P. MALLIAVIN
SZOLEM MANDELBROJT

Sur l'équivalence de deux problèmes de la théorie constructive des fonctions

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 75, nº 1 (1958), p. 49-56
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1958_3_75_1_49_0>

SUR

L'ÉQUIVALENCE DE DEUX PROBLÈMES

DE LA

THÉORIE CONSTRUCTIVE DES FONCTIONS

PAR MM. P. MALLIAVIN ET S. MANDELBROJT.

1. On se propose d'étudier l'équivalence du problème d'approximation polynomiale pondérée et du problème de Watson généralisé suivants :

Problème B. — E désignera une partie fermée, composée de segments de l'axe réel R. $C_0(E)$ notera l'espace des fonctions continues définies sur E nulles à l'infini, $p(x)$ une fonction continue sur E (ou sur un ensemble $\supset E$) paire, telle que $x^n p(x) \in C_0(E)$ $(n \geqq 0)$, on dira que $p \in B_E$ si $\{x^n p(x)\}$ est « totale » dans $C_0(E)$ c'est-à-dire si le sous-espace engendré par cette suite est dense dans $C_0(E)$.

Problème W. — $M(r)$ désignant une fonction définie pour $r \geqq 0$, s un entier $\geqq 0$, on notera par $W(E, M, s)$ la classe des fonctions $F(z)$ holomorphe et uniforme dans le complémentaire dans le plan complexe de l'ensemble E, non identiquement nulle et vérifiant

$$|F(z)| < |y|^{-s} M(|z|) \qquad (z = x + iy). \tag{1.0.1}$$

Lorsque $s = 0$, on remplacera cette inégalité par le système

$$|F(x)| < M(|x|) \qquad (x \in E), \tag{1.0.2}$$

$$F(x + iy_0) = o(x^{-n}) \qquad (x \to +\infty,\ y_0 \text{ fixé},\ n > 0), \tag{1.0.3}$$

$$\limsup_{|z|=\infty} \frac{\log |F(z)|}{|z|} = 0. \tag{1.0.4}$$

Ce système d'égalité est moins strict que celui qu'on aurait obtenu en faisant

$s=0$ dans (1.0.1). Nous noterons par $W(E, M, 0)$ la classe des fonctions satisfaisant à (1.0.2) quel que soit x réel et à (1.0.4); $\overline{W}(E, M, 0) \subset W(E, M, 0)$. Nous utiliserons de plus les notations suivantes :

Si $g(x)$ est une fonction définie sur une partie $F \subset R$, on lui associe la fonction définie sur R par

$$g^c(x) = \inf_n |x|^{-n} A_n \qquad \text{où} \quad A_n = \sup |x|^n |g(x)|.$$

On note par E_a :

$$E_a = \{x;\ x = y + t,\ y \in E \quad \text{et} \quad |t| \leq a\}.$$

Les relations entre les problèmes B et W sont données par les énoncés :

1.1. *Si* $p \notin B_E$, *alors* $W(E, p^c, 1)$ *est non vide.*
1.2. *Si* $W(E, M, 0)$ *est non vide, alors* $M \notin B_E$.
On a d'autre part les relations suivantes dans le cadre du problème W.
1.3. $W(E, M, s)$ *et* $W(E, (r+1)^{-n} M(r), s)$ *sont simultanément vides.*
1.4. *Supposons que* $M(r)$ *soit décroissante et que* $\overline{\lim} \dfrac{M(r-a)}{M(r)} < +\infty$ pour *pour a fixé,* $a > 0$, *alors* $W(E, M, s)$ *non vide entraîne* $\overline{W}(E_a, M, 0)$ *non vide.*

2. Rappelons la démonstration de 1.1 ([5]).

Si $p \notin B_E$ il existe une mesure μ portée par E telle que

$$\|\mu\| = \int |d\mu| < \infty, \qquad \text{et que} \quad \int x^n p(x)\, d\mu(x) = 0 \qquad (n \geq 0).$$

Posons

$$F(z) = \int \frac{p(t)}{z-t}\, d\mu(t),$$

l'identité de la division de $(z-t)^{-1}$ suivant les puissances croissantes de t donne

$$F(z) = \frac{1}{z^n} \int \frac{t^n p(t)}{z-t}\, d\mu(t),$$

d'où

$$|F(z) y \|\mu\|^{-1}| < \inf_n |z|^{-n} \sup_t |t^n p(t)| = p^c(|z|),$$

d'où

$$F \in W(E, p^c, 1).$$

3. Démontrons 1.3. On utilisera le lemme :

3.1. *Soit* E *compact non vide, alors on peut trouver* $F(z)$ *holomorphe dans le complémentaire de* E, *telle que*

$$|F(z)| < (|z|+1)^{-n}.$$

Démonstration. — Soit $f(t)$ une fonction n fois continûment dérivable ayant son support contenu dans E, posons

$$F(z)=\int \frac{f^{(n-1)}(t)}{z-t}\,dt=(n-1)!\int \frac{f(t)}{(z-t)^n}\,dt$$

au voisinage de E, $F(z)$ est bornée, en effet si $z=t_0+iy$:

$$F(z)=f^{(n-1)}(t_0)\int_\alpha^\beta \frac{dt}{z-t}+\int_\alpha^\beta \frac{f^{(n-1)}(t)-f^{(n-1)}(t_0)}{iy+t-t_0}\,dt,$$

où $(\alpha, \beta)\supset E$; la seconde intégrale est majorée par $\|f^n\|_\infty(\beta-\alpha)$, la première donne $\log\frac{z-\beta}{z-\alpha}$, expression bornée uniformément sur E d'après le choix de α et β. La seconde forme de $F(z)=O(|z|^{-n})$, d'où 3.1.

3.2. *Démonstration de* 1.3. — Soit $G\in W(E, M, s)$. Soit E_1 une partie compacte de E et soit F la fonction construite en 3.1 relativement à E_1 alors

$$G_1=FG\in W(E, M(r+1)^{-n}, s).$$

3.3. *Démonstration de* 1.2. — Soit $F\in W(E, M, 0)$, posons

$$h(x)=\lim_{\substack{y=0\\ y>0}}(F(x+iy)-F(x-iy)).$$

On a

$$|h(x)|<2M(|x|)\qquad [h(x)=0,\ x\notin E]. \tag{3.3.1}$$

Montrons que

$$2i\pi F(z)=\int \frac{h(t)}{z-t}\,dt. \tag{3.3.2}$$

En effet si $y>0$, calculons l'intégrale de $\frac{F(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$ sur le segment $-R<x<+R$, $y=+0$, et le demi-cercle Γ_R :

$$\Gamma_R=\{\zeta;\ \zeta=\xi+i\eta,\ |\zeta|=R \text{ et } \eta\geqq 0\}.$$

L'intégrale sur Γ_R tend vers zéro en vertu de [2] et de (1.0.3) et (1.0.4), d'où le résultat.

Soit m le premier entier positif tel que

$$a_m=\int h(t)t^m\,dt\neq 0$$

[cette intégrale est toujours absolument convergente en vertu de (3.3.1)]. On a

$$2i\pi F(z)=-a_m z^{-m-1}+z^{-m-1}\int \frac{t^{m+1}}{t-z}h(t)\,dt.$$

Prenons $z=i+x$, l'intégrale

$$\int_{\frac{x}{2}}^{2x} t^m h(t)\,dt=o(1)\qquad (x\to\infty),$$

on a

$$2 i\pi \, F(i+x) = -a_m x^{-m-1} + o(x^{-m-1})$$

et (1.0.3) implique $a_m = 0$.

Prenons $p(x) = (x^2+1) M(|x|)$,

$$d\mu(t) = \frac{h(t)}{p(t)} dt,$$

on a

$$\int |d\mu| < \infty, \qquad \int t^n p(t) \, d\mu(t) = 0 \qquad (n \geqq 0).$$

Alors $\{x^n p(x)\}$ est non totale dans $C_0(E)$; on obtient 1.2 en appliquant le résultat qui précède à $M_1(r) = \frac{M(r)}{r^2+1}$, ce qui est légitime, W(E, M, 0) non vide entraînant d'après 1.3, W(E, M_1, 0) non vide.

3.4. *Démonstration de* 1.4. — Soit $F \in W(E, \hat{M}, s)$, où

$$\hat{M}(r) = \frac{M(r)}{r^{s+2}+1},$$

F existe en vertu de 1.3. Notons par

$$\gamma_{z_0}^- = \{z\,;\, x = x_0 \text{ et } \varepsilon y_0 \leqq \varepsilon y \leqq 1\} \cup \{z\,;\, \varepsilon y = 1 \text{ et } -\infty < x \leqq x_0\},$$
$$\gamma_{z_0}^+ = \{z\,;\, x = x_0 \text{ et } \varepsilon y_0 \leqq \varepsilon y \leqq 1\} \cup \{z\,;\, \varepsilon y = 1 \text{ et } x_0 \leqq x < +\infty\},$$

où $z = x+iy$, ε = signe de y_0 et y_0 vérifie $|y_0| < 1$. Remarquons que si $y_0 = 0$, alors ε est indéterminé, nous conviendrons alors d'associer à z_0 les deux chemins correspondant à $\varepsilon = \pm 1$. γ_{z_0} désigne indifféremment l'un des deux chemins.

Si $|y_0| \geqq 1$, on posera

$$\gamma_{z_0}^- = \{z\,;\, y = y_0,\, -\infty < x \leqq x_0\},$$
$$\gamma_{z_0}^+ = \{z\,;\, y = y_0,\, x_0 \leqq x < +\infty\}.$$

Enfin nous orientons les chemins γ_{z_0} de z_0 vers l'infini. Posons

$$\text{(3.4.1)} \qquad H(z) = -\frac{1}{s!} \int_{\gamma_z^-} (z-\xi)^s F(\xi) \, d\xi.$$

La restriction de $H(z)$ au demi-plan $y > 0$ est une fonction holomorphe et localement bornée, soit $H_1(z)$; de même $H(z)$ définit une fonction $H_2(z)$ holomorphe dans $y < 0$.

Soit l'intégrale introduite par Ostrowski [4]

$$\int_{-\infty+iy}^{+\infty+iy} F(z) \, e^{izt} \, dz = f(t) \qquad (y > 0),$$

alors $f(t)$ est une fonction indéfiniment dérivable en vertu de (1.0.1), nulle pour tout $t > 0$, d'où $f^{(n)}(0) = 0$ $(n \geq 0)$, d'où

$$\int_{-\infty+iy}^{+\infty+iy} F(\xi)\xi^n \, d\xi = 0 \qquad (n \geq 0),$$

ceci entraîne que $H(z)$ peut s'écrire également

$$H(z) = \frac{1}{s!}\int_{\gamma_z^+} (z-\xi)^s F(\xi)\, d\xi. \tag{3.4.2}$$

En utilisant (3.4.1) ou (3.4.2), on obtient

$$|H_i(x)| < \hat{M}(|x|) + \int_{|x|}^{+\infty} t^s \hat{M}(t)\, dt \qquad (i = 1, 2)$$

et en utilisant la définition de $\hat{M}$ et le fait que M décroît,

$$|H_i(x)| < 2M(|x|) \qquad (i = 1, 2).$$

Posons

$$h(x) = \frac{H_1(x) - H_2(x)}{2i\pi}.$$

On obtient comme en (3.3.2)

$$H(z) = \int \frac{h(t)}{t-z}\, dt.$$

D'autre part

$$H_i^{(s+1)}(z) = F(z) \qquad (i = 1, 2),$$

Soit $f(t)$ une fonction $(s+2)$-fois continûment dérivable dont le support est contenu dans l'intervalle $(-a, +a)$, posons

$$H_a(z) = \int H(z-t) f(t)\, dt = \int \frac{h_a(t)}{t-z}\, dt, \tag{3.4.3}$$

l'inversion d'intégrations pour obtenir la dernière formule est légitime. En effet, si $y \neq 0$, les intégrales sont absolument convergentes. Dérivons (3.4.3) $(s+1)$-fois parallèlement à l'axe réel

$$H_a^{(s+1)}(z) = F_a(z) = \int \frac{h_a^{(s+1)}(t)}{t-z}\, dt.$$

Les singularités de $F_a(z)$ sont contenues dans E_a, ce qui montre que le support de $h_a^{(s+1)}$ est aussi contenu dans E_a.

Majorons $F_a(x_0)$. Soit C l'intérieur du carré du centre x_0 et de côté 1. Posons

$$g(z) = F_a(z)(z - x_0 - 1)^s (z - x_0 + 1)^s.$$

On a

$$g(z) = \int \frac{(t - x_0 - 1)^s (t - x_0 + 1)^s}{t-z} h_a^{(s+1)}(t)\, dt. \tag{3.4.4}$$

En effet approchons dans la topologie faible la mesure $h_a^{(s+1)}(t)\, dt$ par des mesures $d\rho$ composées d'un nombre fini de masses ponctuelles.

Posons

$$k(z) = \int \frac{d\rho(t)}{t-z},$$

alors $k(z)$ est une fonction rationnelle à pôles simples et l'on a

$$k(z)(z-x_0-1)^s(z-x_0+1)^s = \int \frac{(t-x_0-1)^s(t-x_0+1)^s}{t-z} d\rho(t) + Q_s(z),$$

où $Q_s(z)$ est un polynome de degré $2s$ dont les coefficients peuvent être majorés en fonction des $2s$ premiers moments de $d\rho$, moments qui tendent vers zéro lorsque $d\rho$ converge faiblement vers $h_a^{(s+1)}(t)\,dt$, d'où la formule (3.4.4) lorsque $y \neq 0$ $(z = x+iy)$.

Posons

$$g_1(z) = \int_{x_0-1}^{x_0+1} \frac{(t-x_0-1)^s(t-x_0+1)^s}{t-z} h_a^{(s+1)}(t)\,dt,$$

$$g_2(z) = g(z) - g_1(z),$$

alors la formule de Cauchy donne $z' \in C$,

$$g(z') = g_1(z') + \frac{1}{2i\pi}\int_{\dot{C}} \frac{g_2(\xi)}{\xi - z'} d\xi,$$

où $\dot{C}$ désigne la frontière de C.

Prenons $z' = x_0$.

On a, en tenant compte que $h^{(s+2)}(x) = O(M(|x|-a))$,

$$g_1(x_0) = O(M(|x_0|-a)) \qquad (|x_0| \to \infty),$$

de même pour $g_2(\xi)$, $\xi \in \dot{C}$, d'où

$$g(x_0) = O(M(|x_0|-a-1)).$$

D'où en tenant compte des hypothèses faites sur $M(r)$,

$$|F_a(x_0)| < BM(|x_0|),$$

$$F_a \in \overline{W}(E_a, M, 0),$$

C. Q. F. D.

4. Nous allons dans ce paragraphe comparer les résultats ci-dessus et ceux de [3].

Nous appellerons voisinage de l'ensemble E un ensemble E' contenant E et tel que $\dot{E}' \cap E = \emptyset$. En particulier E_a est un voisinage de E.

Nous noterons par $\overline{C}_0(E)$ le sous-espace fermé de $C_0(E)$ constitué par les fonctions nulles sur $\dot{E}$.

Suivant les notations de [3], nous noterons par $L(M_n, E)$ la classe des fonctions $f \in L_1$, vérifiant $\|f^{(n)}\|_1 \leq M_n$ de spectre E. Nous dirons que $\mathcal{R}_\delta(M_n, E)$ vaut si l'hypothèse $f \in L(M_n, E)$ entraîne que $f(x+h)$ est limite dans L_1

d'expressions de la forme $\sum_{k<N} a_{k,N} f^{(k)}(x)$. On notera enfin par $\hat{L}(M_n, E)$ les transformées de Fourier des fonctions de $L(M_n, E)$.

On a le lemme :

4.1. *Soit* E′ *un voisinage de* E, *soit* $g \in \hat{L}(M_n, E')$, $g(x) = 0$, $x \in E'$ *seulement si* $x \in \dot{E}'$ *alors si* $\mathcal{R}_\delta(M_n, E')$ *vaut*

$$(4.1.1)\qquad \{x^n g(x)\} \text{ est totale dans } \overline{C}_0(E'),$$

$$(4.1.2)\qquad g \in B_E.$$

Démonstration. — Soit V le sous espace de L_1 des fonctions de spectre E′. Puisque $\dot{E}'$ est discret, on sait [1] que $\hat{g}(x+h)$ est totale dans V. La relation $\mathcal{R}_\delta$ valant on obtient $\hat{g}^{(n)}(x)$ totale dans V, ou en transformant par Fourier $\{x^n g(x)\}$ totale dans $\hat{V}$, munie de la convergence induite en considérant $\hat{V} \subset C_0(E')$.

Enfin $\hat{V}$ est dense dans $\overline{C}_0(E')$, en effet soit $k \in \overline{C}_0(E')$, k à support compact, k est limite uniforme de fonctions deux fois continûment dérivable $\in \overline{C}_0(E')$ donc de fonctions de $\hat{V}$, ce qui démontre (4.1.1).

D'autre part, soit A l'application linéaire qui à $f \in \overline{C}_0(E')$ associe sa restriction à E. Alors $A(\overline{C}_0(E')) = C_0(E)$, d'où (4.1.2).

4.2 Retrouvons rapidement le théorème II de [3] : *si* $\mathcal{R}_\delta(M_n, E_a)$ *vaut alors* W(E, M, 1) *est vide.*

Démonstration. — Soit

$$\overline{M}(x) = \inf \frac{M_n}{x^{n+2}}, \qquad p(x) = \overline{M}(x) \quad \text{si} \quad x \in E, \qquad p(x) = 0 \quad \text{si} \quad x \notin E.$$

Soit H une fonction deux fois dérivable

$$H(t) > 0 \quad \text{si} \quad |t| < \frac{a}{2}, \qquad H(t) = 0 \quad \text{si} \quad |t| \geq \frac{a}{2}.$$

Posons

$$g(x) = \int p(x-t) H(t)\, dt.$$

Alors si $\hat{g}$ est la transformée de Fourier de g, on a

$$\hat{g}^{(n)}(t) = \frac{1}{t^2} \int g''(x)\, e^{itx} (ix)^n\, dx,$$

d'où

$$\|\hat{g}^{(n)}\|_1 = O\left(\sup \overline{M}(x-a)\, x^{n+2}\right),$$

$$\sup\left(\overline{M}(x-a)\, x^{n+2}\right) = \sup \overline{M}(x)\,(x+a)^{n+2} = \sup \overline{M}(x)\, x^{n+2}(1+o(1));$$

d'où $g \in \hat{L}(M_n, E_a)$.

Supposons que $\mathcal{R}_\delta(M_n, E_a)$ vaut. Alors 4.1 donne $g \in B_{E_{a'}} (a' < a)$, D'autre part 1.2 entraîne alors $W(E_{a'}, g, 0)$ vide et 1.4, $W(E_{a''}, g, l)$ vide si $a'' < a'$; comme $\overline{M}(x) = O(g(x))$ $x \in E$,

$$W(E, \overline{M}, 1) \text{ est vide.} \tag{4.2.1}$$

Enfin remarquons que $M(x) = O(x^2 \overline{M}(x))$ si

$$\int^{\infty} \log M(e^{\sigma}) e^{-\sigma} d\sigma < \infty; \tag{4.2.2}$$

alors 1.3 donne $W(E, M, 1)$ vide. Cette conclusion vaut également si (4.2.2) diverge, en vertu du théorème de Watson.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Agmon et Mandelbrojt, *Une généralisation du théorème taubérien de Wiener* (*Acta Scientarium Mathematicarum Szeged*, vol. **12**, part B, 1950).

[2] Heins, *On the Phragmen Lindelöf Principle* (*Transaction of the American Mathematical Society*, Vol. **60**, p. 238-244, 1946).

[3] S. Mandelbrojt, *Quelques relations équivalentes dans la théorie constructive des fonctions* (*C. R. Acad. Sc.*, t. **245**, 1957, p. 1869.).

[4] Ostrowsky, *Uber quasi-analytische Funktionen und Bestimmtheit asymptotischer Entwickelungen* (*Acta mathematica* t. **53**, 1930, p. 181).

[5] J. Horvath, *L'approximation polynomiale sur un ensemble non compact* (*Mathetica Scandinavica*, Tome **2**, 1954, p. 83-90).