorname{ch}\theta'$ et $e^{-\theta'}\operatorname{sh}\theta'$; 2° la fonction $N_1^*(u)$ définissant la la loi des sauts de $\xi(t)$ associés à un saut de $\eta(t)$, ou, ce qui revient au même, la fonction

$$\psi_1(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{izu}-1)\,d\,N_1^*(u). \tag{41}$$

On remarque que la fonction $N_1^*(u)$ diffère de $N_1(u)$ parce qu'elle ne tient pas compte des sauts purement imaginaires de $\xi(t)+i\eta(t)$. Il en résulte, si l'on suppose ces deux fonctions nulles pour $u=-\infty$, que $N_1(u)-N_1^*(u)$ est $=0$ pour $u<0$ et $=\theta'$ pour $u>0$. 3° On se donne enfin μ, σ^2 et la fonction $N_0(u)$, ou, ce qui revient au même, la somme $\psi_0(z)$ des termes de $\psi(z, n)$ déterminés par ces données.

On remarque que

$$\psi(z,0)=\psi_0(z)+\psi_1(z), \tag{42}$$

et que cette somme définit parfaitement la loi de ξ. L'expression de $\psi(z,1)-\psi_0(z)$ est moins simple, et dépend, non seulement de $\psi_1(z)$, mais de θ'. Rappelons qu'on déduit aisément $N_1^*(u)$ de $\psi_1(z)$ en appliquant la formule de M. Loève,

$$\int_0^1[\psi_1(z+h)+\psi_1(z-h)-2\psi_1(h)]\,dh=2\frac{\sin h}{h}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{izu}\,d\,N_1^*(u), \tag{43}$$

puis la formule d'inversion de l'intégrale de Fourier-Stieltjes. On a alors

$$\psi(z,1)=\psi_0(z)-\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{izu}+1)\,d\,N_1^*(u)-2\theta', \tag{44}$$

le dernier terme provenant de ce que nous avons écrit $N_1^*(u)$ au lieu de $N_1(u)$ qui figure dans l'expression (40) de $\psi(z,n)$, et que la différence $N_1(u)-N_1^*(u)$ a à l'origine un saut égal à θ'.

Si inversement on se donne $\psi(z, n)$, on obtient $N_1(u)$ par la formule d'inversion de l'intégrale

$$\psi(z, 0) - \psi(z, 1) = 2\int_{-\infty}^{+\infty} e^{izu}\, d\mathrm{N}_1(u),$$

on en déduit $\mathrm{N}_1^*(u)$ et θ', et par suite $\psi_1(z)$; la formule (42) donne ensuite $\psi_0(z)$, d'où l'on déduit σ^2 $\left[\text{puisque, pour } z \text{ infini, } \psi_0(z) \sim -\frac{\sigma^2 z^2}{2}\right]$, puis $\mathrm{N}_0(u)$ par la méthode de Loève, et enfin μ. Si ces calculs sont possibles, et donnent bien des fonctions $\mathrm{N}_0(u)$ et $\mathrm{N}_1(u)$ vérifiant les conditions indiquées plus haut, et une valeur $\geqq 0$ pour σ^2, les fonctions $\psi(z, 0)$ et $\psi(z, 1)$ sont acceptables. Mais naturellement, les conditions de possibilité apparaissent mieux si l'on se donne μ, σ^2, $\mathrm{N}_0(u)$ et $\mathrm{N}_1(u)$, et ces données montrent aussi mieux les propriétés de la fonction $\xi(t) + i\eta(t)$ associée à la v. a. $\xi + i\eta$. Par contre, c'est en partant de $\psi(z, 0)$ et $\psi(z, 1)$ qu'on obtient le plus simplement la fonction de répartition de $\xi + in$; on en déduit ensuite celle de X.

9. Le dernier Mémoire d'Aurel Wintner [4]. — Comme nous l'avons dit, ce Mémoire à pour objet l'étude du problème suivant : U *étant une v. a. laplacienne réduite, et* V *une v. a.* $\geqq 0$ *indépendante de* U, *dans quels cas la loi du produit* $\mathrm{X} = \mathrm{UV}$ *est-elle indéfiniment divisible*? Ce n'est d'ailleurs pas une restriction de supposer $\mathrm{V} \geqq 0$; en tout cas, la loi de U étant symétrique, le signe de V n'intervient pas.

Wintner ne parle d'ailleurs pas de *v. a.*, mais introduit simplement une fonction qui n'est autre que la fonction de répartition de X, et en déduit sa transformée de Fourier-Stieltjes, c'est-à-dire la fonction caractéristique de X, qu'il représente par la formule

$$\text{(W.7)} \qquad \mathrm{F}(t) = \int_0^{\infty} e^{-xt^2}\, d\mu(x) \quad ([5]),$$

où $\mu(x)$ est la fonction de répartition de $\frac{\mathrm{V}^2}{2}$. Cela revient à dire que $g(t) = \mathrm{F}(\sqrt{t})$ est, dans $(0, \infty)$, une fonction absolument monotone au sens de S. Bernstein.

D'autre part, compte tenu de ce que la loi de X est symétrique, la condition que ce soit une loi i. d. peut se mettre sous la forme

$$\text{(W.14)} \qquad \log \mathrm{F}(t) = -\int_{-0}^{\infty} \frac{\sin^2 tx}{x^2}\, d\mu^*(x) \qquad (-\infty < t < +\infty),$$

où $\mu^*(x)$ est non décroissant et borné dans $[0, \infty)$. Il s'agit donc de savoir quand $\mathrm{F}(t)$ est représentable à la fois par la formule (W.7) et par la formule (W.14).

A cet effet, Wintner utilise un théorème de I. J. Schönberg, d'après lequel, pour que $g^r(t)$ soit absolument monotone dans $(0, \infty)$ pour tout $r > 0$, il faut

---

([5]) (W. 7) désigne la formule (7) du Mémoire de Wintner. Nous conservons en outre les notations de cet auteur : les lettres F, g, notamment, n'ont pas la même signification que dans les n[os] 1 à 7 du présent travail.

et il suffit que $g(t)$ soit de la forme

$$g(t) = e^{-h(t)}, \tag{W.12}$$

$h(t)$ étant, dans $(0, \infty)$, une fonction continue, positive et à dérivée absolument monotone. Si cette condition est réalisée, si $F(t) = g(t^2)$, et sous réserve d'une condition de continuité à l'origine sur laquelle nous reviendrons, il résulte du théorème de S. Bernstein que $F^r(t)$ est de la forme (W.7). C'est donc une fonction caractéristique, et, puisqu'il en est ainsi pour tout $r > 0$, c'est celle d'une loi i. d. La fonction $F(t)$ vérifie donc les deux conditions du problème de Wintner.

Cet auteur a ainsi défini, par leurs fonctions caractéristiques, une importante classe de variables aléatoires X solutions de son problème. C'est un résultat très intéressant. On sait combien sont souvent décevants les problèmes posés en cherchant à réaliser en même temps deux circonstances *a priori* sans rapport apparent entre elles. Il faut parfois un peu de génie pour découvrir ceux de ces rapprochements qui sont féconds. Or il n'y avait *a priori* aucun rapport entre les deux conditions considérées par Wintner, et son problème semblait artificiel. Le résultat obtenu prouve au contraire son intérêt, et mérite d'être admiré.

2° Ceci dit, Wintner a cru démontrer que la solution, évidemment très générale, qu'il a obtenue, est la plus générale. Malheureusement il y a une lacune dans sa démonstration. Il part de la remarque que la forme (W.14) est invariante si l'on remplace $F(t)$ par $F^r(t)$ $(r > 0)$; c'est simplement l'expression analytique de la propriété par laquelle on définit les lois i. d. (c'est du moins une des définitions possibles). Il en déduit qu'on peut appliquer le théorème de Schönberg, sans s'apercevoir qu'il faudrait démontrer que $F^r(t)$ est aussi de la forme (W.7).

Or, si l'on considère la condition (W.7) seule, il est bien évident qu'elle peut être vérifiée par $F(t)$ sans l'être par $F^r(t)$. Cela revient à dire que la fonction $F(t)$ de la forme (W.7) n'est pas nécessairement la fonction caractéristique d'une loi i. d.; l'exemple de la fonction $\frac{1+e^{-t^2}}{2}$ le prouve bien.

Cette remarque ne prouve bien entendu pas que l'énoncé de Wintner soit faux. Il est possible que, si $F(t)$ vérifie non seulement la condition (W.7), mais aussi la condition (W.14), la première, et naturellement aussi la seconde, soit aussi vérifiée pour $F^r(t)$ pour tout $r > 0$. Mais il faudrait le démontrer, ou bien montrer par un exemple que c'est faux. C'est un problème qui reste ouvert.

3° Il y a aussi dans Wintner une erreur, celle-là facile à corriger, au sujet des conditions de continuité à l'origine. Il introduit une fonction $g(t)$, qui s'identifiera ensuite avec la dérivée $h'(t)$, et qui est de la forme

$$g(t) = \int_0^\infty e^{-tx}\, d\lambda(x) \qquad (t \geqq 0), \tag{W.8}$$

$\lambda(x)$ étant non décroissant et borné dans $(0, \infty)$. On a d'ailleurs

$$g(0) = h'(0) = \int_0^\infty d\lambda(x),$$

et, comme il suppose explicitement $h(t)$ continu dans $[0, \infty)$, cela confirme bien que $\lambda(x)$ est borné.

On ne s'explique pas alors qu'il introduise comme une condition plus restrictive la condition

$$\text{(W.9)} \qquad \int_1^\infty \frac{d\lambda(x)}{x} < \infty,$$

où le premier membre est majoré par la variation totale de $\lambda(x)$.

C'est pourtant bien cette condition qui est essentielle pour la suite. L'erreur a consisté à supposer $g(t)$ continu à l'origine. Le problème de Wintner n'exclut pas l'hypothèse $g(0) = \lambda(\infty) = \infty$. La preuve en est donnée par l'exemple, que cet auteur indique plus loin, des lois symétriques stables pour lesquelles

$$F(\sqrt{t}) = e^{-h(t)} = e^{-t^\alpha} \qquad (t \geqq 0,\ 0 < \alpha \leqq 1).$$

On a naturellement $h(0) = 0$; mais $h'(0)$ est infini si $\alpha < 1$.

4° Le n° 7 du Mémoire de Wintner est consacré à une application de son théorème fondamental. Il faut naturellement faire sur cette application les mêmes réserves que pour ce théorème. En outre l'auteur ne résout pas réellement son problème, mais le ramène à un autre problème; bien entendu l'équivalence des deux problèmes est tout de même un résultat intéressant.

Les mêmes remarques ne s'appliquent pas au n° **8** qui est au contraire une vérification dans le cas des lois stables, vérification qui est peut-être une présomption en faveur de l'exactitude du théorème fondamental. Signalons seulement une erreur, qui n'est sans doute qu'une faute d'impression. Dans la formule (W.36), et dans la formule non numérotée qui la précède, l'exposant de x doit être lu $-\left(1 + \frac{p}{2}\right)$.

5° Revenant aux v. a., posons $X = UV$, $Y = XV'$, U étant indépendant de V et X de V'. Ces hypothèses n'impliquent pas l'indépendance de V et V'. Mais une corrélation entre ces v. a. est sans influence sur la loi de Y, de sorte que, pour l'étude de cette loi, on ne restreint rien en supposant V' indépendant de U et V.

Si alors U est une variable laplacienne réduite, et si la v. a. Y dépend d'une loi i. d., il résulte de $Y = U(VV')$ qu'elle est solution du problème de Wintner. Si l'on se pose un problème analogue en remplaçant seulement la loi de Laplace par celle dont dépend X, on voit que : *une condition nécessaire pour que* Y *soit une solution de ce problème est que ce soit une solution du problème de Wintner.*

Donc : *toute condition nécessaire pour le problème de Wintner est une condition nécessaire pour le problème plus général que nous venons d'énoncer* ([6]).

Ces remarques suggèrent un problème plus général encore : on prendrait pour U, au lieu d'une v. a. laplacienne, une v. a. dépendant d'une loi i. d., symétrique, absolument quelconque. Nous avions pensé que le cas de la loi définie par

$$\log F(t) = \cos t - 1,$$

qui est la plus simple des lois discontinues présentant le caractère indiqué, serait intéressant à étudier. Mais même ce cas simple est difficile. La méthode de Wintner ne peut s'étendre qu'aux lois stables symétriques. Cette extension est indiquée dans son n° 9. Nous n'avons pas trouvé de méthode simple pouvant s'appliquer à d'autres cas, et l'on ne voit pas de raison de s'attendre à des résultats simples. Si l'on admet que l'intérêt d'un problème dépend un peu du résultat obtenu, on ne peut pas affirmer *a priori* que l'étude des cas non traités par Wintner mérite d'être entreprise. Par contre, répétons-le, il y aurait intérêt à savoir si la condition suffisante obtenue par Wintner est aussi nécessaire ; c'est un problème qui reste ouvert.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] T. Carleman, *Les fonctions quasi analytiques*, Paris, Gauthier-Villars, 1926, 116 pages.

[2] Paul Lévy, *Théorie de l'addition des variables aléatoires*, Paris, Gauthier-Villars, 1re éd., 1937, XVII + 328 pages, 2e éd., 1954, XVII + 385 pages.

[3] Paul Lévy, *L'addition des variables aléatoires définies sur une circonférence* (*Bull. Soc. Math. Fr.*, t. **67**, 1939, p. 1-41).

[4] Aurel Wintner, *Infinitely divisible symmetric laws and normal stratifications* (*Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris*, t. **6**, 1957, p. 327-336).

([6]) Le n° 7 de Wintner peut être rattaché à cette remarque générale.