ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

MAXIMILIEN MARIE

Théorie des fonctions de variables imaginaires

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série, tome 2 (1873), p. 417-444
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1873_2_2__417_0>

THÉORIE

DES

FONCTIONS DE VARIABLES IMAGINAIRES,

PAR M. MAXIMILIEN MARIE,

RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

PREMIÈRE PARTIE.

RÉALISATION ET USAGE DES FORMES IMAGINAIRES EN GÉOMÉTRIE.

OU

Extension des méthodes de la Géométrie analytique de Descartes à l'étude des lieux représentés par les solutions imaginaires des équations à deux et à trois variables.

CHAPITRE PREMIER.

DES LIEUX IMAGINAIRES DONT IL SERA QUESTION DANS CE MÉMOIRE.

Une équation $f(x, y) = 0$, ne contenant qu'une variable indépendante, ne fournit qu'un nombre limité de suites de solutions réelles, embrassant des espaces plus ou moins étendus entre $+\infty$ et $-\infty$, soit par rapport à x, soit par rapport à y; mais si, dans la même équation, on remplace x par $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ et y par $\alpha' + \beta'\sqrt{-1}$, les quatre variables α, β, α', β' ne se trouvant liées entre elles que par deux équations, deux d'entre elles pourront être regardées comme indépendantes; l'indétermination sera devenue double.

De même, dans une équation $f(x, y, z) = 0$, l'indétermination n'est que double, tant qu'on n'en considère que les solutions réelles, et devient quadruple lorsqu'il s'agit des solutions imaginaires.

Il résulte de là que, si à une solution $[x, y]$ d'une équation $f(x, y) = 0$, ou à une solution $[x, y, z]$ d'une équation $f(x, y, z) = 0$, on faisait correspondre un point du plan, ou de l'espace, point dont les coordonnées réelles se formeraient, suivant des lois convenues, des parties réelles et imaginaires de x et de y, ou de x, de y et de z, et que, d'un autre côté, on associât les unes aux autres les solutions de l'équation proposée qui rempliraient une ou deux conditions choisies à l'avance, *on pourrait regarder une équation à deux variables comme représentant une courbe réelle, plus une infinité de courbes imaginaires, et une équation à trois variables comme représentant une surface réelle, plus une infinité d'infinités de surfaces imaginaires.*

Au reste, bien que le choix des conditions à remplir, pour réaliser un pareil plan, soit de lui-même arbitraire, le succès dépendra évidemment du soin avec lequel on aura eu égard à de certaines convenances.

Voici à quoi je me suis arrêté :

Pour moi, la solution

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}$$

d'une équation $f(x, y) = 0$ représente le point

$$x_1 = \alpha + \beta, \quad y_1 = \alpha' + \beta',$$

et les solutions que j'associe pour former un lieu des points qui y correspondent sont celles où $\frac{\beta'}{\beta}$ aurait une valeur constante C.

De même, s'il s'agit d'une équation $f(x, y, z) = 0$, pour moi, la solution

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}, \quad z = \alpha'' + \beta''\sqrt{-1}$$

représente le point

$$x_1 = \alpha + \beta, \quad y_1 = \alpha' + \beta', \quad z_1 = \alpha'' + \beta'',$$

et les solutions que j'associe pour former un lieu des points qui y correspondent sont celles où $\frac{\beta'}{\beta}$ et $\frac{\beta''}{\beta}$ conserveraient des valeurs constantes C et C_1.

La ligne composée des points

$$x_1 = \alpha + \beta, \quad y_1 = \alpha' + \beta C,$$

qui correspondent aux solutions

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad y = \alpha' + \beta C\sqrt{-1}$$

d'une équation $f(x, y) = 0$, est l'une des *conjuguées* du lieu plan correspondant; C en est la *caractéristique*.

De même la surface composée des points

$$x_1 = \alpha + \beta, \quad y_1 = \alpha' + \beta C, \quad z_1 = \alpha'' + \beta C_1,$$

qui correspondent aux solutions

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad y = \alpha' + \beta C\sqrt{-1}, \quad z = \alpha'' + \beta C_1\sqrt{-1}$$

d'une équation $f(x, y, z) = 0$, est l'une des conjuguées du lieu correspondant; C et C_1 en sont les caractéristiques, qui la définissent.

Les deux règles que je viens d'énoncer, et que je suivrai constamment, répondent à des convenances que je regardais comme assez impérieuses pour être en quelque sorte déterminantes.

La première satisfait à cette condition, pour ainsi dire indispensable, que le même point réel réponde toujours à la même solution imaginaire transformée à la suite d'un changement quelconque d'axes; elle entraîne *la permanence des lieux représentés sur un plan ou dans l'espace par la même équation modifiée, d'une manière quelconque, par une transformation arbitraire de coordonnées*. En effet, si les formules correspondant à la transformation effectuée sont

$$x' = a + m\,x + n\,y + p\,z,$$
$$y' = b + m'x + n'y + p'z,$$
$$z' = c + m''x + n''y + p''z,$$

deux solutions correspondantes, ancienne et nouvelle, seront

$$\begin{cases} x = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \\ y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}, \\ z = \alpha'' + \beta''\sqrt{-1} \end{cases}$$

et

$$\begin{aligned} x' &= a + m\alpha + n\alpha' + p\alpha'' + (m\beta + n\beta' + p\beta'')\sqrt{-1}, \\ y' &= b + m'\alpha + n'\alpha' + p'\alpha'' + (m'\beta + n'\beta' + p'\beta'')\sqrt{-1}, \\ z' &= c + m''\alpha + n''\alpha' + p''\alpha'' + (m''\beta + n''\beta' + p''\beta'')\sqrt{-1}; \end{aligned}$$

les points réels qui y correspondront auront donc pour coordonnées anciennes et nouvelles

$$\begin{cases} x_1 = \alpha + \beta, \\ y_1 = \alpha' + \beta', \\ z_1 = \alpha'' + \beta'', \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'_1 = a + m(\alpha+\beta) + n(\alpha'+\beta') + p(\alpha''+\beta'') = a + m x_1 + n y_1 + p z_1, \\ y'_1 = b + m'(\alpha+\beta) + n'(\alpha'+\beta') + p'(\alpha''+\beta'') = b + m' x_1 + n' y_1 + p' z_1, \\ z'_1 = c + m''(\alpha+\beta) + n''(\alpha'+\beta') + p''(\alpha''+\beta'') = c + m'' x_1 + n'' y_1 + p'' z_1; \end{cases}$$

ces deux points coïncideront donc.

Quant à la seconde règle, qui consiste à associer les solutions où les rapports des parties imaginaires des variables restent constants, pour former, des points correspondants, les lieux assimilables au lieu réel, cette seconde règle présente l'avantage considérable de permettre, à l'aide d'une simple transformation préalable d'axes, de rendre en même temps réelles les abscisses de tous les points d'un des lieux imaginaires considérés, s'il s'agit d'une équation à deux variables, ou leurs abscisses et leurs ordonnées, s'il s'agit d'une équation à trois variables.

En effet, pour que les coordonnées nouvelles x' et y' qui proviendraient d'une solution

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad y = \alpha' + \beta C\sqrt{-1}, \quad z = \alpha'' + \beta C_1\sqrt{-1}$$

deviennent réelles, il suffira que

$$m + nC + pC_1 = 0, \quad \text{et} \quad m' + n'C + p'C_1 = 0;$$

ces deux équations déterminent la direction qu'il faudrait donner au nouvel axe des z pour remplir le but proposé; car, si l'on a une fois rendu réelles les abscisses et les ordonnées d'une des conjuguées, toute nouvelle transformation où l'axe des z ne subirait aucun nouveau déplacement laissera encore réelles les abscisses et ordonnées de la même conjuguée.

Toutes les analogies remarquables que les conjuguées ont avec le lieu réel se tirent de ce que leur coordonnée imaginaire et la coordonnée correspondante du lieu réel sont toujours les mêmes fonctions des mêmes coordonnées réelles, comprises seulement dans des intervalles différents, ou satisfaisant en sens contraires aux mêmes inégalités.

D'un autre côté, en ce qui concerne les recherches purement analytiques, la marche que j'ai proposée a l'avantage de substituer l'étude d'une fonction imaginaire de variables réelles à celle, bien plus compliquée, d'une fonction imaginaire de variables imaginaires. A la vérité, cette substitution paraîtrait exiger celle d'axes mobiles à des axes fixes; mais, en fait, on n'a jamais à effectuer la transformation : il suffit toujours de la supposer faite.

Les courbes que j'appelle conjuguées de la courbe réelle et dont j'étudie l'ensemble ne sont autre chose que les courbes supplémentaires que M. Poncelet faisait intervenir tour à tour, selon la nature du problème proposé, pour arriver à l'interprétation de la solution imaginaire obtenue. En d'autres termes, la courbe supplémentaire de la courbe réelle, relativement à la question posée, ne diffère pas de la conjuguée à laquelle la solution imaginaire obtenue se rapporte; la question venant à changer, toutes les conjuguées *suppléeraient* à leur tour au défaut de la courbe réelle.

D'un autre côté, la lecture de l'énoncé concret du problème proposé suffisant pour découvrir cette courbe supplémentaire, ou conjuguée, dont l'introduction devait rendre compte de la solution algébrique obtenue, M. Poncelet pouvait, avant d'établir les calculs, choisir les axes de façon que les abscisses de la conjuguée à laquelle on aurait affaire se trouvassent réelles, et que ses ordonnées (parce qu'il ne s'agissait que de courbes du second degré) manquassent de partie réelle, ce qui rendait plus facilement acceptable la suppression du signe $\sqrt{-1}$; mais, la solution une fois obtenue et acceptée, si l'on voulait la retrouver par rapport à des axes quelconques, il faudrait bien s'y prendre comme je l'ai proposé.

Au reste, il est très-facile d'établir que la règle que j'ai adoptée pour la construction du point correspondant à une solution imaginaire d'une équation à deux ou à trois variables est la seule qui assure la permanence, sur le plan ou dans l'espace, des points représentés par des solutions imaginaires et, par suite, la permanence des lieux formés de ces points, quelque transformation que l'on fasse subir aux axes de coordonnées.

Cette démonstration ne servira pas seulement à imprimer un nouveau caractère de certitude à la méthode; en fermant le champ des hypothèses, en matière de représentation des imaginaires, elle enlèvera en même temps tout prétexte à la critique.

La question est celle-ci :

En supposant qu'on veuille figurer une solution imaginaire

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}$$

d'une équation

$$f(x,y) = 0,$$

par un point du plan, quelles fonctions de α, β, α' et β' faudra-t-il choisir pour former les coordonnées réelles de ce point, si l'on s'impose la condition que la position de ce point ne change pas quelque transformation d'axes qu'on fasse intervenir ?

En premier lieu, si l'abscisse x_1 du point est représentée par

$$x_1 = \varphi(\alpha, \beta, \alpha', \beta'),$$

son ordonnée devra l'être par

$$y_1 = \varphi(\alpha', \beta', \alpha, \beta),$$

sans quoi l'échange des deux axes de coordonnées ne laisserait pas à la même place le point représentatif de la solution.

D'un autre côté, si l'on transporte l'axe des y parallèlement à lui-même à une distance a, la solution

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}$$

deviendra

$$x' = (a + \alpha) + \beta\sqrt{-1}, \quad y' = \alpha' + \beta'\sqrt{-1};$$

les nouvelles coordonnées du point représentatif de la solution deviendront donc

$$x'_1 = \varphi(a + \alpha, \beta, \alpha', \beta'), \quad y'_1 = \varphi(\alpha', \beta', a + \alpha, \beta),$$

et, pour que ce point ait conservé la même position, il faudra que

$$\varphi(a + \alpha, \beta, \alpha', \beta') = \varphi(\alpha, \beta, \alpha', \beta') + a,$$

et que

$$\varphi(\alpha', \beta', a + \alpha, \beta) = \varphi(\alpha', \beta', \alpha, \beta),$$

quel que soit a.

Ces conditions exigent évidemment d'abord que y_1 ne contienne pas α et, par suite, que x_1 soit de même indépendant de α'; en second lieu que x_1 se compose de α et d'une fonction de β et β', et, par suite, que y_1 se compose de α' et de la même fonction de β' et β.

Ainsi déjà x_1 et y_1 seront nécessairement exprimés

$$x_1 \text{ par } \alpha + \varphi(\beta, \beta'),$$

et

$$y_1 \text{ par } \alpha' + \varphi(\beta', \beta).$$

Rapportons maintenant le lieu au même axe des x et à un nouvel axe d'ordonnées faisant avec l'ancien axe des x l'angle supplémentaire de l'ancien angle des axes; les formules de transformation seront

$$y' = y \quad \text{et} \quad x' = x + 2y\cos\theta,$$

de sorte que la solution

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}$$

sera devenue

$$x' = \alpha + 2\alpha'\cos\theta + (\beta + 2\beta'\cos\theta)\sqrt{-1}, \quad y' = \alpha' + \beta'\sqrt{-1},$$

et que, par suite, les coordonnées du point représentatif auront dû prendre les valeurs

$$x'_1 = \alpha + 2\alpha'\cos\theta + \varphi(\beta + 2\beta'\cos\theta, \beta')$$

et

$$y'_1 = \alpha' + \varphi(\beta', \beta + 2\beta'\cos\theta).$$

Mais, d'un autre côté, elles seront devenues

$$x'_1 = \alpha + \varphi(\beta, \beta') + 2\cos\theta\,[\alpha' + \varphi(\beta', \beta)]$$

et

$$y'_1 = \alpha' + \varphi(\beta', \beta);$$

$\varphi(\beta', \beta)$ devrait donc être égal à $\varphi(\beta', \beta + 2\beta'\cos\theta)$, quels que fussent β, β' et θ. Cette condition exige évidemment que y_1 ne dépende pas de β et, par suite, que x_1 ne dépende pas de β' : x_1 et y_1 se trouveraient donc réduits,

$$x_1 \text{ à } \alpha + \varphi(\beta) \quad \text{et} \quad y_1 \text{ à } \alpha' + \varphi(\beta');$$

mais l'homogénéité exige que x_1 et y_1 soient des fonctions linéaires de α, β, α' et β'; par conséquent la seule forme admissible serait

$$x_1 = \alpha + k\beta \quad \text{et} \quad y_1 = \alpha' + k\beta',$$

k désignant une constante numérique.

Cela posé, il est bien certain que rien ne s'opposerait absolument à ce qu'on donnât à cette constante une valeur différente de 1 ; cela reviendrait à voir dans $\sqrt{-1}$ à la fois un signe et un nombre, tandis que nous n'y avons vu qu'un signe. Ni la figure générale des conjuguées, ni leurs propriétés essentielles ne seraient par là profondément altérées; mais d'abord la multiplication, dans un rapport quelconque, des parties imaginaires des deux coordonnées, x et y, n'aurait aucun avantage quelconque; en second lieu, cette transformation purement arbitraire romprait fort inutilement la continuité entre la courbe réelle et ses conjuguées ; enfin, si l'on voulait considérer la courbe

$$y = \varphi(x) \pm k\sqrt{-\psi(x)}$$

comme conjuguée de la courbe

$$y = \varphi(x) \pm \sqrt{\psi(x)},$$

il faudrait, par les mêmes motifs, regarder la courbe

$$y = \varphi(x) \pm k^2\sqrt{\psi(x)}$$

comme conjuguée de la courbe

$$y = \varphi(x) \pm k\sqrt{-\psi(x)},$$

ce qui détruirait la réciprocité entre deux courbes conjuguées.

On voit donc que la règle que j'ai proposée, de représenter la solution

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}$$

par le point

$$x_1 = \alpha + \beta, \quad y_1 = \alpha' + \beta',$$

n'offrait rien d'arbitraire, qu'elle tient à la nature des choses et qu'il serait impossible de s'y soustraire.

La même démonstration s'applique évidemment aux lieux à trois dimensions; car, pour que le point représenté par une solution imaginaire

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}, \quad z = \alpha'' + \beta''\sqrt{-1}$$

reste fixe dans l'espace, quelque transformation qu'on fasse subir aux axes, il faut notamment que sa projection sur le plan des x, y reste la même quelque transformation qu'on fasse subir aux axes des x et des y, dans leur plan, sans changer la direction de l'axe des z; il faut donc que les coordonnées de cette projection du point soient réalisées par

$$x_1 = \alpha + \beta, \quad y_1 = \alpha' + \beta'.$$

D'un autre côté, la règle relative à l'ordonnée z doit être la même que celle que l'on adopte pour x et y; le z du point représentatif de la solution devra donc être

$$z_1 = \alpha'' + \beta''.$$

En résumé, les lieux imaginaires que nous nous proposons d'étudier, que nous associons à chaque lieu réel et que nous regardons comme représentés aussi bien que lui par son équation, sont, s'il s'agit d'un lieu plan, toutes les courbes que l'on obtiendrait en prenant les solutions de l'équation proposée, où le rapport des parties imaginaires de y et de x serait une constante arbitraire C, et construisant, pour chaque solution, le point qui aurait pour coordonnées les mêmes valeurs de x et de y dans lesquelles on aurait remplacé $\sqrt{-1}$ par 1; et, s'il s'agit d'un lieu à trois dimensions, ce sont toutes les surfaces que l'on obtiendrait en prenant les solutions de l'équation proposée, où les rapports des parties imaginaires de z et de x, et de z et de y seraient des constantes arbitraires C et C_1, et construisant, pour chaque solution, le point qui aurait pour coordonnées les mêmes valeurs de x, de y et de z dans lesquelles on aurait remplacé $\sqrt{-1}$ par 1.

CHAPITRE II.

CONSTRUCTION PAR POINTS DES CONJUGUÉES ET APPLICATION AUX COURBES ET AUX SURFACES DU SECOND ORDRE.

On peut, pour discuter et construire une des conjuguées d'une courbe, soit rendre ses abscisses réelles en donnant à l'axe des y une nouvelle direction convenable et faire ensuite passer x par toutes les valeurs réelles, dans la nouvelle équation, soit calculer et construire les coordonnées des rencontres imaginaires de la courbe proposée avec des droites réelles ayant pour coefficient angulaire la caractéristique de la conjuguée qu'on veut obtenir.

L'équation $y = Cx + d$, en effet, n'admet de solutions que du système C, car, pour que

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}$$

y satisfassent, il faut que

$$\alpha' = C\alpha + d \quad \text{et} \quad \beta' = C\beta,$$

d'où

$$\frac{\beta'}{\beta} = C.$$

Au reste les équations

$$\alpha' = C\alpha + d \quad \text{et} \quad \beta' = C\beta$$

ajoutées donnent

$$\alpha' + \beta' = C(\alpha + \beta) + d,$$

ce qui montre que le point correspondant à une solution imaginaire de l'équation

$$y = Cx + d$$

appartient à la droite réelle représentée par cette même équation.

Mais il suffira presque toujours d'avoir construit avec soin la courbe réelle pour se faire une idée générale de la distribution de ses conjuguées, et même de la figure de chacune d'elles. Il ne s'agira, pour cela, que d'appliquer les remarques suivantes, dont l'évidence dispense de toute démonstration.

Si des parallèles menées dans le plan de la courbe réelle ne la coupent pas toutes en autant de points qu'il y a d'unités dans le degré de son équation, il existe nécessairement une conjuguée ayant pour caractéristique le coefficient angulaire commun de ces parallèles; les rencontres avec cette conjuguée et avec la courbe réelle devront être, pour chaque parallèle (sauf le cas où elles auraient une des directions asymptotiques), en nombre égal au degré de l'équation.

Si l'on peut mener à la courbe réelle des tangentes parallèles à la direction qu'il faudrait donner à l'axe des y pour rendre réelles les abscisses d'une conjuguée, cette conjuguée passera évidemment par les points de contact de ces tangentes; elle sera elle-même tangente en ces points à la courbe réelle, et les deux courbes y auront leurs concavités tournées en sens contraires. La courbe réelle est donc l'enveloppe de ses conjuguées, ou, du moins, d'une partie de ses conjuguées.

Si toutes les droites imaginables, menées, dans le plan de la courbe réelle, parallèlement aux rayons d'un secteur circulaire, coupent toujours cette courbe en autant de points qu'il y a d'unités dans le degré de son équation, la courbe n'aura pas de conjuguées dont les caractéristiques soient comprises entre les coefficients angulaires des rayons extrêmes de ce secteur. Si l'on ne peut pas mener de tangentes à la courbe réelle parallèlement à une direction donnée, et que cependant les parallèles à cette direction la coupent en un nombre de points moindre que le degré de son équation, il existera une conjuguée ayant pour caractéristique le coefficient angulaire de la direction considérée, mais cette conjuguée ne touchera plus la courbe réelle.

Les courbes imaginaires représentées par une même équation, soit qu'elles touchent ou ne touchent pas la courbe réelle, peuvent avoir une seconde enveloppe nécessairement imaginaire.

Cette seconde enveloppe sera déterminée plus tard.

Nous désignerons habituellement les droites parallèles à la direction $y = Cx$ sous le nom de *cordes réelles de la conjuguée* C.

De même les équations d'une droite réelle

$$x = \frac{1}{C} z + d, \quad y = \frac{1}{C'} z + d'$$

n'admettent de solutions que du système [C, C']; car si l'on y fait

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}, \quad z = \alpha'' + \beta''\sqrt{-1},$$

elles donnent

$$\alpha = \frac{1}{C}\alpha'' + d, \quad \alpha' = \frac{1}{C'}\alpha'' + d'$$

et

$$\beta = \frac{1}{C}\beta'', \qquad \beta' = \frac{1}{C'}\beta''.$$

Au reste, la solution réalisée représente un point de la droite réelle elle-même; car les équations précédentes ajoutées deux à deux donnent

$$\alpha + \beta = \frac{1}{C}(\alpha'' + \beta'') + d$$

et

$$\alpha' + \beta' = \frac{1}{C'}(\alpha'' + \beta'') + d'.$$

On voit par là d'abord que, pour construire par points la conjuguée [C, C'] d'une surface, au lieu de commencer par rendre réelles ses coordonnées x et y, on pourra préférablement la considérer comme le lieu des intersections imaginaires de la surface proposée et de toutes les droites réelles parallèles à la direction

$$x = \frac{1}{C} z, \quad y = \frac{1}{C'} z;$$

en second lieu, que les inverses des caractéristiques d'une conjuguée ne sont autre chose que les coefficients angulaires de la direction qu'il faudrait donner à l'axe des z pour rendre réelles les abscisses et les ordonnées de cette conjuguée.

Nous désignerons habituellement les droites parallèles à la direction

$$x = \frac{1}{C} z, \quad y = \frac{1}{C'} z$$

sous le nom de *cordes réelles de la conjuguée* [C, C'].

L'équation d'un plan réel

$$Mx + Ny + Pz + Q = 0$$

n'est pas non plus capable de solutions de tous les systèmes; si l'on y fait

$$x = \alpha + \frac{\beta''}{C}\sqrt{-1}, \quad y = \alpha' + \frac{\beta''}{C'}\sqrt{-1}, \quad z = \alpha'' + \beta''\sqrt{-1},$$

il en résulte

$$M\alpha + N\alpha' + P\alpha'' + Q = 0$$

et

$$\left(\frac{M}{C} + \frac{N}{C'} + P\right)\beta'' = 0.$$

La seconde de ces équations constitue une relation entre les caractéristiques des solutions dont est capable l'équation du plan; au reste, l'addition des mêmes équations donne

$$M(\alpha + \beta) + N(\alpha' + \beta') + P(\alpha'' + \beta'') + Q = 0,$$

d'où l'on voit que la solution réalisée représente un point du plan réel lui-même.

La section totale d'une surface

$$f(x, y, z) = 0,$$

par le plan réel

$$Mx + Ny + Pz + Q = 0,$$

c'est-à-dire le lieu des points réels ou imaginaires fournis par le système des deux équations, ne peut se composer, d'après ce qu'on vient de voir, que des sections effectives par ce plan, de la surface réelle et de toutes celles de ses conjuguées dont les caractéristiques satisfont à la relation

$$\frac{M}{C}+\frac{N}{C'}+P=0;$$

or les cordes réelles de la conjuguée [C, C′] sont parallèles à la droite

$$x=\frac{1}{C}z, \quad y=\frac{1}{C'}z;$$

la condition

$$\frac{M}{C}+\frac{N}{C'}+P=0$$

exprime donc que le plan sécant est parallèle aux cordes réelles des conjuguées dont il contient les sections.

En d'autres termes, la section totale faite par un plan dans une surface quelconque se compose exclusivement de la section faite dans la surface réelle et des sections faites dans les conjuguées dont les cordes réelles sont parallèles au plan sécant.

Au reste, les courbes imaginaires qui font partie de cette section totale sont les conjuguées mêmes de la courbe réelle qui y est comprise, si du moins cette section réelle existe; car, si l'on prenait le plan sécant pour l'un des plans coordonnés, ce qui ne saurait altérer la section, on obtiendrait bien un lieu plan composé, en général, d'une courbe réelle et de toutes ses conjuguées.

Application aux courbes du second ordre.

Pour obtenir celles des conjuguées d'une ellipse dont les cordes réelles auraient une direction donnée, on pourra prendre pour axes le diamètre parallèle à cette direction et son conjugué; l'équation de la courbe prendra alors la forme

$$a'^2y^2+b'^2x^2=a'^2b'^2;$$

et, si l'on fait varier x en dehors des limites $-a'$ et $+a'$, y prendra la valeur

$$y=\pm\frac{b'}{a'}\sqrt{x^2-a'^2}\sqrt{-1},$$

qui, réalisée, n'est autre que celle de l'ordonnée de l'hyperbole

$$a'^2y^2 - b'^2x^2 = -a'^2b'^2.$$

Ainsi les conjuguées d'une ellipse sont toutes les hyperboles qui ont avec elle un système de diamètres conjugués commun; elles recouvrent tout le plan sauf l'intérieur de l'ellipse.

On obtiendra de même celle des conjuguées d'une hyperbole dont les cordes réelles auraient une direction donnée, en rapportant cette hyperbole au diamètre parallèle à la direction donnée et à son conjugué.

L'équation de la courbe prendra alors l'une des formes

$$a'^2y^2 - b'^2x^2 = -a'^2b'^2,$$

ou

$$b''^2y^2 - a''^2x^2 = \quad a''^2b''^2,$$

suivant que le diamètre parallèle à la direction donnée sera non transverse ou transverse, c'est-à-dire suivant qu'on pourra, ou non, mener à la courbe réelle des tangentes parallèles à cette direction.

Dans le premier cas, si l'on fait varier x entre $-a'$ et $+a'$, y prendra la valeur

$$y = \pm \frac{b'}{a'}\sqrt{a'^2 - x^2}\sqrt{-1},$$

qui, réalisée, est celle de l'ordonnée de l'ellipse

$$a'^2y^2 + b'^2x^2 = a'^2b'^2;$$

dans le second, y étant toujours réel, quelque valeur réelle qu'on attribue à x, la conjuguée correspondant à la direction donnée n'existerait pas.

Ainsi les conjuguées d'une hyperbole sont toutes les ellipses qui ont avec elle un système de diamètres conjugués commun; mais leur caractéristique ne peut prendre les valeurs des coefficients angulaires des rayons menés du centre aux points de la courbe réelle. Chaque conjuguée touche encore la courbe réelle en deux points; mais elles ont une autre enveloppe, imaginaire : c'est le lieu des extrémités des diamètres non transverses de la courbe réelle, c'est-à-dire l'hyperbole qu'on appelle habituellement conjuguée de la première, et que nous nommerons préférablement sa supplémentaire.

Cette hyperbole supplémentaire, lorsque la courbe est rapportée à deux de ses diamètres conjugués, et que son équation, par conséquent, est

$$a'^2y^2 - b'^2x^2 = -a'^2b'^2,$$

est fournie par les solutions de la forme

$$x = \beta\sqrt{-1}, \quad y = \beta'\sqrt{-1},$$

car la substitution donne

$$a'^2\beta'^2 - b'^2\beta'^2 = a'^2b'^2.$$

Les conjuguées recouvrent tout l'espace compris entre les deux hyperboles et ne pénètrent à l'intérieur ni de l'une ni de l'autre.

Lorsque la caractéristique se rapproche du coefficient angulaire de l'une des asymptotes, la conjuguée s'allonge de plus en plus en s'aplatissant. A la limite, la conjuguée se confond avec l'asymptote elle-même qu'elle recouvre deux fois.

Pour obtenir celle des conjuguées d'une parabole dont les cordes réelles auraient une direction donnée, on pourra prendre pour axes la tangente parallèle à cette direction et le diamètre correspondant. L'équation de la courbe prendra alors la forme

$$y^2 = 2p'x,$$

et, si l'on fait varier x de $-\infty$ à 0, y prendra la valeur

$$y = \pm\sqrt{-2p'x}\,\sqrt{-1},$$

qui, réalisée, n'est autre que celle de l'ordonnée de la parabole

$$y^2 = -2p'x.$$

Ainsi les conjuguées d'une parabole sont toutes les paraboles égales à la proposée, ayant avec elle un diamètre et une tangente commune, mais l'ouverture dirigée en sens contraire. Elles recouvrent tout le plan, excepté l'intérieur de la courbe réelle.

L'équation de l'ellipse évanouissante

$$a^2y^2 + b^2x^2 = 0$$

ou

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{-1}\,x$$

doit nécessairement représenter les hyperboles, réduites à leurs asymptotes, qui correspondent à cette ellipse évanouissante.

Chacune des équations

$$y = +\frac{b}{a}\sqrt{-1}\,x \quad \text{et} \quad y = -\frac{b}{a}\sqrt{-1}\,x,$$

considérée isolément, représente donc un faisceau de droites divergeant de l'origine, centre de l'ellipse évanouissante.

L'enveloppe réelle des conjuguées est alors réduite à un point.

L'équation

$$a^2y^2 + b^2x^2 = -a^2b^2$$

offre un exemple où l'enveloppe réelle n'existe plus. Le lieu total qu'elle représente, rapporté à de nouveaux axes dirigés suivant deux diamètres conjugués de l'ellipse

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

fournie par les solutions de la forme

$$x = \beta\sqrt{-1}, \quad y = \beta'\sqrt{-1}$$

de l'équation proposée, aurait évidemment pour équation nouvelle

$$a'^2y^2 + b'^2x^2 = -a'^2b'^2.$$

La conjuguée dont la caractéristique aurait eu la valeur du coefficient angulaire ancien de la direction qu'on a donnée au nouvel axe des y n'est donc autre chose que l'hyperbole

$$-a'^2y^2 + b'^2x^2 = -a'^2b'^2,$$

qui touche l'ellipse

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

aux deux extrémités de son diamètre couché suivant le nouvel axe des y.

Ainsi les conjuguées qui composent le lieu

$$a^2y^2 + b^2x^2 = -a^2b^2$$

sont encore toutes les hyperboles qui ont, avec l'ellipse

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

un système de diamètres conjugués commun; mais cette ellipse n'en est plus que l'enveloppe imaginaire.

Au reste, la caractéristique d'une quelconque des conjuguées n'est plus, comme pour les conjuguées de l'ellipse réelle, le coefficient angulaire du diamètre non transverse qu'elle a de commun avec l'enveloppe, mais celle du diamètre transverse.

Le renversement de la courbure d'une conjuguée, et le changement dans le mode d'accouplement de ses quatre branches, s'est produit au moment où, l'ellipse s'évanouissant, les quatre sommets ont été un instant confondus et la courbure nulle.

Application aux surfaces du second ordre.

Les conjuguées d'un ellipsoïde sont les hyperboloïdes continus qui ont avec lui un système de trois diamètres conjugués communs.

En effet, si l'on dirige l'axe des z de manière à rendre réelles les abscisses et les ordonnées de la conjuguée qu'on veut obtenir, et ceux des x et des y suivant deux diamètres conjugués de la section faite par le plan diamétral conjugué de l'axe des z, l'équation de la surface deviendra

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{c'^2} = 1;$$

la conjuguée cherchée aura donc son z imaginaire sans partie réelle; par conséquent son équation en coordonnées réelles sera

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} - \frac{z^2}{c'^2} = 1,$$

qui représente l'hyperboloïde à une nappe circonscrit à l'ellipsoïde le long de la section faite dans cette surface par le plan des x, y.

Les conjuguées de l'ellipsoïde remplissent donc tout l'espace, sauf l'intérieur de cet ellipsoïde.

On verrait de même que les conjuguées de l'hyperboloïde à une nappe sont des ellipsoïdes ou des hyperboloïdes à deux nappes, selon que les parallèles à leurs cordes réelles, menées par le centre, sont intérieures ou extérieures au cône asymptote. Chaque conjuguée a encore trois diamètres conjugués communs avec la surface réelle.

Les conjuguées dont les cordes réelles seraient parallèles aux génératrices du cône asymptote sont évanouissantes; mais il convient de remarquer que, lorsque la direction des cordes réelles d'une conjuguée se rapproche de celle d'une génératrice du cône asymptote, la courbe de contact de cette conjuguée avec la surface réelle tend à se réduire à deux droites parallèles, tandis que le diamètre conjugué du plan de cette courbe tend à venir se placer sur ce plan. Suivant donc que la conjuguée limite est considérée comme un ellipsoïde ou un hyperboloïde à deux nappes, elle se réduit elle-même à un cylindre elliptique aplati sur le plan des deux parallèles et dans leur intérieur, ou à un cylindre hyperbolique aplati sur le même plan, mais en dehors des mêmes parallèles. Le double du plan diamétral singulier, correspondant à la direction donnée, forme donc l'ensemble des deux conjuguées évanouissantes.

Les ellipsoïdes conjugués d'un hyperboloïde à une nappe ont pour seconde enveloppe imaginaire l'hyperboloïde à deux nappes supplémentaire; mais chaque conjuguée ne touche cette enveloppe qu'en deux points.

La parallèle menée par le centre aux cordes réelles d'une conjuguée de l'hyperboloïde à deux nappes ne peut être qu'extérieure au cône asymptote, puisque toute parallèle à une droite menée du sommet à l'intérieur de ce cône couperait nécessairement la surface réelle en deux points.

Du reste on verra, comme précédemment, que les conjuguées de l'hyperboloïde à deux nappes sont les hyperboloïdes continus qui ont avec lui un système de diamètres conjugués commun, et le touchent suivant ses sections réelles.

Les conjuguées dont les cordes réelles seraient parallèles aux génératrices du cône asymptote sont évanouissantes. Chacune d'elles s'aplatit sur le plan diamétral singulier correspondant à la direction de ses cordes réelles.

Les conjuguées du paraboloïde elliptique sont les paraboloïdes hyperboliques de mêmes paramètres et opposés à lui par un diamètre commun. Chaque conjuguée touche le paraboloïde elliptique suivant la section faite dans ce paraboloïde par le plan diamétral correspondant aux cordes réelles de la conjuguée. La conjuguée dont les cordes réelles seraient parallèles à l'axe est rejetée à l'infini.

Inversement, les conjuguées du paraboloïde hyperbolique sont les paraboloïdes elliptiques de mêmes paramètres et opposés à lui par un diamètre commun; la courbe de contact entre la surface réelle et l'une de ses conjuguées est toujours la section faite dans cette surface réelle par le plan diamétral correspondant aux cordes réelles de la conjuguée.

Pour déterminer les conjuguées d'un cône du second degré, on pourra l'assimiler à l'un des hyperboloïdes, par exemple à l'hyperboloïde à une nappe; on verra dès lors immédiatement que, si les cordes réelles d'une conjuguée sont parallèles à une droite menée du sommet à l'intérieur du cône, la conjuguée se réduira au sommet; que, si les cordes réelles sont parallèles à une génératrice du cône, la conjuguée se réduira au double du plan tangent mené suivant cette génératrice; enfin que les conjuguées non singulières sont des cônes du second degré ayant même sommet que le cône réel donné.

Pour préciser davantage, il suffira de rappeler ce qui a été dit plus haut sur les sections faites par un plan réel dans une surface et dans ses conjuguées. On verra ainsi que les conjuguées d'un cône du second degré sont tous les cônes qui auraient même sommet et pour directrices, dans tous les plans imaginables, les conjuguées des sections faites par les mêmes plans dans le cône réel, chaque plan sécant fournissant les directrices des cônes conjugués dont les cordes réelles lui seraient parallèles.

En considérant les cylindres du second degré comme des cônes dont les sommets seraient à l'infini, on pourra leur appliquer les considérations précédentes, et l'on en conclura que les conjuguées d'un cylindre du second degré sont tous les cylindres du second degré qui auraient leurs génératrices parallèles aux siennes, et pour directrices, dans tous les plans imaginables, les conjuguées des sections faites par les mêmes plans dans le cylindre réel, chaque plan sécant fournissant les directrices des cylindres conjugués dont les cordes réelles lui seraient parallèles.

Les conjuguées de l'ellipsoïde imaginaire

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$$

sont les hyperboloïdes à deux nappes qui ont, avec l'ellipsoïde réel

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

un système de diamètres conjugués commun. Cet ellipsoïde est l'enveloppe imaginaire des conjuguées de l'ellipsoïde imaginaire.

Le cône imaginaire ou ellipsoïde évanouissant a encore pour conjuguées des cônes du second degré, par cette simple raison que, lorsque l'ellipsoïde se réduit à un point, les hyperboloïdes continus, qui en sont les conjuguées, se transforment en cônes.

Pareillement, les conjuguées du cylindre elliptique imaginaire sont les cylindres qui auraient pour bases, dans tous les plans imaginables, les conjuguées de l'ellipse imaginaire de section.

Quant aux conjuguées du cylindre elliptique évanouissant, ce sont des plans passant tous par l'axe de ce cylindre.

CHAPITRE III.

DE LA LIGNE DROITE ET DU PLAN.

La ligne droite, la circonférence de cercle, etc., en Géométrie plane, le plan, la sphère, en Géométrie à trois dimensions, sont successivement employés à l'étude de plus en plus approfondie des lieux plus compliqués.

Mais, pour que les rapports ou différences qui existent entre deux lieux puissent être mis en évidence par la comparaison de leurs équations, il faut que les équations soient établies dans des conditions pareilles. Si le lieu que l'on veut étudier est représenté en coordonnées imaginaires, il faudra naturellement que celui qui doit servir à cette étude soit représenté aussi en coordonnées imaginaires et dans le même système. Si le lieu que l'on veut étudier est représenté par les solutions de caractéristique C, ou de caractéristiques C et C′ de l'équation qui le comprend avec d'autres, il faudra que le lieu qui servira à l'étudier soit représenté aussi par les solutions de caractéristique C, ou de caractéristiques C et C′ de l'équation qui le figurera avec d'autres.

Il résulte évidemment de là la nécessité d'obtenir, avant tout, les équations de la ligne droite et du plan en coordonnées imaginaires.

Les deux équations

$$y=(m\pm n\sqrt{-1})x+p\pm q\sqrt{-1}$$

réunies forment l'équation

$$(y-mx-p)^2+(nx+q)^2=0,$$

qui est celle d'une ellipse évanouissante réduite à son centre

$$x=-\frac{q}{n},\quad y=-\frac{mq}{n}+p.$$

Les conjuguées du lieu

$$y=(m\pm n\sqrt{-1})x+p\pm q\sqrt{-1}$$

doivent donc coïncider avec les hyperboles, réduites à leurs asymptotes, conjuguées de cette ellipse évanouissante, c'est-à-dire former deux faisceaux de droites issues du point

$$x=-\frac{q}{n},\quad y=-\frac{mq}{n}+p.$$

Il convient au reste de remarquer que, lorsque la caractéristique change, les deux droites qui forment la conjuguée correspondante de l'ellipse évanouissante tournent en même temps autour de leur point de concours fixe et ne se confondent ni, par conséquent, ne s'intervertissent jamais; d'où il résulte que chacune d'elles prend successivement toutes les directions imaginables.

Le faisceau de droites représentées par la seule équation

$$y = (m + n\sqrt{-1})\,x + p + q\sqrt{-1}$$

comprend donc toutes les droites qu'on peut mener du point

$$x = -\frac{q}{n}, \quad y = -\frac{mq}{n} + p$$

et, par conséquent, recouvre tout le plan du tableau, sauf, bien entendu, les cas particuliers.

L'équation en coordonnées réelles de la droite, de caractéristique C, du faisceau

$$y = (m + n\sqrt{-1})\,x + p + q\sqrt{-1},$$

résultera de l'élimination de α, β et α' entre les équations

$$(1, 2) \qquad \alpha' + \beta C\sqrt{-1} = (m + n\sqrt{-1})(\alpha + \beta\sqrt{-1}) + p + q\sqrt{-1},$$

$$(3) \qquad x = \alpha + \beta,$$

$$(4) \qquad y = \alpha' + \beta C,$$

d'où l'on tire

$$y = \left(m + n + \frac{2n^2}{m - n - C}\right) x + p + q + \frac{2qn}{m - n - C}.$$

Cette équation donne lieu à plusieurs remarques :

On voit d'abord que le coefficient angulaire varie en général avec C, de manière à pouvoir prendre toutes les valeurs, ce qui confirme ce qui a été dit plus haut.

Si l'on fait C infini, l'équation se réduit à

$$y = (m + n)\,x + p + q,$$

c'est-à-dire que la conjuguée à abscisses réelles du lieu se forme en remplaçant $\sqrt{-1}$ par 1 dans l'équation de ce lieu. Ce résultat sera fréquemment utilisé, parce que, en général, dans les démonstrations théoriques, on ramènera habituellement la conjuguée qu'on voudra étudier du lieu en discussion à avoir ses abscisses réelles.

Nous donnerons habituellement le nom de faisceau *elliptique* au faisceau représenté par l'équation générale du premier degré. Son équation, aussi simplifiée que possible, se réduit à

$$y = n\sqrt{-1}\,x,$$

n étant moindre que 1, si l'ellipse évanouissante dont les diamètres forment ce faisceau a été rapportée à ses axes et que le grand axe ait été pris pour axe des x.

Nous dirons que le faisceau est *circulaire* lorsque l'ellipse évanouissante qui lui correspondrait sera un cercle. Un pareil faisceau, quel que soit le système d'axes rectangulaires auquel on le rapporte, aura toujours son coefficient angulaire égal à $\sqrt{-1}$; il sera représenté par

$$y = \pm\sqrt{-1}\,x + p + q\sqrt{-1}.$$

Enfin le faisceau sera parabolique si l'ellipse qui lui correspondrait a l'un de ses axes infiniment petit par rapport à l'autre, c'est-à-dire si le coefficient angulaire de ce faisceau est réel. L'équation générale des faisceaux paraboliques est

$$y = mx + p + q\sqrt{-1};$$

un pareil faisceau est composé de droites repliées toutes les unes sur les autres; en effet, si dans l'équation

$$y = mx + p + q\sqrt{-1}$$

on fait

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad y = \alpha' + \beta C\sqrt{-1},$$

il vient

$$\alpha' = m\alpha + p \quad \text{et} \quad \beta C = m\beta + q,$$

d'où, en ajoutant,

$$\alpha' + \beta C = m(\alpha + \beta) + p + q,$$

c'est-à-dire, suivant notre notation habituelle,

$$y_1 = mx_1 + p + q.$$

Le faisceau parabolique donne encore lieu à une autre remarque importante, qui sera utilisée dans la théorie des asymptotes; l'équation

$$\beta C = m\beta + q,$$

qui donne

$$\beta = \frac{q}{C - m},$$

montre que, tout le long d'une même droite du faisceau, les parties imaginaires des coordonnées sont absolument constantes. Elles sont d'ailleurs infinies sur la droite dont la caractéristique est le coefficient même du faisceau.

L'équation

$$y = (m + n\sqrt{-1})\,x + p + q\sqrt{-1}$$

ne saurait être considérée comme l'équation la plus générale de la ligne droite, en coordonnées imaginaires; mais il n'est pas de circonstances où elle puisse être insuffisante, par la raison toute simple que chacune des droites qu'elle représente pourra être assujettie à passer par deux points donnés à volonté par leurs coordonnées imaginaires, pourvu que ces deux points aient même caractéristique, ce qui est la condition indispensable pour qu'ils puissent faire partie des données d'une même question.

Du plan.

L'équation générale du premier degré à trois variables

$$(M + N\sqrt{-1})\,x + (P + Q\sqrt{-1})\,y + (R + S\sqrt{-1})\,z + H = 0$$

représente des plans qui se coupent tous suivant la droite

$$Mx + Py + Rz + H = 0,$$
$$Nx + Qy + Sz = 0,$$

et dont l'équation générale, en coordonnées réelles, est

$$(Mx + Py + Rz + H) + (Nx + Qy + Sz)\frac{(M+N)C' + (P+Q)C + (R+S)CC'}{(M-N)C' + (P-Q)C + (R-S)CC'} = 0;$$

les trois formes principales de cette équation sont

$$(Mx+Py+Rz+H)+(Nx+Qy+Sz)\frac{R+S}{R-S}=0,$$

$$(Mx+Py+Rz+H)+(Nx+Qy+Sz)\frac{P+Q}{P-Q}=0,$$

$$(Mx+Py+Rz+H)+(Nx+Qy+Sz)\frac{M+N}{M-N}=0;$$

elles représentent les plans conjugués dont les x et y, ou les x et z, ou les y et z, sont réels.

L'équation

$$(M+N\sqrt{-1})x+(P+Q\sqrt{-1})y+(R+S\sqrt{-1})z+H=0,$$

contenant six paramètres arbitraires, suffira à la représentation du plan dans toutes les circonstances possibles, puisqu'un plan représenté par cette équation pourra toujours être assujetti à passer par trois points donnés à volonté, géométriquement et analytiquement.

De la ligne droite.

Deux équations à trois variables, à coefficients réels ou imaginaires, prises au hasard, ne fourniraient généralement qu'un nombre limité de solutions appartenant à un même système [C, C′]; pour que le contraire arrivât, il faudrait que les quatre équations dans lesquelles se décomposeraient les proposées, lorsqu'on y supposerait les variables imaginaires et telles que les rapports deux à deux de leurs parties imaginaires fussent des nombres donnés, C et C′, se réduisissent à trois; et dans ce cas, en général, C et C′ dépendraient l'un de l'autre.

On pourrait rechercher, d'après ces indications, les conditions auxquelles devraient satisfaire les équations de deux onglets de plans imaginaires, pour que leur intersection totale se composât de séries de points de mêmes caractéristiques ou de lignes droites.

Mais l'intersection totale de deux lieux n'étant en rien changée lorsqu'on substitue au système de leurs équations tout autre système équivalent, nous pourrons supposer que des équations proposées, en éliminant entre elles successivement y et x, on ait tiré deux équations telles que

$$x = (m + n\sqrt{-1})z + p + q\sqrt{-1},$$
$$y = (m' + n'\sqrt{-1})z + p' + q'\sqrt{-1};$$

la condition cherchée alors s'obtiendra en éliminant α, α', α'' entre

$$\alpha = m\alpha'' - n\beta'' + p,$$
$$\alpha' = m'\alpha'' - n'\beta'' + p',$$
$$\frac{\beta''}{C} = m\beta'' + n\alpha'' + q,$$
$$\frac{\beta''}{C'} = m'\beta'' + n'\alpha'' + q',$$

et exprimant que l'équation résultante en β'' est identiquement satisfaite.

Or l'élimination de α'' entre les deux dernières donne

$$\beta''\left(\frac{n'}{C} - \frac{n}{C'} - mn' + m'n\right) = qn' - q'n;$$

les conditions cherchées sont donc

$$qn' - q'n = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{q}{q'} = \frac{n}{n'}$$

et

$$\frac{n'}{C} - \frac{n}{C'} = mn' - m'n.$$

La première doit être remplie par les coefficients des équations des deux plans, et la seconde lie entre elles les caractéristiques d'une des droites d'intersection.

En supposant $\frac{q}{q'} = \frac{n}{n'}$ dans les équations

$$x = (m + n\sqrt{-1})z + p + q\sqrt{-1}$$

et

$$y = (m' + n'\sqrt{-1})z + p' + q'\sqrt{-1},$$

on pourrait tirer de leur système, en les retranchant membre à membre, une équation à coefficients réels. L'intersection totale se composerait donc d'un faisceau ou de droites.

Les équations générales de la droite dans l'espace seront, d'après ce qu'on vient de voir,

$$x = (m + n\sqrt{-1})z + p + p\sqrt{-1}$$

et

$$y = (m' + nk\sqrt{-1})z + p' + qk\sqrt{-1},$$

et les caractéristiques d'une des droites représentées par ce système d'équations seront liées entre elles par la relation

$$\frac{k}{C} - \frac{1}{C'} = mk - m'.$$