ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

J. DIXMIER

Homologie des anneaux de Lie

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 74, nº 1 (1957), p. 25-83

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1957_3_74_1_25_0>

HOMOLOGIE DES ANNEAUX DE LIE

PAR M. J. DIXMIER.

INTRODUCTION.

Soit A un anneau de Lie, c'est-à-dire un groupe abélien muni d'une multiplication, notée $(x, y) \to [x, y]$, doublement distributive par rapport à l'addition, telle que $[x, x] = 0$, et vérifiant l'identité de Jacobi. Soit Θ un A-module. Le groupe de cohomologie ordinaire $H^2(A, \Theta)$ sert à classer les extensions B de A par Θ qui possèdent la propriété suivante : le groupe abélien B est une extension inessentielle du groupe abélien A par le groupe abélien Θ. Nous nous proposons de définir de nouveaux groupes de cohomologie, que nous noterons $HJ^n(A, \Theta)$, tels que $HJ^2(A, \Theta)$ permette de classer *toutes* les extensions de A par Θ. Nous ne résoudrons d'ailleurs ce problème que si A est sans 2-torsion, c'est-à-dire si la relation $2x = 0$ dans A entraîne $x = 0$.

Pour définir les $HJ^n(A, \Theta)$, nous construirons un complexe standard. Un complexe analogue, pour les anneaux associatifs, a été obtenu récemment par S. MacLane. Les conseils de S. MacLane m'ont d'ailleurs été précieux pour la rédaction de cet article.

Notations.

On désignera par $\mathbf{P}$ l'ensemble des suites finies non vides d'entiers ≥ 2, par $\mathbf{P}'$ le sous-ensemble de $\mathbf{P}$ formé d'une part de la suite réduite à (2), d'autre part des suites finies non vides et non croissantes d'entiers ≥ 3. Si $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_h \in \mathbf{P}$, on désignera par $(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_h)$ l'élément de $\mathbf{P}$ obtenu en juxtaposant les suites $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_h$ (dans cet ordre).

Pour $n = 2, 3, \ldots, \mathfrak{S}_n$ (resp. $\mathfrak{A}_n$) désignera le groupe des permutations (resp. des permutations paires) de $\{1, 2, \ldots, n\}$. On notera $(i_1, \ldots, i_n)$ l'élément $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ tel que $\sigma(1) = i_1, \ldots, \sigma(n) = i_n$. On appellera transposition une permutation qui échange deux entiers distincts et laisse les autres entiers fixes. On désignera par $\mathfrak{Sf}(p, q)$ l'ensemble des permutations $(i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_q) \in \mathfrak{S}_{p+q}$ telles que $i_1 < \ldots < i_p, j_1 < \ldots < j_q$; par

$\mathfrak{Sf}(p, q, r)$ l'ensemble des permutations $(i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_q; k_1, \ldots, k_r) \in \mathfrak{S}_{p+q+r}$ telles que

$$i_1 < \ldots < i_p, \qquad j_1 < \ldots < j_q, \qquad k_1 < \ldots < k_r.$$

Pour $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_h) \in \mathbf{P}$, on désignera par $\mathfrak{S}_{\mathbf{p}}$ (resp. $\mathfrak{A}_{\mathbf{p}}$) le groupe $\mathfrak{S}_{p_1} \times \ldots \times \mathfrak{S}_{p_h}$ (resp. $\mathfrak{A}_{p_1} \times \ldots \times \mathfrak{A}_{p_h}$). Les éléments neutres de tous ces groupes seront désignés par e. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on désignera par ε_σ la signature de σ, égale à $+1$ si σ est paire, à -1 si σ est impaire. Pour $\mathbf{s} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_h) \in \mathfrak{S}_{\mathbf{p}}$, on posera $\varepsilon_{\mathbf{s}} = \varepsilon_{\sigma_1} \ldots \varepsilon_{\sigma_h}$. Pour $\mathbf{s}, \mathbf{s}' \in \mathfrak{S}_p$, on a $\varepsilon_{\mathbf{s}\mathbf{s}'} = \varepsilon_{\mathbf{s}} \varepsilon_{\mathbf{s}'}$.

Pour tout entier n, on emploiera pour $(-1)^n$ le symbole $\mathfrak{p}(n)$ d'Eilenberg-Mac Lane.

Soit A un anneau de Lie. Si $x_1, \ldots, x_n \in A$, on désignera par $[x_1, \ldots, x_n]$ le crochet itéré défini inductivement par la formule $[x_1, \ldots, x_n] = [[x_1, \ldots, x_{n-1}], x_n]$.

On désignera par $\mathbf{Z}$ l'anneau des entiers rationnels.

Pour éviter des difficultés typographiques, nous écrirons, par exemple

$$\Sigma \{ (i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_{n-p}) \in \mathfrak{Sf}(p, n-p),\ 1 < p < n,\ 1 \leqq q \leqq n-p \} \ldots$$

au lieu de

$$\sum_{(i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_{n-p}) \in \mathfrak{Sf}(p, n-p), 1<p<n, 1 \leqq q \leqq n-p} \ldots.$$

CHAPITRE I.

Les groupes $H\mathfrak{J}_n(A)$ associés a un groupe abélien A.

Nous allons d'abord définir une théorie de l'homologie des groupes abéliens, adaptée à l'étude ultérieure de l'homologie des anneaux de Lie.

1. Les groupes $Z_{\mathbf{p}}(A)$ et les homomorphismes $\Phi_{\mathbf{s}}$, Ψ_τ, Ω^i_σ. — Soit A un groupe abélien. Pour $\mathbf{p} \in \mathbf{P}$, on désignera par $K_{\mathbf{p}}(A)$ l'ensemble des applications de $\mathfrak{S}_{\mathbf{p}}$ dans A, et par $Z_{\mathbf{p}}(A)$ le groupe abélien libre engendré par les éléments de $K_{\mathbf{p}}(A)$. Soit $K(A)$ la réunion des $K_{\mathbf{p}}(A)$ pour $\mathbf{p} \in \mathbf{P}$. Soit $Z(A)$ la somme directe des $Z_{\mathbf{p}}(A)$ pour $\mathbf{p} \in \mathbf{P}$, somme directe qui admet $K(A)$ pour base. Soit

$$Z^n(A) = \Sigma \{ (p_1, \ldots, p_h) \in \mathbf{P},\ p_1 + \ldots + p_h - 2h = n \} Z_{(p_1, \ldots, p_h)}(A).$$

Alors, $Z(A)$ est somme directe des $Z^n(A)$ pour $n \geqq 0$, et $Z(A)$ sera considéré comme gradué par les $Z^n(A)$. Un élément de $Z^n(A)$ sera dit homogène de *degré* n. D'autre part, tout élément de $Z(A)$ sera considéré comme d'*ordre* 1. On appellera *degré total* la somme de l'ordre et du degré.

Si $a \in K_{\mathbf{p}}(A)$ et $a' \in K_{\mathbf{p}}(A)$, la fonction $s \to a(s) + a'(s)$ est un élément de $K_{\mathbf{p}}(A)$. Il y a donc lieu de distinguer entre les opérations « formelles » d'addition et de soustraction dans $Z_{\mathbf{p}}(A)$, et les opérations « fonctionnelles ».

On emploiera les signes $+$ et $-$ pour les opérations formelles, les signes $\boldsymbol{+}$ et $\boldsymbol{-}$ pour les opérations fonctionnelles.

Pour $\mathbf{p}\in\mathbf{P}$ et $\mathbf{s}\in\mathfrak{S}_\mathbf{p}$, soient $\Phi_\mathbf{s}$, $\Phi'_\mathbf{s}$ les automorphismes du groupe $\mathrm{Z}_\mathbf{p}(\mathrm{A})$ qui permutent entre eux les éléments de $\mathrm{K}_\mathbf{p}(\mathrm{A})$ et qui sont tels que

$$(\Phi_\mathbf{s}a)(\mathbf{t})=a(\mathbf{s}^{-1}\mathbf{t}),\qquad (\Phi'_\mathbf{s}a)(\mathbf{t})=\varepsilon_\mathbf{s}a(\mathbf{s}^{-1}\mathbf{t})$$

pour tout $a\in\mathrm{K}_\mathbf{p}(\mathrm{A})$.

Lemme 1. — $\Phi'_\mathbf{s}\Phi'_{\mathbf{s}'}=\Phi'_{\mathbf{ss}'}$.

En effet, on a

$$(\Phi'_\mathbf{s}\Phi'_{\mathbf{s}'}a)(\mathbf{t})=\varepsilon_\mathbf{s}(\Phi'_{\mathbf{s}'}a)(\mathbf{s}^{-1}\mathbf{t})=\varepsilon_\mathbf{s}\varepsilon_{\mathbf{s}'}a(\mathbf{s}'^{-1}\mathbf{s}^{-1}\mathbf{t})=\varepsilon_{\mathbf{ss}'}a((\mathbf{ss}')^{-1}\mathbf{t})=(\Phi'_{\mathbf{ss}'}a)(\mathbf{t}),$$

d'où le lemme.

Soient $\mathbf{p}=(p_1,\,\ldots,\,p_h)\in\mathbf{P}$, $\tau\in\mathfrak{S}_h$, $\mathbf{p}'=(p_{\tau^{-1}(1)},\,\ldots,\,p_{\tau^{-1}(h)})\in\mathbf{P}$. Nous allons définir des isomorphismes Ψ_τ, Ψ'_τ du groupe $\mathrm{Z}_\mathbf{p}(\mathrm{A})$ sur le groupe $\mathrm{Z}_{\mathbf{p}'}(\mathrm{A})$, consistant à « permuter les variables ». Pour cela, on définit, pour tout $a\in\mathrm{K}_\mathbf{p}(\mathrm{A})$, les éléments $\Psi_\tau a$, $\Psi'_\tau a\in\mathrm{K}_{\mathbf{p}'}(\mathrm{A})$ par les formules

$$(\Psi_\tau a)(\sigma_{\tau^{-1}(1)},\,\ldots,\,\sigma_{\tau^{-1}(h)})=a(\sigma_1,\,\ldots,\,\sigma_h),$$
$$(\Psi'_\tau a)(\sigma_{\tau^{-1}(1)},\,\ldots,\,\sigma_{\tau^{-1}(h)})=\mathfrak{p}\big(\textstyle\sum_{i<j,\,\tau(i)>\tau(j)}p_ip_j\big)\,a(\sigma_1,\,\ldots,\,\sigma_h),$$

où $\sigma_1\in\mathfrak{S}_{p_1},\,\ldots,\,\sigma_h\in\mathfrak{S}_{p_h}$.

Lemme 2. — $\Psi'_\tau\Psi'_{\tau'}=\Psi'_{\tau\tau'}$.

En effet, on a $\Psi'_\tau\Psi'_{\tau'}a\in\mathrm{K}_{(p_{\tau'^{-1}\tau^{-1}(1)},\,\ldots,\,p_{\tau'^{-1}\tau^{-1}(h)})}(\mathrm{A})$, et

$$\begin{aligned}(\Psi'_\tau\Psi'_{\tau'}a)(\sigma_{\tau'^{-1}\tau^{-1}(1)},\,\ldots,\,\sigma_{\tau'^{-1}\tau^{-1}(h)})&=\mathfrak{p}(n)\,(\Psi'_{\tau'}a)(\sigma_{\tau'^{-1}(1)},\,\ldots,\,\sigma_{\tau'^{-1}(h)})\\&=\mathfrak{p}(n)\,\mathfrak{p}(n')\,a(\sigma_1,\,\ldots,\,\sigma_h),\end{aligned}$$

avec

$$n=\textstyle\sum_{i<j,\,\tau(i)>\tau(j)}p_{\tau'^{-1}(i)}p_{\tau'^{-1}(j)}=\sum_{\tau'(i)<\tau'(j),\,\tau\tau'(i)>\tau\tau'(j)}p_ip_j=\sum_{\tau'(i)>\tau'(j),\,\tau\tau'(i)<\tau\tau'(j)}p_ip_j,$$
$$n'=\textstyle\sum_{i<j,\,\tau'(i)>\tau'(j)}p_ip_j.$$

On a alors

$$\begin{aligned}n'+n=\;&\textstyle\sum\{\,i<j,\,\tau'(i)>\tau'(j),\,\tau\tau'(i)<\tau\tau'(j)\,\}p_ip_j\\&+\textstyle\sum\{\,i<j,\,\tau'(i)>\tau'(j),\,\tau\tau'(i)>\tau\tau'(j)\,\}p_ip_j\\&+\textstyle\sum\{\,i<j,\,\tau'(i)>\tau'(j),\,\tau\tau'(i)<\tau\tau'(j)\,\}p_ip_j\\&+\textstyle\sum\{\,i>j,\,\tau'(i)>\tau'(j),\,\tau\tau'(i)<\tau\tau'(j)\,\}p_ip_j\\\equiv\;&\textstyle\sum\{\,i<j,\,\tau'(i)>\tau'(j),\,\tau\tau'(i)>\tau\tau'(j)\,\}p_ip_j\\&+\textstyle\sum\{\,i>j,\,\tau'(i)>\tau'(j),\,\tau\tau'(i)<\tau\tau'(j)\,\}p_ip_j\qquad(\mathrm{mod}\,2),\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}n'+n\equiv\;&\textstyle\sum\{\,i<j,\,\tau'(i)>\tau'(j),\,\tau\tau'(i)>\tau\tau'(j)\,\}p_ip_j\\&+\textstyle\sum\{\,i<j,\,\tau'(i)<\tau'(j),\,\tau\tau'(i)>\tau\tau'(j)\,\}p_ip_j=\sum_{i<j,\,\tau\tau'(i)>\tau\tau'(j)}p_ip_j.\end{aligned}$$

D'où le lemme.

Lemme 3. — *Soient* $\mathbf{p}=(p_1,\,\ldots,\,p_h)\in\mathbf{P}$, $\mathbf{t}=(\tau_1,\,\ldots,\,\tau_h)\in\mathfrak{S}_\mathbf{p}$, $\rho\in\mathfrak{S}_h$, $\mathbf{t}'=(\tau_{\rho^{-1}(1)},\,\ldots,\,\tau_{\rho^{-1}(h)})$. *On a* $\Psi'_\rho\Phi'_\mathbf{t}=\Phi'_{\mathbf{t}'}\Psi'_\rho$.

En effet,

$$(\Psi'_\rho \Phi'_{\mathbf{t}}\, a)(\sigma_{\rho^{-1}(1)}, \ldots, \sigma_{\rho^{-1}(h)}) = \mathfrak{p}(n)(\Phi'_{\mathbf{t}}\, a)(\sigma_1, \ldots, \sigma_h) = \mathfrak{p}(n)\,\varepsilon_{\mathbf{t}}\, a(\tau_1^{-1}\sigma_1, \ldots, \tau_h^{-1}\sigma_h)$$

$$(\Phi'_{\mathbf{t}'}\Psi'_\rho a)(\sigma_{\rho^{-1}(1)}, \ldots, \sigma_{\rho^{-1}(h)}) = \varepsilon_{\mathbf{t}'}(\Psi'_\rho a)(\tau_{\rho^{-1}(1)}^{-1}\sigma_{\rho^{-1}(1)}, \ldots, \tau_{\rho^{-1}(h)}^{-1}\sigma_{\rho^{-1}(h)})$$
$$= \varepsilon_{\mathbf{t}'}\,\mathfrak{p}(n')\,a(\tau_1^{-1}\sigma_1, \ldots, \tau_h^{-1}\sigma_h).$$

Il est clair que $\varepsilon_{\mathbf{t}} = \varepsilon_{\mathbf{t}'}$. D'autre part,

$$n' = \Sigma_{i<j,\, \rho(i)>\rho(j)}\, p_i p_j = n.$$

D'où le lemme.

Soient $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_h) \in \mathbf{P}$, avec $h > 1$, $i \in \{1, 2, \ldots, h\}$, et

$$\mathbf{p}' = (p_1, \ldots, p_{i-1}, p_{i+1}, \ldots, p_h) \in \mathbf{P}.$$

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_{p_i}$. Nous allons définir un homomorphisme Ω^i_σ du groupe $Z_{\mathbf{p}}(A)$ sur le groupe $Z_{\mathbf{p}'}(A)$ consistant à « fixer la $i^{\text{ième}}$ variable égale à σ ». Pour cela, on définit, pour tout $a \in K_{\mathbf{p}}(A)$, l'élément $\Omega^i_\sigma a \in K_{\mathbf{p}'}(A)$, par la formule

$$(\Omega^i_\sigma a)(\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_h) = a(\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, \sigma, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_h).$$

Dans les énoncés des lemmes 4 et 5, les signes qui interviennent ont une signification fonctionnelle et non formelle.

Lemme 4. — *Soient*

$$\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_h) \in \mathbf{P} \qquad (\tau_1, \ldots, \tau_h) \in \mathfrak{S}_{\mathbf{p}}, \qquad i \in \{1, 2, \ldots, h\}, \qquad \sigma \in \mathfrak{S}_{p_i}.$$

On a

$$\Omega^i_\sigma \Phi'_{(\tau_1, \ldots, \tau_h)} = \varepsilon_{\tau_i} \Phi'_{(\tau_1, \ldots, \tau_{i-1}, \tau_{i+1}, \ldots, \tau_h)} \Omega^i_{\tau_i^{-1}\sigma}.$$

En effet,

$$\begin{aligned}
&(\Omega^i_\sigma \Phi'_{(\tau_1, \ldots, \tau_h)} a)(\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_h)\\
&\quad = (\Phi'_{(\tau_1, \ldots, \tau_h)} a)(\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, \sigma, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_h)\\
&\quad = \varepsilon_{\tau_1} \ldots \varepsilon_{\tau_h} a(\tau_1^{-1}\sigma_1, \ldots, \tau_{i-1}^{-1}\sigma_{i-1}, \tau_i^{-1}\sigma, \tau_{i+1}^{-1}\sigma_{i+1}, \ldots, \tau_h^{-1}\sigma_h)\\
&\quad = \varepsilon_{\tau_1} \ldots \varepsilon_{\tau_h} (\Omega^i_{\tau_i^{-1}\sigma} a)(\tau_1^{-1}\sigma_1, \ldots, \tau_{i-1}^{-1}\sigma_{i-1}, \tau_{i+1}^{-1}\sigma_{i+1}, \ldots, \tau_h^{-1}\sigma_h)\\
&\quad = \varepsilon_{\tau_i} (\Phi'_{(\tau_1, \ldots, \tau_{i-1}, \tau_{i+1}, \ldots, \tau_h)} \Omega^i_{\tau_i^{-1}\sigma} a)(\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_h),
\end{aligned}$$

d'où le lemme.

Lemme 5. — *Soient* $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_h) \in \mathbf{P}$, $\tau \in \mathfrak{S}_h$, $\sigma \in \mathfrak{S}_{p_{\tau^{-1}(i)}}$. *On a*

$$\Omega^i_\sigma \Psi'_\tau = \mathfrak{p}(\Sigma_{\tau^{-1}(i)<k,\, i>\tau(k)}\, p_{\tau^{-1}(i)} p_k + \Sigma_{\tau^{-1}(i)>k,\, i<\tau(k)}\, p_{\tau^{-1}(i)} p_k)\, \Psi'_{\tau'} \Omega^{\tau^{-1}(i)}_\sigma,$$

où $\tau' \in \mathfrak{S}_{h-1}$ *est défini de la manière suivante : soient* θ *l'unique application croissante de* $\{1, \ldots, h-1\}$ *sur* $\{1, \ldots, \tau^{-1}(i)-1, \tau^{-1}(i)+1, \ldots, h\}$, *et* η *la permutation de* $\{1, \ldots, \tau^{-1}(i)-1, \tau^{-1}(i)+1, \ldots, h\}$ *qui transforme le* $k^{\text{ième}}$ *terme de la suite* $(1, \ldots, \tau^{-1}(i)-1, \tau^{-1}(i)+1, \ldots, h)$ *en le* $k^{\text{ième}}$ *terme de la suite* $(\tau^{-1}(1), \ldots, \tau^{-1}(i-1), \tau^{-1}(i+1), \ldots, \tau^{-1}(h))$; *alors,* $\tau'^{-1} = \theta^{-1}\eta\theta$.

En effet,

$$\begin{aligned}
&(\Omega_\sigma^i \Psi'_\tau a)(\sigma_{\tau^{-1}(1)}, \ldots, \sigma_{\tau^{-1}(i-1)}, \sigma_{\tau^{-1}(i+1)}, \ldots, \sigma_{\tau^{-1}(h)})\\
&\quad = (\Psi'_\tau a)(\sigma_{\tau^{-1}(1)}, \ldots, \sigma_{\tau^{-1}(i-1)}, \sigma, \sigma_{\tau^{-1}(i+1)}, \ldots, \sigma_{\tau^{-1}(h)})\\
&\quad = p(\Sigma_{j<k, \tau(j)>\tau(k)} p_j p_k)\, a(\sigma_1, \ldots, \sigma_{\tau^{-1}(i)-1}, \sigma, \sigma_{\tau^{-1}(i)+1}, \ldots, \sigma_h)\\
&\quad = p(\Sigma_{j<k, \tau(j)>\tau(k)} p_j p_k)\, (\Omega_\sigma^{\tau^{-1}(i)} a)(\sigma_1, \ldots, \sigma_{\tau^{-1}(i)-1}, \sigma_{\tau^{-1}(i)+1}, \ldots, \sigma_h)\\
&\quad = p(\Sigma_{\tau^{-1}(i)<k, i>\tau(k)} p_{\tau^{-1}(i)} p_k + \Sigma_{\tau^{-1}(i)>k, i<\tau(k)} p_{\tau^{-1}(i)} p_k)\\
&\qquad . (\Psi'_{\tau'} \Omega_\sigma^{\tau^{-1}(i)} a)(\sigma_{\tau^{-1}(1)}, \ldots, \sigma_{\tau^{-1}(i-1)}, \sigma_{\tau^{-1}(i+1)}, \ldots, \sigma_{\tau^{-1}(h)}),
\end{aligned}$$

d'où le lemme.

2. Les groupes $Y_{\mathbf{p}}(A)$. — Soient L un anneau de Lie, $x_1, \ldots, x_n$ des éléments de $L (n \geqq 2)$. Pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, soit $y_\sigma = [x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}]$. Soit η un homomorphisme d'un sous-groupe de L dans le groupe abélien A, défini aux points y_σ. L'application $\sigma \to \eta(y_\sigma)$ de $\mathfrak{S}_n$ dans A sera notée $(L, \eta; x_1, \ldots, x_n)$. On notera $J_n(A)$ l'ensemble des applications de $\mathfrak{S}_n$ dans A du type précédent.

Lemme 6. — *Soit* $L(X_1, \ldots, X_n)$ *l'anneau de Lie libre engendré sur* $\mathbf{Z}$ *par les indéterminées* $X_1, \ldots, X_n$. *Soit* $a \in K_n(A)$. *Pour que* $a \in J_n(A)$, *il faut et il suffit que toute relation* $\mathbf{Z}$*-linéaire vérifiée par les* $[X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(n)}]$ (*où* σ *parcourt* $\mathfrak{S}_n$) *soit vérifiée par les* $a(\sigma)$.

Si a vérifie la condition du lemme, il existe un homomorphisme η du sous-groupe de $L(X_1, \ldots, X_n)$ engendré par les $[X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(n)}]$ dans A tel que $a(\sigma) = \eta([X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(n)}])$ pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, donc

$$a = (L(X_1, \ldots, X_n), \eta; X_1, \ldots, X_n) \in J_n(A).$$

Réciproquement, si $a = (L, \eta'; x_1, \ldots, x_n)$, toute relation $\mathbf{Z}$-linéaire vérifiée par les $[X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(n)}]$ est vérifiée par les $[x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}]$, donc par les $a(\sigma)$.

Soit $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_h) \in \mathbf{P}$. On désignera par $J_{\mathbf{p}}(A)$ l'ensemble des $a \in K_{\mathbf{p}}(A)$ tels que, pour tout $i = 1, \ldots, h$, l'application partielle $\sigma_i \to a(\sigma_1, \ldots, \sigma_i, \ldots, \sigma_h)$ de $\mathfrak{S}_{p_i}$ dans A, où l'on fixe arbitrairement les variables $\sigma_k \in \mathfrak{S}_{p_k}$ pour $k \neq i$, appartient à $J_{p_i}(A)$. Si $\mathbf{p} = (n)$, on retrouve l'ensemble $J_n(A)$. Soit $J(A)$ la réunion des $J_{\mathbf{p}}(A)$ pour $\mathbf{p} \in \mathbf{P}$. Les éléments de $J(A)$ seront appelés applications jacobiennes (à valeurs dans A). On désignera par $Y_{\mathbf{p}}(A)$ le groupe abélien libre engendré par les éléments de $J_{\mathbf{p}}(A)$; ce groupe est un sous-groupe de $Z_{\mathbf{p}}(A)$. La somme directe des $Y_{\mathbf{p}}(A)$ sera désignée par $Y(A)$; elle admet $J(A)$ pour base; on posera

$$Y^n(A) = \Sigma \{ (p_1, \ldots, p_h) \in \mathbf{P}, p_1 + \ldots + p_h - 2h = n \} Y_{\mathbf{p}}(A).$$

On a $Y(A) \subset Z(A)$, $Y^n(A) \subset Z^n(A)$. Le degré, l'ordre et le degré total sur $Z(A)$ induisent un degré, un ordre et un degré total sur $Y(A)$.

La somme ou la différence (au sens fonctionnel) de deux éléments de $J_{\mathbf{p}}(A)$ appartient à $J_{\mathbf{p}}(A)$, comme il résulte aussitôt du lemme 6.

LEMME 7. — *Soient* $\mathbf{p}=(p_1, \ldots, p_h)\in\mathbf{P}$, $a\in J_{\mathbf{p}}(A)$, $i\in\{1, \ldots, h\}$, π_0 *l'élément de* $\mathfrak{S}_{p_i}$ *qui consiste à transposer* 1 *et* 2. *Alors,*

$$a(\sigma_1, \ldots, \sigma_i, \ldots, \sigma_h) = -a(\sigma_1, \ldots, \sigma_i\pi_0, \ldots, \sigma_h).$$

Il en résulte que a est parfaitement déterminée par sa restriction à $\mathfrak{A}_{\mathbf{p}}$.

En effet, soit b l'application de $\mathfrak{S}_{p_i}$ dans A obtenue en fixant $\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_h$. On a $b\in J_{p_i}(A)$, donc $b=(L, \eta; x_1, \ldots, x_{p_i})$. Alors

$$\begin{aligned} b(\sigma_i\pi_0) = \eta([x_{\sigma_i\pi_0(1)}, x_{\sigma_i\pi_0(2)}, \ldots, x_{\sigma_i\pi_0(p_i)}]) &= \eta([x_{\sigma_i(2)}, x_{\sigma_i(1)}, x_{\sigma_i(3)}, \ldots, x_{\sigma_i(p_i)}]) \\ &= -\eta([x_{\sigma_i(1)}, x_{\sigma_i(2)}, x_{\sigma_i(3)}, \ldots, x_{\sigma_i(p_i)}]) = -b(\sigma_i). \end{aligned}$$

D'où le lemme.

LEMME 8. — *Soient* $a=(L, \eta; x_1, \ldots, x_n)$ *et* $\tau\in\mathfrak{S}_n$. On a

$$\Phi_\tau a = (L, \eta; x_{\tau^{-1}(1)}, \ldots, x_{\tau^{-1}(n)}).$$

En effet, on a

$$(\Phi_\tau a)(\sigma) = a(\tau^{-1}\sigma) = \eta([x_{\tau^{-1}\sigma(1)}, \ldots, x_{\tau^{-1}\sigma(n)}]).$$

D'autre part, si $y_i = x_{\tau^{-1}(i)}$ et $b=(L, \eta; x_{\tau^{-1}(1)}, \ldots, x_{\tau^{-1}(n)})$, on a

$$b(\sigma) = \eta([y_{\sigma(1)}, \ldots, y_{\sigma(n)}]) = \eta([x_{\tau^{-1}\sigma(1)}, \ldots, x_{\tau^{-1}\sigma(n)}]).$$

D'où le lemme.

LEMME 9. — *Soient* $\mathbf{p}\in\mathbf{P}$, $a\in J_{\mathbf{p}}(A)$, $\mathbf{t}\in\mathfrak{S}_{\mathbf{p}}$. *Alors,*

$$\Phi_{\mathbf{t}}a\in J_{\mathbf{p}}(A), \qquad \Phi'_{\mathbf{t}}a\in J_{\mathbf{p}}(A).$$

En effet, si l'on fixe toutes les variables sauf une dans $\Phi_{\mathbf{t}}a$, l'application obtenue est, d'après le lemme 4, du type $\Phi_\tau b$, où b est jacobienne. Alors, $\Phi_\tau b$ est jacobienne d'après le lemme 8. Donc $\Phi_{\mathbf{t}}a\in J_{\mathbf{p}}(A)$ par définition de $J_{\mathbf{p}}(A)$ et, par suite, $\Phi'_{\mathbf{t}}a\in J_{\mathbf{p}}(A)$.

LEMME 10. — *Soient*

$$\mathbf{p}=(p_1, \ldots, p_h)\in\mathbf{P}, \qquad a\in J_{\mathbf{p}}(A), \qquad \tau\in\mathfrak{S}_h, \qquad \mathbf{p}'=(p_{\tau^{-1}(1)}, \ldots, p_{\tau^{-1}(h)})\in\mathbf{P}.$$

Alors

$$\Psi_\tau a\in J_{\mathbf{p}'}(A), \qquad \Psi'_\tau a\in J_{\mathbf{p}'}(A).$$

En effet, fixer toutes les variables sauf une dans $\Psi_\tau a$ revient à fixer toutes les variables sauf une dans a, et l'on obtient donc une application jacobienne. Donc $\Psi_\tau a\in J_{\mathbf{p}'}(A)$ et, par suite, $\Psi'_\tau a\in J_{\mathbf{p}'}(A)$.

LEMME 11. — *Soient*

$$\mathbf{p}=(p_1, \ldots, p_h)\in\mathbf{P}, \qquad \mathbf{p}'=(p_1, \ldots, p_{i-1}, p_{i+1}, \ldots, p_h)\in\mathbf{P}, \qquad a\in J_{\mathbf{p}}(A), \qquad \sigma\in\mathfrak{S}_{p_i}.$$

Alors $\Omega^i_\sigma a\in J_{\mathbf{p}'}(A)$. *Si* $p_i=2$, Ω^i_σ *est une bijection de* $J_{\mathbf{p}}(A)$ *sur* $J_{\mathbf{p}'}(A)$.

La première assertion résulte aussitôt de la définition de $J_{\mathbf{p}}(A)$. La deuxième résulte immédiatement du lemme 7.

Lorsque $p_i = 2$, nous pourrons donc considérer la bijection réciproque $(\Omega^i_\sigma)^{-1}$ de $J_{\mathbf{p}'}(A)$ sur $J_{\mathbf{p}}(A)$.

Soient $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_h) \in \mathbf{P}$ et $a \in J_{\mathbf{p}}(A)$. Distinguons deux cas :

1° Tous les p_i ne sont pas égaux à 2 : soit $\mathbf{p}'$ l'élément de $\mathbf{P}$ obtenu en supprimant les 2 dans la suite $\mathbf{p}$. Si, dans a, on fixe égales à e les variables correspondantes, on obtient un élément b de $J_{\mathbf{p}'}(A)$ qui sera désigné par $\mathfrak{R}a$.

2° Tous les p_i sont égaux à 2 : soit $\mathbf{p}' = (2)$. On désignera par $\mathfrak{R}a$ l'unique élément b de $J_{\mathbf{p}'}(A)$ tel que $b(e) = a(e, \ldots, e)$.

Dans les deux cas, l'application $a \to \mathfrak{R}a$ est une bijection de $J_{\mathbf{p}}(A)$ sur $J_{\mathbf{p}'}(A)$ d'après le lemme 11.

3. Les groupes $X_{\mathbf{p}}(A)$. — Soit toujours A un groupe abélien. Dans $J(A)$, nous allons définir une relation d'équivalence R. Ce sera la relation d'équivalence la plus fine telle que, pour $a \in J_{p_1, \ldots, p_h}(A)$, on ait :

$a \equiv \Phi'_{\mathbf{t}} a \pmod{R}$ quel que soit $\mathbf{t} \in \mathfrak{S}_{p_1, \ldots, p_h}$;
$a \equiv \Psi''_\tau a \pmod{R}$ quel que soit $\tau \in \mathfrak{S}_h$;
$a \equiv \Omega^i_e a \pmod{R}$ si $p_i = 2$.

(Cette définition est justifiée par les lemmes 9, 10, 11).

Lemme 12. — *Soient $a \in J_{\mathbf{p}}(A)$, $b \in J_{\mathbf{p}'}(A)$. Pour que a et b soient équivalentes modulo R, il faut et il suffit que $\mathfrak{R}b$ soit de la forme $\Psi''_\tau \Phi'_{\mathbf{t}} \mathfrak{R}a$.*

Soit R_1 la relation

$$\mathfrak{R}b \text{ est de la forme } \Psi''_\tau \Phi'_{\mathbf{t}} \mathfrak{R}a.$$

Montrons d'abord que R_1 est une relation d'équivalence. La relation R_1 est évidemment réflexive. Elle est symétrique, car, si $\mathfrak{R}b = \Psi''_\tau \Phi'_{\mathbf{t}} \mathfrak{R}a$, on a $\mathfrak{R}a = \Phi'_{\mathbf{t}^{-1}} \Psi''_{\tau^{-1}} \mathfrak{R}b$, d'après les lemmes 1 et 2, donc $\mathfrak{R}a$ est de la forme $\Psi''_{\tau^{-1}} \Phi'_{\mathbf{t}'} \mathfrak{R}b$ d'après le lemme 3. Elle est transitive, car, si $\mathfrak{R}c = \Psi''_{\tau_1} \Phi'_{\mathbf{t}_1} \mathfrak{R}b$, on a $\mathfrak{R}c = \Psi''_{\tau_1} \Phi'_{\mathbf{t}_1} \Psi''_\tau \Phi'_{\mathbf{t}} \mathfrak{R}a$, donc $\mathfrak{R}c$ est de la forme $\Psi''_{\tau_1\tau} \Phi'_{\mathbf{t}''} \mathfrak{R}a$, d'après les lemmes 1, 2, 3.

Si $\mathfrak{R}b = \Psi''_\tau \Phi'_{\mathbf{t}} \mathfrak{R}a$, on a, modulo R,

$$b \equiv \mathfrak{R}b = \Psi''_\tau \Phi'_{\mathbf{t}} \mathfrak{R}a \equiv \Phi'_{\mathbf{t}} \mathfrak{R}a \equiv \mathfrak{R}a \equiv a,$$

donc

$$b \equiv a \pmod{R_1} \quad \text{entraîne} \quad b \equiv a \pmod{R}.$$

Pour établir la réciproque, il suffit d'observer les points suivants :

1° $\Phi'_{\mathbf{t}} a \equiv a \pmod{R_1}$. Car, si $a \in J_{p_1, \ldots, p_h}(A)$, $\mathbf{t} = (\tau_1, \ldots, \tau_h)$ et $p_i = 2$, on a

$$\Omega^i_e \Phi'_{\mathbf{t}} a = \Phi'_{\mathbf{t}'}(\varepsilon_{\tau_i} \Omega^i_{\tau_i} a),$$

d'après le lemme 4. Compte tenu du lemme 7,

$$\varepsilon_{\tau_i}\Omega^i_{\tau_i} a = \Omega^i_e a, \qquad \text{donc} \quad \Omega^i_e \Phi'_{\mathbf{t}} a = \Phi'_{\mathbf{t}'} \Omega^i_e a.$$

Donc $\mathfrak{R}\Phi'_{\mathbf{t}} a$ est de la forme $\Phi'_{\mathbf{t}''}\mathfrak{R} a$, d'où notre assertion.

2° $\Psi'_{\tau} a \equiv a \pmod{R_1}$. Car, d'après le lemme 5, si $p_{\tau^{-1}(i)} = 2$, on a

$$\Omega^i_e \Psi'_{\tau} a = \Psi'_{\tau'} \Omega^{\tau^{-1}(i)}_e a.$$

Donc $\mathfrak{R}\Psi'_{\tau} a = \Psi'_{\tau''}\mathfrak{R} a$, d'où notre assertion.

3° $\Omega^i_e a \equiv a \pmod{R_1}$ si $p_i = 2$. Car $\mathfrak{R}\Omega^i_e a = \mathfrak{R} a$.

Lemme 13. — *Soient $a \in J_{\mathbf{p}}(A)$, $b \in J_{\mathbf{p}'}(A)$, a et b étant équivalentes modulo* R. *Alors, $\mathbf{p}'$ se déduit de $\mathbf{p}$ par une permutation et par insertion ou suppression éventuelle d'entiers* 2. *Les degrés de a et b sont égaux. Si a est donnée, on peut choisir b de façon que $\mathbf{p}' \in \mathbf{P}'$, et $\mathbf{p}'$ est déterminé de manière unique par $\mathbf{p}$.*

La première assertion résulte aussitôt de la définition de R. Soit $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_h)$. Si l'on permute les p_i, ou si l'on insère un 2 dans la suite des p_i, la quantité $p_1 + \ldots + p_h - 2h$ ne change pas; d'où l'assertion relative aux degrés. Si a est donnée, et si tous les p_i sont égaux à 2, la suite $\mathbf{p}'$ ne comporte que des 2; en prenant $b = \mathfrak{R} a$, on a $\mathbf{p}' = (2) \in \mathbf{P}'$, et (2) est évidemment le seul élément de $\mathbf{P}'$ qui peut se déduire de $\mathbf{p}$ par permutations, insertions ou suppressions d'entiers 2. Si a est donnée, et si tous les p_i ne sont pas égaux à 2, on peut choisir pour $\mathbf{p}'$ le réarrangement non croissant de la suite des p_i distincts de 2, et l'on a alors $\mathbf{p}' \in \mathbf{P}'$; l'assertion d'unicité est évidente.

Soit $a \in J(A)$. On dit que a est *dégénérée* si a est équivalente à $\boldsymbol{-}a$ modulo R.

Lemme 14. — *Si a est dégénérée, et si b est équivalente à a, b est dégénérée.*

En effet, $\boldsymbol{-}b$ est équivalente à $\boldsymbol{-}a$ (par exemple d'après le lemme 12), donc équivalente à a, donc équivalente à b.

Nous allons maintenant définir un groupe *abélien* X(A) par générateurs et relations.

Les générateurs sont les éléments de J(A).

Les relations sont les suivantes :

$a = b$ si a et b sont équivalentes;

$\boldsymbol{-}a = -a$;

$a = 0$ si a est dégénérée.

Autrement dit, X(A) est le quotient du groupe Y(A) par le sous-groupe qu'engendrent les éléments suivants :

(1) $a - b$, où a et b sont des applications jacobiennes équivalentes;

(2) $a + (\boldsymbol{-}a)$, où a est une application jacobienne quelconque;

(3) a, où a est une application jacobienne dégénérée.

On désignera par Y′(A) ce sous-groupe, de sorte que X(A) = Y(A)/Y′(A).

Lemme 15. — $Y'(A)$ *est le sous-groupe de* $Y(A)$ *engendré par les éléments suivants :*

(4) $a - \Phi'_{(e,\ldots,e,\sigma,e,\ldots,e)}a$, *où* $a \in J_{p_1,\ldots,p_h}(A)$ *et où* $\sigma \in \mathfrak{S}_{p_i}$ *est une transposition de deux entiers consécutifs ;*

(5) $a - \Psi'_\tau a$, *où* $a \in J_{p_1,\ldots,p_h}(A)$ *et où* $\tau \in \mathfrak{S}_h$ *est une transposition de deux entiers consécutifs ;*

(6) $a - \Omega^i_e a$, *où* $a \in J_{p_1,\ldots,p_h}(A)$ *et où* $p_i = 2$;

(7) $a + (-a)$, *où a est une application jacobienne quelconque ;*

(8) a, *où a est une application jacobienne dégénérée.*

Il est clair que les éléments considérés appartiennent à $Y'(A)$. Il suffit de montrer que, si a et b sont deux applications jacobiennes équivalentes, $a - b$ est somme d'éléments de type (4) ou (5) ou (6). Or (lemme 12), on a $\mathfrak{R}b = \Psi'_\tau \Phi'_{\mathbf{t}} \mathfrak{R}a$. Donc

$$a - b = (a - \mathfrak{R}a) - (b - \mathfrak{R}b) + (\mathfrak{R}a - \Phi'_{\mathbf{t}}\mathfrak{R}a) + (\Phi'_{\mathbf{t}}\mathfrak{R}a - \Psi'_\tau\Phi'_{\mathbf{t}}\mathfrak{R}a).$$

Les éléments $a - \mathfrak{R}a$, $b - \mathfrak{R}b$ sont sommes d'éléments du type (6). Comme tout $\mathbf{t} \in \mathfrak{S}_{p_1,\ldots,p_h}$ est produit d'éléments de la forme $(e, \ldots, e, \sigma, e, \ldots, e)$, σ étant une transposition de deux entiers consécutifs, $\mathfrak{R}a - \Phi'_{\mathbf{t}}\mathfrak{R}a$ est, compte tenu du lemme 1, somme d'éléments du type (4). Comme tout $\tau \in \mathfrak{S}_h$ est produit de transpositions de deux entiers consécutifs, $\Phi'_{\mathbf{t}}\mathfrak{R}a - \Psi'_\tau\Phi'_{\mathbf{t}}\mathfrak{R}a$ est, compte tenu du lemme 2, somme d'éléments du type (5). D'où le lemme.

Soit $X_{\mathbf{p}}(A)$ [resp. $X^n(A)$] l'image canonique de $Y_{\mathbf{p}}(A)$ (resp. $Y^n(A)$) dans $X(A)$. On a

$$X(A) = \Sigma_{n \geqq 0} X^n(A) = \Sigma_{\mathbf{p} \in \mathbf{P}} X_{\mathbf{p}}(A).$$

Proposition 1. — *Le groupe* $X(A)$ *est somme directe des* $X^n(A)$ *pour* $n \geqq 0$.

En vertu du lemme 13, les éléments du type (1) ou (2) ou (3) sont homogènes pour le degré de $Y(A)$, ce qui prouve la proposition.

Autrement dit, le degré dans $Y(A)$ définit par passage au quotient un degré dans $X(A)$, pour lequel les éléments homogènes de degré n constituent le sous-groupe $X^n(A)$.

On dira encore que tout élément de $X(A)$ est d'*ordre* 1, et l'on appellera encore *degré total* la somme de l'ordre et du degré.

Rangeons deux applications jacobiennes a, b dans une même classe si a est équivalente à b ou à $-b$. Soit $\tilde{J}(A)$ l'ensemble quotient de $J(A)$ par cette nouvelle relation d'équivalence (qui ne sera considérée que momentanément). Pour tout $\mathfrak{a} \in \tilde{J}(A)$, soit $Y_{[\mathfrak{a}]}(A)$ le sous-groupe de $Y(A)$ engendré par les applications jacobiennes de $\mathfrak{a}$. Il est clair que $Y(A)$ est somme directe des $Y_{[\mathfrak{a}]}(A)$ pour $\mathfrak{a} \in \tilde{J}(A)$. D'autre part tout élément du type (1) ou (2) ou (3) appartient à un sous-groupe $Y_{[\mathfrak{a}]}(A)$. Donc, si $X_{[\mathfrak{a}]}(A)$ est l'image canonique de $Y_{[\mathfrak{a}]}(A)$ dans $X(A)$, $X(A)$ est somme directe des $X_{[\mathfrak{a}]}(A)$ pour $\mathfrak{a} \in \tilde{J}(A)$. Par ailleurs, $X_{[\mathfrak{a}]}(A) = 0$ si la classe $\mathfrak{a}$ est formée d'applications jacobiennes dégénérées.

Soit $\mathfrak{a} \in \tilde{\mathrm{J}}(\mathrm{A})$ une classe formée d'applications jacobiennes non dégénérées. Alors, $\mathfrak{a}$ est réunion de deux familles disjointes $(a_\iota)_{\iota \in \mathrm{I}}$, $(-a_\iota)_{\iota \in \mathrm{I}}$ d'applications jacobiennes non dégénérées, les a_ι étant toutes les applications jacobiennes équivalentes à l'une d'entre elles a_{ι_0}. Avec ces notations :

Lemme 16. — *Soit* $\Sigma m_\iota a_\iota + \Sigma n_\iota(-a_\iota)$ *un élément de* $\mathrm{Y}_{[\mathfrak{a}]}(\mathrm{A})$. *Pour que cet élément soit dans* $\mathrm{Y}'(\mathrm{A})$, *il faut et il suffit que* $\Sigma m_\iota = \Sigma n_\iota$.

Si $\Sigma m_\iota = \Sigma n_\iota$, on a, modulo $\mathrm{Y}'(\mathrm{A})$,

$$\Sigma m_\iota a_\iota + \Sigma n_\iota(-a_\iota) \equiv (\Sigma m_\iota) a_{\iota_0} + (\Sigma n_\iota)(-a_{\iota_0}) = (\Sigma m_\iota)(a_{\iota_0} + (-a_{\iota_0})) \equiv 0,$$

donc $\Sigma m_\iota a_\iota + \Sigma n_\iota(-a_\iota) \in \mathrm{Y}'(\mathrm{A})$. Réciproquement, l'ensemble des éléments $\Sigma m_\iota a_\iota + \Sigma n_\iota(-a_\iota)$ tels que $\Sigma m_\iota = \Sigma n_\iota$ est un sous-groupe de $\mathrm{Y}_{[\mathfrak{a}]}(\mathrm{A})$ qui contient tous les élements du type (1) ou (2) ou (3) appartenant à $\mathrm{Y}_{[\mathfrak{a}]}(\mathrm{A})$, donc qui contient $\mathrm{Y}'(\mathrm{A}) \cap \mathrm{Y}_{[\mathfrak{a}]}(\mathrm{A})$. D'où le lemme.

Proposition 2. — *a. Le groupe* $\mathrm{X}(\mathrm{A})$ *est somme directe des* $\mathrm{X}_{\mathbf{p}}(\mathrm{A})$ *pour* $\mathbf{p} \in \mathbf{P}'$.

b. Pour tout $\mathbf{p} \in \mathbf{P}$, $\mathrm{X}_{\mathbf{p}}(\mathrm{A})$ *est un groupe abélien libre, de sorte que* $\mathrm{X}(\mathrm{A})$ *est un groupe abélien libre.*

c. Pour tout $\mathbf{p} \in \mathbf{P}$, *on a* $\mathrm{X}_{\mathbf{p}}(\mathrm{A}) = \mathrm{Y}_{\mathbf{p}}(\mathrm{A})/(\mathrm{Y}_{\mathbf{p}}(\mathrm{A}) \cap \mathrm{Y}'(\mathrm{A}))$, *et* $\mathrm{Y}_{\mathbf{p}}(\mathrm{A}) \cap \mathrm{Y}'(\mathrm{A})$ *est le sous-groupe de* $\mathrm{Y}_{\mathbf{p}}(\mathrm{A})$ *engendré par les éléments suivants :*

(9) $a - b$, *où* a *et* b *sont des éléments équivalents de* $\mathrm{J}_{\mathbf{p}}(\mathrm{A})$;
(10) $a + (-a)$, *où* a *est un élément quelconque de* $\mathrm{J}_{\mathbf{p}}(\mathrm{A})$;
(11) a, *où* a *est un élément dégénéré de* $\mathrm{J}_{\mathbf{p}}(\mathrm{A})$.

Avec les notations du lemme 16, l'application

$$\Sigma m_\iota a_\iota + \Sigma n_\iota(-a_\iota) \to \Sigma(m_\iota - n_\iota)$$

est un homomorphisme du groupe $\mathrm{Y}_{[\mathfrak{a}]}(\mathrm{A})$ sur le groupe $\mathbf{Z}$ dont le noyau est $\mathrm{Y}'(\mathrm{A}) \cap \mathrm{Y}_{[\mathfrak{a}]}(\mathrm{A})$. Ainsi, $\mathrm{X}_{[\mathfrak{a}]}(\mathrm{A})$ est isomorphe à $\mathbf{Z}$. Donc, pour tout $\mathbf{p} \in \mathbf{P}$, $\mathrm{X}_{\mathbf{p}}(\mathrm{A})$, qui est somme de certains des $\mathrm{X}_{[\mathfrak{a}]}(\mathrm{A})$, est un groupe abélien libre d'après les remarques qui précèdent le lemme 16.

Soit $y \in \mathrm{Y}_{\mathbf{p}}(\mathrm{A})$. Les composantes de y dans les $\mathrm{Y}_{[\mathfrak{a}]}(\mathrm{A})$ appartiennent encore à $\mathrm{Y}_{\mathbf{p}}(\mathrm{A})$. Si $y \in \mathrm{Y}'(\mathrm{A})$, ces composantes appartiennent aussi à $\mathrm{Y}'(\mathrm{A})$. Pour prouver le c de la proposition, il suffit donc de prouver qu'un élément y de $\mathrm{Y}_{\mathbf{p}}(\mathrm{A}) \cap \mathrm{Y}_{[\mathfrak{a}]}(\mathrm{A}) \cap \mathrm{Y}'(\mathrm{A})$ est somme d'éléments du type (9) ou (10) ou (11). C'est évident si $\mathfrak{a}$ se compose d'applications jacobiennes dégénérées. Sinon avec les notations du lemme 16, on a

$$y = \Sigma m_\iota a_\iota + \Sigma n_\iota(-a_\iota), \qquad \text{avec} \quad \Sigma m_\iota = \Sigma n_\iota.$$

Puisque $y \in \mathrm{Y}_{\mathbf{p}}(\mathrm{A})$, les a_ι qui ne sont pas dans $\mathrm{Y}_{\mathbf{p}}(\mathrm{A})$ ont un coefficient nul. Soit ι_0 tel que $a_{\iota_0} \in \mathrm{J}_{\mathbf{p}}(\mathrm{A})$. On a, modulo le sous-groupe de $\mathrm{Y}_{\mathbf{p}}(\mathrm{A})$ engendré par les éléments de la forme (9), (10) ou (11)

$$y \equiv (\Sigma m_\iota) a_{\iota_0} + (\Sigma n_\iota)(-a_{\iota_0}) = (\Sigma m_\iota)(a_{\iota_0} + (-a_{\iota_0})) \equiv 0,$$

ce qui démontre c.

Toute application jacobienne est équivalente à un élément d'un $J_{\mathbf{p}}(A)$, avec $\mathbf{p} \in \mathbf{P}'$ (lemme 13). Donc $X(A) = \Sigma_{\mathbf{p}\in\mathbf{P}'} X_{\mathbf{p}}(A)$. Soient $\mathbf{p}$ et $\mathbf{p}'$ deux éléments distincts de $\mathbf{P}'$. Si $a \in J_{\mathbf{p}}(A)$ et $a' \in J_{\mathbf{p}'}(A)$, le lemme 12 entraîne aussitôt que les classes $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}'$ de $\tilde{J}(A)$ qui contiennent a et a' sont distinctes. Donc, si a et a' sont non dégénérées,

$$X_{[\mathfrak{a}]}(A) \cap X_{[\mathfrak{a}']}(A) = 0.$$

Comme $X(A)$ est somme directe des $X_{[\mathfrak{a}]}(A)$ pour $\mathfrak{a} \in \tilde{J}(A)$, on voit que $X(A)$ est somme directe des $X_{\mathbf{p}}(A)$, $\mathbf{p} \in \mathbf{P}'$.

Proposition 3. — *Le groupe* $X^n(A)$ *est somme directe des* $X_{(p_1,\ldots,p_h)}(A)$ *pour* $(p_1, \ldots, p_h) \in \mathbf{P}'$, $p_1 + \ldots + p_h - 2h = n$.

Ceci résulte aussitôt de la proposition $2a$ et de la définition des $X^n(A)$.

En particulier, on a

$$\begin{aligned} X^0(A) &= X_2(A), \\ X^1(A) &= X_3(A), \\ X^2(A) &= X_{3,3}(A) + X_4(A), \\ X^3(A) &= X_{3,3,3}(A) + X_{4,3}(A) + X_5(A). \end{aligned}$$

4. Les endomorphismes D et ∂ dans Y(A) et X(A). — Nous allons faire du groupe gradué $X(A)$ un complexe en y définissant un endomorphisme bord ∂. Cet endomorphisme sera obtenu, par passage au quotient, à partir d'un endomorphisme D de $Y(A)$.

Soient n et p deux entiers tels que $1 < p < n$. Soit

$$(i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_{n-p}) \in \mathfrak{St}(p, n-p).$$

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des indéterminées, qui engendrent sur $\mathbf{Z}$ un anneau de Lie libre $L(X_1, \ldots, X_n)$. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_p$ et $\tau \in \mathfrak{S}_{n-p+1}$, posons

$$Y_1 = [X_{i_{\sigma(1)}}, \ldots, X_{i_{\sigma(p)}}], \qquad Y_2 = X_{j_1}, \qquad \ldots, \qquad Y_{n-p+1} = X_{j_{n-p}},$$

puis formons $[Y_{\tau(1)}, Y_{\tau(2)}, \ldots, Y_{\tau(n-p+1)}]$; autrement dit, si r est l'entier tel que $\tau(r) = 1$, formons

$$[X_{j_{\tau(1)-1}}, \ldots, X_{j_{\tau(r-1)-1}}, [X_{i_{\sigma(1)}}, \ldots, X_{i_{\sigma(p)}}], X_{j_{\tau(r+1)-1}}, \ldots, X_{j_{\tau(n-p+1)-1}}].$$

Lemme 17. — *Il existe des entiers rationnels*

$$c(i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_{n-p}; \tau, \sigma, \rho)$$

(*où* $\rho\in\mathfrak{S}_n$, $\sigma\in\mathfrak{S}_p$, $\tau\in\mathfrak{S}_{n-p+1}$) *tels que*

$$\begin{aligned}&[X_{j_{\tau(1)-1}}, \ldots, X_{j_{\tau(r-1)-1}}, [X_{i_{\sigma(1)}}, \ldots, X_{i_{\sigma(p)}}], X_{j_{\tau(r+1)-1}}, \ldots, X_{j_{\tau(n-p+1)-1}}]\\ &\quad=\Sigma_{\rho\in\mathfrak{S}_n} c(i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_{n-p}; \tau, \sigma, \rho)[X_{\rho(1)}, \ldots, X_{\rho(n)}].\end{aligned}$$

On a, en effet,

$$\begin{aligned}&[X_{j_{\tau(1)-1}}, \ldots, X_{j_{\tau(r-1)-1}}, [X_{i_{\sigma(1)}}, \ldots, X_{i_{\sigma(p)}}], X_{j_{\tau(r+1)-1}}, \ldots, X_{j_{\tau(n-p+1)-1}}]\\ &\quad= [X_{j_{\tau(1)-1}}, \ldots, X_{j_{\tau(r-1)-1}}, [X_{i_{\sigma(1)}}, \ldots, X_{i_{\sigma(p-1)}}], X_{i_{\sigma(p)}}, X_{j_{\tau(r+1)-1}}, \ldots, X_{j_{\tau(n-p+1)-1}}]\\ &\quad- [X_{j_{\tau(1)-1}}, \ldots, X_{j_{\tau(r-1)-1}}, X_{i_{\sigma(p)}}, [X_{i_{\sigma(1)}}, \ldots, X_{i_{\sigma(p-1)}}], X_{j_{\tau(r+1)-1}}, \ldots, X_{j_{\tau(n-p+1)-1}}]\end{aligned}$$

de sorte que le lemme est immédiat par récurrence sur p.

Les entiers $c(i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_{n-p}; \tau, \sigma, \rho)$ ne sont pas déterminés de manière unique, à cause des relations $\mathbf{Z}$-linéaires qui existent entre les $[X_{\rho(1)}, \ldots, X_{\rho(n)}]$. Nous les choisirons une fois pour toutes dans ce qui suit. Les définitions ultérieures sont d'ailleurs indépendantes de ce choix.

Lemme 18. — *Soient* $\mathbf{p}=(p_1, \ldots, p_h)\in\mathbf{P}$, *r un entier de* $\{1, \ldots, h\}$, *p un entier tel que* $1<p<p_r$, $(i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_{p_r-p})\in\mathfrak{Sf}(p, p_r-p)$ *et* $\mathbf{p}'=(p_1, \ldots, p_{r-1}, p_r-p+1, p, p_{r+1}, \ldots, p_h)\in\mathbf{P}$. *Soit* $a\in J_{\mathbf{p}}(A)$. *Alors, l'application* b *de* $\mathfrak{S}_{\mathbf{p}'}$ *dans* A *définie par*

$$\begin{aligned}&b(\sigma_1, \ldots, \sigma_{r-1}, \tau, \sigma, \sigma_{r+1}, \ldots, \sigma_h)\\ &\quad=\Sigma_{\sigma_r\in\mathfrak{S}_{p_r}} c(i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_{p_r-p}; \tau, \sigma, \sigma_r)\, a(\sigma_1, \ldots, \sigma_{r-1}, \sigma_r, \sigma_{r+1}, \ldots, \sigma_h)\end{aligned}$$

est une application jacobienne.

Si, dans b, on fixe toutes les variables sauf l'une des variables $\sigma_1, \ldots, \sigma_{r-1}$, $\sigma_{r+1}, \ldots, \sigma_h$, l'application obtenue est une combinaison $\mathbf{Z}$-linéaire (au sens fonctionnel) d'applications jacobiennes, donc est une application jacobienne d'après le lemme 6. Maintenant, soit a' (resp. b') l'application de $\mathfrak{S}_{p_r}$ (resp. $\mathfrak{S}_{p_r-p+1,p}$) dans A obtenue en fixant dans a (resp. b) toutes les variables sauf σ_r (resp. τ, σ). Alors, $a'\in J_{p_r}(A)$, donc $a'=(L, \eta; x_1, \ldots, x_{p_r})$. Par définition des entiers $c(i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_{p_r-p}; \tau, \sigma, \sigma_r)$, on a

$$\begin{aligned}(12)\quad b'(\tau, \sigma) &= \Sigma_{\sigma_r\in\mathfrak{S}_{p_r}} c(i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_{p_r-p}; \tau, \sigma, \sigma_r)\,\eta([x_{\sigma_r(1)}, \ldots, x_{\sigma_r(p_r)}])\\ &=\eta(\Sigma_{\sigma_r\in\mathfrak{S}_{p_r}} c(i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_{p_r-p}; \tau, \sigma, \sigma_r)[x_{\sigma_r(1)}, \ldots, x_{\sigma_r(p_r)}])\\ &=\eta([x_{j_{\tau(1)-1}}, \ldots, x_{j_{\tau(s-1)-1}}, [x_{i_{\sigma(1)}}, \ldots, x_{i_{\sigma(p)}}], x_{j_{\tau(s+1)-1}}, \ldots, x_{j_{\tau(p_r-p+1)-1}}]),\end{aligned}$$

où $s=\tau^{-1}(1)$. Si l'on fixe σ dans b', l'application obtenue n'est autre que $(L, \eta; [x_{i_{\sigma(1)}}, \ldots, x_{i_{\sigma(p)}}], x_{j_1}, \ldots, x_{j_{p_r-p}})$, et est donc jacobienne. Pour τ fixé, toute relation $\mathbf{Z}$-linéaire vérifiée par les $[x_{i_{\sigma(1)}}, \ldots, x_{i_{\sigma(p)}}]$, où σ parcourt $\mathfrak{S}_p$, est vérifiée par les $b'(\tau, \sigma)$, de sorte que $b'(\tau, \sigma)$ est, pour τ fixé, une fonction jacobienne de σ (lemme 6). Ceci achève la démonstration.

La formule (12) montre en même temps que l'application b ne dépend pas du choix des entiers $c(i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_{n-p}; \tau, \sigma, \rho)$ introduits plus haut.

Posons maintenant

$$b_1(\sigma_1, \ldots, \sigma_{r-1}, \tau, \sigma, \sigma_{r+1}, \ldots, \sigma_n)$$
$$= \mathfrak{p}(p_1+\ldots+p_r+p+1)\,\varepsilon_{i_1,\ldots,i_p,j_1,\ldots,j_{n-p}}\, b(\sigma_1, \ldots, \sigma_{r-1}, \tau, \sigma, \sigma_{r+1}, \ldots, \sigma_n).$$

On a $b_1 \in \mathrm{J}_{\mathbf{p}'}(\mathrm{A})$ (lemme 18). Ainsi, $a \to b_1$ est une application de $\mathrm{J}_{\mathbf{p}}(\mathrm{A})$ dans $\mathrm{J}_{\mathbf{p}'}(\mathrm{A})$, bien déterminée par la donnée de $\mathbf{p}$, r, $(i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_{p_r-p})$. On désignera par $\mathrm{D}^{\mathbf{p},r}_{i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_{p_r-p}}$ l'unique endomorphisme du groupe $\mathrm{Y}(\mathrm{A})$ qui possède les propriétés suivantes :

1° $\mathrm{D}^{\mathbf{p},r}_{i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_{p_r-p}}$ est nul sur $\mathrm{Y}_{\mathbf{q}}(\mathrm{A})$ pour tout $\mathbf{q} \in \mathbf{P}$ distinct de $\mathbf{p}$;

2° $\mathrm{D}^{\mathbf{p},r}_{i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_{p_r-p}}(a) = b_1$ pour $a \in \mathrm{J}_{\mathbf{p}}(\mathrm{A})$.

L'image de $\mathrm{D}^{\mathbf{p},r}_{i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_{p_r-p}}$ est contenue dans $\mathrm{Y}_{\mathbf{p}'}(\mathrm{A})$. On posera

$$\mathrm{D}^{\mathbf{p}} = \Sigma\{(i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_{p_r-p}) \in \mathfrak{St}(p, p_r-p),\ 1 < p < p_r,\ 1 \leqq r \leqq h\}\, \mathrm{D}^{\mathbf{p},r}_{i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_{p_r-p}}.$$

Ainsi, $\mathrm{D}^{\mathbf{p}}$ est un endomorphisme du groupe $\mathrm{Y}(\mathrm{A})$, nul sur $\mathrm{Y}_{\mathbf{q}}(\mathrm{A})$ pour $\mathbf{q} \neq \mathbf{p}$, et dont l'image est contenue dans

$$\Sigma\{1 < p < p_r,\ 1 \leqq r \leqq h\}\, \mathrm{Y}_{(p_1,\ldots,p_{r-1},p_r-p+1,p,p_{r+1},\ldots,p_h)}(\mathrm{A}).$$

Enfin, on posera $\mathrm{D} = \Sigma_{\mathbf{p}\in\mathbf{P}} \mathrm{D}^{\mathbf{p}}$. Ainsi, D est un endomorphisme du groupe $\mathrm{Y}(\mathrm{A})$ qui se réduit à $\mathrm{D}^{\mathbf{p}}$ sur $\mathrm{Y}_{\mathbf{p}}(\mathrm{A})$.

Proposition 4. — *L'endomorphisme* D *diminue le degré d'une unité.*

Il suffit de le prouver pour chaque $\mathrm{D}^{\mathbf{p}}$, et donc pour chaque $\mathrm{D}^{\mathbf{p},r}_{i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_{p_r-p}}$. Avec les notations antérieures, il suffit donc de s'assurer que le degré des éléments de $\mathrm{J}_{\mathbf{p}'}(\mathrm{A})$ est inférieur d'une unité au degré des éléments de $\mathrm{J}_{\mathbf{p}}(\mathrm{A})$. Or, ces degrés sont respectivement

$$p_1+\ldots+p_{r-1}+(p_r-p+1)+p+p_{r+1}+\ldots+p_h-2(h+1),$$
$$p_1+\ldots+p_{r-1}+p_r \qquad\qquad +p_{r+1}+\ldots+p_h-2h$$

et notre assertion est immédiate.

Lemme 19. — *Soient* $a \in \mathrm{J}_{\mathbf{p}}(\mathrm{A}) = \mathrm{J}_{(p_1,\ldots,p_h)}(\mathrm{A})$ *et* $\tau \in \mathfrak{S}_h$ *la transposition de* k *et* $k+1$. *Soient* r, p *des entiers tels que* $1 \leqq r \leqq h$, $1 < p < p_r$; *soient*

$$(i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_{p_r-p}) \in \mathfrak{St}(p, p_r-p), \qquad \mathbf{p}' = (p_1, \ldots, p_{k-1}, p_{k+1}, p_k, p_{k+2}, \ldots, p_h) \in \mathbf{P}$$

Alors :

a. *Si* $r > k+1$, *on a*

$$\mathrm{D}^{\mathbf{p}',r}_{i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_{p_r-p}} \Psi'_\tau a = \Psi'_{\tau'} \mathrm{D}^{\mathbf{p},r}_{i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_{p_r-p}} a,$$

où $\tau' \in \mathfrak{S}_{h+1}$ *est la transposition de* k *et* $k+1$;

b. Si $r < k$, on a

$$D^{\mathbf{p}',r}_{i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_{p_r}-p}\Psi'_\tau a = \Psi'_{\tau'}D^{\mathbf{p},r}_{i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_{p_r}-p}a,$$

où $\tau' \in \mathfrak{S}_{h+1}$ est la transposition de $k+1$ et $k+2$;

c. On a

$$D^{\mathbf{p}',k}_{i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_{p_{k+1}}-p}\Psi'_\tau a = \Psi'_{\tau'}D^{\mathbf{p},k+1}_{i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_{p_{k+1}}-p}a,$$

où $\tau' \in \mathfrak{S}_{h+1}$ transforme k en $k+2$, $k+1$ en k, $k+2$ en $k+1$, et laisse fixes les autres entiers;

d. On a

$$D^{\mathbf{p}',k+1}_{i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_{p_k}-p}\Psi'_\tau a = \Psi'_{\tau'}D^{\mathbf{p},k}_{i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_{p_k}-p}a,$$

où $\tau' \in \mathfrak{S}_{h+1}$ transforme k en $k+1$, $k+1$ en $k+2$, $k+2$ en k, et laisse fixes les autres entiers.

Si $r > k+1$, on a, en posant $\varepsilon = \varepsilon_{i_1,\ldots,i_p,j_1,\ldots,j_{p_r}-p}$,

$$\begin{aligned}
&\left(D^{\mathbf{p}',r}_{i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_{p_r}-p}\Psi'_\tau a\right)(\sigma_1,\ldots,\sigma_{k+1},\sigma_k,\ldots,\sigma_{r-1},\tau,\sigma,\sigma_{r+1},\ldots,\sigma_h)\\
&\quad=\mathfrak{p}(p_1+\ldots+p_{k+1}+p_k+\ldots+p_r+p+1)\,\varepsilon\\
&\quad.\textstyle\sum_{\sigma_r\in\mathfrak{S}_{p_r}}c(i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_{p_r-p};\tau,\sigma,\sigma_r)\,(\Psi'_\tau a)(\sigma_1,\ldots,\sigma_{k+1},\sigma_k,\ldots,\sigma_{r-1},\sigma_r,\sigma_{r+1},\ldots,\sigma_h)\\
&\quad=\mathfrak{p}(p_1+\ldots+p_r+p+1+p_kp_{k+1})\,\varepsilon\\
&\quad.\textstyle\sum_{\sigma_r\in\mathfrak{S}_{p_r}}c(i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_{p_r-p};\tau,\sigma,\sigma_r)\,a(\sigma_1,\ldots,\sigma_h),\\
&\left(\Psi'_{\tau'}D^{\mathbf{p},r}_{i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_{p_r}-p}a\right)(\sigma_1,\ldots,\sigma_{k+1},\sigma_k,\ldots,\sigma_{r-1},\tau,\sigma,\sigma_{r+1},\ldots,\sigma_h)\\
&\quad=\mathfrak{p}(p_kp_{k+1})\left(D^{\mathbf{p},r}_{i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_{p_r}-p}a\right)(\sigma_1,\ldots,\sigma_k,\sigma_{k+1},\ldots,\sigma_{r-1},\tau,\sigma,\sigma_{r+1},\ldots,\sigma_h)\\
&\quad=\mathfrak{p}(p_kp_{k+1}+p_1+\ldots+p_r+p+1)\,\varepsilon\\
&\quad.\textstyle\sum_{\sigma_r\in\mathfrak{S}_{p_r}}c(i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_{p_r-p};\tau,\sigma,\sigma_r)\,a(\sigma_1,\ldots,\sigma_h),
\end{aligned}$$

d'où le a du lemme. Le b s'établit par un calcul analogue. Dans le cas c, on a, en posant maintenant $\varepsilon = \varepsilon_{i_1,\ldots,i_p,j_1,\ldots,j_{p_{k+1}}-p}$

$$\begin{aligned}
&\left(D^{\mathbf{p}',k}_{i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_{p_{k+1}}-p}\Psi'_\tau a\right)(\sigma_1,\ldots,\sigma_{k-1},\tau,\sigma,\sigma_k,\sigma_{k+2},\ldots,\sigma_h)\\
&\quad=\mathfrak{p}(p_1+\ldots+p_{k-1}+p_{k+1}+p+1)\,\varepsilon\\
&\quad.\textstyle\sum_{\sigma_{k+1}\in\mathfrak{S}_{p_{k+1}}}c(i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_{p_{k+1}-p};\tau,\sigma,\sigma_{k+1})\,(\Psi'_\tau a)(\sigma_1,\ldots,\sigma_{k-1},\sigma_{k+1},\sigma_k,\sigma_{k+2},\ldots,\sigma_h)\\
&\quad=\mathfrak{p}(p_1+\ldots+p_{k-1}+p_{k+1}+p+1+p_kp_{k+1})\,\varepsilon\\
&\quad.\textstyle\sum_{\sigma_{k+1}\in\mathfrak{S}_{p_{k+1}}}c(i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_{p_{k+1}-p};\tau,\sigma,\sigma_{k+1})\,a(\sigma_1,\ldots,\sigma_h),\\
&\left(\Psi'_{\tau'}D^{\mathbf{p},k+1}_{i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_{p_{k+1}}-p}a\right)(\sigma_1,\ldots,\sigma_{k-1},\tau,\sigma,\sigma_k,\sigma_{k+2},\ldots,\sigma_h)\\
&\quad=\mathfrak{p}(p_kp+p_k(p_{k+1}-p+1))\left(D^{\mathbf{p},k+1}_{i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_{p_{k+1}}-p}a\right)(\sigma_1,\ldots,\sigma_k,\tau,\sigma,\sigma_{k+2},\ldots,\sigma_h)\\
&\quad=\mathfrak{p}(p_kp+p_k(p_{k+1}-p+1)+p_1+\ldots+p_{k+1}+p+1)\,\varepsilon\\
&\quad.\textstyle\sum_{\sigma_{k+1}\in\mathfrak{S}_{p_{k+1}}}c(i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_{p_{k+1}-p};\tau,\sigma,\sigma_{k+1})\,a(\sigma_1,\ldots,\sigma_h),
\end{aligned}$$

d'où le c du lemme. Le d s'établit par un calcul analogue.

LEMME 20. — *Soient*

$$a \in \mathrm{J}_{\mathbf{p}}(\mathrm{A}) = \mathrm{J}_{(p_1, \ldots, p_h)}(\mathrm{A}) \qquad et \qquad \mathbf{s} = (e, \ldots, e, \rho, e, \ldots, e) \in \mathfrak{S}_{\mathbf{p}},$$

où $\rho \in \mathfrak{S}_{p_k}$, *apparaissant à la* $k^{\text{ième}}$ *place, est la transposition de* m *et* $m+1$. *Soient* r *et* p *des entiers tels que* $1 \leqq r \leqq h$, $1 < p < p_r$; *soit* $(i_1, \ldots, i_p; j, \ldots, j_{p_r-p}) \in \mathfrak{Sf}(p, p_r - p)$. *Alors*

a. Si $r < k$, *on a*

$$\mathrm{D}^{\mathbf{p}, r}_{i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_{p_r-p}} \Phi'_{\mathbf{s}} a = \Phi'_{\mathbf{s}'} \mathrm{D}^{\mathbf{p}, r}_{i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_{p_r-p}} a,$$

où $\mathbf{s}' = (e, \ldots, e, \rho, e, \ldots, e)$, ρ *apparaissant à la* $(k+1)^{\text{ième}}$ *place;*

b. Si $r > k$, *on a*

$$\mathrm{D}^{\mathbf{p}, r}_{i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_{p_r-p}} \Phi'_{\mathbf{s}} a = \Phi'_{\mathbf{s}'} \mathrm{D}^{\mathbf{p}, r}_{i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_{p_r-p}} a,$$

où $\mathbf{s}' = (e, \ldots, e, \rho, e, \ldots, e)$, ρ *apparaissant à la* $k^{\text{ième}}$ *place;*

c. Si $m = i_u$, $m + 1 = i_{u+1}$, *on a*

$$\mathrm{D}^{\mathbf{p}, k}_{i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_{p_k-p}} \Phi'_{\mathbf{s}} a = \Phi'_{\mathbf{s}'} \mathrm{D}^{\mathbf{p}, k}_{i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_{p_k-p}} a,$$

où $\mathbf{s}' = (e, \ldots, e, \rho', e, \ldots, e)$, ρ' *étant la transposition de* u *et* $u+1$, *et apparaissant à la* $(k+1)^{\text{ième}}$ *place;*

d. Si $m = j_v$, $m + 1 = j_{v+1}$, *on a*

$$\mathrm{D}^{\mathbf{p}, k}_{i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_{p_k-p}} \Phi'_{\mathbf{s}} a = \Phi'_{\mathbf{s}'} \mathrm{D}^{\mathbf{p}, k}_{i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_{p_k-p}} a,$$

où $\mathbf{s}' = (e, \ldots, e, \rho', e, \ldots, e)$, ρ' *étant la transposition de* $v+1$ *et* $v+2$, *et apparaissant à la* $k^{\text{ième}}$ *place;*

e. Si $m = i_u$, $m + 1 = j_v$ (*resp.* $m = j_v$, $m + 1 = i_u$), *on a*

$$\mathrm{D}^{\mathbf{p}, k}_{i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_{p_k-p}} \Phi'_{\mathbf{s}} a = \mathrm{D}^{\mathbf{p}, k}_{i_1, \ldots, i_{u-1}, j_v, i_{u+1}, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_{v-1}, i_u, j_{v+1}, \ldots, j_{p_k-p}} a.$$

Si $r < k$, on a, en posant $\varepsilon = \varepsilon_{i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_{p_r-p}}$,

$$\begin{aligned}
&\left(\mathrm{D}^{\mathbf{p}, r}_{i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_{p_r-p}} \Phi'_{\mathbf{s}} a\right)(\sigma_1, \ldots, \sigma_{r-1}, \tau, \sigma, \sigma_{r+1}, \ldots, \sigma_h) \\
&\quad = \mathfrak{p}(p_1 + \ldots + p_r + p + 1)\,\varepsilon \\
&\quad . \textstyle\sum_{\sigma_r \in \mathfrak{S}_{p_r}} c(i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_{p_r-p}; \tau, \sigma, \sigma_r)\, (\Phi'_{\mathbf{s}} a)(\sigma_1, \ldots, \sigma_h) \\
&\quad = - \mathfrak{p}(p_1 + \ldots + p_r + p + 1)\,\varepsilon \\
&\quad . \textstyle\sum_{\sigma_r \in \mathfrak{S}_{p_r}} c(i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_{p_r-p}; \tau, \sigma, \sigma_r)\, a(\sigma_1, \ldots, \sigma_{k-1}, \rho\sigma_k, \sigma_{k+1}, \ldots, \sigma_h), \\
&\left(\Phi'_{\mathbf{s}'} \mathrm{D}^{\mathbf{p}, r}_{i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_{p_r-p}} a\right)(\sigma_1, \ldots, \sigma_{r-1}, \tau, \sigma, \sigma_{r+1}, \ldots, \sigma_h) \\
&\quad = - \left(\mathrm{D}^{\mathbf{p}, r}_{i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_{p_r-p}} a\right)(\sigma_1, \ldots, \sigma_{r-1}, \tau, \sigma, \sigma_{r+1}, \ldots, \sigma_{k-1}, \rho\sigma_k, \sigma_{k+1}, \ldots, \sigma_h) \\
&\quad = - \mathfrak{p}(p_1 + \ldots + p_r + p + 1)\,\varepsilon \\
&\quad . \textstyle\sum_{\sigma_r \in \mathfrak{S}_{p_r}} c(i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_{p_r-p}; \tau, \sigma, \sigma_r)\, a(\sigma_1, \ldots, \sigma_{k-1}, \rho\sigma_k, \sigma_{k+1}, \ldots, \sigma_h),
\end{aligned}$$

d'où le a du lemme. Le b s'établit par un calcul analogue. Étudions le cas c. On a

$$\begin{aligned}
&\left(\mathrm{D}^{\mathbf{p},k}_{i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_{p_k-p}}\Phi'_{\mathbf{s}}a\right)(\sigma_1,\ \ldots,\ \sigma_{k-1},\ \tau,\ \sigma,\ \sigma_{k+1},\ \ldots,\ \sigma_h)\\
&\quad=\mathrm{p}(p_1+\ldots+p_{k-1})\left(\mathrm{D}^{(p_k),1}_{i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_{p_k-p}}\Phi'_\rho\Omega^1_{\sigma_1}\ldots\Omega^{k-1}_{\sigma_{k-1}}\Omega^{k+1}_{\sigma_{k+1}}\ldots\Omega^h_{\sigma_h}a\right)(\tau,\ \sigma),\\
&\left(\Phi'_{\mathbf{s}'}\mathrm{D}^{\mathbf{p},k}_{i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_{p_k-p}}a\right)(\sigma_1,\ \ldots,\ \sigma_{k-1},\ \tau,\ \sigma,\ \sigma_{k+1},\ \ldots,\ \sigma_h)\\
&\quad=\mathrm{p}(p_1+\ldots+p_{k-1})\left(\Phi'_{(e,\rho')}\mathrm{D}^{(p_k),1}_{i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_{p_k-p}}\Omega^1_{\sigma_1}\ldots\Omega^{k-1}_{\sigma_{k-1}}\Omega^{k+1}_{\sigma_{k+1}}\ldots\Omega^h_{\sigma_h}a\right)(\tau,\ \sigma)
\end{aligned}$$

de sorte qu'on est ramené à prouver le c du lemme pour $h=1$. Posant alors $\mathbf{p}=(n)$, il s'agit d'établir que

$$\mathrm{D}^{(n),1}_{i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_{n-p}}\Phi'_\rho a=\Phi'_{(e,\rho')}\mathrm{D}^{(n),1}_{i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_{n-p}}a.$$

Or, soit $a=(\mathrm{L},\ \eta;\ x_1,\ \ldots,\ x_n)$. D'après le lemme 8,

$$\Phi'_\rho a=-(\mathrm{L},\ \eta;\ x_{\rho(1)},\ \ldots,\ x_{\rho(n)})=-(\mathrm{L},\ \eta;\ x'_1,\ \ldots,\ x'_n),\qquad \text{où}\quad x'_w=x_{\rho(w)}.$$

On a, en posant $\varepsilon=\varepsilon_{i_1,\ldots,i_p,j_1,\ldots,j_{n-p}}$,

$$\begin{aligned}
(13)\qquad &\left(\mathrm{D}^{(n),1}_{i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_{n-p}}\Phi'_\rho a\right)(\tau,\ \sigma)\\
&\quad=-\mathrm{p}(n+p+1)\,\varepsilon\eta([x'_{j_{\tau(1)-1}},\ \ldots,\ x'_{j_{\tau(s-1)-1}},\ [x'_{i_{\sigma(1)}},\ \ldots,\ x'_{i_{\sigma(p)}}],\\
&\qquad\qquad x'_{j_{\tau(s+1)-1}},\ \ldots,\ x'_{j_{\tau(n-p+1)-1}}])
\end{aligned}$$

si $s=\tau^{-1}(1)$. D'autre part,

$$\begin{aligned}
&\left(\Phi'_{(e,\rho')}\mathrm{D}^{(n),1}_{i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_{n-p}}a\right)(\tau,\ \sigma)\\
&\quad=-\left(\mathrm{D}^{(n),1}_{i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_{n-p}}a\right)(\tau,\ \rho'\sigma)\\
&\quad=-\mathrm{p}(n+p+1)\,\varepsilon\eta([x_{j_{\tau(1)-1}},\ \ldots,\ x_{j_{\tau(s-1)-1}},\ [x_{i_{\rho'\sigma(1)}},\ \ldots,\ x_{i_{\rho'\sigma(p)}}],\\
&\qquad\qquad x_{j_{\tau(s+1)-1}},\ \ldots,\ x_{j_{\tau(n-p+1)-1}}]).
\end{aligned}$$

Comme ρ ne fait que transposer i_u et i_{u+1}, on a $x'_{j_l}=x_{j_l}$ pour $l=1,\ \ldots,\ n-p$ et $x'_{i_l}=x_{\rho(i_l)}=x_{i_{\rho'(l)}}$ par définition de ρ'. D'où l'égalité à démontrer.

Pour établir le d du lemme, on se ramène, comme précédemment, au cas où $h=1$, $p=(n)$, et il s'agit d'établir que

$$\mathrm{D}^{(n),1}_{i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_{n-p}}\Phi'_\rho a=\Phi'_{(\rho',e)}\mathrm{D}^{(n),1}_{i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_{n-p}}a.$$

Soit toujours

$$\begin{aligned}
&a=(\mathrm{L},\ \eta;\ x_1,\ \ldots,\ x_n),\\
&\Phi'_\rho a=-(\mathrm{L},\ \eta;\ x_{\rho(1)},\ \ldots,\ x_{\rho(n)})=-(\mathrm{L},\ \eta;\ x'_1,\ \ldots,\ x'_n)\qquad \varepsilon=\varepsilon_{i_1,\ldots,i_p,j_1,\ldots,j_{n-p}}.
\end{aligned}$$

On a encore l'égalité (13). D'autre part,

$$\begin{aligned}
&\left(\Phi'_{(\rho',e)}\mathrm{D}^{(n),1}_{i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_{n-p}}a\right)(\tau,\ \sigma)\\
&\quad=-\left(\mathrm{D}^{(n),1}_{i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_{n-p}}a\right)(\rho'\tau,\ \sigma)\\
&\quad=-\mathrm{p}(n+p+1)\,\varepsilon\eta([x_{j_{\rho'\tau(1)-1}},\ \ldots,\ x_{j_{\rho'\tau(s'-1)-1}},\ [x_{i_{\sigma(1)}},\ \ldots,\ x_{i_{\sigma(p)}}],\\
&\qquad\qquad x_{j_{\rho'\tau(s'+1)-1}},\ \ldots,\ x_{j_{\rho'\tau(n-p+1)-1}}]).
\end{aligned}$$

Comme ρ ne fait que transposer j_ν et $j_{\nu+1}$, on a $x'_{i_l} = x_{i_l}$ pour $l = 1, \ldots, p$ et $x'_{j_l} = x_{\rho(j_l)} = x_{j_{\rho'(l+1)-1}}$, donc $x_{j_{\rho'\tau(l)-1}} = x'_{j_{\tau(l)-1}}$, d'où l'égalité à démontrer.

Passons au e du lemme. Là encore, on se ramène au cas où $h = 1$, $p = (n)$, et il s'agit de montrer que

$$\mathrm{D}^{(n),1}_{i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_{n-p}} \Phi'_\rho a = \mathrm{D}^{(n),1}_{i_1, \ldots, i_{u-1}, j_\nu, i_{u+1}, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_{\nu-1}, i_u, j_{\nu+1}, \ldots, j_{n-p}} a.$$

Soit toujours

$$a = (\mathrm{L}, \eta; x_1, \ldots, x_n), \qquad \Phi'_\rho a = -(\mathrm{L}, \eta; x_{\rho(1)}, \ldots, x_{\rho(n)}) = -(\mathrm{L}, \eta; x'_1, \ldots, x'_n).$$

On a encore l'égalité (13). D'autre part, en posant

$$\varepsilon' = \varepsilon_{i_1, \ldots, i_{u-1}, j_\nu, i_{u+1}, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_{\nu-1}, i_u, j_{\nu+1}, \ldots, j_{n-p}},$$

on a

$$(\mathrm{D}^{(n),1}_{i_1, \ldots, i_{u-1}, j_\nu, i_{u+1}, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_{\nu-1}, i_u, j_{\nu+1}, \ldots, j_{n-p}} a)(\tau, \sigma) = \mathfrak{p}(n + p + 1)\, \varepsilon' \eta(z),$$

où z s'obtient de la manière suivante : on forme d'abord le crochet des éléments $x_{i_1}, \ldots, x_{i_{u-1}}, x_{j_\nu}, x_{i_{u+1}}, \ldots, x_{i_p}$ rangés dans l'ordre défini par σ, autrement dit on forme le crochet $[x'_{i_{\sigma(1)}}, \ldots, x'_{i_{\sigma(u-1)}}, x'_{i_{\sigma(u)}}, x'_{i_{\sigma(u+1)}}, \ldots, x'_{i_{\sigma(p)}}]$; puis, on forme le crochet des éléments $[x'_{i_{\sigma(1)}}, \ldots, x'_{i_{\sigma(u-1)}}, x'_{i_{\sigma(u)}}, x'_{i_{\sigma(u+1)}}, \ldots, x'_{i_{\sigma(p)}}]$, $x_{j_1}, \ldots, x_{j_{\nu-1}}, x_{j_u}, x_{j_{\nu+1}}, \ldots, x_{j_{n-p}}$ rangés dans l'ordre défini par τ; ainsi, compte tenu de l'égalité $\varepsilon' = -\varepsilon$, on obtient le e du lemme.

Lemme 21. — *Soient* $a \in \mathrm{J}_{\mathbf{p}}(\mathrm{A}) = \mathrm{J}_{(p_1, \ldots, p_h)}(\mathrm{A})$. *Soient* r, p *des entiers tels que* $1 \leqq r \leqq h$, $1 < p < p_r$; *soit* $(i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_{p_r-p}) \in \mathfrak{S}\mathfrak{f}(p, p_r - p)$. *Alors*

a. *Si* $r < s$, $\mathrm{D}^{\mathbf{p},r}_{i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_{p_r-p}} \Omega^s_e a = \Omega^{s+1}_e \mathrm{D}^{\mathbf{p},r}_{i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_{p_r-p}} a$;

b. *Si* $r \geqq s$, $\mathrm{D}^{\mathbf{p},r}_{i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_{p_r-p}} \Omega^s_e a = \mathfrak{p}(p_s)\, \Omega^s_e \mathrm{D}^{\mathbf{p},r+1}_{i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_{p_r-p}} a$.

En effet, si $r < s$, on a, en posant $\varepsilon = \varepsilon_{i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_{p_r-p}}$

$$\begin{aligned}
&\left(\mathrm{D}^{\mathbf{p},r}_{i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_{p_r-p}} \Omega^s_e a\right)(\sigma_1, \ldots, \sigma_{r-1}, \tau, \sigma, \sigma_{r+1}, \ldots, \sigma_{s-1}, \sigma_{s+1}, \ldots, \sigma_h)\\
&\quad = \mathfrak{p}(p_1 + \ldots + p_r + p + 1)\, \varepsilon\\
&\quad . \textstyle\sum_{\sigma_r \in \mathfrak{S}_{p_r}} c(i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_{p_r-p}; \tau, \sigma, \sigma_r)\, (\Omega^s_e a)(\sigma_1, \ldots, \sigma_{s-1}, \sigma_{s+1}, \ldots, \sigma_h)\\
&\quad = \mathfrak{p}(p_1 + \ldots + p_r + p + 1)\, \varepsilon\\
&\quad . \textstyle\sum_{\sigma_r \in \mathfrak{S}_{p_r}} c(i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_{p_r-p}; \tau, \sigma, \sigma_r)\, a(\sigma_1, \ldots, \sigma_{s-1}, e, \sigma_{s+1}, \ldots, \sigma_h),\\
&\left(\Omega^{s+1}_e \mathrm{D}^{\mathbf{p},r}_{i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_{p_r-p}} a\right)(\sigma_1, \ldots, \sigma_{r-1}, \tau, \sigma, \sigma_{r+1}, \ldots, \sigma_{s-1}, \sigma_{s+1}, \ldots, \sigma_h)\\
&\quad = \left(\mathrm{D}^{\mathbf{p},r}_{i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_{p_r-p}} a\right)(\sigma_1, \ldots, \sigma_{r-1}, \tau, \sigma, \sigma_{r+1}, \ldots, \sigma_{s-1}, e, \sigma_{s+1}, \ldots, \sigma_h)\\
&\quad = \mathfrak{p}(p_1 + \ldots + p_r + p + 1)\, \varepsilon\\
&\quad . \textstyle\sum_{\sigma_r \in \mathfrak{S}_{p_r}} c(i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_{p_r-p}; \tau, \sigma, \sigma_r)\, a(\sigma_1, \ldots, \sigma_{s-1}, e, \sigma_{s+1}, \ldots, \sigma_h).
\end{aligned}$$

Si $r \geqq s$, on a

$$\begin{aligned}
&\left(\mathrm{D}^{\mathbf{p},r}_{i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_{p_r-p}}\Omega^s_e a\right)(\sigma_1,\ \ldots,\ \sigma_{s-1},\ \sigma_{s+1},\ \ldots,\ \sigma_r,\ \tau,\ \sigma,\ \sigma_{r+2},\ \ldots,\ \sigma_h)\\
&\quad = p(p_1+\ldots+p_{s-1}+p_{s+1}+\ldots+p_{r+1}+p+1)\,\varepsilon\\
&\quad .\textstyle\sum_{\sigma_{r+1}\in\mathfrak{S}_{p_{r+1}}} c(i_1,\ \ldots,\ i_p;\ j_1,\ \ldots,\ j_{p_r-p};\ \tau,\ \sigma,\ \sigma_{r+1})\,(\Omega^s_e a)(\sigma_1,\ \ldots,\ \sigma_{s-1},\ \sigma_{s+1},\ \ldots,\ \sigma_h)\\
&\quad = p(p_1+\ldots+p_{s-1}+p_{s+1}+\ldots+p_{r+1}+p+1)\,\varepsilon\\
&\quad .\textstyle\sum_{\sigma_{r+1}\in\mathfrak{S}_{p_{r+1}}} c(i_1,\ \ldots,\ i_p;\ j_1,\ \ldots,\ j_{p_r-p};\ \tau,\ \sigma,\ \sigma_{r+1})\,a(\sigma_1,\ \ldots,\ \sigma_{s-1},\ e,\ \sigma_{s+1},\ \ldots,\ \sigma_h)\\
&\left(\Omega^s_e \mathrm{D}^{\mathbf{p},r+1}_{i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_{p_r-p}} a\right)(\sigma_1,\ \ldots,\ \sigma_{s-1},\ \sigma_{s+1},\ \ldots,\ \sigma_r,\ \tau,\ \sigma,\ \sigma_{r+2},\ \ldots,\ \sigma_h)\\
&\quad = \left(\mathrm{D}^{\mathbf{p},r+1}_{i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_{p_r-p}} a\right)(\sigma_1,\ \ldots,\ \sigma_{s-1},\ e,\ \sigma_{s+1},\ \ldots,\ \sigma_r,\ \tau,\ \sigma,\ \sigma_{r+2},\ \ldots,\ \sigma_h)\\
&\quad = p(p_1+\ldots+p_{r+1}+p+1)\,\varepsilon\\
&\quad .\textstyle\sum_{\sigma_{r+1}\in\mathfrak{S}_{p_{r+1}}} c(i_1,\ \ldots,\ i_p;\ j_1,\ \ldots,\ j_{p_r-p};\ \tau,\ \sigma,\ \sigma_{r+1})\,a(\sigma_1,\ \ldots,\ \sigma_{s-1},\ e,\ \sigma_{s+1},\ \ldots,\ \sigma_h)
\end{aligned}$$

d'où le lemme.

Théorème 1. — *On a* $\mathrm{D}(\mathrm{Y}'(\mathrm{A}))\subset \mathrm{Y}'(\mathrm{A})$.

Il suffit de montrer que D transforme en éléments de $\mathrm{Y}'(\mathrm{A})$ les générateurs de $\mathrm{Y}'(\mathrm{A})$ indiqués au lemme 15.

Soit $a\in \mathrm{J}_{\mathbf{p}}(\mathrm{A}) = \mathrm{J}_{(p_1,\ldots,p_h)}(\mathrm{A})$, et $\mathbf{s} = (e,\ \ldots,\ e,\ \rho,\ e,\ \ldots,\ e)\in\mathfrak{S}_{\mathbf{p}}$, où $\rho\in\mathfrak{S}_{p_k}$, apparaissant à la $k^{\text{ième}}$ place, est la transposition de m et $m+1$. D'après le lemme 20, $\mathrm{D}^{\mathbf{p},r}_{i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_{p_r-p}}\Phi'_{\mathbf{s}}a$ est congru modulo $\mathrm{Y}'(\mathrm{A})$ à $\mathrm{D}^{\mathbf{p},r}_{i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_{p_r-p}}a$ dans les cas suivants : 1° $r<k$; 2° $r>k$; 3° $r=k$, m et $m+1$ sont deux entiers i_u et i_{u+1}; 4° $r=k$, m et $m+1$ sont deux entiers j_v et j_{v+1}. D'autre part, à tout élément $(i_1,\ \ldots,\ i_p;\ j_1,\ \ldots,\ j_{p_k-p})$ de $\mathfrak{S}\mathfrak{f}(p,\ p_k-p)$ tel que $i_u=m$, $j_v=m+1$, associons l'élément $(i_1,\ \ldots,\ i_{u-1},\ j_v,\ i_{u+1},\ \ldots,\ i_p;\ j_1,\ \ldots,\ j_{v-1},\ i_u,\ j_{v+1},\ \ldots,\ j_{p_k-p})$. On a, d'après le lemme 20,

$$\begin{gathered}
\mathrm{D}^{\mathbf{p},k}_{i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_{p_k-p}}\Phi'_{\mathbf{s}}a = \mathrm{D}^{\mathbf{p},k}_{i_1,\ldots,i_{u-1},j_v,i_{u+1},\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_{v-1},i_u,j_{v+1},\ldots,j_{p_k-p}}a,\\
\mathrm{D}^{\mathbf{p},k}_{i_1,\ldots,i_{u-1},j_v,i_{u+1},\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_{v-1},i_u,j_{v+1},\ldots,j_{p_k-p}}\Phi'_{\mathbf{s}}a = \mathrm{D}^{\mathbf{p},k}_{i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_{p_k-p}}a,
\end{gathered}$$

d'où

$$\left(\mathrm{D}^{\mathbf{p},k}_{i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_{p_k-p}} + \mathrm{D}^{\mathbf{p},k}_{i_1,\ldots,i_{u-1},j_v,i_{u+1},\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_{v-1},i_u,j_{v+1},\ldots,j_{p_k-p}}\right)(a-\Phi'_{\mathbf{s}}a) = 0.$$

En ajoutant membre à membre les congruences ou égalités obtenues, on voit que

$$\mathrm{D}(a-\Phi'_{\mathbf{s}}a)\equiv 0 \qquad [\operatorname{mod}\mathrm{Y}'(\mathrm{A})].$$

Maintenant, soient $a\in\mathrm{J}_{\mathbf{p}}(\mathrm{A}) = \mathrm{J}_{(p_1,\ldots,p_h)}(\mathrm{A})$, et $\tau\in\mathfrak{S}_h$ la transposition de k et $k+1$. Soit $\mathbf{p}' = (p_1,\ \ldots,\ p_{k-1},\ p_{k+1},\ p_k,\ p_{k+2},\ \ldots,\ p_h)$. Alors, d'après le lemme 19, $\mathrm{D}^{\mathbf{p}',r}_{i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_{p_r-p}}\Psi'_\tau a$ est congru modulo $\mathrm{Y}'(\mathrm{A})$ à $\mathrm{D}^{\mathbf{p},r}_{i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_{p_r-p}}a$ pour $r>k+1$ ou $r<k$, $\mathrm{D}^{\mathbf{p}',k}_{i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_{p_{k+1}-p}}\Psi'_\tau a$ est congru modulo $\mathrm{Y}'(\mathrm{A})$ à $\mathrm{D}^{\mathbf{p},k+1}_{i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_{p_{k+1}-p}}a$, et $\mathrm{D}^{\mathbf{p}',k+1}_{i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_{p_k-p}}\Psi'_\tau a$ est congru modulo $\mathrm{Y}'(\mathrm{A})$ à $\mathrm{D}^{\mathbf{p},k}_{i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_{p_k-p}}a$. Ajoutant les congruences obtenues, on voit que $\mathrm{D}(a-\Psi'_\tau a)\equiv 0\ [\operatorname{mod}\mathrm{Y}'(\mathrm{A})]$.

Soit toujours $a\in\mathrm{J}_{\mathbf{p}}(\mathrm{A}) = \mathrm{J}_{(p_1,\ldots,p_h)}(\mathrm{A})$, et soit s un entier tel que $p_s=2$. Il n'existe pas d'entier p tel que $1 < p < p_s$, donc $\mathrm{D}a$ est somme d'éléments de la forme $\mathrm{D}^{\mathbf{p},r}_{i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_{p_r-p}}a$, avec $r \neq s$. Alors, d'après le lemme 21, $\mathrm{D}\Omega^s_c a$ est congru modulo $\mathrm{Y}'(\mathrm{A})$ à $\mathrm{D}a$.

Il est clair que

$$\mathrm{D}^{\mathbf{p},r}_{i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_{p_r-p}}(a+(-a)) = \mathrm{D}^{\mathbf{p},r}_{i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_{p_r-p}}a + \left(-\mathrm{D}^{\mathbf{p},r}_{i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_{p_r-p}}a\right) \in \mathrm{Y}'(\mathrm{A}).$$

Donc $\mathrm{D}(a+(-a)) \in \mathrm{Y}'(\mathrm{A})$.

Enfin, supposons a dégénéré, c'est-à-dire équivalent à $-a$. D'après le début de la démonstration, $\mathrm{D}a$ est congru à $\mathrm{D}(-a)$ modulo $\mathrm{Y}'(\mathrm{A})$. D'autre part, $\mathrm{D}(-a)$ est congru à $-\mathrm{D}a$ modulo $\mathrm{Y}'(\mathrm{A})$ comme on vient de le voir. Donc $2\,\mathrm{D}a \in \mathrm{Y}'(\mathrm{A})$ et, comme $\mathrm{Y}(\mathrm{A})/\mathrm{Y}'(\mathrm{A})$ est un groupe abélien libre (prop. 2), $\mathrm{D}a \in \mathrm{Y}'(\mathrm{A})$.

COROLLAIRE. — *L'endomorphisme* D *de* Y(A) *définit par passage au quotient un endomorphisme* ∂ *de* X(A), *qui diminue le degré d'une unité.*

5. LES GROUPES $\mathrm{H}\,\mathfrak{I}_n(\mathrm{A})$.

LEMME 22. — *Soient* $p > 1$, $q > 0$, $r > 0$ *trois entiers. Soit*

$$(i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_q; k_1, \ldots, k_r) \in \mathfrak{Sf}(p, q, r).$$

Soit $l_1, \ldots, l_{p+q}$ *la suite des entiers* $i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q$ *rangés dans l'ordre croissant, et posons*

$$i_1 = l_{s_1}, \quad \ldots, \quad i_p = l_{s_p}, \quad j_1 = l_{t_1}, \quad \ldots, \quad j_q = l_{t_q},$$

de sorte que $(s_1, \ldots, s_p; t_1, \ldots, t_q) \in \mathfrak{Sf}(p, q)$. *Soit* $m_1, \ldots, m_{q+r}$ *la suite des entiers* $j_1, \ldots, j_q, k_1, \ldots, k_r$ *rangés dans l'ordre croissant, et posons*

$$j_1 = m_{u_1-1}, \quad \ldots, \quad j_q = m_{u_q-1}, \quad k_1 = m_{v_1-1}, \quad \ldots, \quad k_r = m_{v_r-1},$$

de sorte que $(1, u_1, \ldots, u_q; v_1, \ldots, v_r) \in \mathfrak{Sf}(q+1, r)$. *Alors, pour tout* $a \in \mathrm{J}_{p+q+r}(\mathrm{A})$, *on a*

$$\mathrm{D}^{(r+1,\,p+q),\,2}_{s_1,\ldots,s_p;t_1,\ldots,t_q}\,\mathrm{D}^{(p+q+r),\,1}_{l_1,\ldots,l_{p+q};k_1,\ldots,k_r}a = -\mathrm{D}^{(q+r+1,\,p),\,1}_{1,u_1,\ldots,u_q;v_1,\ldots,v_r}\,\mathrm{D}^{(p+q+r),\,1}_{i_1,\ldots,i_p;m_1,\ldots,m_{q+r}}a.$$

Soit $a = (\mathrm{L}, \eta; x_1, \ldots, x_{p+q+r})$. Soient $\pi \in \mathfrak{S}_{p+q}$, $\tau \in \mathfrak{S}_{r+1}$ et $w = \tau^{-1}(1)$. On a

$$\begin{aligned}
&\left(\mathrm{D}^{(p+q+r),\,1}_{l_1,\ldots,l_{p+q};k_1,\ldots,k_r}a\right)(\tau, \pi)\\
&\quad = \mathfrak{p}(p+q+r+p+q+1)\,\varepsilon_{l_1,\ldots,l_{p+q};k_1,\ldots,k_r}\\
&\qquad .\eta([x_{k_{\tau(1)-1}}, \ldots, x_{k_{\tau(w-1)-1}}, [x_{l_{\pi(1)}}, \ldots, x_{l_{\pi(p+q)}}], x_{k_{\tau(w+1)-1}}, \ldots, x_{k_{\tau(r+1)-1}}]).
\end{aligned}$$

Donc, si $\rho \in \mathfrak{S}_p$, $\sigma \in \mathfrak{S}_{q+1}$ et si $w' = \sigma^{-1}(1)$, on a

$$\begin{aligned}
&\left(\mathrm{D}^{(r+1,\,p+q),\,2}_{s_1,\ldots,s_p;t_1,\ldots,t_q}\,\mathrm{D}^{(p+q+r),\,1}_{l_1,\ldots,l_{p+q};k_1,\ldots\,k_r}a\right)(\tau, \sigma, \rho)\\
&\quad = \mathfrak{p}(r+1)\,\varepsilon_{l_1,\ldots,l_{p+q};k_1,\ldots,k_r}\,\mathfrak{p}(r+1+p+q+p+1)\,\varepsilon_{s_1,\ldots,s_p;t_1,\ldots,t_q}\\
&\qquad .\eta([x_{k_{\tau(1)-1}}, \ldots, x_{k_{\tau(w-1)-1}}, [x_{j_{\sigma(1)-1}}, \ldots, x_{j_{\sigma(w'-1)-1}},\\
&\qquad\qquad [x_{i_{\rho(1)}}, \ldots, x_{i_{\rho(p)}}], x_{j_{\sigma(w'+1)-1}}, \ldots, x_{j_{\sigma(q+1)-1}}],\\
&\qquad\qquad\qquad x_{k_{\tau(w+1)-1}}, \ldots, x_{k_{\tau(r+1)-1}}]).
\end{aligned}$$

De même, si $\xi \in \mathfrak{S}_{q+r+1}$, et si $w'' = \xi^{-1}(1)$, on a

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{D}^{(p+q+r),1}_{i_1,\ldots,i_p;m_1,\ldots,m_{q+r}} a)(\xi, \rho) \\
&\quad = \mathfrak{p}(p+q+r+p+1)\,\varepsilon_{i_1,\ldots,i_p;m_1,\ldots,m_{q+r}} \\
&\qquad .\eta([x_{m_{\xi(1)-1}}, \ldots, x_{m_{\xi(w''-1)-1}}, [x_{i_{\rho(1)}}, \ldots, x_{i_{\rho(p)}}], x_{m_{\xi(w''+1)-1}}, \ldots, x_{m_{\xi(q+r+1)-1}}]).
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{D}^{(q+r+1,p),1}_{1,u_1,\ldots,u_q;v_1,\ldots,v_r} \mathrm{D}^{(p+q+r),1}_{i_1,\ldots,i_p;m_1,\ldots,m_{q+r}} a)(\tau, \sigma, \rho) \\
&\quad = \mathfrak{p}(q+r+1)\,\varepsilon_{i_1,\ldots,i_p;m_1,\ldots,m_{q+r}}\,\mathfrak{p}(q+r+1+q+1+1)\,\varepsilon_{1,u_1,\ldots,u_q;v_1,\ldots,v_r} \\
&\qquad .\eta([x_{k_{\tau(1)-1}}, \ldots, x_{k_{\tau(w-1)-1}}, [x_{j_{\sigma(1)-1}}, \ldots, x_{j_{\sigma(w'-1)-1}}, \\
&\qquad\qquad [x_{i_{\rho(1)}}, \ldots, x_{i_{\rho(p)}}], x_{j_{\sigma(w'+1)-1}}, \ldots, x_{j_{\sigma(q+1)-1}}], \\
&\qquad\qquad x_{k_{\tau(w+1)-1}}, \ldots, x_{k_{\tau(r+1)-1}}]).
\end{aligned}$$

Le lemme résulte alors des égalités

$$\varepsilon_{i_1,\ldots,i_p;m_1,\ldots,m_{q+r}}\,\varepsilon_{1,u_1,\ldots,u_q;v_1,\ldots,v_r} = \varepsilon_{i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_q;k_1,\ldots,k_r} = \varepsilon_{l_1,\ldots,l_{p+q};k_1,\ldots,k_r}\,\varepsilon_{s_1,\ldots,s_p;t_1,\ldots,t_q}.$$

Lemme 23. — *Soient $p > 1$, $q > 1$, $r > 0$ trois entiers. Soit*

$$(i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_q; k_1, \ldots, k_r) \in \mathfrak{Sf}(p, q, r).$$

Soit $l_1, \ldots, l_{p+r}$ la suite des entiers $i_1, \ldots, i_p, k_1, \ldots, k_r$ rangés dans l'ordre croissant, et posons

$$i_1 = l_{s_1-1}, \quad \ldots, \quad i_p = l_{s_p-1}, \quad k_1 = l_{t_1-1}, \quad \ldots, \quad k_r = l_{t_r-1},$$

de sorte que $(s_1, \ldots, s_p; 1, t_1, \ldots, t_r) \in \mathfrak{Sf}(p, r+1)$. Soit $m_1, \ldots, m_{q+r}$ la suite des entiers $j_1, \ldots, j_q, k_1, \ldots, k_r$ rangés dans l'ordre croissant, et posons

$$j_1 = m_{u_1-1}, \quad \ldots, \quad j_q = m_{u_q-1}, \quad k_1 = m_{v_1-1}, \quad \ldots, \quad k_r = m_{v_r-1},$$

de sorte que $(u_1, \ldots, u_q; 1, v_1, \ldots, v_r) \in \mathfrak{Sf}(q, r+1)$. Alors, pour tout $a \in \mathrm{J}_{p+q+r}(\mathrm{A})$, on a

$$\mathrm{D}^{(q+r+1,p),1}_{u_1,\ldots,u_q;1,v_1,\ldots,v_r} \mathrm{D}^{(p+q+r),1}_{i_1,\ldots,i_p;m_1,\ldots,m_{q+r}} a \equiv - \mathrm{D}^{(p+r+1,q),1}_{s_1,\ldots,s_p;1,t_1,\ldots,t_r} \mathrm{D}^{(p+q+r),1}_{j_1,\ldots,j_q;l_1,\ldots,l_{p+r}} a \qquad [\operatorname{mod} \mathrm{Y}'(\mathrm{A})].$$

Soit $a = (\mathrm{L}, \eta; x_1, \ldots, x_{p+q+r})$. Soient $\pi \in \mathfrak{S}_{q+r+1}$, $\tau \in \mathfrak{S}_p$ et $w = \pi^{-1}(1)$. On a

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{D}^{(p+q+r),1}_{i_1,\ldots,i_p;m_1,\ldots,m_{q+r}} a)(\pi, \tau) \\
&\quad = \mathfrak{p}(p+q+r+p+1)\,\varepsilon_{i_1,\ldots,i_p;m_1,\ldots,m_{q+r}} \\
&\qquad .\eta([x_{m_{\pi(1)-1}}, \ldots, x_{m_{\pi(w-1)-1}}, [x_{i_{\tau(1)}}, \ldots, x_{i_{\tau(p)}}], x_{m_{\pi(w+1)-1}}, \ldots, x_{m_{\pi(q+r+1)-1}}]).
\end{aligned}$$

Donc, si $\rho \in \mathfrak{S}_{r+2}$, $\sigma \in \mathfrak{S}_q$ et si $w' = \rho^{-1}(1)$, $w'' = \rho^{-1}(2)$, on a

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{D}^{(q+r+1,p),1}_{u_1,\ldots,u_q;1,v_1,\ldots,v_r} \mathrm{D}^{(p+q+r),1}_{i_1,\ldots,i_p;m_1,\ldots,m_{q+r}} a)(\rho, \sigma, \tau) \\
&\quad = \mathfrak{p}(q+r+1)\,\varepsilon_{i_1,\ldots,i_p;m_1,\ldots,m_{q+r}}\,\mathfrak{p}(q+r+1+q+1)\,\varepsilon_{u_1,\ldots,u_q;1,v_1,\ldots,v_r} \\
&\qquad .\eta([x_{k_{\rho(1)-2}}, \ldots, x_{k_{\rho(w'-1)-2}}, [x_{j_{\sigma(1)}}, \ldots, x_{j_{\sigma(q)}}], x_{k_{\rho(w'+1)-2}}, \ldots, x_{k_{\rho(w''-1)-2}}, \\
&\qquad\qquad [x_{i_{\tau(1)}}, \ldots, x_{i_{\tau(p)}}], x_{k_{\rho(w''+1)-2}}, \ldots, x_{k_{\rho(r+2)-2}}])
\end{aligned}$$

(l'ordre des deux crochets « internes » devant être changé si $w'' < w'$).

De même, si $\xi \in \mathfrak{S}_{p+r+1}$ et si $w''' = \xi^{-1}(1)$, on a

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{D}^{(p+q+r),1}_{j_1,\ldots,j_q;l_1,\ldots,l_{p+r}} a)(\xi, \sigma) \\
&\quad = \mathfrak{p}(p+q+r+q+1)\,\varepsilon_{j_1,\ldots,j_q;l_1,\ldots,l_{p+r}} \\
&\qquad .\eta([x_{l_{\xi(1)-1}}, \ldots, x_{l_{\xi(w'''-1)-1}}, [x_{j_{\sigma(1)}}, \ldots, x_{j_{\sigma(q)}}], x_{l_{\xi(w'''+1)-1}}, \ldots, x_{l_{\xi(p+r+1)-1}}]).
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{D}^{(p+r+1,q),1}_{s_1,\ldots,s_p;1,l_1,\ldots,l_r}\mathrm{D}^{(p+q+r),1}_{j_1,\ldots,j_q;l_1,\ldots,l_{p+r}} a)(\rho, \tau, \sigma) \\
&\quad = \mathfrak{p}(p+r+1)\,\varepsilon_{j_1,\ldots,j_q;l_1,\ldots,l_{p+r}}\,\mathfrak{p}(p+r+1+p+1)\,\varepsilon_{s_1,\ldots,s_p;1,l_1,\ldots,l_r} \\
&\qquad .\eta([x_{k_{\rho(1)-2}}, \ldots, x_{k_{\rho(w'-1)-2}}], [x_{i_{\tau(1)}}, \ldots, x_{i_{\tau(p)}}], x_{k_{\rho(w'+1)-2}}, \ldots, x_{k_{\rho(w''-1)-2}}, \\
&\qquad\qquad [x_{j_{\sigma(1)}}, \ldots, x_{j_{\sigma(q)}}], x_{k_{\rho(w''+1)-2}}, \ldots, x_{k_{\rho(r+2)-2}}]).
\end{aligned}$$

Or,

$$\varepsilon_{u_1,\ldots,u_q;1,v_1,\ldots,v_r} = \mathfrak{p}(q)\,\varepsilon_{1,u_1,\ldots,u_q;v_1,\ldots,v_r}, \qquad \varepsilon_{s_1,\ldots,s_p;1,l_1,\ldots,l_r} = \mathfrak{p}(p)\,\varepsilon_{1,s_1,\ldots,s_p;l_1,\ldots,l_r},$$

et

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{i_1,\ldots,i_p;m_1,\ldots,m_{q+r}}\,\varepsilon_{1,u_1,\ldots,u_q;v_1,\ldots,v_r} &= \varepsilon_{i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_q;k_1,\ldots,k_r} \\
&= \mathfrak{p}(pq)\,\varepsilon_{j_1,\ldots,j_q;i_1,\ldots,i_p;k_1,\ldots,k_r} \\
&= \mathfrak{p}(pq)\,\varepsilon_{j_1,\ldots,j_q;l_1,\ldots,l_{p+r}}\,\varepsilon_{1,s_1,\ldots,s_p;l_1,\ldots,l_r}.
\end{aligned}$$

Donc, en désignant par $\rho_0 \in \mathfrak{S}_{r+2}$ la transposition de 1 et 2, et par $\nu \in \mathfrak{S}_3$ la transposition de 2 et 3, on a

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{D}^{(q+r+1,p),1}_{u_1,\ldots,u_q;1,v_1,\ldots,v_r}\mathrm{D}^{(p+q+r),1}_{i_1,\ldots,i_p;m_1,\ldots,m_{q+r}} a)(\rho, \sigma, \tau) \\
&\quad = \quad \mathfrak{p}(pq)\,(\mathrm{D}^{(p+r+1,q),1}_{s_1,\ldots,s_p;1,l_1,\ldots,l_r}\mathrm{D}^{(p+q+r),1}_{j_1,\ldots,j_q;l_1,\ldots,l_{p+r}} a)(\rho_0\rho, \tau, \sigma) \\
&\quad = -(\Phi'_{(\rho_0,e,e)}\Psi'_\nu\mathrm{D}^{(p+r+1,q),1}_{s_1,\ldots,s_p;1,l_1,\ldots,l_r}\mathrm{D}^{(p+q+r),1}_{j_1,\ldots,j_q;l_1,\ldots,l_{p+r}} a)(\rho, \sigma, \tau),
\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration.

Théorème 2. — *On a* $\mathrm{DD}(\mathrm{Y}(\mathrm{A})) \subset \mathrm{Y}'(\mathrm{A})$.

Soit $a \in \mathrm{J}_{\mathbf{p}}(\mathrm{A}) = \mathrm{J}_{(p_1,\ldots,p_h)}(\mathrm{A})$. Il s'agit de montrer que $\mathrm{DD}a \in \mathrm{Y}'(\mathrm{A})$. Soient r et p des entiers tels que $1 \leq r \leq h$, $1 < p < p_r$. Soit

$$(i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_{p_r-p}) \in \mathfrak{S}\mathfrak{k}(p, p_r - p).$$

Soient s et q des entiers tels que $1 \leq s \leq h$, $1 < q < p_s$. Soit

$$(k_1, \ldots, k_q; l_1, \ldots, l_{p_s-q}) \in \mathfrak{S}\mathfrak{k}(q, p_s - q).$$

Si $r < s$, on a

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{D}^{(p_1,\ldots,p_{r-1},p_r-p+1,p,p_{r+1},\ldots,p_h),s+1}_{k_1,\ldots,k_q;l_1,\ldots,l_{p_s-q}}\mathrm{D}^{\mathbf{p},r}_{i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_{p_r-p}} a) \\
&\quad (\sigma_1, \ldots, \sigma_{r-1}, \tau, \sigma, \sigma_{r+1}, \ldots, \sigma_{s-1}, \pi, \rho, \sigma_{s+1}, \ldots, \sigma_h) \\
&= \mathfrak{p}(p_1 + \ldots + p_r + p + 1)\,\varepsilon_{i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_{p_r-p}} \\
&\quad .\mathfrak{p}(p_1 + \ldots + p_{r-1} + p_r - p + 1 + p + p_{r+1} + \ldots + p_s + q + 1)\,\varepsilon_{k_1,\ldots,k_q;l_1,\ldots,l_{p_s-q}} \\
&\quad .\textstyle\sum_{\nu\in\mathfrak{S}_r,\,\xi\in\mathfrak{S}_s} c(i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_{p_r-p}; \tau, \sigma, \nu) \\
&\quad .c(k_1, \ldots, k_q; l_1, \ldots, l_{p_s-q}; \pi, \rho, \xi)\,a(\sigma_1, \ldots, \sigma_{r-1}, \nu, \sigma_{r+1}, \ldots, \sigma_{s-1}, \xi, \sigma_{s+1}, \ldots, \sigma_h).
\end{aligned}$$

De même,

$$\left(\mathrm{D}^{(p_1,\ldots,p_{s-1},p_s-q+1,q,p_{s+1},\ldots,p_h),r}_{i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_{p_r-p}}\mathrm{D}^{\mathbf{p},s}_{k_1,\ldots,k_q;l_1,\ldots,l_{p_s-q}}a\right)$$
$$(\sigma_1,\ \ldots,\ \sigma_{r-1},\ \tau,\ \sigma,\ \sigma_{r+1},\ \ldots,\ \sigma_{s-1},\ \pi,\ \rho,\ \sigma_{s+1},\ \ldots,\ \sigma_h)$$
$$=\mathfrak{p}(p_1+\ldots+p_s+q+1)\,\varepsilon_{k_1,\ldots,k_q;l_1,\ldots,l_{p_s-q}}\,\mathfrak{p}(p_1+\ldots+p_r+p+1)\,\varepsilon_{i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_{p_r-p}}$$
$$.\textstyle\sum_{\nu\in\mathfrak{S}_r,\,\xi\in\mathfrak{S}_s}c(k_1,\ \ldots,\ k_q;\ l_1,\ \ldots,\ l_{p_s-q};\ \pi,\ \rho,\ \xi)$$
$$.c(i_1,\ \ldots,\ i_p;\ j_1,\ \ldots,\ j_{p_r-p};\ \tau,\ \sigma,\ \nu)\,a(\sigma_1,\ \ldots,\ \sigma_{r-1},\ \nu,\ \sigma_{r+1},\ \ldots,\ \sigma_{s-1},\ \xi,\ \sigma_{s+1},\ \ldots,\ \sigma_h).$$

Ainsi

$$\mathrm{D}^{(p_1,\ldots,p_{r-1},p_r-p+1,p,p_{r+1},\ldots,p_h),s+1}_{k_1,\ldots,k_q;l_1,\ldots,l_{p_s-q}}\mathrm{D}^{\mathbf{p},r}_{i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_{p_r-p}}a$$
$$+\mathrm{D}^{(p_1,\ldots,p_{s-1},p_s-q+1,q,p_{s+1},\ldots,p_h),r}_{i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_{p_r-p}}\mathrm{D}^{\mathbf{p},s}_{k_1,\ldots,k_q;l_1,\ldots,l_{p_s-q}}a\in \mathrm{Y}'(\mathrm{A}).$$

D'autre part, pour r fixé,

$$\sum \mathrm{D}^{(p_1,\ldots,p_{r-1},p_r-p+1,p,p_{r+1},\ldots,p_h),r+1}_{k_1,\ldots,k_q;l_1,\ldots,l_{p+1-q}}\mathrm{D}^{\mathbf{p},r}_{i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_{p_r-p}}a$$

est congru modulo $\mathrm{Y}'(\mathrm{A})$ à

$$-\sum \mathrm{D}^{(p_1,\ldots,p_{r-1},p_r-p+1,p,p_{r+1},\ldots,p_h),r}_{1,k_1,\ldots,k_q;l_1,\ldots,l_{p_r-p-q}}\mathrm{D}^{\mathbf{p},r}_{i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_{p_r-p}}a.$$

En effet, on peut, pour établir ce point, remplacer a par $\Omega^1_{\sigma_1}\ldots\Omega^{r-1}_{\sigma_{r-1}}\Omega^{r+1}_{\sigma_{r+1}}\ldots\Omega^h_{\sigma_h}a$ d'après le lemme 21. On est donc ramené au cas où $h=1$, et notre assertion résulte alors du lemme 22 par des groupements convenables des systèmes d'indices.

De la même façon, le lemme 23 entraîne que

$$\sum \mathrm{D}^{(p_1,\ldots,p_{r-1},p_r-p+1,p,p_{r+1},\ldots,p_h),r}_{k_1,\ldots,k_q;1,l_1,\ldots,l_{p_r-p-q}}\mathrm{D}^{\mathbf{p},r}_{i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_{p_r-p}}a\in \mathrm{Y}'(\mathrm{A}),$$

ce qui achève la démonstration.

Corollaire. — *Dans* $\mathrm{X}(\mathrm{A})$, *on a* $\partial\partial=0$.

On considérera $\mathrm{X}(\mathrm{A})$ comme un complexe en le munissant de ∂ et du degré *total*. Le groupe d'homologie de $\mathrm{X}(\mathrm{A})$ sera désigné par $\mathrm{H}\mathfrak{J}(\mathrm{A})$. Le groupe d'homologie de degré total n de $\mathrm{X}(\mathrm{A})$ sera désigné par $\mathrm{H}\mathfrak{J}_n(\mathrm{A})$. Ainsi, $\mathrm{H}\mathfrak{J}_n(\mathrm{A})$ est un quotient d'un sous-groupe de $\mathrm{X}^{n-1}(\mathrm{A})$.

6. Relations avec l'homologie cubique de A. — Les résultats de ce paragraphe ne seront pas utilisés dans la suite du Mémoire.

Soit I l'ensemble $\{0, 1\}$. Soient $\mathfrak{K}_n(\mathrm{A})$ l'ensemble des fonctions définies sur I^n et à valeurs dans A, $\mathrm{Q}_n(\mathrm{A})$ le groupe abélien libre engendré par $\mathfrak{K}_n(\mathrm{A})$, $\mathrm{Q}(\mathrm{A})$ la somme directe des $\mathrm{Q}_n(\mathrm{A})$ pour $n\geqq 0$. Les éléments de $\mathrm{Q}_n(\mathrm{A})$ sont dits de degré $n+1$. Si $q\in\mathfrak{K}_n(\mathrm{A})$, et si $1\leqq j\leqq n$, définissons les éléments R_jq, S_jq,

$P_j q$ de $\mathfrak{K}_{n-1}(A)$ par les formules

$$\begin{aligned}
(R_j q)(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) &= q(\varphi_1, \ldots, \varphi_{j-1}, 0, \varphi_j, \ldots, \varphi_{n-1}),\\
(S_j q)(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) &= q(\varphi_1, \ldots, \varphi_{j-1}, 1, \varphi_j, \ldots, \varphi_{n-1}),\\
(P_j q)(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) &= q(\varphi_1, \ldots, \varphi_{j-1}, 0, \varphi_j, \ldots, \varphi_{n-1})\\
&\quad + q(\varphi_1, \ldots, \varphi_{j-1}, 1, \varphi_j, \ldots, \varphi_{n-1}).
\end{aligned}$$

Soit $\partial q = \sum_{j=1}^{n} p(j+n)(R_j q + S_j q - P_j q)$. Alors, $\partial\partial = 0$ et $Q(A)$ est le complexe cubique de A ([1]).

Soit $\mathfrak{k}$ l'application de I dans $\mathfrak{S}_3$ définie par

$$\mathfrak{k}(0) = (1, 2, 3), \qquad \mathfrak{k}(1) = (2, 3, 1).$$

Soit $\mathfrak{k}^n$ l'application $(\mathfrak{k}, \mathfrak{k}, \ldots, \mathfrak{k})$ de I^n dans $(\mathfrak{S}_3)^n = S_{3, 3, \ldots, 3}$.

Lemme 24. — *Pour toute application jacobienne a de* $(\mathfrak{S}_3)^n$ *dans* A, *soit* $q_a = a \circ \mathfrak{k}^n$. *Alors, l'application* $a \to q_a$ *est une bijection de* $J_{3, 3, \ldots, 3}(A)$ *sur* $\mathfrak{K}_n(A)$.

Raisonnant par récurrence, nous supposons le lemme établi pour les entiers $< n$.

Montrons d'abord que $a \to q_a$ est injective. Soient a et a' deux applications jacobiennes de $(\mathfrak{S}_3)^n$ dans A qui coïncident sur $\mathfrak{k}^n(I^n)$. Il s'agit de montrer que $a = a'$. Pour $\sigma = (1, 2, 3)$ et $\sigma = (2, 3, 1)$, $\Omega^n_\sigma a$ et $\Omega^n_\sigma a'$ coïncident sur $\mathfrak{k}^{n-1}(I^{n-1})$, donc sont égales d'après l'hypothèse de récurrence. D'autre part, d'après un calcul facile qui sera repris en détail au paragraphe 7, on a

$$\Omega^n_{(1,2,3)} a + \Omega^n_{(2,3,1)} a + \Omega^n_{(3,1,2)} a = 0, \qquad \Omega^n_{(1,2,3)} a' + \Omega^n_{(2,3,1)} a' + \Omega^n_{(3,1,2)} a' = 0,$$

donc $\Omega^n_\sigma a$ et $\Omega^n_\sigma a'$ sont encore égales pour $\sigma = (3, 1, 2)$. Enfin, $\Omega^n_\sigma a$ et $\Omega^n_\sigma a'$ sont égales pour σ impaire d'après le lemme 7. Donc $a = a'$.

Montrons maintenant que $a \to q_a$ est surjective, autrement dit que toute application b de $\mathfrak{k}^n(I^n)$ dans A se prolonge en une application jacobienne de $(\mathfrak{S}_3)^n$ dans A. D'après l'hypothèse de récurrence, les applications

$$(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}) \to b(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}, (1, 2, 3))$$

et

$$(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}) \to b(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}, (2, 3, 1))$$

de $\mathfrak{k}^{n-1}(I^{n-1})$ dans A se prolongent en applications jacobiennes a_1, a_2 de $(\mathfrak{S}_3)^{n-1}$ dans A. Posons alors, pour $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1} \in \mathfrak{S}_3$,

$$\begin{aligned}
a(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}, (1, 2, 3)) &= a_1(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}),\\
a(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}, (2, 3, 1)) &= a_2(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}),\\
a(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}, (3, 1, 2)) &= -a_1(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}) - a_2(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}),\\
a(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}, (2, 1, 3)) &= -a_1(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}),\\
a(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}, (3, 2, 1)) &= -a_2(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}),\\
a(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}, (1, 3, 2)) &= a_1(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}) + a_2(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}).
\end{aligned}$$

On vérifie aussitôt (*cf.* § 7) que a est une fonction jacobienne des variables $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$, qui prolonge b. D'où le lemme.

La bijection réciproque de la bijection $a \to q_a$ se prolonge en un isomorphisme de $Q_n(A)$ sur $Y_{3,3,\ldots,3}(A)$. D'où des homomorphismes surjectifs

$$\zeta_n : \quad Q_n(A) \to X_{3,3,\ldots,3}(A)$$

pour $n = 1, 2, \ldots$. Pour $n = 0$, $Q_0(A)$ est le groupe abélien libre engendré par les éléments de A, donc est égal à $Y_2(A)$, d'où un homomorphisme surjectif

$$\zeta_0 : \quad Q_0(A) \to X_2(A)$$

et, par suite, un homomorphisme

$$\zeta : \quad Q(A) \to X(A).$$

Proposition 5. — *a. L'homorphisme ζ conserve les degrés, si l'on adopte sur $X(A)$ le degré total.*

b. Si $q \in Q_n(A)$, on a $\partial\zeta q = \mathfrak{p}(n+1)\zeta\partial q$.

L'assertion a est immédiate, ainsi que l'assertion b pour $n = 0$. Soit maintenant $a \in J_{\mathbf{p}}(A)$, où $\mathbf{p} = (3, 3, \ldots, 3)$ (n nombres 3). Soient $q = q_a$ et b l'image canonique de a dans $X(A)$. On a $b = \zeta(q)$. Posons, pour $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$D^{\mathbf{p}, i}_{1,2;3} a = a_{i1}, \qquad D^{\mathbf{p}, i}_{1,3;2} a = a_{i2}, \qquad D^{\mathbf{p}, i}_{2,3;1} a = a_{i3}$$

et soient b_{i1}, b_{i2}, b_{i3} les images canoniques de a_{i1}, a_{i2}, a_{i3} dans $X(A)$. On a

$$Da = \sum_{i=1}^{n} (a_{i1} + a_{i2} + a_{i3}), \qquad \partial b = \sum_{i=1}^{n} (b_{i1} + b_{i2} + b_{i3}).$$

Soit $\mathbf{p}' = (3, 3, \ldots, 3)$ ($n-1$ nombres 3). On a $\mathfrak{R}a_{i1}, \mathfrak{R}a_{i2}, \mathfrak{R}a_{i3} \in J_{\mathbf{p}'}(A)$, et

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{R}a_{i1})(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}) &= a_{i1}(\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, e, e, \sigma_i, \ldots, \sigma_{n-1}) \\
&= \quad \mathfrak{p}(i+1)\, a(\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, (1, 2, 3), \sigma_i, \ldots, \sigma_{n-1}), \\
(\mathfrak{R}a_{i2})(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}) &= a_{i2}(\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, e, e, \sigma_i, \ldots, \sigma_{n-1}) \\
&= -\mathfrak{p}(i+1)\, a(\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, (1, 3, 2), \sigma_i, \ldots, \sigma_{n-1}), \\
(\mathfrak{R}a_{i3})(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}) &= a_{i3}(\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, e, e, \sigma_i, \ldots, \sigma_{n-1}) \\
&= \quad \mathfrak{p}(i+1)\, a(\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, (2, 3, 1), \sigma_i, \ldots, \sigma_{n-1}).
\end{aligned}$$

En particulier, si $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1} \in \mathbf{I}$, on a

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{R}a_{i1})(\mathfrak{k}^{n-1}(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})) &= \mathfrak{p}(i+1)\, a(\mathfrak{k}^n(\varphi_1, \ldots, \varphi_{i-1}, 0, \varphi_i, \ldots, \varphi_{n-1})) \\
&= \mathfrak{p}(i+1)\, q(\varphi_1, \ldots, \varphi_{i-1}, 0, \varphi_i, \ldots, \varphi_{n-1}) \\
&= \mathfrak{p}(i+1)\, (R_i q)(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}),
\end{aligned}$$

donc $q_{\mathfrak{R}a_{i1}} = \mathfrak{p}(i+1)(R_i q)$ et, par suite, $b_{i1} = \mathfrak{p}(i+1)\zeta(R_i q)$. On trouve de même que $b_{i3} = \mathfrak{p}(i+1)\zeta(S_i q)$. Enfin,

$$\begin{aligned}(\mathfrak{R}a_{i2})(\mathfrak{k}^{n-1}(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})) &= -\mathfrak{p}(i+1)\,a(\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, (1, 2, 3), \sigma_i, \ldots, \sigma_{n-1})\\ &\quad -\mathfrak{p}(i+1)\,a(\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, (2, 3, 1), \sigma_i, \ldots, \sigma_{n-1})\\ &= -\mathfrak{p}(i+1)(R_i q)(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})\\ &\quad -\mathfrak{p}(i+1)(S_i q)(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})\\ &= -\mathfrak{p}(i+1)(P_i q)(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}),\end{aligned}$$

donc $b_{i2} = -\mathfrak{p}(i+1)\zeta(P_i q)$. Finalement,

$$\partial\zeta q = \partial b = \zeta\left(\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{p}(i+1)(R_i q + S_i q - P_i q)\right) = \mathfrak{p}(n+1)\,\zeta\,\partial q.$$

Corollaire. — *L'homomorphisme ζ définit un homomorphisme canonique de l'homologie cubique de* A *dans* $H\,\mathfrak{J}(A)$.

CHAPITRE II.

Cas des petits degrés.

7. Les groupes $X_2(A)$, $X_3(A)$, $X_{3,3}(A)$, $X_4(A)$. — Un élément $a \in J_2(A)$ est bien déterminé par la valeur $x = a(e)$ (lemme 7), qui est un élément quelconque de A d'après le lemme 6. Nous noterons (x) cet élément de $J_2(A)$ [et aussi les éléments correspondants de $Y_2(A)$ et $X_2(A)$]. Ainsi, $Y_2(A)$ est le groupe abélien libre engendré par les (x), où $x \in A$. On a

$$\Phi'_{(1,2)}(x) = (x), \qquad \Phi'_{(2,1)}(x) = (x).$$

Donc $(x) \in J_2(A)$, $(y) \in J_2(A)$ sont équivalents si et seulement si $x = y$ (lemme 12). Par suite $(x) \in J_2(A)$ est dégénéré si et seulement si $2x = 0$. Compte tenu de la proposition 2, on obtient le résultat suivant :

Proposition 6. — $X_2(A)$ *est le groupe abélien défini par les générateurs* (x), *où* $x \in A$, *et les relations*

$$(-x) = -(x),$$
$$(x) = 0 \quad \text{si} \quad 2x = 0.$$

Un élément $a \in J_3(A)$ est bien déterminé par les valeurs

$$x = a((1, 2, 3)), \qquad y = a((2, 3, 1)), \qquad z = a((3, 1, 2)) \quad \text{(lemme 7)}.$$

Nous noterons (x, y, z) cet élément de $J_3(A)$ [et aussi les éléments correspondants de $Y_3(A)$ et $X_3(A)$]. Si X_1, X_2, X_3 sont des indéterminées engendrant un anneau de Lie libre, toutes les relations $\mathbf{Z}$-linéaires vérifiées par $[X_1, X_2, X_3]$,

$[X_2, X_3, X_1]$, $[X_3, X_1, X_2]$ sont conséquences de la relation

$$[X_1, X_2, X_3] + [X_2, X_3, X_1] + [X_3, X_1, X_2] = 0.$$

Ainsi, $J_3(A)$ est l'ensemble des (x, y, z) tels que

$$x \in A, \quad y \in A, \quad z \in A, \quad x + y + z = 0 \quad \text{(lemme 6)},$$

et $Y_3(A)$ est le groupe abélien libre engendré par ces (x, y, z). On trouve aisément que

$$\begin{array}{ll} \Phi'_{(1,2,3)}(x, y, z) = (x, y, z), & \Phi'_{(2,1,3)}(x, y, z) = (x, z, y), \\ \Phi'_{(2,3,1)}(x, y, z) = (z, x, y), & \Phi'_{(1,3,2)}(x, y, z) = (z, y, x), \\ \Phi'_{(3,1,2)}(x, y, z) = (y, z, x), & \Phi'_{(3,2,1)}(x, y, z) = (y, x, z). \end{array}$$

Les éléments de $J_3(A)$ équivalents à (x, y, z) sont donc, compte tenu du lemme 12, les éléments (x, y, z), (z, x, y), (y, z, x), (x, z, y), (z, y, x), (y, x, z). Par suite, les éléments dégénérés de $J_3(A)$ sont les éléments de la forme

$$(0, x, -x), \qquad (x, 0, -x), \qquad (0, x, -x)$$

et les (x, y, z) tels que $2x = 2y = 2z = 0$. Compte tenu de la proposition 2, on obtient le résultat suivant :

Proposition 7. — $X_3(A)$ *est le groupe abélien défini par les générateurs* (x, y, z), *où*

$$x \in A, \quad y \in A, \quad z \in A, \quad x + y + z = 0,$$

et les relations

$$\begin{gathered} (x, y, z) = (z, x, y) = (y, z, x) = (x, z, y) = (z, y, x) = (y, x, z), \\ (-x, -y, -z) = -(x, y, z), \\ (0, x, -x) = 0, \\ (x, y, z) = 0 \quad \text{si} \quad 2x = 2y = 2z = 0. \end{gathered}$$

Un élément $a \in J_{3,3}(A)$ est bien déterminé par les valeurs

$$\begin{array}{lll} x = a((1, 2, 3), (1, 2, 3)), & y = a((2, 3, 1), (1, 2, 3)), & z = a((3, 1, 2), (1, 2, 3)), \\ x' = a((1, 2, 3), (2, 3, 1)), & y' = a((2, 3, 1), (2, 3, 1)), & z' = a((3, 1, 2), (2, 3, 1)), \\ x'' = a((1, 2, 3), (3, 1, 2)), & y'' = a((2, 3, 1), (3, 1, 2)), & z'' = a((3, 1, 2), (3, 1, 2)). \end{array}$$

Nous représentons par la matrice

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{pmatrix}$$

cet élément de $J_{3,3}(A)$ [et aussi les éléments correspondants de $Y_{3,3}(A)$ et $X_{3,3}(A)$]. Exprimant que a est une fonction jacobienne des deux variables, on trouve les conditions

$$x+y+z=x'+y'+z'=x''+y''+z''=x+x'+x''=y+y'+y''=z+z'+z''=0.$$

Ainsi, $Y_{3,3}(A)$ est le groupe abélien libre engendré par ces matrices.

Faisant agir les opérateurs $\Phi'_{\sigma,\tau}$, Ψ'_{ρ} pour $\sigma \in \mathfrak{S}_3$, $\tau \in \mathfrak{S}_3$, $\rho \in \mathfrak{S}_2$, on trouve 72 matrices équivalentes à la matrice précédente; elles s'obtiennent : 1° en échangeant de toutes les façons les lignes entre elles, et les colonnes entre elles; 2° en échangeant les lignes et les colonnes, et en multipliant en même temps tous les éléments par -1.

Un calcul fastidieux mais facile montre alors que les éléments dégénérés de $J_{3,3}(A)$ correspondent aux matrices suivantes :

— les matrices qui ont une ligne de zéros, ou une colonne de zéros;
— les matrices déduites par échanges de lignes et de colonnes des matrices symétriques;
— les matrices dont tous les éléments sont d'ordre 2;
— les matrices déduites par échanges de lignes et de colonnes d'une matrice « centrosymétrique gauche », c'est-à-dire d'une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} x & -x-y & y \\ -x+y & 0 & x-y \\ -y & x+y & -x \end{pmatrix}.$$

Compte tenu de la proposition 2, on obtient le résultat suivant :

Proposition 8. — $X_{3,3}(A)$ *est le groupe abélien défini par les générateurs*

$$X=\begin{pmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{pmatrix},$$

où

$$x\in A, \qquad \ldots, \qquad z''\in A,$$
$$x+y+z=x'+y'+z'=x''+y''+z''=x+x'+x''=y+y'+y''=z+z'+z''=0,$$

et les relations suivantes (où X et X' désignent des matrices du type précédent) :

$X=X'$ *si X' se déduit de X par échange de lignes ou par échange de colonnes;*
$X=-X'$ *si X' se déduit de X par échange des lignes et des colonnes;*
$X=-X'$ *si X' se déduit de X en multipliant tous les éléments par -1;*
$X=0$ *si X a une ligne de zéros, ou une colonne de zéros;*
$X=0$ *si X est symétrique;*
$X=0$ *si X est centrosymétrique gauche;*
$X=0$ *si tous les éléments de X sont d'ordre 2.*

Cherchons maintenant le groupe $X_4(A)$.

Lemme 25. — *Soit a une application de $\mathfrak{A}_4$ dans* A.

Posons

$$\begin{array}{llll} a((1, 2, 3, 4)) = x, & a((2, 1, 4, 3)) = y, & a((3, 4, 1, 2)) = z, & a((4, 3, 2, 1)) = t, \\ a((2, 3, 1, 4)) = x', & a((1, 4, 2, 3)) = y', & a((4, 1, 3, 2)) = z', & a((3, 2, 4, 1)) = t', \\ a((3, 1, 2, 4)) = x'', & a((4, 2, 1, 3)) = y'', & a((1, 3, 4, 2)) = z'', & a((2, 4, 3, 1)) = t''. \end{array}$$

Alors, pour que a soit la restriction à $\mathfrak{A}_4$ *d'un élément de* $J_4(A)$, *il faut et il suffit que les sommes par lignes et par colonnes de la matrice*

$$\begin{pmatrix} x & y & z & t \\ x' & y' & z' & t' \\ x'' & y'' & z'' & t'' \end{pmatrix}$$

soient nulles.

En effet, dans l'anneau de Lie libre $L(X_1, X_2, X_3, X_4)$ engendré par X_1, X_2, X_3, X_4, on a d'abord

$$(14)\qquad [X_1, X_2, X_3, X_4] + [X_2, X_3, X_1, X_4] + [X_3, X_1, X_2, X_4] = 0,$$
$$(15)\qquad [X_2, X_1, X_4, X_3] + [X_1, X_4, X_2, X_3] + [X_4, X_2, X_1, X_3] = 0,$$
$$(16)\qquad [X_3, X_4, X_1, X_2] + [X_4, X_1, X_3, X_2] + [X_1, X_3, X_4, X_2] = 0,$$
$$(17)\qquad [X_4, X_3, X_2, X_1] + [X_3, X_2, X_4, X_1] + [X_2, X_4, X_3, X_1] = 0.$$

D'autre part

$$\begin{aligned} [[[X_4, X_3], X_2], X_1] &= [[X_4, X_3], [X_2, X_1]] + [[[X_4, X_3], X_1], X_2] \\ &= [[X_1, X_2], [X_4, X_3]] - [[[X_3, X_4], X_1], X_2] \\ &= [[[X_1, X_2], X_4], X_3] - [[[X_1, X_2], X_3], X_4] - [[[X_3, X_4], X_1], X_2] \end{aligned}$$

donc

$$(18)\quad [X_1, X_2, X_3, X_4] + [X_2, X_1, X_4, X_3] + [X_3, X_4, X_1, X_2] + [X_4, X_3, X_2, X_1] = 0$$

et, en échangeant les rôles des X_i,

$$(19)\quad [X_2, X_3, X_1, X_4] + [X_1, X_4, X_2, X_3] + [X_4, X_1, X_3, X_2] + [X_3, X_2, X_4, X_1] = 0,$$
$$(20)\quad [X_3, X_1, X_2, X_4] + [X_4, X_2, X_1, X_3] + [X_1, X_3, X_4, X_2] + [X_2, X_4, X_3, X_1] = 0.$$

Les relations (14)-(20), et les relations

$$[X_i, X_j, X_k, X_l] = -[X_j, X_i, X_k, X_l]$$

permettent d'écrire tous les crochets $[X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, X_{\sigma(3)}, X_{\sigma(4)}]$, où $\sigma \in \mathfrak{S}_4$, comme combinaisons $\mathbf{Z}$-linéaires de $[X_1, X_2, X_3, X_4]$, $[X_2, X_1, X_4, X_3]$, $[X_3, X_4, X_1, X_2]$, $[X_2, X_3, X_1, X_4]$, $[X_1, X_4, X_2, X_3]$, $[X_4, X_1, X_3, X_2]$. Or, on sait [2] que le sous-groupe de $L(X_1, X_2, X_3, X_4)$ engendré par les $[X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, X_{\sigma(3)}, X_{\sigma(4)}]$ est de rang 6. C'est donc que toutes les relations $\mathbf{Z}$-linéaires entre les $[X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, X_{\sigma(3)}, X_{\sigma(4)}]$ sont conséquences des relations écrites. D'où le lemme.

Avec les notations du lemme 25, on représentera l'élément a de $J_4(A)$

[et aussi les éléments correspondants de $Y_4(A)$ et $X_4(A)$] par la matrice

$$X = \begin{pmatrix} x & y & z & t \\ x' & y' & z' & t' \\ x'' & y'' & z'' & t'' \end{pmatrix}.$$

Le groupe $Y_4(A)$ est le groupe abélien libre engendré par ces matrices.

Faisant agir les opérateurs Φ'_σ pour $\sigma \in \mathfrak{S}_4$, on trouve 24 matrices équivalentes à X, à savoir

$$\begin{pmatrix} x & y & z & t \\ x' & y' & z' & t' \\ x'' & y'' & z'' & t'' \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x'' & z'' & t'' & y'' \\ x & z & t & y \\ x' & z' & t' & y' \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x' & t' & y' & z' \\ y'' & t'' & y'' & z'' \\ x & t & y & z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x & y & t & z \\ x'' & y'' & t'' & z'' \\ x' & y' & t' & z' \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x' & t' & z' & y' \\ x & t & z & y \\ x'' & t'' & z'' & y'' \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x'' & z'' & y'' & t'' \\ x' & z' & y' & t' \\ x & z & y & t \end{pmatrix}$$

et les 18 autres matrices déduites des précédentes par les échanges de colonnes que voici :

On échange la 1^{re} et la 2^e colonne, et en même temps la 3^e et la 4^e;
On échange la 1^{re} et la 3^e colonne, et en même temps la 2^e et la 4^e;
On échange la 1^{re} et la 4^e colonne, et en même temps la 2^e et la 3^e.

On trouve alors que les éléments dégénérés de $J_4(A)$ correspondent aux matrices suivantes :

— les matrices qui ont deux colonnes opposées;
— les matrices équivalentes à la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & z & -z \\ x' & y' & z' & t' \\ -x' & -y' & -t' & -z' \end{pmatrix};$$

— les matrices équivalentes à la matrice

$$\begin{pmatrix} x & y & x & y \\ -y & -x & -y & -x \\ y-x & x-y & y-x & x-y \end{pmatrix};$$

— les matrices dont tous les éléments sont d'ordre 2.

Proposition 9. — $X_4(A)$ *est le groupe abélien défini par les générateurs*

$$X = \begin{pmatrix} x & y & z & t \\ x' & y' & z' & t' \\ x'' & y'' & z'' & t'' \end{pmatrix},$$

où

$$x, y, \ldots, t'' \in A,$$
$$x+y+z+t = x'+y'+z'+t' = x''+y''+z''+t''$$
$$= x+x'+x'' = y+y'+y'' = z+z'+z'' = t+t'+t'' = 0,$$

et les relations

$$\begin{pmatrix} x & y & z & t \\ x' & y' & z' & t' \\ x'' & y'' & z'' & t'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'' & z'' & t'' & y'' \\ x & z & t & y \\ x' & z' & t' & y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & t' & y' & z' \\ x'' & t'' & y'' & z'' \\ x & t & y & z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x & y & t & z \\ x'' & y'' & t'' & z'' \\ x' & y' & t' & z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & t' & z' & y' \\ x & t & z & y \\ x'' & t'' & z'' & y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'' & z'' & y'' & t'' \\ x' & z' & y' & t' \\ x & z & y & t \end{pmatrix};$$

$X = X'$ si X' se déduit de X en échangeant deux colonnes de X et en même temps les deux autres colonnes de X;

$X = -X'$ si X' se déduit de X en multipliant tous les éléments par -1;

$$\begin{pmatrix} x & -x & z & -z \\ x' & -x' & z' & -z' \\ x'' & -x'' & z'' & -z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & z & -z \\ x' & y' & z' & t' \\ -x' & -y' & -t' & -z' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x & y & x & y \\ x' & -x & -y & -x \\ y-x & x-y & y-x & x-y \end{pmatrix} = 0;$$

$X = 0$ si tous les éléments de X sont d'ordre 2.

8. L'opérateur ∂ sur $X_2(A)$, $X_3(A)$, $X_{3,3}(A)$, $X_4(A)$.

PROPOSITION 10. — *On a*

$$\partial(x) = 0, \tag{21}$$

$$\partial(x, y, z) = (x) + (y) + (z), \tag{22}$$

$$\partial\begin{pmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{pmatrix} = (x, x', x'') + (y, y', y'') + (z, z', z'') - (x, y, z) - (x', y', z_{,}) - (x'', y'', z''), \tag{23}$$

$$\begin{aligned} \partial\begin{pmatrix} x & y & z & t \\ x' & y' & z' & t' \\ x'' & y'' & z'' & t'' \end{pmatrix} &= (x, x', x'') + (y, y', y'') + (z, z', z'') + (t, t', t'') - (x, y, -x-y) \\ &\quad - (z, t, -z-t) - (x', t', -x'-t') - (y', z', -y'-z') \\ &\quad - (x'', z'', -x''-z'') - (y'', t'', -y''-t''). \end{aligned} \tag{24}$$

La formule $(21_{,})$ est immédiate.

Soit

$$a = (x, y, z) = (L, \eta; x_1, x_2, x_3) \in J_3(A).$$

On a

$$Da = D^{(3),1}_{1,2;3}a + D^{(3),1}_{1,3;2}a + D^{(3),1}_{2,3;1}a,$$

$$D^{(3),1}_{1,2;3}a \in J_{2,2}(A), \qquad D^{(3),1}_{1,3;2}a \in J_{2,2}(A), \qquad D^{(3),1}_{2,3;1}a \in J_{2,2}(A),$$

et

$$(D^{(3),1}_{1,2;3}a)(e,e) = \eta([[x_1, x_2], x_3]) = a((1, 2, 3)) = x,$$
$$(D^{(3),1}_{1,3;2}a)(e,e) = -\eta([[x_1, x_3], x_2]) = a((3, 1, 2)) = z,$$
$$(D^{(3),1}_{2,3;1}a)(e,e) = \eta([[x_2, x_3], x_1]) = a((2, 3, 1)) = y.$$

D'où la formule (22).

Maintenant, soit

$$a = \begin{pmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{pmatrix} \in J_{3,3}(A).$$

On a, d'après ce qui précède

$$(D^{(3,3),1}_{1,2;3}a)(e, e, (1, 2, 3)) = x,$$
$$(D^{(3,3),1}_{1,2;3}a)(e, e, (2, 3, 1)) = x',$$
$$(D^{(3,3),1}_{1,2;3}a)(e, e, (3, 1, 2)) = x'',$$
$$(D^{(3,3),1}_{1,3;2}a)(e, e, (1, 2, 3)) = z, \qquad (D^{(3,3),1}_{2,3;1}a)(e, e, (1, 2, 3)) = y;$$
$$(D^{(3,3),1}_{1,3;2}a)(e, e, (2, 3, 1)) = z', \qquad (D^{(3,3),1}_{2,3;1}a)(e, e, (2, 3, 1)) = y';$$
$$(D^{(3,3),1}_{1,3;2}a)(e, e, (3, 1, 2)) = z'', \qquad (D^{(3,3),1}_{2,3;1}a)(e, e, (3, 1, 2)) = y''.$$

Donc

$$\Omega^1_e \Omega^2_e D^{(3,3),1}_{1,2;3} a = (x, x', x''),$$
$$\Omega^1_e \Omega^2_e D^{(3,3),1}_{1,3;2} a = (z, z', z''), \qquad \Omega^1_e \Omega^2_e D^{(3,3),1}_{2;3;1} a = (y, y', y'').$$

On trouve, de même, que

$$\Omega^2_e \Omega^3_e D^{(3,3),2}_{1,2;3} a = (-x, -y, -z),$$
$$\Omega^2_e \Omega^3_e D^{(3,3),2}_{1,3;2} a = (-x'', -y'', -z''), \qquad \Omega^2_e \Omega^3_e D^{(3,3),2}_{2,3;1} a = (-x', -y', -z').$$

D'où la formule (23).

Enfin, soit

$$a = (L, \eta; x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} x & y & z & t \\ x' & y' & z' & t' \\ x'' & y'' & z'' & t'' \end{pmatrix}.$$

On a

$$\begin{aligned} D a = {} & D^{(4),1}_{1,2;3,4}a + D^{(4),1}_{1,3;2,4}a + D^{(4),1}_{1,4;2,3}a + D^{(4),1}_{2,3;1,4}a + D^{(4),1}_{2,4;1,3} + D^{(4),1}_{3,4;1,2} \\ & + D^{(4),1}_{1,2,3;4}a + D^{(4),1}_{1,2,4;3}a + D^{(4),1}_{1,3,4;2}a + D^{(4),1}_{2,3,4;1}a; \end{aligned}$$

$$D^{(4),1}_{i_1,i_2;j_1,j_2}a \in J_{3,2}(A), \qquad D^{(4),1}_{i_1,i_2,i_3;j_1}a \in J_{2,3}(A);$$

$$(D^{(4),1}_{1,2;3,4}a)((1, 2, 3), e) = -\eta([[[x_1, x_2], x_3], x_4]) = -a((1, 2, 3, 4)) = -x,$$

$$\begin{aligned} (D^{(4),1}_{1,2;3,4}a)((2, 3, 1), e) &= -\eta([[x_3, x_4], [x_1, x_2]]) \\ &= -\eta([x_3, x_4, x_1, x_2] + [x_4, x_3, x_2, x_1]) \\ &= -a((3, 4, 1, 2)) - a((4, 3, 2, 1)) = -z - t = x + y, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (D^{(4),1}_{1,2;3,4}a)((3, 1, 2), e) &= -\eta([[x_4, [x_1, x_2]], x_3]) \\ &= -\eta([x_2, x_1, x_4\, x_3]) = -a((2, 1, 4, 3)) = -y, \end{aligned}$$

donc

$$\Omega^2_e D^{(4),1}_{1,2;3,4} a = (-x, x+y, -y).$$

On trouve, de même,

$$\Omega_e^2 D^{(4),1}_{1,3;2,4} a = (-x'', x''+z'', -z''), \qquad \Omega_e^2 D^{(4),1}_{1,4;2,3} a = (-y', y'+z', -z'),$$
$$\Omega_e^2 D^{(4),1}_{2,3;1,4} a = (-x', x'+t', -t'),$$
$$\Omega_e^2 D^{(4),1}_{2,4;1,3} a = (-y'', y''+t'', -t''), \qquad \Omega_e^2 D^{(4),1}_{3,4;1,2} a = (-z, z+t, -t).$$

On a ensuite

$$(D^{(4),1}_{1,2;3;4} a)(e, (1, 2, 3)) = \eta([[[x_1, x_2], x_3], x_4]) = a((1, 2, 3, 4)) = x,$$
$$(D^{(4),1}_{1,2;3;4} a)(e, (2, 3, 1)) = \eta([[[x_2, x_3], x_1], x_4]) = a((2, 3, 1, 4)) = x',$$
$$(D^{(4),1}_{1,2;3;4} a)(e, (3, 1, 2)) = \eta([[[x_3, x_1], x_2], x_4]) = a((3, 1, 2, 4)) = x'',$$

donc

$$\Omega_e^1 D^{(4),1}_{1,2,3;4} a = (x, x', x'').$$

On trouve, de même,

$$\Omega_e^1 D^{(4),1}_{1,2,4;3} a = (y, y'', y'), \qquad \Omega_e^1 D^{(4),1}_{1,3,4;2} a = (z'', z, z'), \qquad \Omega_e^1 D^{(4),1}_{2,3,4;1} a = (t', t, t'').$$

D'où la formule (24).

CHAPITRE III.

Produits sur Z(A), Y(A), X(A) lorsque A est un anneau de Lie.

Dans ce chapitre, A désigne un anneau de Lie. En particulier, A est un groupe abélien, et tout ce qui précède est applicable.

9. Définition des produits $\triangle$. — Soient $\mathbf{p}_1 \in \mathbf{P}, \ldots, \mathbf{p}_n \in \mathbf{P}$, $a_1 \in K_{\mathbf{p}_1}(A), \ldots, a_n \in K_{\mathbf{p}_n}(A)$ $(n > 1)$. On définit $a = a_1 \triangle a_2 \triangle \ldots \triangle a_n \in K_{(n, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n)}(A)$ par la formule suivante, où $\tau \in \mathfrak{S}_n$, $\mathbf{s}_1 \in \mathfrak{S}_{\mathbf{p}_1}, \ldots, \mathbf{s}_n \in \mathfrak{S}_{\mathbf{p}_n}$,

$$a(\tau, \mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_n) = [a_{\tau(1)}(\mathbf{s}_{\tau(1)}), \ldots, a_{\tau(n)}(\mathbf{s}_{\tau(n)})].$$

On étend le produit $\triangle$ à Z(A) par multilinéarité. En particulier, Z(A) est muni d'une structure d'algèbre (non associative) sur $\mathbf{Z}$. Mais on prendra garde que $a_1 \triangle \ldots \triangle a_n$ ne s'obtient pas en itérant le produit $\triangle$ de deux facteurs; par exemple, $a_1 \triangle a_2 \triangle a_3 \in K_{3, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3}(A)$, tandis que $(a_1 \triangle a_2) \triangle a_3 \in K_{2, 2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3}(A)$.

Lemme 26. — *Soit α_i le degré de a_i. Le degré de $a_1 \triangle a_2 \triangle \ldots \triangle a_n$ est $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n + n - 2$. En particulier, le degré de $a_1 \triangle a_2$ est $\alpha_1 + \alpha_2$, de sorte que Z(A), muni du produit $\triangle$ et du degré, est une algèbre graduée.*

En effet, si $\mathbf{p}_i = (p^i_1, p^i_2, \ldots, p^i_{h_i})$, on a

$$\alpha_i = p^i_1 + \ldots + p^i_{h_i} - 2h_i,$$

et le degré de $a_1 \triangle \ldots \triangle a_n$ est

$$
\begin{aligned}
& n + p_1^1 + p_2^1 + \ldots + p_{h_1}^1 + \ldots + p_1^n + p_2^n + \ldots + p_{h_n}^n - 2(1 + h_1 + \ldots + h_n) \\
& = (p_1^1 + \ldots + p_{h_1}^1 - 2h_1) + \ldots + (p_1^n + \ldots + p_{h_n}^n - 2h_n) + n - 2.
\end{aligned}
$$

LEMME 27. — *Soient* $a_1 \in \mathrm{K}_{\mathbf{p}_1}(\mathrm{A}), \ldots, a_n \in \mathrm{K}_{\mathbf{p}_n}(\mathrm{A}), \mathbf{t}_1 \in \mathfrak{S}_{\mathbf{p}_1}, \ldots, \mathbf{t}_n \in \mathfrak{S}_{\mathbf{p}_n}$. *On a*

$$(\Phi'_{\mathbf{t}_1} a_1) \triangle \ldots \triangle (\Phi'_{\mathbf{t}_n} a_n) = \Phi'_{(e, \mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_n)}(a_1 \triangle \ldots \triangle a_n).$$

En effet, pour $\tau \in \mathfrak{S}_n$, $\mathbf{s}_1 \in \mathfrak{S}_{\mathbf{p}_1}, \ldots, \mathbf{s}_n \in \mathfrak{S}_{\mathbf{p}_n}$, on a

$$
\begin{aligned}
& ((\Phi'_{\mathbf{t}_1} a_1) \triangle \ldots \triangle (\Phi'_{\mathbf{t}_n} a_n))(\tau, \mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_n) \\
& \quad = [\Phi'_{\mathbf{t}_{\tau(1)}} a_{\tau(1)}(\mathbf{s}_{\tau(1)}), \ldots, \Phi'_{\mathbf{t}_{\tau(n)}} a_{\tau(n)}(\mathbf{s}_{\tau(n)})] = [\varepsilon_{\mathbf{t}_{\tau(1)}} a_{\tau(1)}(\mathbf{t}_{\tau(1)}^{-1} \mathbf{s}_{\tau(1)}), \ldots, \varepsilon_{\mathbf{t}_{\tau(n)}} a_{\tau(n)}(\mathbf{t}_{\tau(n)}^{-1} \mathbf{s}_{\tau(n)})] \\
& \quad = \varepsilon_{\mathbf{t}_1} \ldots \varepsilon_{\mathbf{t}_n} (\Phi_{(e, \mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_n)}(a_1 \triangle \ldots \triangle a_n))(\tau, \mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_n) = (\Phi'_{(e, \mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_n}(a_1 \triangle \ldots \triangle a_n))(\tau, \mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_n).
\end{aligned}
$$

LEMME 28. — *Soient*

$$
\begin{array}{lll}
\mathbf{p}_1 = (p_1^1, \ldots, p_{h_1}^1) \in \mathbf{P}, & \ldots, & \mathbf{p}_n = (p_1^n, \ldots, p_{h_n}^n) \in \mathbf{P}; \\
a_1 \in \mathrm{K}_{\mathbf{p}_1}(\mathrm{A}), & \ldots, & a_n \in \mathrm{K}_{\mathbf{p}_n}(\mathrm{A}); \\
\tau_1 \in \mathfrak{S}_{h_1}, & \ldots, & \tau_n \in \mathfrak{S}_{h_n},
\end{array}
$$

τ la permutation de $\{1, 2, \ldots, h_1 + \ldots + h_n + 1\}$ définie par $\tau(1) = 1$ et

$$\tau(1 + h_1 + \ldots + h_{i-1} + j) = 1 + h_1 + \ldots + h_{i-1} + \tau_i(j)$$

pour $1 \leqq j \leqq h_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Alors

$$(\Psi'_{\tau_1} a_1) \triangle \ldots \triangle (\Psi'_{\tau_n} a_n) = \Psi'_{\tau}(a_1 \triangle \ldots \triangle a_n).$$

En effet, soient $\sigma_1^1 \in \mathfrak{S}^1_{p_1^1}, \ldots, \sigma_{h_n}^n \in \mathfrak{S}_{p_{h_n}^n}$, $\rho \in \mathfrak{S}_n$. On a, avec certains entiers $q, q_1, \ldots, q_n$

$$
\begin{aligned}
& (\Psi'_{\tau}(a_1 \triangle \ldots \triangle a_n))(\rho, \sigma^1_{\tau_1^{-1}(1)}, \ldots, \sigma^1_{\tau_1^{-1}(h_1)}, \ldots, \sigma^n_{\tau_n^{-1}(1)}, \ldots, \sigma^n_{\tau_n^{-1}(h_n)}) \\
& \quad = \mathfrak{p}(q)(a_1 \triangle \ldots \triangle a_n)(\rho, \sigma_1^1, \ldots, \sigma_{h_1}^1, \ldots, \sigma_1^n, \ldots, \sigma_{h_n}^n) \\
& \quad = \mathfrak{p}(q)\big[a_{\rho(1)}(\sigma_1^{\rho(1)}, \ldots, \sigma_{h_{\rho(1)}}^{\rho(1)}), \ldots, a_{\rho(n)}(\sigma_1^{\rho(n)}, \ldots, \sigma_{h_{\rho(n)}}^{\rho(n)})\big], \\
& ((\Psi'_{\tau_1} a_1) \triangle \ldots \triangle (\Psi'_{\tau_n} a_n))(\rho, \sigma^1_{\tau_1^{-1}(1)}, \ldots, \sigma^1_{\tau_1^{-1}(h_1)}, \ldots, \sigma^n_{\tau_n^{-1}(1)}, \ldots, \sigma^n_{\tau_n^{-1}(h_n)}) \\
& \quad = \Big[\Psi'_{\tau_{\rho(1)}} a_{\rho(1)}\Big(\sigma^{\rho(1)}_{\tau_{\rho(1)}^{-1}(1)}, \ldots, \sigma^{\rho(1)}_{\tau_{\rho(1)}^{-1}(h_{\rho(1)})}\Big), \ldots, \Psi'_{\tau_{\rho(n)}} a_{\rho(n)}\Big(\sigma^{\rho(n)}_{\tau_{\rho(n)}^{-1}(1)}, \ldots, \sigma^{\rho(n)}_{\tau_{\rho(n)}^{-1}(h_{\rho(n)})}\Big)\Big] \\
& \quad = \big[\mathfrak{p}(q_{\rho(1)}) a_{\rho(1)}(\sigma_1^{\rho(1)}, \ldots, \sigma_{h_{\rho(1)}}^{\rho(1)}), \ldots, \mathfrak{p}(q_n) a_{\rho(n)}(\sigma_1^{\rho(n)}, \ldots, \sigma_{h_{\rho(n)}}^{\rho(n)})\big],
\end{aligned}
$$

et l'on voit aisément que $q = q_1 + \ldots + q_n$. D'où le lemme.

LEMME 29. — *Soient*

$$
\begin{array}{c}
\mathbf{p}_1 = (p_1^1, \ldots, p_{h_1}^1) \in \mathbf{P}, \ldots, \mathbf{p}_n = (p_1^n, \ldots, p_{h_n}^n) \in \mathbf{P}, \\
a_1 \in \mathrm{K}_{\mathbf{p}_1}(\mathrm{A}), \quad \ldots, \quad a_n \in \mathrm{K}_{\mathbf{p}_n}(\mathrm{A}),
\end{array}
$$

et $i \in \{1, 2, \ldots, h_j\}$. Alors

$$a_1 \triangle \ldots \triangle a_{j-1} \triangle \Omega_\sigma^i a_j \triangle a_{j+1} \triangle \ldots \triangle a_n = \Omega_\sigma^{1+h_1+\ldots+h_{j-1}+i}(a_1 \triangle \ldots \triangle a_n).$$

En effet

$$
\begin{aligned}
&(a_1 \Delta \ldots \Delta a_{j-1} \Delta \Omega^i_\sigma a_j \Delta a_{j+1} \Delta \ldots \Delta a_n) \\
&\quad (\rho, \sigma^1_1, \ldots, \sigma^1_{h_1}, \ldots, \sigma^j_1, \ldots, \sigma^j_{i-1}, \sigma^j_{i+1}, \ldots, \sigma^j_{h_j}, \ldots, \sigma^n_1, \ldots \ \sigma^n_{h_n}) \\
&= [a_{\rho(1)}(\sigma^{\rho(1)}_1, \ldots, \sigma^{\rho(1)}_{h_{\rho(1)}}), \ldots, \\
&\quad a_{\rho(\rho^{-1}(j))}\ (\sigma^j_1, \ldots, \sigma^j_{i-1}, \sigma, \sigma^j_{i+1}, \ldots, \sigma^j_{h_j}), \ldots, a_{\rho(n)}(\sigma^{\rho(n)}_1, \ldots, \sigma^{\rho(n)}_{h_{\rho(n)}})] \\
&= (\Omega^{1+h_1+\ldots+h_{j-1}+i}_\sigma (a_1 \Delta \ldots \Delta a_n)) \\
&\quad (\rho, \sigma^1_1, \ldots, \sigma^1_{h_1}, \ldots, \sigma^j_1, \ldots, \sigma^j_{i-1}, \sigma^j_{i+1}, \ldots, \sigma^j_{h_j}, \ldots, \sigma^n_1, \ldots, \sigma^n_{h_n}).
\end{aligned}
$$

Lemme 30. — *Soient*

$$
\mathbf{p}_1 = (p^1_1, \ldots, p^1_{h_1}) \in \mathbf{P}, \ \ldots, \ \mathbf{p}_n = (p^n_1, \ldots, p^n_{h_n}) \in \mathbf{P},
$$
$$
a_1 \in \mathrm{K}_{\mathbf{p}_1}(\mathrm{A}), \ \ldots, \ a_n \in \mathrm{K}_{\mathbf{p}_n}(\mathrm{A}),
$$

$\pi \in \mathfrak{S}_n$ *la transposition des entiers* i *et* $i+1$, $\tau \in \mathfrak{S}_{1+h_1+\ldots+h_n}$ *la permutation inverse de la permutation*

$$
\begin{aligned}
(1, 2, 3, \ldots, \ &1 + h_1 + \ldots + h_{i-1}, \ 1 + h_1 + \ldots + h_i + 1, \ \ldots, \\
&1 + h_1 + \ldots + h_{i+1}, \ 1 + h_1 + \ldots + h_{i-1} + 1, \ \ldots, \\
&1 + h_1 + \ldots + h_i, \quad 1 + h_1 + \ldots + h_{i+1} + 1, \ \ldots, \ 1 + h_1 + \ldots + h_n)
\end{aligned}
$$

(*qui consiste à « échanger les intervalles d'entiers*

$$
[1 + h_1 + \ldots + h_{i-1} + 1, \ 1 + h_1 + \ldots + h_i]
$$

et

$$
[1 + h_1 + \ldots + h_i + 1, \ 1 + h_1 + \ldots + h_{i+1}] \text{ »}).
$$

Soit $\alpha_k = p^k_1 + \ldots + p^k_{h_k} - 2h_k$ *le degré de* a_k. *On a*

$$
a_1 \Delta \ldots \Delta a_{i-1} \Delta a_{i+1} \Delta a_i \Delta a_{i+2} \Delta \ldots \Delta a_n = \mathfrak{p}(\alpha_i \alpha_{i+1} + 1) \mathbf{\Phi}'_{(\pi, e, \ldots, e)} \mathbf{\Psi}'_\tau (a_1 \Delta \ldots \Delta a_n)
$$

(*le signe* $\mathfrak{p}(\alpha_i \alpha_{i+1} + 1)$ *ayant une signification fonctionnelle et non formelle*).

En effet, soient $\rho \in \mathfrak{S}_n$, $\sigma^i_j \in \mathfrak{S}_{p^i_j}$. On a

$$
\begin{aligned}
&(a_{\pi(1)} \Delta \ldots \Delta a_{\pi(n)}) (\rho, \sigma^{\pi(1)}_1, \ldots, \sigma^{\pi(1)}_{h_{\pi(1)}}, \ldots, \sigma^{\pi(n)}_1, \ldots, \sigma^{\pi(n)}_{h_{\pi(n)}}) \\
&\quad = [a_{\pi(\rho(1))}(\sigma^{\pi(\rho(1))}_1, \ldots, \sigma^{\pi(\rho(1))}_{h_{\pi(\rho(1))}}), \ldots, a_{\pi(\rho(n))}(\sigma^{\pi(\rho(n))}_1, \ldots, \sigma^{\pi(\rho(n))}_{h_{\pi(\rho(n))}})], \\
&\quad (\mathbf{\Psi}_\tau (a_1 \Delta \ldots \Delta a_n)) (\pi\rho, \sigma^{\pi(1)}_1, \ldots, \sigma^{\pi(1)}_{h_{\pi(1)}}, \ldots, \sigma^{\pi(n)}_1, \ldots, \sigma^{\pi(n)}_{h_{\pi(n)}}) \\
&\qquad = (a_1 \overline{\underline{\Delta}} \ldots \Delta a_n) (\pi\rho, \sigma^1_1, \ldots, \sigma^n_{h_n}) \\
&\qquad = [a_{\pi\rho(1)}(\sigma^{\pi\rho(1)}_1, \ldots, \sigma^{\pi\rho(1)}_{h_{\pi\rho(1)}}), \ldots, a_{\pi\rho(n)}(\sigma^{\pi\rho(n)}_1, \ldots, \sigma^{\pi\rho(n)}_{h_{\pi\rho(n)}})],
\end{aligned}
$$

donc

$$
a_1 \Delta \ldots \Delta a_{i-1} \Delta a_{i+1} \Delta a_i \Delta a_{i+2} \Delta \ldots \Delta a_n = \mathbf{\Phi}_{(\pi, e, \ldots, e)} \mathbf{\Psi}_\tau (a_1 \Delta \ldots \Delta a_n).
$$

D'autre part, $\varepsilon_{(\pi, e, \ldots, e)} = -1$, et

$$
\begin{aligned}
\mathbf{\Psi}_\tau (a_1 \Delta \ldots \Delta a_n) &= \mathfrak{p}((p^i_1 + \ldots + p^i_{h_i})(p^{i+1}_1 + \ldots + p^{i+1}_{h_{i+1}})) \mathbf{\Psi}'_\tau (a_1 \Delta \ldots \Delta a_n) \\
&= \mathfrak{p}(\alpha_i \alpha_{i+1}) \mathbf{\Psi}'_\tau (a_1 \Delta \ldots \Delta a_n).
\end{aligned}
$$

D'où le lemme.

Lemme 31. — *Si* $a_1, \ldots, a_n$ *sont des applications jacobiennes,* $a_1 \Delta \ldots \Delta a_n$ *est une application jacobienne.*

Soit $a = a_1 \triangle \ldots \triangle a_n$. On a

$$a(\rho, \mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_n) = [a_{\rho(1)}(\mathbf{s}_{\rho(1)}), \ldots, a_{\rho(n)}(\mathbf{s}_{\rho(n)})].$$

Donc, si l'on fixe dans a toutes les variables sauf ρ, on obtient l'application jacobienne $(A, I_A; a_1(\mathbf{s}_1), \ldots, a_n(\mathbf{s}_n))$, en désignant par I_A l'application identique de A. Si l'on fixe dans a toutes les variables sauf une variable autre que ρ, l'application partielle obtenue s'obtient en composant une application jacobienne et un endomorphisme fixe du groupe abélien A; cette application partielle est donc jacobienne.

Lemme 32. — *Si $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ sont des applications jacobiennes, et si b_i est équivalente à a_i pour tout i, alors $a_1 \triangle \ldots \triangle a_n$ est équivalente à $b_1 \triangle \ldots \triangle b_n$.*

Il suffit d'envisager le cas où $b_j = a_j$ pour $j \neq i$. D'autre part, on peut se limiter aux trois cas suivants : 1° $b_i = \Phi'_{\mathbf{t}} a_i$; 2° $b_i = \Psi'_\tau a_i$; 3° b_i se déduit de a_i en fixant égale à e une variable qui parcourt $\mathfrak{S}_2$. Il suffit alors d'appliquer les lemmes 27, 28 et 29.

Théorème 3. — *Le sous-groupe $Y(A)$ de $Z(A)$ est stable pour le produit $\triangle$. Si $b_1 \in Y(A), \ldots, b_n \in Y(A)$, et si l'un des b_i appartient à $Y'(A)$, alors $b_1 \triangle \ldots \triangle b_n \in Y'(A)$.*

Le lemme 31 entraîne aussitôt que $Y(A)$ est stable pour le produit $\triangle$. Pour prouver la deuxième assertion du théorème, il suffit d'établir ceci : soient

$$a_1 \in J_{\mathbf{p}_1}(A), \ \ldots, \ a_{i-1} \in J_{\mathbf{p}_{i-1}}(A),$$
$$b_i \in Y'(A), \qquad a_{i+1} \in J_{\mathbf{p}_{i+1}}(A), \qquad \ldots, \qquad a_n \in J_{\mathbf{p}_n}(A),$$
$$a = a_1 \triangle \ldots \triangle a_{i-1} \triangle b_i \triangle a_{i+1} \triangle \ldots \triangle a_n;$$

alors, $a \in Y'(A)$. On peut même se limiter au cas où b_i est de l'une des formes (1), (2), (3) (§ 3). Si b_i est de la forme (1), on a $a \in Y'(A)$, d'après le lemme 32. Si b_i est de la forme (2), $a \in Y'(A)$ de manière évidente. Si b_i est une application jacobienne dégénérée, b_i est équivalente à $-b_i$, donc a est équivalente à $-a$ en vertu du lemme 32, donc $a \in Y'(A)$. D'où le théorème.

Corollaire. — *Le produit $\triangle$ dans $Z(A)$ définit un produit $\triangle$ dans $X(A)$. En particulier, pour le produit $\triangle$ de deux éléments et pour le degré, $X(A)$ est une algèbre graduée.*

Proposition 11. — *Si $b_1, \ldots, b_n$ sont des éléments de $X(A)$, homogènes de degrés $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, on a*

$$b_1 \triangle \ldots \triangle b_{i-1} \triangle b_{i+1} \triangle b_i \triangle b_{i+2} \triangle \ldots \triangle b_n = \mathrm{p}(\alpha_i \alpha_{i+1} + 1) b_1 \triangle \ldots \triangle b_n. \tag{25}$$

Si α_i est pair, on a

$$b_1 \triangle \ldots \triangle b_{i-1} \triangle b_i \triangle b_i \triangle b_{i+1} \triangle \ldots \triangle b_n = 0. \tag{26}$$

La formule (25) résulte aussitôt du lemme 30. D'autre part, si α_i est pair, la formule (25) entraîne que $b_1 \triangle \ldots \triangle b_{i-1} \triangle b_i \triangle b_i \triangle b_{i+1} \triangle \ldots \triangle b_n$ est d'ordre 2 dans X(A), donc nul puisque X(A) est un groupe abélien libre.

Proposition 12. — *Si $x \in \mathrm{A}$, $y \in \mathrm{A}$, $z \in \mathrm{A}$, $t \in \mathrm{A}$, on a*

$$
\begin{aligned}
(x) \triangle (y) &= ([x, y]),\\
(x) \triangle (y) \triangle (z) &= ([x, y, z], [y, z, x], [z, x, y]),\\
(x, y, z) \triangle (t) &= ([x, t], [y, t], [z, t]).
\end{aligned}
$$

Soit $a = (x) \triangle (y) \in \mathrm{J}_{2,2,2}(\mathrm{A})$. On a $a(e, e, e) = [x, y]$, d'où la première formule. Soit $a' = (x) \triangle (y) \triangle (z) \in \mathrm{J}_{3,2,2,2}(\mathrm{A})$. On a

$$a'((1, 2, 3), e, e, e) = [x, y, z], \qquad a'((2, 3, 1), e, e, e) = [y, z, x],$$
$$a'((3, 1, 2), e, e, e) = [z, x, y],$$

d'où la deuxième formule. Enfin, soit $a'' = (x, y, z) \triangle (t) \in \mathrm{J}_{2,3,2}(\mathrm{A})$. On a

$$a''(e, (1, 2, 3), e) = [x, t], \qquad a''(e, (2, 3, 1), e) = [y, t], \qquad a''(e, (3, 1, 2), e) = [z, t],$$

d'où la troisième formule.

10. Relations entre les produits $\triangle$ et l'opérateur ∂.

Théorème 4. — *Soient n un entier $\geqq 2$, et $a_1 \in \mathrm{J}_{\mathbf{p}_1}(\mathrm{A}), \ldots, a_n \in \mathrm{J}_{\mathbf{p}_n}(\mathrm{A})$; de degrés $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. On a, modulo $\mathrm{Y}'(\mathrm{A})$,*

$$
\begin{aligned}
\mathrm{D}(a_1 \triangle \ldots \triangle a_n) \equiv{} & \textstyle\sum_{u=1}^{n} \mathfrak{p}(n + \alpha_1 + \ldots + \alpha_{u-1})\, a_1 \triangle \ldots \triangle a_{u-1} \triangle \mathrm{D} a_u \triangle a_{u+1} \triangle \ldots \triangle a_n\\
& + \textstyle\sum \{ (i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_{n-p}) \in \mathfrak{Sf}(p, n-p),\ 1 < p < n \}\\
& \quad \mathfrak{p}(n + p + 1 + \textstyle\sum_{i_k > j_l} (\alpha_{i_k} \alpha_{j_l} + 1))\, (a_{i_1} \triangle \ldots \triangle a_{i_p}) \triangle a_{j_1} \triangle \ldots \triangle a_{j_{n-p}}.
\end{aligned}
$$

Soient $\mathbf{p}_1 = (p_1^1, \ldots, p_{h_1}^1), \ldots, \mathbf{p}_n = (p_1^n, \ldots, p_{h_n}^n)$. On a

$$a = a_1 \triangle \ldots \triangle a_n \in \mathrm{J}_{n, p_1^1, \ldots, p_{h_1}^1, \ldots, p_1^n, \ldots, p_{h_n}^n}(\mathrm{A}) = \mathrm{J}_{\mathbf{p}}(\mathrm{A}).$$

Soit r un entier tel que $1 \leqq r \leqq h_u$. On a

$$
\begin{aligned}
& \left(\mathrm{D}^{\mathbf{p}, 1 + h_1 + \ldots + h_{u-1} + r}_{i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_{p_r^u - p}} a\right)(\rho, \sigma_1^1, \ldots, \sigma_{h_1}^1, \ldots, \sigma_1^u, \ldots, \sigma_{r-1}^u, \tau, \sigma, \sigma_{r+1}^u, \ldots, \sigma_{h_u}^u, \ldots, \sigma_1^n, \ldots, \sigma_{h_n}^n)\\
& \quad = \mathfrak{p}(n + p_1^1 + \ldots + p_{h_1}^1 + \ldots + p_1^{u-1} + \ldots\\
& \qquad\qquad + p_{h_{u-1}}^{u-1} + p_1^u + \ldots + p_r^u + p + 1)\, \varepsilon_{i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_{p_r^u - p}}\\
& \qquad . \textstyle\sum_{\sigma_r^u \in \mathfrak{S}_{p_r^u}} c(i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_{p_r^u - p}; \tau, \sigma, \sigma_r^u)\, a(\rho, \sigma_1^1, \ldots, \sigma_{h_n}^n)\\
& \quad = \mathfrak{p}(n + \alpha_1 + \ldots + \alpha_{u-1} + p_1^u + \ldots + p_r^u + p + 1)\, \varepsilon_{i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_{p_r^u - p}}\\
& \qquad . \textstyle\sum_{\sigma_r^u \in \mathfrak{S}_{p_r^u}} c(i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_{p_r^u - p}; \tau, \sigma, \sigma_r^u)\\
& \qquad . \left[a_{\rho(1)}\left(\sigma_1^{\rho(1)}, \ldots, \sigma_{h_{\rho(1)}}^{\rho(1)}\right), \ldots, a_{\rho(n)}\left(\sigma_1^{\rho(n)}, \ldots, \sigma_{h_{\rho(n)}}^{\rho(n)}\right)\right].
\end{aligned}
$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}&\left(a_1\Delta\ldots\Delta a_{u-1}\Delta\, \mathrm{D}^{\mathbf{p}_u, r}_{i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_{p^u_r-p}} a_u\Delta\, a_{u+1}\Delta\ldots\Delta a_n\right)\\
&\qquad(\rho,\ \sigma^1_1,\ \ldots,\ \sigma^1_{h_1},\ \ldots,\ \sigma^u_1,\ \ldots,\ \sigma^u_{r-1},\ \tau,\ \sigma,\ \sigma^u_{r+1},\ \ldots,\ \sigma^u_{h_u},\ \ldots,\ \sigma^n_1,\ \ldots,\ \sigma^n_{h_n})\\
&=\Big[a_{\rho(1)}\big(\sigma^1_{\rho(1)},\ldots,\sigma^{\rho(1)}_{h_{\rho(1)}}\big),\ldots,\big(\mathrm{D}^{\mathbf{p}_u,r}_{i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_{p^u_r-p}} a_u\big)(\sigma^u_1,\ldots,\sigma^u_{r-1},\tau,\sigma,\sigma^u_{r+1},\ldots,\sigma^u_{h_u}),\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\ldots,\ a_{\rho(n)}\big(\sigma^{\rho(n)}_1,\ \ldots,\ \sigma^{\rho(n)}_{h_{\rho(n)}}\big)\Big]\\
&=\Big[a_{\rho(1)}\big(\sigma^{\rho(1)}_1,\ \ldots,\ \sigma^{\rho(1)}_{h_{\rho(1)}}\big),\ \ldots,\ \mathfrak{p}(p^u_1+\ldots+p^u_r+p+1)\,\varepsilon_{i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_{p^u_r-p}}\\
&\qquad.\textstyle\sum_{\sigma^u_r\in\mathfrak{S}_{p^u_r}} c(i_1,\ \ldots,\ i_p;\ j_1,\ \ldots,\ j_{p^u_r-p};\ \tau,\ \sigma,\ \sigma^u_r)\ a_u(\sigma^u_1,\ \ldots,\ \sigma^u_{h_u}),\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\ldots,\ a_{\rho(n)}\big(\sigma^{\rho(n)}_1,\ \ldots,\ \sigma^{\rho(n)}_{h_{\rho(n)}}\big)\Big].\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}&\mathrm{D}^{\mathbf{p},1+h_1+\ldots+h_{u-1}+r}_{i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_{p^u_r-p}}\, a\\
&\quad=\mathfrak{p}(n+\alpha_1+\ldots+\alpha_{u-1})\,a_1\Delta\ldots\Delta a_{u-1}\Delta\,\mathrm{D}^{\mathbf{p}_u,r}_{i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_{p^u_r-p}} a_u\Delta\, a_{u+1}\Delta\ldots\Delta a_n\end{aligned}$$

et, par suite,

$$(27)\quad\left\{\begin{aligned}&\textstyle\sum\{(i_1,\ \ldots,\ i_p;\ j_1,\ \ldots,\ j_{p^u_r-p})\in\mathfrak{Sf}(p,\ p^u_r-p),\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad 1\leqq r\leqq h_u,\ 1\leqq u\leqq n\}\ \mathrm{D}^{\mathbf{p},1+h_1+\ldots+h_{u-1}+r}_{i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_{p^u_r-p}}\, a\\
&\quad=\textstyle\sum_{u=1}^n \mathfrak{p}(n+\alpha_1+\ldots+\alpha_{u-1})\,a_1\Delta\ldots\Delta a_{u-1}\Delta\,\mathrm{D}a_u\Delta\, a_{u+1}\Delta\ldots\Delta a_u.\end{aligned}\right.$$

Calculons maintenant $\mathrm{D}^{\mathbf{p},1}_{i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_{n-p}}\boldsymbol{a}$. Posant $(\sigma^i_1,\ \ldots,\ \sigma^i_{h_i})=\mathbf{s}_i\in\mathfrak{S}^!_{\mathbf{p}_i}$, on a

$$\Omega^2_{\sigma^1_1}\ldots\Omega^{1+h_1}_{\sigma^1_{h_1}}\ldots\Omega^{1+h_1+\ldots+h_{n-1}+1}_{\sigma^n_1}\ldots\Omega^{1+h_1+\ldots+h_n}_{\sigma^n_{h_n}}a=(\mathrm{A},\ \mathrm{I}_{\mathrm{A}};\ a_1(\mathbf{s}_1),\ \ldots,\ a_n(\mathbf{s}_n)),$$

où I_{A} désigne l'application identique de A. Donc

$$\begin{aligned}&\big(\mathrm{D}^{\mathbf{p},1}_{i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_{n-p}}a\big)(\tau,\ \rho,\ \mathbf{s}_1,\ \ldots,\ \mathbf{s}_n)\\
&=\big(\mathrm{D}^{(n),1}_{i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_{n-p}}\Omega^2_{\sigma^1_1}\ldots\Omega^{1+h_1}_{\sigma^1_{h_1}}\ldots\Omega^{1+h_1+\ldots+h_{n-1}+1}_{\sigma^n_1}\ldots\Omega^{1+h_1+\ldots+h_n}_{\sigma^n_{h_n}}a\big)(\tau,\rho)\\
&=\mathfrak{p}(n+p+1)\,\varepsilon_{i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_{n-p}}\\
&\quad.[a_{j_{\tau(1)-1}}(\mathbf{s}_{j_{\tau(1)-1}}),\ \ldots,\ [a_{i_{\rho'(1)}}(\mathbf{s}_{i_{\rho'(1)}}),\ \ldots,\ a_{i_{\rho'(p)}}(\mathbf{s}_{i_{\rho'(p)}})],\ \ldots,\ a_{j_{\tau(n-p+1)-1}}(\mathbf{s}_{j_{\tau(n-p+1)-1}})].\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}&((a_{i_1}\Delta\ldots\Delta a_{i_p})\Delta\, a_{j_1}\Delta\ldots\Delta\, a_{j_{n-p}})(\tau,\ \rho,\ \mathbf{s}_{i_1},\ \ldots,\ \mathbf{s}_{i_p},\ \mathbf{s}_{j_1},\ \ldots,\ \mathbf{s}_{j_{n-p}})\\
&\quad=[a_{j_{\tau(1)-1}}(\mathbf{s}_{j_{\tau(1)-1}}),\ \ldots,\ (a_{i_1}\Delta\ldots\Delta a_{i_p})(\rho,\ \mathbf{s}_{i_1},\ \ldots,\ \mathbf{s}_{i_p}),\ \ldots,\ a_{j_{\tau(n-p+1)-1}}(\mathbf{s}_{j_{\tau(n-p+1)-1}})]\end{aligned}$$

et

$$(a_{i_1}\Delta\ldots\Delta a_{i_p})(\rho,\ \mathbf{s}_{i_1},\ \ldots,\ \mathbf{s}_{i_p})=[a_{i_{\rho'(1)}}(\mathbf{s}_{i_{\rho'(1)}}),\ \ldots,\ a_{i_{\rho'(p)}}(\mathbf{s}_{i_{\rho'(p)}})].$$

Donc

$$\begin{aligned}&\big(\mathrm{D}^{\mathbf{p},1}_{i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_{n-p}}a\big)(\tau,\ \rho,\ \mathbf{s}_1,\ \ldots,\ \mathbf{s}_n)\\
&\quad=\mathfrak{p}(n+p+1)\,\varepsilon_{i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_{n-p}}\\
&\qquad.((a_{i_1}\Delta\ldots\Delta a_{i_p})\Delta\, a_{j_1}\Delta\ldots\Delta a_{j_{n-p}})(\tau,\ \rho,\ \mathbf{s}_{i_1},\ \ldots,\ \mathbf{s}_{i_p},\ \mathbf{s}_{j_1},\ \ldots,\ \mathbf{s}_{j_{n-p}})\\
&\quad=\mathfrak{p}(n+p+1)\,\varepsilon_{i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_{n-p}}\,\mathfrak{p}\big(\textstyle\sum_{i_k>j_l}\alpha_{i_k}\alpha_{j_l}\big)\\
&\qquad.(\Psi'_\pi((a_{i_1}\Delta\ldots\Delta a_{i_p})\Delta\, a_{j_1}\Delta\ldots\Delta a_{j_{n-p}}))(\tau,\ \rho,\ \mathbf{s}_1,\ \ldots,\ \mathbf{s}_n),\end{aligned}$$

où $\pi \in \mathfrak{S}_{h_1+\ldots+h_n+2}$ est définie par

$$\pi(1)=1, \qquad \pi(2)=2, \qquad \pi(3)=h_1+\ldots+h_{i_1-1}+1+2, \qquad \ldots,$$
$$\pi(h_1+\ldots+h_n+2)=h_1+\ldots+h_{j_{n-p}}+2.$$

On a, par suite, modulo $\mathrm{Y}'(\mathrm{A})$,

$$(28) \quad \mathrm{D}^{\mathfrak{p},1}_{i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_{n-p}} a \equiv \mathfrak{p}(n+p+1 + \Sigma_{i_k>j_l}(\alpha_{i_k}\alpha_{j_l}+1))\,((a_{i_1}\triangle\ldots\triangle a_{i_p})\triangle a_{j_1}\triangle\ldots\triangle a_{j_{n-p}}).$$

Le théorème 4 résulte des formules (27) et (28).

Corollaire 1. — *Soient n un entier $\geqq 2$, et $b_1, \ldots, b_n$ des éléments de* $\mathrm{X}(\mathrm{A})$ *homogènes de degrés $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. On a*

$$\partial(b_1\triangle\ldots\triangle b_n) = \Sigma_{u=1}^{n}\mathfrak{p}(n+\alpha_1+\ldots+\alpha_{u-1})\,b_1\triangle\ldots\triangle b_{u-1}\triangle\partial b_u\triangle b_{u+1}\triangle\ldots\triangle b_n$$
$$+\Sigma\{(i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_{n-p})\in\mathfrak{Sf}(p, n-p),\ 1<p<n\}$$
$$.\mathfrak{p}(n+p+1+\Sigma_{i_k>j_l}(\alpha_{i_k}\alpha_{j_l}+1))\,((b_{i_1}\triangle\ldots\triangle b_{i_p})\triangle b_{j_1}\triangle\ldots\triangle b_{j_{n-p}}).$$

Cela résulte aussitôt du théorème 4 par linéarité et passage au quotient.

Corollaire 2. — *Soient b_1, b_2 des éléments de* $\mathrm{X}(\mathrm{A})$ *homogènes de degrés α_1, α_2. On a*

$$\partial(b_1\triangle b_2)=\partial b_1\triangle b_2+\mathfrak{p}(\alpha_1)\,b_1\triangle\partial b_2.$$

C'est un cas particulier du corollaire 1.

Ainsi, $\mathrm{X}(\mathrm{A})$, muni du degré, de ∂ et du produit $\triangle$, est une algèbre graduée différentielle.

Corollaire 3. — *Le produit $(b_1, b_2)\to b_1\triangle b_2$ définit un produit dans* $\mathrm{H}\mathfrak{J}(\mathrm{A})$.

Ceci se déduit classiquement du corollaire 2.

Ce produit sera encore désigné par $\triangle$. Muni du degré et du produit $\triangle$, $\mathrm{H}\mathfrak{J}(\mathrm{A})$ est une algèbre graduée (non associative). On notera que, en général, le produit $\triangle$ de plus de deux facteurs ne passe pas au quotient dans $\mathrm{H}\mathfrak{J}(\mathrm{A})$.

Proposition 13. — *Dans l'algèbre graduée* $\mathrm{H}\mathfrak{J}(\mathrm{A})$, *on a les règles de calcul suivantes :*

$$(29) \qquad \gamma_1\triangle\gamma_2=\mathfrak{p}(\alpha_1\alpha_2+1)\,\gamma_2\triangle\gamma_1$$

si γ_1, γ_2 sont homogènes de degrés α_1, α_2;

$$(30) \qquad \gamma\triangle\gamma=0$$

si γ est homogène de degré pair;

$$(31) \qquad \mathfrak{p}(\alpha_1\alpha_3)(\gamma_1\triangle\gamma_2)\triangle\gamma_3+\mathfrak{p}(\alpha_2\alpha_1)(\gamma_2\triangle\gamma_3)\triangle\gamma_1+\mathfrak{p}(\alpha_3\alpha_2)(\gamma_3\triangle\gamma_1)\triangle\gamma_2=0$$

si γ_1, γ_2, γ_3 sont homogènes de degrés α_1, α_2, α_3.

Les formules (29) et (30) résultent aussitôt de la proposition 11. D'autre part, le corollaire 1 du théorème 4 entraîne en particulier, si b_1, b_2, b_3 sont des éléments homogènes de X(A) de degrés α_1, α_2, α_3,

$$\begin{aligned}\partial(b_1\triangle b_2\triangle b_3) = &-\partial b_1\triangle b_2\triangle b_3 - p(\alpha_1)\, b_1\triangle \partial b_2\triangle b_3 - p(\alpha_1+\alpha_2)\, b_1\triangle b_2\triangle \partial b_3 \\ &+ (b_1\triangle b_2)\triangle b_3 + p(\alpha_3\alpha_2+1)(b_1\triangle b_3)\triangle b_2 \\ &+ p(\alpha_2\alpha_1+1+\alpha_3\alpha_1+1)(b_2\triangle b_3)\triangle b_1.\end{aligned}$$

Si b_1, b_2, b_3 sont des cycles (pour ∂), et si γ_1, γ_2, γ_3 sont leurs classes dans $H\mathfrak{J}(A)$, on en déduit

$$0 = (\gamma_1\triangle\gamma_2)\triangle\gamma_3 - p(\alpha_3\alpha_2)(\gamma_1\triangle\gamma_3)\triangle\gamma_2 + p(\alpha_2\alpha_1+\alpha_3\alpha_1)(\gamma_2\triangle\gamma_3)\triangle\gamma_1,$$

d'où, compte tenu de (29),

$$(\gamma_1\triangle\gamma_2)\triangle\gamma_3 + p(\alpha_3\alpha_2)\,p(\alpha_1\alpha_3)(\gamma_3\triangle\gamma_1)\triangle\gamma_2 + p(\alpha_2\alpha_1+\alpha_3\alpha_1)(\gamma_2\triangle\gamma_3)\triangle\gamma_1 = 0,$$

d'où (31).

CHAPITRE IV.

Homologie et cohomologie d'un anneau de Lie.

11. Algèbre commutative gauche d'un module gradué. — Les résultats de ce paragraphe sont bien connus, et de démonstration facile. Mais il est peut-être malaisé de donner des références précises. C'est pourquoi on a dressé la liste, sans démonstrations, des assertions nécessaires pour la suite. On a fait grand usage d'une rédaction inédite de J. L. Koszul.

Soit $M = \sum_{\alpha=0}^{\infty} M^\alpha$ un groupe abélien gradué, les éléments de M^α étant dits homogènes de degré α. On appellera algèbre commutative gauche de M et l'on notera G(M), l'algèbre (associative) quotient de l'algèbre tensorielle de M par l'idéal bilatère qu'engendrent les tenseurs de la forme

$$\begin{aligned}&a\otimes b - p(\alpha\beta+1)\, b\otimes a \qquad &&(\text{pour } a\in M^\alpha,\ b\in M^\beta),\\ &a\otimes a &&(\text{pour } a \text{ de degré pair dans M}).\end{aligned}$$

On notera $u.v$ le produit de deux éléments u, v de G(M). Le module M s'identifie à un sous-module de G(M). Tout élément de G(M) est combinaison linéaire d'éléments de la forme $a_1 \ldots a_n$, où $a_1\in M^{\alpha_1}$, ..., $a_n\in M^{\alpha_n}$. Un élément de la forme $a_1 \ldots a_n$, sera dit de *degré* $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, et d'*ordre* n. Le degré sur G(M) prolonge le degré de M. L'ordre sur G(M) prolonge l'ordre sur M si l'on convient que tous les éléments de M sont d'ordre 1. On appellera *degré total* sur G(M) (et sur M) la somme de l'ordre et du degré. Il y a un élément unité dans G(M), qui est d'ordre 0 et de degré 0.

Si a (resp. b) est un élément de $G(M)$ de degré α (resp. β) et d'ordre α' (resp. β'), on a

$$b.a = p(\alpha\beta + \alpha'\beta')\, a.b.$$

Soit M^+ la somme des M^p pour p pair, M^- la somme des M^p pour p impair. Alors, $G(M^+)$ s'identifie à la sous-algèbre de $G(M)$ engendrée par M^+, et à l'algèbre extérieure $\Lambda(M^+)$ de M^+; $G(M^-)$ s'identifie à la sous-algèbre de $G(M)$ engendrée par M^-, et à l'algèbre symétrique $S(M^-)$ de M^-. Et $G(M)$ s'identifie à l'algèbre produit tensoriel tordu $\Lambda(M^+)\otimes_{\mathbf{Z}} S(M^-)$, la graduation utilisée pour définir ce produit tensoriel tordu étant l'*ordre*, à la fois sur $\Lambda(M^+)$ et sur $S(M^-)$. Si M^+ (resp. M^-) possède une base totalement ordonnée $(a_i)_{i\in I}$ [resp. $(a'_{i'})_{i'\in I'}$] formée d'éléments homogènes pour le degré, $G(M)$ possède une base formée des éléments $a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_p}a'_{i'_1}a'_{i'_2}\ldots a'_{i'_{p'}}$, où $i_1 < i_2 < \ldots < i_p$, $i'_1 \leqq i'_2 \leqq \ldots \leqq i'_{p'}$, éléments qui sont homogènes pour le degré et l'ordre.

Pour tout $n = 0, 1, \ldots$, et pour tout système d'entiers $\alpha_1 \geqq 0, \ldots, \alpha_n \geqq 0$, soit $D_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}$ une application multilinéaire de $M^{\alpha_1}\times\ldots\times M^{\alpha_n}$ dans un module $\mathfrak{A}$. Supposons que, pour $a_1 \in M^{\alpha_1}, \ldots, a_n \in M^{\alpha_n}$, on ait

$$\begin{aligned} &D_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(a_1, \ldots, a_n) \\ &\quad = p(\alpha_k\alpha_{k+1}+1)\, D_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-1},\alpha_{k+1},\alpha_k,\alpha_{k+2},\ldots,\alpha_n}(a_1, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}, a_k, a_{k+2}, \ldots, a_n) \end{aligned}$$

et

$$D_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-1},\alpha_k,\alpha_k,\alpha_{k+1},\ldots,\alpha_n}(a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n) = 0 \quad \text{pour } \alpha_k \text{ pair.}$$

Alors, il existe une application linéaire et une seule D de $G(M)$ dans $\mathfrak{A}$ telle que

$$D(a_1a_2\ldots a_n) = D_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

quels que soient $a_1 \in M^{\alpha_1}, \ldots, a_n \in M^{\alpha_n}$.

Soit η un endomorphisme de M diminuant le degré d'une unité. Il existe une antidérivation (et une seule) η' de $G(M)$ prolongeant η, c'est-à-dire un endomorphisme η' du groupe $G(M)$ tel que $\eta'(1) = 0$, et

$$\eta'(a.b) = \eta'(a)b + p(\alpha)\, a\,\eta'(b)$$

si a, b sont des éléments de $G(M)$ et si a est de degré α. Cette antidérivation η' diminue le degré d'une unité et conserve l'ordre. Si $a_1 \in M^{\alpha_1}, \ldots, a_n \in M^{\alpha_n}$, on a

$$\eta'(a_1\ldots a_n) = \sum_{u=1}^{n} p(\alpha_1 + \ldots + \alpha_{u-1})\, a_1\ldots a_{u-1}(\eta a_u)\, a_{u+1}\ldots a_n.$$

L'algèbre commutative gauche $G(M+M)$ de la somme directe $M+M$ s'identifie au produit tensoriel tordu $G(M)\otimes_{\mathbf{Z}} G(M)$ défini de la manière suivante : le module $G(M)\otimes_{\mathbf{Z}} G(M)$ est le produit tensoriel ordinaire du module G(M) par lui-même; la multiplication dans $G(M)\otimes_{\mathbf{Z}}G(M)$ est définie par $(a_1\otimes b_1)$

$$(a_2\otimes b_2) = p(\beta_1\alpha_2 + \beta'_1\alpha'_2)(a_1a_2)\otimes(b_1b_2)$$

si b_1 (resp. a_2) est d'ordre β'_1 (resp. α'_2) et de degré β_1 (resp. α_2).

L'application $a\to(a, a)$ de M dans $M+M$ se prolonge d'une seule manière en un homomorphisme Δ (appelé application diagonale) de G(M) dans $G(M+M) = G(M)\otimes_{\mathbf{Z}}G(M)$. Si $a_1\in M^{\alpha_1}, \ldots, a_n\in M^{\alpha_n}$, on a

$$\begin{aligned}\Delta(a_1\ldots a_n) &= (a_1\otimes 1 + 1\otimes a_1)\ldots(a_n\otimes 1+1\otimes a_n)\\ &= \Sigma\{(i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_{n-p})\in\mathfrak{Sf}(p, n-p)\}\\ &\quad\cdot p(\Sigma_{i_k>j_l}(\alpha_{i_k}\alpha_{j_l}+1))(a_{i_1}\ldots a_{i_p})\otimes(a_{j_1}\ldots a_{j_{n-p}}).\end{aligned}$$

Soit $G(M)^\star$ le dual du module G(M). Les applications canoniques

$$G(M)^\star\times G(M)^\star\to G(M)^\star\otimes_{\mathbf{Z}}G(M)^\star\to(G(M)\otimes_{\mathbf{Z}}G(M))^\star\xrightarrow{{}^t\Delta}G(M)^\star$$

définissent une multiplication dans $G(M)^\star$ qui fait de $G(M)^\star$ une algèbre associative à élément unité. Si $f\in G(M)^\star$ et $g\in G(M)^\star$, on a

$$\begin{aligned}(f.g)(a_1\ldots a_n) &= \Sigma\{(i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_{n-p})\in\mathfrak{Sf}(p, n-p)\}\\ &\quad\cdot p(\Sigma_{i_k>j_l}(\alpha_{i_k}\alpha_{j_l}+1))f(a_{i_1}\ldots a_{i_p})g(a_{j_1}\ldots a_{j_{n-p}}).\end{aligned}$$

L'unité de $G(M)^\star$ est la forme linéaire nulle sur tous les éléments d'ordre >0 de G(M), et égale à l'identité sur $\mathbf{Z}$.

Les éléments de G(M) de degré total donné forment un sous-module de G(M) dont le dual s'identifie à un sous-module de $G(M)^\star$; la somme de ces sous-modules est une sous-algèbre de $G(M)^\star$ qui sera désignée par $G(M)^{\star\sim}$, et sera appelée le dual gradué de G(M). Le degré, l'ordre, et le degré total définissent un degré, un ordre, et un degré total sur $G(M)^{\star\sim}$. Si $f\in G(M)^{\star\sim}$ [resp. $g\in G(M)^{\star\sim}$] est de degré α (resp. β) et d'ordre α'(resp. β'), on a $g.f = p(\alpha\beta+\alpha'\beta')f.g$. Les éléments d'ordre 1 dans $G(M)^{\star\sim}$ engendrent une sous-algèbre de $G(M)^{\star\sim}$, dont l'orthogonal dans G(M) est réduit à 0.

12. Les endomorphismes ∂ et δ dans G(X(A)) et $G(X(A))^{\star\sim}$ — *Dans toute la fin de cet article,* A *désigne désormais un anneau de Lie.*

Formons l'algèbre commutative gauche G(X(A)) du groupe gradué X(A). Les combinaisons linéaires des éléments de la forme $a_1\ldots a_n$, où

$$a_1\in X_{\mathbf{p}_1}(A), \quad \ldots, \quad a_n\in X_{\mathbf{p}_n}(A)$$

forment un sous-groupe de G(X(A)) qui sera désigné par $X_{\mathbf{p}_1;\ldots;\mathbf{p}_n}(A)$. Le groupe G(X(A)) est somme directe des $X_{\mathbf{p}_1;\ldots;\mathbf{p}_n}(A)$ qui sont distincts. Puisque es $X_{\mathbf{p}_i}(A)$ sont des groupes abéliens libres, les $X_{\mathbf{p}_1;\ldots;\mathbf{p}_n}(A)$ *sont des groupes abéliens libres* et G(X(A)) est un groupe abélien libre.

L'endomorphisme ∂ de $X(A)$ se prolonge de manière unique en une antidérivation de $G(X(A))$. Composant avec l'endomorphisme qui multiplie par $p(n+1)$ les éléments d'ordre n, on obtient un endomorphisme qui prolonge encore ∂ et qui sera noté $\check{\partial}$. Si $a_1, \ldots, a_n$ sont des éléments de $X(A)$ homogènes de degrés $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, on a

$$(32) \qquad \check{\partial}(a_1 \ldots a_n) = \sum_{u=1}^{n} p(n+1+\alpha_1+\ldots+\alpha_{u-1})\, a_1 \ldots a_{u-1}(\partial a_u)\, a_{u+1} \ldots a_n.$$

Il est clair que $\check{\partial}$ conserve l'ordre et diminue le degré d'une unité.

Lemme 33. — *On a* $\check{\partial}\check{\partial} = 0$.

En effet, si a et b sont des éléments de $G(X(A))$ de degrés α et β, d'ordres α' et β', on a

$$\begin{aligned}\check{\partial}\check{\partial}(a.b) &= \check{\partial}\big(p(\beta')\,\check{\partial}a.b + p(\alpha)\,p(\alpha')\,a\,\check{\partial}b\big)\\ &= \quad p(\beta')\,p(\beta')\,(\check{\partial}\check{\partial}a)b + p(\beta')\,p(\alpha-1)\,p(\alpha')\,\check{\partial}a\,\check{\partial}b\\ &\quad + p(\alpha)\;p(\alpha')\,p(\beta')\,\check{\partial}a\,\check{\partial}b + p(\alpha)\,p(\alpha')\,p(\alpha)\,p(\alpha')\,a\,\check{\partial}\check{\partial}b\\ &= (\check{\partial}\check{\partial}a)b + a(\check{\partial}\check{\partial}b).\end{aligned}$$

Donc, l'ensemble des zéros de $\check{\partial}\check{\partial}$ est une sous-algèbre de $G(X(A))$, qui contient $\mathbf{Z}$ et $X(A)$ (corollaire du théorème 2), donc qui est identique à $G(X(A))$.

Lemme 34. — *Il existe un endomorphisme et un seul* E *du groupe* $G(X(A))$ *tel que*

$$(33) \qquad \begin{aligned}E(a_1 \ldots a_n) = \Sigma\{(i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_{n-p}) \in \mathfrak{Sf}(p, n-p),\ 1 < p \leqq n\}\\ p(n+p+\Sigma_{i_k>j_l}(\alpha_{i_k}\alpha_{j_l}+1))\,(a_{i_1}\triangle \ldots \triangle a_{i_p})\,a_{j_1} \ldots a_{j_{n-p}}\end{aligned}$$

quels que soient $a_1 \in X(A), \ldots, a_n \in X(A)$, *homogènes de degrés* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Le second membre de (33) est évidemment multilinéaire en $a_1, \ldots, a_n$. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ la transposition de u et $u+1$. Posons $a'_i = a_{\sigma(i)}$, qui est de degré $\alpha'_i = \alpha_{\sigma(i)}$, et étudions

$$\begin{aligned}\Sigma\{(i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_{n-p}) \in \mathfrak{Sf}(p, n-p),\ 1 < p \leqq n\}\\ p(n+p+\Sigma_{i_k>j_l}(\alpha'_{i_k}\alpha'_{j_l}+1))\,(a'_{i_1}\triangle \ldots \triangle a'_{i_p})\,a'_{j_1} \ldots a'_{j_{n-p}}\end{aligned}$$

1° Si $u = i_h$, $u+1 = i_{h+1}$, on a

$$\begin{aligned}&p(n+p+\Sigma_{i_k>j_l}(\alpha'_{i_k}\alpha'_{j_l}+1))\,(a'_{i_1}\triangle \ldots \triangle a'_{i_p})\,a'_{j_1} \ldots a'_{j_{n-p}}\\ &= p(n+p+\Sigma_{i_k>j_l}(\alpha_{i_k}\alpha_{j_l}+1))\,p(\alpha_u\alpha_{u+1}+1)\,(a_{i_1}\triangle \ldots \triangle a_{i_p})\,a_{j_1} \ldots a_{j_{n-p}},\end{aligned}$$

d'après la proposition 11.

2° Si $u=j_k$, $u+1=j_{k+1}$, on a

$$\begin{aligned}&\mathfrak{p}(n+p+\Sigma_{i_k>j_l}(\alpha'_{i_k}\alpha'_{j_l}+1))\,(a'_{i_1}\Delta\ldots\Delta\, a'_{i_p})a'_{j_1}\ldots a'_{j_{n-p}}\\ &=\mathfrak{p}(n+p+\Sigma_{i_k>j_l}(\alpha_{i_k}\alpha_{j_l}+1))\,\mathfrak{p}(\alpha_u\alpha_{u+1}+1)\,(a_{i_1}\Delta\ldots\Delta\, a_{i_p})a_{j_1}\ldots a_{j_{n-p}},\end{aligned}$$

d'après les lois de commutation dans une algèbre commutative gauche.

3° Si $u=i_h$, $u+1=j_k$, on a

$$\begin{aligned}&\mathfrak{p}(n+p+\Sigma_{i_k>j_l}\quad(\alpha'_{i_k}\alpha'_{j_l}+1))\,(a'_{i_1}\Delta\ldots\Delta\, a'_{i_p})a'_{j_1}\ldots a'_{j_{n-p}}\\ &=\mathfrak{p}(n+p+\Sigma_{i_k>j_l}\quad(\alpha_{\sigma(i_k)}\alpha_{\sigma(j_l)}+1))\,(a_{\sigma(i_1)}\Delta\ldots\Delta\, a_{\sigma(i_p)})\,a_{\sigma(j_1)}\ldots a_{\sigma(j_{n-p})}\\ &=\mathfrak{p}(n+p+\Sigma_{\sigma(i_k)>\sigma(j_l)}(\alpha_{\sigma(i_k)}\alpha_{\sigma(j_l)}+1)+(\alpha_u\alpha_{u+1}+1))\,(a_{\sigma(i_1)}\Delta\ldots\Delta\, a_{\sigma(i_p)})\,a_{\sigma(j_1)}\ldots a_{\sigma(j_{n-p})}\end{aligned}$$

et l'on a le même résultat si $u=j_k$, $u+1=i_h$. Donc

$$\begin{aligned}&\Sigma\{(i_1,\ \ldots,\ i_p;\ j_1,\ \ldots,\ j_{n-p})\in\mathfrak{Sf}(p,\ n-p),\ 1<p\leqq n\}\\ &\qquad\mathfrak{p}(n+p+\Sigma_{i_k>j_l}(\alpha_{i_k}\alpha_{j_l}+1))\,(a_{i_1}\Delta\ldots\Delta\, a_{i_p})a_{j_1}\ldots a_{j_{n-p}}\\ &=\mathfrak{p}(\alpha_u\alpha_{u+1}+1)\,\Sigma\{(i_1,\ \ldots,\ i_p;\ j_1,\ \ldots,\ j_{n-p})\in\mathfrak{Sf}(p,\ n-p),\ 1<p\leqq n\}\\ &\qquad\mathfrak{p}(n+p+\Sigma_{i_k>j_l}(\alpha'_{i_k}\alpha'_{j_l}+1))\,(a'_{i_1}\Delta\ldots\Delta\, a'_{i_p})a'_{j_1}\ldots a'_{j_{n-p}}.\end{aligned}$$

Maintenant, si $a_{u+1}=a_u$ et si α_u est pair, ce qui précède prouve que le second membre de (33) est égal à son opposé dans $G(X(A))$. Comme $G(X(A))$ est un groupe abélien libre, le second membre de (33) est nul. D'où le lemme.

On définira l'endomorphisme ∂ du groupe $G(X(A))$ en posant

$$\partial=\check{\partial}+E.$$

Comme E s'annule sur $X(A)$ et sur $\mathbf{Z}$, ∂ s'annule sur $\mathbf{Z}$ et prolonge l'endomorphisme ∂ de $X(A)$. On désignera par δ l'endomorphisme transposé de ∂ dans $G(X(A))^{\star\sim}$, qui s'annule sur $\mathbf{Z}$.

Proposition 14. — *L'endomorphisme ∂ de $G(X(A))$ diminue le degré total d'une unité. L'endomorphisme δ de $G(X(A))^{\star\sim}$ augmente le degré total d'une unité.*

Il suffit de prouver la première assertion. Or, $\check{\partial}$ diminue le degré d'une unité et conserve l'ordre. D'autre part, soient $a_1,\ \ldots,\ a_n$ des éléments de $X(A)$ de degrés $\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n$. Le degré total de $a_1.a_2\ldots a_n$ est $n+\alpha_1+\ldots+\alpha_n$. Le degré total de $(a_{i_1}\Delta\ldots\Delta\, a_{i_p})a_{j_1}\ldots a_{j_{n-p}}$ est, compte tenu du lemme 26,

$$n-p+1+\alpha_{i_1}+\ldots+\alpha_{i_p}+p-2+\alpha_{j_1}+\ldots+\alpha_{j_{n-p}}=n-1+\alpha_1+\ldots+\alpha_n,$$

donc E diminue le degré total d'une unité, ce qui prouve la proposition.

Remarquons aussi que ∂ n'augmente pas l'ordre, donc que δ ne le diminue pas.

Lemme 35. — *Soit ω l'endomorphisme du groupe $G(X(A))$ qui multiplie un élément d'ordre n par $\mathfrak{p}(n)$. Soit Ω l'endomorphisme du groupe $G(X(A))\otimes_{\mathbf{Z}}G(X(A))$ qui est tel que $\Omega(a\otimes b)=\mathfrak{p}((\alpha+\alpha')\beta)(a\otimes b)$ lorsque a (resp. b) est de degré α (resp. β) et d'ordre α' (resp. β'). Alors, si Δ désigne l'application diagonale* *de* $G(X(A))$ *dans* $G(X(A)) \otimes_{\mathbf{Z}} G(X(A))$, *on a*

$$\Delta \circ \partial = (\partial \otimes \omega + \Omega(1 \otimes \partial)\,\Omega) \circ \Delta.$$

En effet, soient $a_1, \ldots, a_n$ des éléments de $X(A)$ de degrés $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. On a

$$
\begin{aligned}
(\Delta\,\partial)(a_1 \ldots a_n) = {} & \Sigma\{(i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_{n-p}) \in \mathfrak{Sf}(p, n-p),\ 1 \leq u \leq p,\ 0 \leq p \leq n\} \\
& \mathfrak{p}(n+1+\alpha_1+\ldots+\alpha_{i_u-1} + \Sigma_{i_l>j_m}(\alpha_{i_l}\alpha_{j_m}+1) - \Sigma_{i_u>j_m}\alpha_{j_m}) \\
& .(a_{i_1} \ldots \partial a_{i_u} \ldots a_{i_p}) \otimes (a_{j_1} \ldots a_{j_{n-p}}) \\
& + \Sigma\{(i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_{n-p}) \in \mathfrak{Sf}(p, n-p),\ 1 \leq u \leq n-p,\ 0 \leq p \leq n\} \\
& \mathfrak{p}(n+1+\alpha_1+\ldots+\alpha_{j_u-1} + \Sigma_{i_l>j_m}(\alpha_{i_l}\alpha_{j_m}+1) - \Sigma_{i_l>j_u}\alpha_{i_l}) \\
& .(a_{i_1} \ldots a_{i_p}) \otimes (a_{j_1} \ldots \partial a_{j_u} \ldots a_{j_{n-p}}) \\
& + \Sigma\{(i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_q; k_1, \ldots, k_{n-p-q}) \\
& \qquad \in \mathfrak{Sf}(p, q, n-p-q),\ 2 \leq p \leq n,\ 0 \leq q \leq n-p\} \\
& \mathfrak{p}(n+p+\Sigma_{i_l>j_m}(\alpha_{i_l}\alpha_{j_m}+1) + \Sigma_{i_l>k_s}(\alpha_{j_l}\alpha_{k_s}+1) + \Sigma_{j_m>k_s}(\alpha_{j_m}\alpha_{k_s}+1)) \\
& .((a_{i_1}\Delta \ldots \Delta\, a_{i_p})\, a_{j_1} \ldots a_{j_q}) \otimes (a_{k_1} \ldots a_{k_{n-p-q}}) \\
& + \Sigma\{(i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_q; k_1, \ldots, k_{n-p-q}) \\
& \qquad \in \mathfrak{Sf}(p, q, n-p-q),\ 2 \leq q \leq n,\ 0 \leq p \leq n-q\} \\
& \mathfrak{p}(n+q+\Sigma_{j_m>i_l}(\alpha_{j_m}\alpha_{i_l}+1) + \Sigma_{j_m>k_s}(\alpha_{j_m}\alpha_{k_s}+1) \\
& \qquad + \Sigma_{i_l>k_s}(\alpha_{i_l}\alpha_{k_s}+1) + (\Sigma\alpha_{j_m}+q)(\Sigma\alpha_{i_l}) + p) \\
& .(a_{i_1} \ldots a_{i_p}) \otimes ((a_{j_1}\Delta \ldots \Delta\, a_{j_q})\, a_{k_1} \ldots a_{k_{n-p-q}}),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
((\partial \otimes \omega)\,\Delta)(a_1 \ldots a_n) = {} & \Sigma\{(i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_{n-p}) \\
& \qquad \in \mathfrak{Sf}(p, n-p),\ 1 \leq u \leq p,\ 0 \leq p \leq n\} \\
& \mathfrak{p}(\Sigma_{i_l>j_m}(\alpha_{i_l}\alpha_{j_m}+1) + p + 1 + \alpha_{i_1} + \ldots + \alpha_{i_{u-1}} + n - p) \\
& .(a_{i_1} \ldots \partial a_{i_u} \ldots a_{i_p}) \otimes (a_{j_1} \ldots a_{j_{n-p}}) \\
& + \Sigma\{(i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_q; k_1, \ldots, k_{n-p-q}) \\
& \qquad \in \mathfrak{Sf}(p, q, n-p-q),\ 2 \leq p \leq n,\ 0 \leq q \leq n-p\} \\
& \mathfrak{p}(\Sigma_{i_l>k_s}(\alpha_{i_l}\alpha_{k_s}+1) + \Sigma_{j_m>k_s}(\alpha_{j_m}\alpha_{k_s}+1) \\
& \qquad + p + q + p + \Sigma_{i_l>j_m}(\alpha_{i_l}\alpha_{j_m}+1) + n - p - q) \\
& .((a_{i_1}\Delta \ldots \Delta\, a_{i_p})\, a_{j_1} \ldots a_{j_q}) \otimes (a_{k_1} \ldots a_{k_{n-p-q}}),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\Omega(1 \otimes \partial)\,\Omega\Delta)(a_1 \ldots a_n) = {} & \Sigma\{(i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_{n-p}) \\
& \qquad \in \mathfrak{Sf}(p, n-p),\ 1 \leq u \leq n-p,\ 0 \leq p \leq n\} \\
& \mathfrak{p}(\Sigma_{i_l>j_m}(\alpha_{i_l}\alpha_{j_m}+1) + (\Sigma\alpha_{i_l}+p)(\Sigma\alpha_{j_m}) \\
& \qquad + n - p + 1 + \alpha_{j_1} + \ldots + \alpha_{j_{u-1}} + (\Sigma\alpha_{i_l}+p)(\Sigma\alpha_{j_m}-1)) \\
& .(a_{i_1} \ldots a_{i_p}) \otimes (a_{j_1} \ldots \partial a_{j_u} \ldots a_{j_{n-p}}) \\
& + \Sigma\{(i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_q; k_1, \ldots, k_{n-p-q}) \\
& \qquad \in \mathfrak{Sf}(p, q, n-p-q),\ 2 \leq q \leq n,\ 0 \leq p \leq n-q\} \\
& \mathfrak{p}(\Sigma_{i_l>j_m}(\alpha_{i_l}\alpha_{j_m}+1) + \Sigma_{i_l>k_s}(\alpha_{i_l}\alpha_{k_s}+1) \\
& \qquad + (\Sigma\alpha_{i_l}+p)(\Sigma\alpha_{j_m}+\Sigma\alpha_{k_s}) + n - p + q \\
& \qquad + \Sigma_{j_m>k_s}(\alpha_{j_m}\alpha_{k_s}+1) + (\Sigma\alpha_{i_l}+p)(\Sigma\alpha_{j_m}+q+\Sigma\alpha_{k_s})) \\
& .(a_{i_1} \ldots a_{i_p}) \otimes ((a_{j_1}\Delta \ldots \Delta\, a_{j_q})\, a_{k_1} \ldots a_{k_{n-p-q}}).
\end{aligned}
$$

Soient $T_1, T_2, \ldots, T_8$ les termes généraux de ces sommes successives. On a aussitôt $T_1 = T_5$, $T_3 = T_6$. Les coefficients de T_2 et T_7 ont pour rapport

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{p}(n+1+\alpha_1+\ldots+\alpha_{j_u-1}+\Sigma_{il>j_u}\alpha_{i_l}\\
&\qquad+(\Sigma\alpha_{i_l}+p)(\Sigma\alpha_{j_m}+\Sigma\alpha_{j_m}-1)+n-p+1+\alpha_{j_1}+\ldots+\alpha_{j_{u-1}})\\
&\quad=\mathfrak{p}(\Sigma\alpha_{i_l}+\alpha_1+\ldots+\alpha_{j_{u-1}}+\Sigma\alpha_{i_l}+p+p+\alpha_{j_1}+\ldots+\alpha_{j_{u-1}})=1,
\end{aligned}$$

donc $T_2 = T_7$. Les coefficients de T_4 et T_8 ont pour rapport

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{p}(n+q+\Sigma(\alpha_{j_m}\alpha_{i_l}+1)+(\Sigma\alpha_{j_m}+q)(\Sigma\alpha_{i_l})\\
&\qquad+p+(\Sigma\alpha_{i_l}+p)(\Sigma\alpha_{j_m}+\Sigma\alpha_{k_s})+n-p+q+(\Sigma\alpha_{i_l}+p)(\Sigma\alpha_{j_m}+q+\Sigma\alpha_{k_s}))\\
&\quad=\mathfrak{p}(\Sigma(\alpha_{j_m}\alpha_{i_l}+1)+(\Sigma\alpha_{j_m})(\Sigma\alpha_{i_l})+q(\Sigma\alpha_{i_l})+(\Sigma\alpha_{i_l})q+pq)\\
&\quad=\mathfrak{p}((\Sigma\alpha_{j_m})(\Sigma\alpha_{i_l})+pq+(\Sigma\alpha_{j_m})(\Sigma\alpha_{i_l})+pq)=1,
\end{aligned}$$

donc $T_4 = T_8$, ce qui achève la démonstration.

Lemme 36. — *Écrivons $\delta = \delta_0 + \delta_1$, où δ_0 modifie l'ordre d'un entier pair, et où δ_1 modifie l'ordre d'un entier impair. Soit f (resp. g) un élément de* $G(X(A))^\star$, *de degré α (resp. β) et d'ordre α' (resp. β'). On a*

$$\delta(f.g) = \mathfrak{p}(\beta')(\delta f).g + f.(\delta_1 g) + \mathfrak{p}(\alpha+\alpha')f.(\delta_0 g).$$

En effet, en identifiant canoniquement $G(M)^\star \otimes_{\mathbf{Z}} G(M)^\star$ à $(G(M)\otimes_{\mathbf{Z}} G(M))^\star$, on a

$$\begin{aligned}
\delta(f.g) &= {}^t\partial\,{}^t\Delta(f\otimes g) = {}^t(\Delta\partial)(f\otimes g)\\
&= ({}^t\Delta({}^t\partial\otimes{}^t\omega))(f\otimes g) + ({}^t\Delta\,{}^t\Omega(1\otimes{}^t\partial)\,{}^t\Omega)(f\otimes g).
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
({}^t\Delta({}^t\partial\otimes{}^t\omega))(f\otimes g) &= {}^t\Delta(\delta f\otimes\mathfrak{p}(\beta')g) = \mathfrak{p}(\beta')(\delta f).g,\\
({}^t\Delta\,{}^t\Omega(1\otimes{}^t\partial)\,{}^t\Omega)(f\otimes g) &= \mathfrak{p}((\alpha+\alpha')\beta)\,{}^t\Delta\,{}^t\Omega(1\otimes{}^t\partial)(f\otimes g)\\
&= \mathfrak{p}((\alpha+\alpha')\beta)\,{}^t\Delta\,{}^t\Omega(f\otimes\delta g)\\
&= \mathfrak{p}((\alpha+\alpha')\beta)\,{}^t\Delta\,{}^t\Omega(f\otimes\delta_0 g + f\otimes\delta_1 g)
\end{aligned}$$

et l'on a

$$\begin{aligned}
{}^t\Omega(f\otimes\delta_0 g) &= \mathfrak{p}((\alpha+\alpha')(\beta+1))f\otimes\delta_0 g,\\
{}^t\Omega(f\otimes\delta_1 g) &= \mathfrak{p}((\alpha+\alpha')\beta)f\otimes\delta_1 g.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
({}^t\Delta\,{}^t\Omega(1\otimes{}^t\partial)\,{}^t\Omega)(f\otimes g) &= \mathfrak{p}(\alpha+\alpha')\,{}^t\Delta(f\otimes\delta_0 g) + {}^t\Delta(f\otimes\delta_1 g)\\
&= \mathfrak{p}(\alpha+\alpha')f.(\delta_0 g) + f.(\delta_1 g),
\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration.

Théorème 5. — *On a $\partial\partial = 0$ dans* $G(X(A))$, $\delta\delta = 0$ *dans* $G(X(A))^\star$.

Soient $a_1, \ldots, a_n$ des éléments de $X(A)$ de degrés $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Montrons d'abord que la composante homogène d'ordre 1 de $\partial\partial(a_1 \ldots a_n)$ est nulle. Si $n = 1$, ceci résulte du corollaire du théorème 2. Supposons $n > 1$. Observons d'abord que la composante d'ordre 1 de $\partial(a_1 \ldots a_n)$ est $a_1 \triangle \ldots \triangle a_n$. Utilisant plusieurs fois cette remarque, on voit que la composante cherchée est

$$\Sigma_{u=1}^{n}\,\mathrm{p}(n+1+\alpha_1+\ldots+\alpha_{u-1})\,a_1\triangle\ldots\triangle a_{u-1}\triangle(\partial a_u)\triangle a_{u+1}\triangle\ldots\triangle a_n$$
$$+\,\Sigma\{(i_1,\,\ldots,\,i_p;\,j_1,\,\ldots,\,j_{n-p})\in\mathfrak{St}(p,\,n-p),\ 1<p<n\}$$
$$\mathrm{p}(n+p+\Sigma_{i_k>j_l}(\alpha_{i_k}\alpha_{j_l}+1))\,((a_{i_1}\triangle\ldots\triangle a_{i_p})\triangle a_{j_1}\triangle\ldots\triangle a_{j_{n-p}})+\partial(a_1\triangle\ldots\triangle a_n).$$

Notre assertion résulte alors du corollaire 1 du théorème 4.

Par transposition, $\delta\delta$ s'annule sur l'ensemble des éléments d'ordre 1 de $\mathrm{G}(\mathrm{X}(\mathrm{A}))^{\star\sim}$. Soit maintenant f (resp. g) un élément de $\mathrm{G}(\mathrm{X}(\mathrm{A}))^{\star\sim}$ de degré α (resp. β) et d'ordre α' (resp. β'), et supposons $\delta\delta f=\delta\delta g=0$. On a

$$\delta(f.g)=\mathrm{p}(\beta')\,(\delta f).g+f.(\delta_1 g)+\mathrm{p}(\alpha+\alpha')\,f.(\delta_0 g).$$

Donc

$$\begin{aligned}(34)\quad \delta\delta(f.g)=\ &\mathrm{p}(\beta')\mathrm{p}(\beta')\,(\delta\delta f.g)+\mathrm{p}(\beta')\,(\delta f).(\delta_1 g)+\mathrm{p}(\beta')\,\mathrm{p}(\alpha+\alpha'-1)\,(\delta f).(\delta_0 g)\\ &+\mathrm{p}(\beta'+1)\,(\delta f).(\delta_1 g)+f.(\delta_1\delta_1 g)+\mathrm{p}(\alpha+\alpha')\,f.(\delta_0\delta_1 g)\\ &+\mathrm{p}(\alpha+\alpha')\,\mathrm{p}(\beta')\,(\delta f).(\delta_0 g)+\mathrm{p}(\alpha+\alpha')\,f.(\delta_1\delta_0 g)\\ &+\mathrm{p}(\alpha+\alpha')\,\mathrm{p}(\alpha+\alpha')\,f.(\delta_0\delta_0 g)\\ =\ &f.(\delta_1\delta_1 g+\delta_0\delta_0 g+\mathrm{p}(\alpha+\alpha')\,(\delta_0\delta_1 g+\delta_1\delta_0 g)).\end{aligned}$$

Or, la relation

$$0=\delta\delta g=(\delta_1\delta_1 g+\delta_0\delta_0 g)+(\delta_0\delta_1 g+\delta_1\delta_0 g)$$

entraîne, par des considérations d'ordres,

$$\delta_1\delta_1 g+\delta_0\delta_0 g=\delta_0\delta_1 g+\delta_1\delta_0 g=0.$$

La formule (34) montre alors que $\delta\delta(f.g)=0$.

Donc $\delta\delta$ s'annule sur la sous-algèbre de $\mathrm{G}(\mathrm{X}(\mathrm{A}))^{\star\sim}$ engendrée par l'ensemble des éléments d'ordre 1, de sorte que $\partial\partial(\mathrm{G}(\mathrm{X}(\mathrm{A})))$ est orthogonal à cette sous-algèbre. Donc $(\mathrm{G}\delta\delta(\mathrm{X}(\mathrm{A})))=0$ et, par suite, $\partial\partial=0$, $\delta\delta=0$.

On considérera $\mathrm{G}(\mathrm{X}(\mathrm{A}))$, $\mathrm{G}(\mathrm{X}(\mathrm{A}))^{\star\sim}$ comme des complexes en les munissant de ∂, de δ, et du degré total. Le groupe d'homologie de degré total n de $\mathrm{G}(\mathrm{X}(\mathrm{A}))$ [resp. $\mathrm{G}(\mathrm{X}(\mathrm{A}))^{\star\sim}$] sera désigné par $\mathrm{HJ}_n(\mathrm{A})$ [resp. $\mathrm{HJ}^n(\mathrm{A})$].

Le schéma ci-contre résume la structure du complexe $\mathrm{G}(\mathrm{X}(\mathrm{A}))$ jusqu'au degré total 4. Sur une même verticale, on a placé les points représentant les $\mathrm{X}_{\mathbf{p}_1;\mathbf{p}_2;\mathbf{p}_n}(\mathrm{A})$ pour un même degré total. Les segments issus de ces points et dirigés vers la gauche indiquent dans quels $\mathrm{X}_{\mathbf{q}_1;\mathbf{q}_2;\ldots;\mathbf{q}_m}(\mathrm{A})$ l'opérateur ∂ envoie les éléments de $\mathrm{X}_{\mathbf{p}_1;\mathbf{p}_2;\ldots;\mathbf{p}_n}(\mathrm{A})$.

13. Homologie des anneaux de Lie. Cas d'un groupe de coefficients. — Soit Θ un groupe abélien dans lequel opère l'anneau de Lie A : pour tout $x\in\mathrm{A}$, on s'est donné un endomorphisme $\theta\to x.\theta$ du groupe Θ et l'on suppose que

$$(x_1+x_2).\theta=x_1.\theta+x_2.\theta,\qquad [x_1,\,x_2].\theta=x_1.(x_2.\theta)-x_2.(x_1.\theta).$$

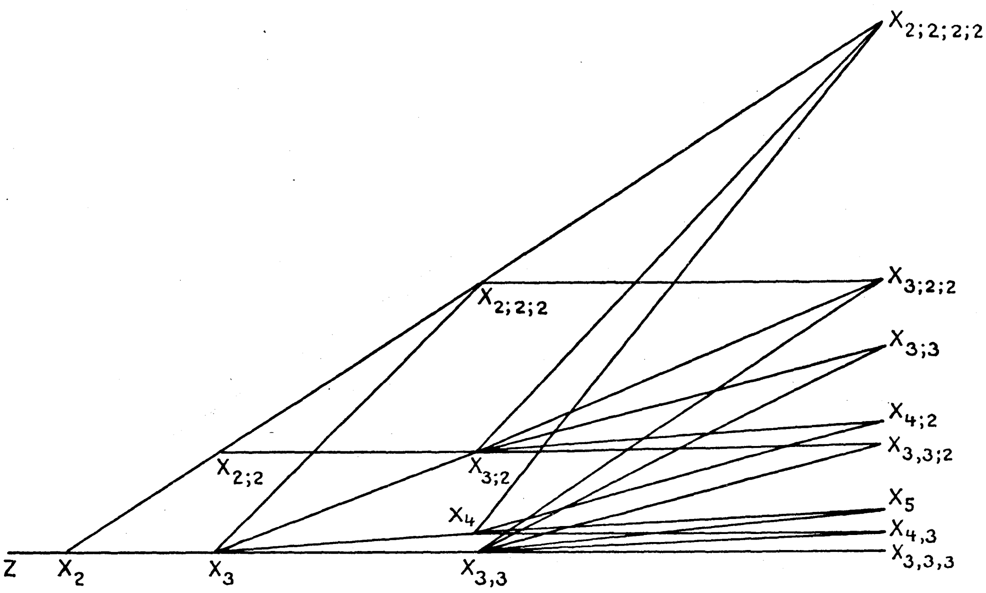
On va définir, pour tout $a\in\mathrm{Y}(\mathrm{A})$, un endomorphisme $\theta\to a.\theta$ du groupe Θ, tel que $(a_1+a_2)\theta = a_1.\theta + a_2.\theta$. Il suffit de définir (arbitrairement) l'endomorphisme $\theta \to a.\theta$ lorque $a \in J_{\mathbf{p}}(A)$. On pose :

1° $a.\theta = 0$ si $\mathbf{p}$ n'est pas de la forme $(2, 2, \ldots, 2)$;

2° $a.\theta = a(e, \ldots, e).\theta$ si $\mathbf{p}$ est de la forme $(2, 2, \ldots, 2)$.

Lemme 37. — *Si a et b sont des applications jacobiennes équivalentes on a $a.\theta = b.\theta$ pour tout $\theta \in \Theta$. Si A ou Θ est sans 2-torsion, et si a est dégénérée, on a $a.\theta = 0$ pour tout $\theta \in \Theta$.*

Si a n'appartient pas à un ensemble $J_{(2,2,\ldots,2)}(A)$, b n'appartient pas non plus à un ensemble $J_{(2,2,\ldots,2)}(A)$, donc $a.\theta = b.\theta = 0$. Supposons $a \in J_{(2,2,\ldots,2)}(A)$.



On a $\mathfrak{N}a \in J_2(A)$, $\mathfrak{N}b \in J_2(A)$; $\mathfrak{N}a$ et $\mathfrak{N}b$ sont équivalentes, donc $(\mathfrak{N}a)(e) = (\mathfrak{N}b)(e)$ comme on l'a vu au paragraphe 7, donc $a(e, e, \ldots, e) = b(e, e, \ldots, e)$, donc $a.\theta = b.\theta$. Si $a \in J_{(2,2,\ldots,2)}(A)$ est dégénérée, $\mathfrak{N}a$ est dégénérée, donc $(\mathfrak{N}a)(e) = a(e, \ldots, e)$ est d'ordre 2 dans A. Si A est sans 2-torsion, on a donc $a(e, \ldots, e) = 0$, $a.\theta = 0$. Dans tous les cas, $a.\theta$ est d'ordre 2 dans Θ, donc nul si Θ est sans 2-torsion.

Proposition 15. — *Si A ou Θ est sans 2-torsion, l'application bilinéaire $(a, \theta) \to a.\theta$ de $Y(A) \times \Theta$ dans Θ définit par passage au quotient une application bilinéaire de $X(A) \times \Theta$ dans Θ.*

Ceci résulte du lemme 37, et du fait évident que $(a + (-a)).\theta = 0$ quels que soient $a \in J(A)$ et $\theta \in \Theta$.

Si $a \in X(A)$, on notera encore $\theta \to a.\theta$ l'endomorphisme de Θ défini par a.

Lemme 38. — *Quels que soient $a \in Y(A)$ et $\theta \in \Theta$, on a $(Da).\theta = 0$.*

Il suffit d'envisager le cas où $a \in J_{\mathbf{p}}(A) = J_{(p_1, \ldots, p_h)}(A)$. Si deux des p_i sont distincts de 2, aucun des $D^{\mathbf{p}, r}_{i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_{n-p}} a$ n'appartient à $J_{(2, 2, \ldots, 2)}(A)$, donc $(Da).\theta = 0$. Si tous les p_i sont égaux à 2, on a $Da = 0$. Supposons donc $\mathbf{p} = (2, 2, \ldots, 2, n, 2, \ldots, 2)$, n apparaissant à la $s^{\text{ième}}$ place. On a

$$D^{\mathbf{p}, r}_{i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_{p_r - p}} a = 0 \quad \text{pour } r \neq s \qquad \text{et} \qquad D^{\mathbf{p}, s}_{i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_{n-p}} a \in J_{(2, 2, \ldots, 2, n-p+1, p, 2, \ldots, 2)}(A).$$

Si $n > 3$, au moins l'un des nombres p, $n - p + 1$ est > 2, donc $(Da).\theta = 0$. Reste enfin le cas où $n = 3$. Soit $b = \mathfrak{R} a$. On a $b \in J_3(A)$, donc $b = (x, y, z)$, avec $x + y + z = 0$. D'autre part, $Da \equiv Db\,[\operatorname{mod} Y'(A)]$ et $Db = (x) + (y) + (z)$, donc

$$(Db).\theta = x.\theta + y.\theta + z.\theta = (x + y + z).\theta = 0.$$

Donc $(Da).\theta = 0$.

Lemme 39. — *Soient $a_1 \in J_{\mathbf{p}_1}(A), \ldots, a_n \in J_{\mathbf{p}_n}(A)$. Si l'un des $\mathbf{p}_i$ n'est pas de la forme $(2, 2, \ldots, 2)$, ou si $n > 2$, on a $(a_1 \triangle \ldots \triangle a_n).\theta = 0$ quel que soit $\theta \in \Theta$.*

En effet, $a_1 \triangle \ldots \triangle a_n \in J_{n, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n}(A)$.

Lemme 40. — *Quels que soient $a_1 \in Y(A)$, $a_2 \in Y(A)$, $\theta \in \Theta$, on a*

$$(a_1 \triangle a_2).\theta = a_1.(a_2.\theta) - a_2.(a_1.\theta).$$

Il suffit, d'après ce qui précède, d'envisager le cas où

$$a_1 \in J_{(2, 2, \ldots, 2)}(A), \qquad a_2 \in J_{(2, 2, \ldots, 2)}(A).$$

Alors, $a_1 \triangle a_2 \in J_{(2, 2, \ldots, 2)}(A)$, et

$$(a_1 \triangle a_2)(e, \ldots, e) = [a_1(e, \ldots, e), a_2(e, \ldots, e)].$$

Donc

$$\begin{aligned}(a_1 \triangle a_2).\theta &= [a_1(e, \ldots, e), a_2(e, \ldots, e)].\theta \\ &= a_1(e, \ldots, e).(a_2(e, \ldots, e).\theta) - a_2(e, \ldots, e).(a_1(e, \ldots, e).\theta) \\ &= a_1.(a_2.\theta) - a_2.(a_1.\theta).\end{aligned}$$

Proposition 16. — *On suppose A ou Θ sans 2-torsion.*

a. Soient $a_1, \ldots, a_n (n \geq 2)$ des éléments de $X(A)$ de degrés $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, et soit $\theta \in \Theta$. On a $(a_1 \triangle \ldots \triangle a_n)\theta = 0$, sauf si $n = 2$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$; dans ce dernier cas,

$$(a_1 \triangle a_2).\theta = a_1.(a_2.\theta) - a_2.(a_1.\theta).$$

b. On a $(\partial a).\theta = 0$ quels que soient $a \in X(A)$, $\theta \in \Theta$.

Ceci résulte aussitôt des lemmes 38, 39 et 40 par passage au quotient.

Proposition 17. — *On suppose* A *ou* Θ *sans 2-torsion. Il existe un endomorphisme et un seul, noté encore* ∂, *du groupe abélien* $G(X(A))\otimes_{\mathbf{Z}}\Theta$, *tel que*

$$(35)\qquad \partial((a_1\ldots a_n)\otimes\theta)=\partial(a_1\ldots a_n)\otimes\theta + \sum_{u=1}^{n} \mathfrak{p}(n+u+1)(a_1\ldots a_{u-1}.a_{u+1}\ldots a_n)\otimes(a_u.\theta)$$

lorsque $a_1, \ldots, a_n$ *sont des éléments de* $X(A)$, *de degrés* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Le deuxième membre de (35) est multilinéaire en $a_1, \ldots, a_n, \theta$. Si l'on permute $a_{\nu-1}$ et a_ν, $\partial(a_1\ldots a_n)\otimes\theta$ est multiplié par $\mathfrak{p}(\alpha_\nu\alpha_{\nu-1}+1)$. Pour $\nu\neq u$ et $\nu-1\neq u$, $a_1\ldots a_{u-1}a_{u+1}\ldots a_n$ est multiplié par $\mathfrak{p}(\alpha_\nu\alpha_{\nu-1}+1)$. Enfin, comparons les expressions

$$(36)\quad \mathfrak{p}(\nu-1)(a_1\ldots a_{\nu-2}.a_\nu\ldots a_n)\otimes(a_{\nu-1}.\theta)+\mathfrak{p}(\nu)(a_1\ldots a_{\nu-1}.a_{\nu+1}\ldots a_n)\otimes(a_\nu.\theta)$$

et

$$(37)\qquad \mathfrak{p}(\nu-1)(a_1\ldots a_{\nu-2}.a_{\nu-1}.a_{\nu+1}\ldots a_n)\otimes(a_\nu.\theta) + \mathfrak{p}(\nu)(a_1\ldots a_{\nu-2}.a_\nu.a_{\nu+1}\ldots a_n)\otimes(a_{\nu-1}.\theta).$$

Il est immédiat que la deuxième est l'opposée de la première. D'autre part, $a_{\nu-1}.\theta=a_\nu.\theta=0$ sauf si l'un au moins des nombres $\alpha_{\nu-1}, \alpha_\nu$ est nul. Mais, dans ce cas, $\mathfrak{p}(\alpha_{\nu-1}\alpha_\nu+1)=-1$. Dans tous les cas, l'expression (37) se déduit de l'expression (36) par la multiplication par $\mathfrak{p}(\alpha_{\nu-1}\alpha_\nu+1)$. Donc le deuxième membre de (35) est multiplié par $\mathfrak{p}(\alpha_{\nu-1}\alpha_\nu+1)$ quand on permute $a_{\nu-1}$ et a_ν. Si $a_{\nu-1}=a_\nu$ et si α_ν est pair, tous les termes du deuxième membre de (35) sont nuls sauf éventuellement l'expression (36), qui est alors formée de deux termes opposés; donc le deuxième membre de (35) est nul. D'où la proposition.

Si $\Theta=\mathbf{Z}$, si $x.\theta=0$ pour tout $x\in A$ et tout $\theta\in\Theta$, et si l'on identifie canoniquement $G(X(A))\otimes_{\mathbf{Z}}\Theta$ à $G(X(A))$, l'endomorphisme ∂ de la proposition 17 se réduit à l'endomorphisme ∂ déjà défini dans $G(X(A))$.

Soit a un élément de $G(X(A))$ de degré α, d'ordre α', de degré total $\alpha+\alpha'$. On munit $G(X(A))\otimes\Theta$ de diverses graduations en considérant $a\otimes\theta$ comme de degré α, d'ordre α', de degré total $\alpha+\alpha'$.

Proposition 18. — *L'endomorphisme* ∂ *de* $G(X(A))\otimes_{\mathbf{Z}}\Theta$ *diminue le degré total d'une unité.*

En effet, avec les notations de la proposition 17, si β est le degré total de $a_1\ldots a_n$, $\partial(a_1\ldots a_n)\otimes\theta$ est de degré total $\beta-1$ d'après la proposition 14. D'autre part, si $a_u.\theta\neq 0$, le degré total de a_u est 1, donc $a_1\ldots a_{u-1}.a_{u+1}\ldots a_n$ est de degré total $\beta-1$, donc $(a_1\ldots a_{u-1}.a_u\ldots a_n)\otimes(a_u.\theta)$ est de degré total $\beta-1$. D'où la proposition.

Théorème 6. — *On a* $\partial\partial=0$ *dans* $G(X(A))\otimes_{\mathbf{Z}}\Theta$.

Avec les notations de la proposition 17, on a, compte tenu du théorème 5 et de la proposition 16

$$
\begin{aligned}
\partial\partial((a_1\ldots a_n)\otimes\theta) = \;& \Sigma\{\,1 \leqq i \leqq n,\ 1 \leqq j \leqq n,\ i \neq j\,\} \\
& \mathfrak{p}(n+1+\alpha_1+\ldots+\alpha_{i-1})\,\mathfrak{p}(n+j+1) \\
& .(a_1\ldots a_{i-1}.\partial a_i.a_{i+1}\ldots a_{j-1}.a_{j+1}\ldots a_n)\otimes(a_j.\theta) \\
+ & \Sigma\{\,1 \leqq i < j \leqq n\,\}\,\mathfrak{p}(n+i+j+1)\,\mathfrak{p}(n-1+1+1) \\
& .(a_1\ldots a_{i-1}.a_{i+1}\ldots a_{j-1}.a_{j+1}\ldots a_n)\otimes((a_i\Delta a_j).\theta) \\
+ & \Sigma\{\,(i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_{n-p})\in\mathfrak{Sf}(p,n-p),\ 1<p\leqq n-1,\ 1\leqq q\leqq n-p\,\} \\
& \mathfrak{p}(n+p+\Sigma_{i_k>j_l}(\alpha_{i_k}\alpha_{j_l}+1))\,\mathfrak{p}(n-p+1+q+1+1) \\
& .((a_{i_1}\Delta\ldots\Delta a_{i_p})a_{j_1}\ldots a_{j_{q-1}}.a_{j_{q+1}}\ldots a_{j_{n-p}})\otimes(a_{j_q}.\theta) \\
+ & \Sigma\{\,1 \leqq i \leqq n,\ 1 \leqq j \leqq n,\ i \neq j\,\}\,\mathfrak{p}(n+j+1)\,\mathfrak{p}(n+\alpha_1+\ldots+\alpha_{i-1}) \\
& .(a_1\ldots a_{i-1}\,\partial a_i.a_{i+1}\ldots a_{j-1}.a_{j+1}\ldots a_n)\otimes(a_j.\theta) \\
+ & \Sigma\{\,(i_1,\ldots,i_p;j_1,\ldots,j_{n-p})\in\mathfrak{Sf}(p,n-p),\ 1<p\leqq n-1,\ 1\leqq q\leqq n-p\,\} \\
& \mathfrak{p}(n+j_q+1)\,\mathfrak{p}(n-1+p+\Sigma_{i_k>j_l}(\alpha_{i_k}\alpha_{j_l}+1)-\Sigma_{i_k>j_q}(\alpha_{i_k}\alpha_{j_q}+1)) \\
& .((a_{i_1}\Delta\ldots\Delta a_{i_p})a_{j_1}\ldots a_{j_{q-1}}.a_{j_{q+1}}\ldots a_{j_n})\otimes(a_{j_q}.\theta) \\
+ & \Sigma\{\,1 \leqq i < j \leqq n\,\}\,\mathfrak{p}(n+j+1)\,\mathfrak{p}(n-1+i+1) \\
& .(a_1\ldots a_{i-1}.a_{i+1}\ldots a_{j-1}.a_{j+1}\ldots a_n)\otimes(a_i.(a_j.\theta)) \\
+ & \Sigma\{\,1 \leqq j < i \leqq n\,\}\,\mathfrak{p}(n+j+1)\,\mathfrak{p}(n-1+i-1+1) \\
& .(a_1\ldots a_{j-1}.a_{j+1}\ldots a_{i-1}.a_{i+1}\ldots a_n)\otimes(a_i.(a_j.\theta)).
\end{aligned}
$$

Désignons les termes généraux de ces sommes par $T_1, T_2, \ldots, T_7$. On a immédiatement $T_1 = -T_4$. On a $T_3 = -T_5$; en effet, le rapport des coefficients de T_3 et de T_5 est

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{p}(n+p+n-p+1+q+n+j_q+1+n-1+p-\Sigma_{i_k>j_q}(\alpha_{i_k}\alpha_{j_q}+1)) \\
&\qquad = \mathfrak{p}(p+q+1+j_q+\Sigma_{i_k>j_q}(\alpha_{i_k}\alpha_{j_q}+1)).
\end{aligned}
$$

Or, lorsque les termes considérés sont non nuls, on a $\alpha_{j_q} = 0$, donc

$$j_q+\Sigma_{i_k>j_q}(\alpha_{i_k}\alpha_{j_q}+1)$$

est égal au nombre total des indices i_k, c'est-à-dire à p, augmenté du nombre des indices j_l qui sont inférieurs ou égaux à j_q, c'est-à-dire q. Le quotient considéré est donc $\mathfrak{p}(p+q+1+p+q) = -1$, d'où notre assertion. Enfin, la dernière somme peut s'écrire

$$
\begin{aligned}
&\Sigma\{\,1 \leqq i < j \leqq n\,\}\,\mathfrak{p}(n+i+1)\,\mathfrak{p}(n+j+1) \\
&\qquad .(a_1\ldots a_{i-1}.a_{i+1}\ldots a_{j-1}.a_{j+1}\ldots a_n)\otimes(a_j.(a_i.\theta)).
\end{aligned}
$$

Soit T'_7 son terme général sous cette forme. On a $T_2+T_6+T'_7 = 0$; en effet,

$$
\begin{aligned}
T_2+T_6+T'_7 = \mathfrak{p}(i+j)\,&(a_1\ldots a_{i-1}.a_{i+1}\ldots a_{j-1}.a_{j+1}\ldots a_n) \\
&\otimes((a_i\Delta a_j).\theta - a_i.(a_j.\theta) - a_j.(a_i.\theta))
\end{aligned}
$$

et

$$(a_i\Delta a_j).\theta = a_i.(a_j.\theta) - a_j.(a_i.\theta).$$

D'où le théorème.

Ainsi, lorsque A ou Θ est sans 2-torsion, $G(X(A)) \otimes_{\mathbf{Z}} \Theta$, muni du degré total et de ∂, est un complexe. Le groupe d'homologie de degré total n de ce complexe sera désigné par $HJ_n(A, \Theta)$.

Pour les degrés totaux 0, 1, 2, 3, l'endomorphisme ∂ se calcule grâce aux formules suivantes, qui résultent aisément des propositions 10 et 12

$$\partial\theta = 0, \tag{38}$$

$$\partial((x) \otimes \theta) = -x.\theta, \tag{39}$$

$$\partial((x, y, z) \otimes \theta) = (x) \otimes \theta + (y) \otimes \theta + (z) \otimes \theta, \tag{40}$$

$$\partial(((x).(y)) \otimes \theta) = [x; y] \otimes \theta + y \otimes (x.\theta) - x \otimes (y.\theta), \tag{41}$$

$$\begin{aligned} \partial\left(\begin{pmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{pmatrix} \otimes \theta\right) = {} & (x, x', x'') \otimes \theta + (y, y', y'') \otimes \theta + (z, z', z'') \otimes \theta \\ & - (x, y, z) \otimes \theta - (x', y', z') \otimes \theta - (x'', y'', z'') \otimes \theta, \end{aligned} \tag{42}$$

$$\begin{aligned} \partial\left(\begin{pmatrix} x & y & z & t \\ x' & y' & z' & t' \\ x'' & y'' & z'' & t'' \end{pmatrix} \otimes \theta\right) \\ = {} & (x, x', x'') \otimes \theta + (y, y', y'') \otimes \theta + (z, z', z'') \otimes \theta + (t, t', t'') \otimes \theta \\ & - (x, y, -x-y) \otimes \theta - (z, t, -z-t) \otimes \theta - (x', t', -x'-t') \otimes \theta \\ & - (y', z', -y'-z') \otimes \theta - (x'', z'', -x''-z'') \otimes \theta - (y'', t'', -y''-t'') \otimes \theta, \end{aligned} \tag{43}$$

$$\begin{aligned} \partial(((x, y, z).(t)) \otimes \theta) = {} & -((x).(t)) \otimes \theta - ((y).(t)) \otimes \theta - ((z).(t)) \otimes \theta \\ & + ([x, t], [y, t], [z, t]) \otimes \theta - (x, y, z) \otimes (t.\theta), \end{aligned} \tag{44}$$

$$\begin{aligned} \partial(((x).(y).(z)) \otimes \theta) = {} & -(([x, y]).(z)) \otimes \theta + (([x, z]).(y)) \otimes \theta \\ & - (([y, z]).(x)) \otimes \theta + ([x, y, z], [y, z, x], [z, x, y]) \otimes \theta \\ & - ((y).(z)) \otimes x.\theta + ((x).(z)) \otimes (y.\theta) - ((x).(y)) \otimes (z.\theta). \end{aligned} \tag{45}$$

14. Cohomologie des anneaux de Lie. Cas d'un groupe de coefficients. — Soit toujours Θ un groupe abélien dans lequel opère A. Considérons les homomorphismes des groupes abéliens $G(X(A))$, $X_{\mathbf{p}_1; \mathbf{p}_2; \ldots; \mathbf{p}_n}(A)$ dans le groupe abélien Θ. Ils constituent les groupes $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(G(X(A)), \Theta)$, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(X_{\mathbf{p}_1; \ldots; \mathbf{p}_n}(A), \Theta)$. Le deuxième groupe s'identifie canoniquement à un sous-groupe du premier. La somme des $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(X_{\mathbf{p}_1; \ldots; \mathbf{p}_n}(A), \Theta)$ quand $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n$ varient, est un sous-groupe de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(G(X(A)), \Theta)$, qu'on désignera par $\tilde{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{Z}}(G(X(A)), \Theta)$, et qui est muni d'un degré, d'un ordre et d'un degré total.

Proposition 19. — *On suppose* A *ou* Θ *sans 2-torsion. Il existe un endomorphisme et un seul, noté encore* δ, *du groupe abélien* $\tilde{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{Z}}(G(X(A)), \Theta)$, *tel que l'on ait, pour tout* $f \in \tilde{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{Z}}(G(X(A)), \Theta)$

$$(\delta f)(a_1 \ldots a_n) = f(\partial(a_1 \ldots a_n)) + \sum_{u=1}^{n} \mathrm{p}(n+u)\, a_u . f(a_1 \ldots a_{u-1} . a_{u+1} \ldots a_n) \tag{46}$$

lorsque $a_1, \ldots, a_n$ *sont des éléments de* X(A) *homogènes de degrés* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Si l'on permute a_{v-1} et a_v, l'expression

$$f(\partial(a_1 \ldots a_n)) + \Sigma\{1 \leq u \leq n,\ u \neq v-1,\ u \neq v\}\, a_u . f(a_1 \ldots a_{u-1} . a_{u+1} \ldots a_n)$$

est multipliée par $\mathfrak{p}(\alpha_{\nu-1}\alpha_\nu + 1)$. Ensuite

$$(47) \qquad \mathfrak{p}(\nu - 1)\, a_{\nu-1}.f(a_1 \ldots a_{\nu-2}.a_\nu \ldots a_n) + \mathfrak{p}(\nu)\, a_\nu.f(a_1 \ldots a_{\nu-1}.a_{\nu+1} \ldots a_n)$$

est remplacé par

$$(48) \qquad \mathfrak{p}(\nu - 1)\, a_\nu.f(a_1 \ldots a_{\nu-1}.a_{\nu+1} \ldots a_n) + \mathfrak{p}(\nu)\, a_{\nu-1}.f(a_1 \ldots a_{\nu-2}.a_\nu \ldots a_n)$$

et les expressions (47), (48) sont opposées; d'autre part, elles sont nulles sauf si l'un au moins des nombres α_ν, $\alpha_{\nu-1}$ est nul, auquel cas $\mathfrak{p}(\alpha_{\nu-1}\alpha_\nu + 1) = -1$. Dans tous les cas, (48) se déduit de (47) par multiplication par $\mathfrak{p}(\alpha_{\nu-1}\alpha_\nu + 1)$. Si $a_\nu = a_{\nu-1}$ et si α_ν est pair, le deuxième membre de (46) est nul. D'où l'existence d'un élément δf de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(G(X(A)), \Theta)$, et même, comme on le voit facilement, de $\mathrm{H\tilde{o}m}_{\mathbf{Z}}(G(X(A)), \Theta)$, tel qu'on ait l'égalité (46). Il est clair que δf dépend linéairement de f.

Proposition 20. — *L'endomorphisme* δ *de* $\mathrm{H\tilde{o}m}_{\mathbf{Z}}(G(X(A)), \Theta)$ *augmente le degré total d'une unité.*

Ceci se démontre comme la proposition 18.

Théorème 7. — *On a* $\delta\delta = 0$ *dans* $\mathrm{H\tilde{o}m}_{\mathbf{Z}}(G(X(A)), \Theta)$.

La démonstration est analogue à celle du théorème 6. Indiquons seulement le calcul de $\delta\delta f$

$$\begin{aligned}
(\delta\delta f)(a_1 \ldots a_n) = \; & \Sigma\{1 \leqq i \leqq n,\ 1 \leqq j \leqq n,\ i \neq j\}\, \mathfrak{p}(n + 1 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_{i-1})\, \mathfrak{p}(n + j) \\
& .a_j.f(a_1 \ldots a_{i-1}.\partial a_i.a_{i+1} \ldots a_{j-1}.a_{j+1} \ldots a_n) \\
& + \Sigma\{1 \leqq i < j \leqq n\}\, \mathfrak{p}(n + i + j + 1)\, \mathfrak{p}(n - 1 + 1) \\
& .(a_i \triangle a_j).f(a_1 \ldots a_{i-1}.a_{i+1} \ldots a_{j-1}.a_{j+1} \ldots a_n) \\
& + \Sigma\{(i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_{n-p}) \in \mathfrak{S}\mathfrak{k}(p, n-p),\ 1 < p \leqq n - 1,\ 1 \leqq q \leqq n - p\} \\
& \mathfrak{p}(n + p + \Sigma_{i_k > j_l}(\alpha_{i_k}\alpha_{j_l} + 1))\, \mathfrak{p}(n - p + 1 + q + 1) \\
& .a_{j_q}.f((a_{i_1} \overline{\triangle} \ldots \triangle a_{i_p})\, a_{j_1} \ldots a_{j_{q-1}}.a_{j_{q+1}} \ldots a_{j_{n-p}}) \\
& + \Sigma\{1 \leqq i \leqq n,\ 1 \leqq j \leqq n,\ i \neq j\}\, \mathfrak{p}(n + j)\, \mathfrak{p}(n + \alpha_1 + \ldots + \alpha_{i-1}) \\
& .a_j.f(a_1 \ldots a_{i-1}.\partial a_i.a_{i+1} \ldots a_{j-1}.a_{j+1} \ldots a_n) \\
& + \Sigma\{(i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_{n-p}) \in \mathfrak{S}\mathfrak{k}(p, n-p),\ 1 < p \leqq n - 1,\ 1 \leqq q \leqq n - p\} \\
& \mathfrak{p}(n + j_q)\, \mathfrak{p}(n - 1 + p + \Sigma_{i_k > j_l}(\alpha_{i_k}\alpha_{j_l} + 1) - \Sigma_{i_k > j_q}(\alpha_{i_k}\alpha_{j_q} + 1)) \\
& .a_{j_q}.f((a_{i_1} \triangle \ldots \triangle a_{i_p})\, a_{j_1} \ldots a_{j_{q-1}}.a_{j_{q+1}} \ldots a_{j_{n-p}}) \\
& + \Sigma\{1 \leqq i < j \leqq n\}\, \mathfrak{p}(n + i)\, \mathfrak{p}(n - 1 + j - 1) \\
& .(a_i.(a_j.f(a_1 \ldots a_{i-1}.a_{i+1} \ldots a_{j-1}.a_{j+1} \ldots a_n))) \\
& + \Sigma\{1 \leqq j < i \leqq n\}\, \mathfrak{p}(n + i)\, \mathfrak{p}(n - 1 + j) \\
& .(a_i.(a_j.f(a_1 \ldots a_{j-1}.a_{j+1} \ldots a_{i-1}.a_{i+1} \ldots a_n)))
\end{aligned}$$

et tous les termes se réduisent deux à deux.

Ainsi, lorsque A ou Θ est sans 2-torsion, $\mathrm{H\tilde{o}m}_{\mathbf{Z}}(G(X(A)), \Theta)$, muni du degré total et de δ, est un complexe. Le groupe d'homologie de degré total n de ce complexe sera désigné par $\mathrm{HJ}^n(A, \Theta)$.

Soit Θ' un autre groupe de coefficients dans lequel opère A, et soit ω un homomorphisme de Θ dans Θ' permutable avec les opérations de A (autrement dit un homomorphisme de A-modules). On suppose Θ' sans 2-torsion si A n'est pas lui-même sans 2-torsion. Soit ω_1 l'homomorphisme de $\tilde{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{Z}}(G(X(A)), \Theta)$ dans $\tilde{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{Z}}(G(X(A)), \Theta')$ défini canoniquement par ω. On a $\omega_1 \circ \delta = \delta \circ \omega_1$ (on désigne par la même lettre δ l'opérateur de cobord dans $\tilde{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{Z}}(G(X(A)), \Theta)$ et dans $\tilde{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{Z}}(G(X(A)), \Theta')$). Donc ω_1 définit, pour tout n, un homomorphisme ω_n^* de $HJ^n(A, \Theta)$ dans $HJ^n(A, \Theta')$. Il est immédiat que $HJ^n(A, \Theta)$ est un foncteur covariant de Θ. Si

$$0 \to \Theta \to \Theta' \to \Theta'' \to 0$$

est une suite exacte de A-modules, la suite d'homomorphismes associés

$$0 \to \tilde{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{Z}}(G(X(A)), \Theta) \to \tilde{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{Z}}(G(X(A)), \Theta') \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(G(X(A)), \Theta'') \to 0$$

est exacte parce que les $X_{p_1;\ldots;p_n}(A)$ sont des groupes abéliens libres. On en déduit classiquement une suite exacte de cohomologie

$$\ldots \to HJ^{n-1}(A, \Theta'') \to HJ^n(A, \Theta) \to HJ^n(A, \Theta') \to HJ^n(A, \Theta'') \to HJ^{n+1}(A, \Theta) \to \ldots$$

les homomorphismes $HJ^n(A, \Theta'') \to HJ^{n+1}(A, \Theta)$ étant naturels, c'est-à-dire permutables aux homomorphismes de suites exactes.

Pour les degrés totaux 0, 1, 2, l'endomomorphisme δ se calcule grâce aux formules suivantes :

Si $f \in \Theta$, on a $\delta f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(X_2(A), \Theta)$, et

$$(\delta f)((x)) = x.f; \tag{49}$$

Si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(X_2(A), \Theta)$, on a $\delta f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(X_3(A), \Theta) + \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(X_{2;2}(A), \Theta)$, et

$$(\delta f)((x, y, z)) = f((x)) + f((y)) + f((z)), \tag{50}$$

$$(\delta f)((x).(y)) = f(([x, y])) - x.f((y)) + y f.((x)); \tag{51}$$

Si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(X_3(A), \Theta)$, on a

$$\delta f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(X_{3,3}(A), \Theta) + \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(X_4(A), \Theta) + \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(X_{3;2}(A), \Theta) + \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(X_{2;2;2}(A), \Theta),$$

et

$$\delta f\left(\begin{pmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{pmatrix}\right) = f((x, x', x'')) + f((y, y', y'')) + f((z, z', z'')) - f((x, y, z)) - f((x', y', z')) - f((x'', y'', z'')), \tag{52}$$

$$\begin{aligned} \delta f\left(\begin{pmatrix} x & y & z & t \\ x' & y' & z' & t' \\ x'' & y'' & z'' & t'' \end{pmatrix}\right) = {} & f((x, x', x'')) + f((y, y', y'')) + f((z, z', z'')) + f((t, t', t'')) \\ & - f((x, y, -x-y)) - f((z, t, -z-t)) - f((x', t', -x'-t')) \\ & - f((y', z', -y'-z')) - f((x'', z'', -x''-z'')) - f((y'', t'', -y''-t'')), \end{aligned} \tag{53}$$

$$\delta f((x, y, z).(t)) = f(([x, t], [y, t], [z, t])) + t.f(x, y, z), \tag{54}$$

$$\delta f((x).(y).(z)) = f(([x, y, z], [y, z, x], [z, x, y])), \tag{55}$$

Si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(X_{2;2}(A), \Theta)$, on a $\delta f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(X_{3.2}(A), \Theta) + \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(X_{2;2;2}(A), (\Theta)$, et

$$(56) \qquad \delta f((x, y, z).(t)) = -f((x).(t)) - f((y).(t)) - f((z).(t)),$$

$$(57) \qquad \begin{aligned} \delta f((x).(y).(z)) = & -f(([x, y]).(z)) + f(([x, z]).(y)) - f(([y, z]).(x)) \\ & + x.f((y).(z)) - y.f((x).(z)) + z.f((x).(y)). \end{aligned}$$

Proposition 21. — *Les groupes* $\mathrm{HJ}^0(A, \Theta)$, $\mathrm{HJ}^1(A, \Theta)$ *s'interprètent à la manière habituelle :*

a. $\mathrm{HJ}^0(A, \Theta)$ *s'identifie au sous-groupe des éléments de* Θ *invariants par* A;

b. $\mathrm{HJ}^1(A, \Theta)$ *s'identifie au groupe des homomorphismes* ψ *du groupe* A *dans le groupe* Θ *tels que* $\psi([x, y]) = x.\psi(y) - y.\psi(x)$, *divisé par le sous-groupe des homomorphismes du type* $x \rightarrow x.\theta$ (θ *étant un élément fixe de* Θ).

L'assertion *a* résulte aussitôt de la formule (49).

Un cocycle de degré total 1 s'identifie à une application ψ de A dans Θ telle que

$$\psi(0) = 0, \qquad \psi(-x) = -\psi(x),$$
$$\psi(x) + \psi(y) + \psi(z) = 0 \quad \text{si} \quad x + y + z = 0,$$
$$\psi([x, y]) = x.\psi(y) - y.\psi(x)$$

[d'après les formules (50) et (51)]. La deuxième et la troisième condition équivalent à la condition

$$\psi(x) + \psi(y) - \psi(x + y) = 0$$

quels que soient $x, y \in A$; elles signifient donc que ψ est un homomorphisme du groupe A dans le groupe Θ. D'où aussitôt l'assertion *b*.

15. Extensions des anneaux de Lie et cohomologie de degré 2. — Soient B un anneau de Lie, Θ un idéal abélien de B, A l'anneau de Lie B/Θ, λ l'homomorphisme canonique de B sur A. Pour tout $y \in B$, l'endomorphisme $\theta \rightarrow [y, \theta]$ du groupe abélien Θ ne dépend que de la classe x de y dans A. On posera $[y, \theta] = x.\theta$. Le groupe abélien Θ est ainsi muni d'une structure de A-module.

Supposons A *sans 2-torsion.* Alors, il existe une application μ de A dans B telle que $\mu(0) = 0$, $\lambda(\mu(x)) = x$ et $\mu(-x) = -\mu(x)$ pour tout $x \in A$.

Pour tout système (x, y, z) d'éléments de A tels que $x + y + z = 0$, on a

$$\lambda(\mu(x) + \mu(y) + \mu(z)) = 0, \qquad \text{donc} \quad \mu(x) + \mu(y) + \mu(z) \in \Theta.$$

En posant

$$f((x, y, z)) = \mu(x) + \mu(y) + \mu(z),$$

on définit donc une application de $J_3(A)$ dans Θ. Il est clair que

$$\begin{aligned} f((x, y, z)) &= f((z, x, y)) = f((y, z, x)) \\ &= f((x, z, y)) = f((z, y, x)) = f((y, x, z)), \end{aligned}$$
$$f((-x, -y, -z)) = -f((x, y, z)),$$
$$f((0, x, -x)) = 0.$$

Comme A est sans 2-torsion, la proposition 7 montre que f définit un homomorphisme g de $X_3(A)$ dans Θ.

D'autre part, pour $x \in A$, $y \in A$, on a $\mu([x, y]) - [\mu(x), \mu(y)] \in \Theta$. En posant

$$f'((x), (y)) = \mu([x, y]) - [\mu(x), \mu(y)],$$

on définit donc une application de $J_2(A) \times J_2(A)$ dans Θ. Il est clair que

$$f'((-x), (y)) = f'((x), (-y)) = -f'((x), (y)).$$

La proposition 6 montre que f' définit une application bilinéaire de $X_2(A) \times X_2(A)$ dans Θ. Comme $f'((y), (x)) = -f'((x), (y))$, cette application est alternée, et définit donc un homomorphisme g' de $X_{2;2}(A)$ dans Θ.

Le couple (g, g') s'identifie à un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(X_3(A) + X_{2;2}(A), \Theta)$.

Proposition 22. — *Le couple (g, g') est un cocycle de degré total 2.*

L'assertion relative au degré est évidente. On a, d'autre part, d'après les formules (52) à (57)

$$\begin{aligned}
&(\delta g)((x).(y).(z)) + (\delta g')((x).(y).(z)) \\
&\quad = g(([x, y, z], [y, z, x], [z, x, y])) - g'(([x, y]).(z)) \\
&\qquad + g'(([x, z]).(y)) - g'(([y, z]).(x)) + x.g'((y).(z)) - y.g'((x).(z)) + z.g'((x).(y)) \\
&\quad = \mu([x, y, z]) + \mu([y, z, x]) + \mu([z, x, y]) - \mu([x, y, z]) + [\mu([x, y]), \mu(z)] \\
&\qquad + \mu([x, z, y]) - [\mu([x, z]), \mu(y)] - \mu([y, z, x]) + [\mu([y, z]), \mu(x)] \\
&\qquad + [\mu(x), \mu([y, z]) - [\mu(y), \mu(z)]] - [\mu(y), \mu([x, z]) - [\mu(x), \mu(z)]] \\
&\qquad\qquad + [\mu(z), \mu([x, y]) - [\mu(x), \mu(y)]] \\
&\qquad = -[\mu(x), [\mu(y), \mu(z)]] + [\mu(y), [\mu(x), \mu(z)]] - [\mu(z), [\mu(x), \mu(y)]] = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(\delta g)((x, y, z).(t)) + (\delta g')((x, y, z).(t)) \\
&\quad = g(([x, t], [y, t], [z, t]) + t.g((x, y, z)) - g'((x).(t)) - g'((y).(t)) - g'((z).(t)) \\
&\quad = \mu([x, t]) + \mu([y, t]) + \mu([z, t]) + [\mu(t), \mu(x)] + [\mu(t), \mu(y)] \\
&\qquad\qquad + [\mu(t), \mu(z)] - \mu([x, t]) + [\mu(x), \mu(t)] \\
&\qquad\qquad - \mu([y, t]) + [\mu(y), \mu(t)] - \mu([z, t]) + [\mu(z), \mu(t)] = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(\delta g)\left(\begin{pmatrix} x & y & z & t \\ x' & y' & z' & t' \\ x'' & y'' & z'' & t'' \end{pmatrix}\right) + (\delta g')\left(\begin{pmatrix} x & y & z & t \\ x' & y' & z' & t' \\ x'' & y'' & z'' & t'' \end{pmatrix}\right) \\
&\quad = g((x, x', x'')) + g((y, y', y'')) + g((z, z', z'')) + g((t, t', t'')) \\
&\qquad - g((x, y, -x-y)) - g((z, t, -z-t)) - g((x', t', -x'-t')) \\
&\qquad - g((y', z', -y'-z')) - g((x'', z'', -x''-z'')) - g((y'', t'', -y''-t'')) \\
&\quad = \mu(x) + \mu(x') + \mu(x'') + \mu(y) + \mu(y') + \mu(y'') + \mu(z) + \mu(z') + \mu(z'') \\
&\qquad + \mu(t) + \mu(t') + \mu(t'') - \mu(x) - \mu(y) + \mu(x+y) - \mu(z) - \mu(t) + \mu(z+t) \\
&\qquad\qquad - \mu(x') - \mu(t') + \mu(x'+t') - \mu(y') - \mu(z') + \mu(y'+z') \\
&\qquad\qquad - \mu(x'') - \mu(z'') + \mu(x''+z'') - \mu(y'') - \mu(t'') + \mu(y''+t'') \\
&\qquad = \mu(x+y) + \mu(z+t) + \mu(x'+t') + \mu(y'+z') + \mu(x''+z'') + \mu(x''+t'') = 0,
\end{aligned}$$

puisque $x+y+z+t=x'+y'+z'+t'=x''+y''+z''+t''=0$.

$$
\begin{aligned}
&(\delta g)\left(\begin{pmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{pmatrix}\right)+(\delta g')\left(\begin{pmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{pmatrix}\right)\\
&\quad =g((x'\,x',\,x''))+g((y,\,y',\,y''))+g((z,\,z',\,z''))\\
&\qquad -g((x,\,y,\,z))-g((x',\,y',\,z'))-g((x'',\,y'',\,z''))\\
&\quad =\mu(x)+\mu(x')+\mu(x'')+\mu(y)+\mu(y')+\mu(y'')+\mu(z)+\mu(z')+\mu(z'')\\
&\qquad -\mu(x)-\mu(y)-\mu(z)-\mu(x')-\mu(y')-\mu(z')-\mu(x'')-\mu(y'')-\mu(z'')=0.
\end{aligned}
$$

D'où la proposition.

PROPOSITION 23. — *Si l'on change le choix de μ, le cocycle $(g,\,g')$ est remplacé par un cocycle cohomologue. Tout cocycle cohomologue à $(g,\,g')$ peut être obtenu en modifiant μ convenablement.*

En effet, un autre choix de μ est de la forme $\mu+h$, où h est une application de A dans Θ soumise aux seules conditions $h(0)=0$, $h(-x)=-h(x)$. Alors, h définit un homomorphisme k de $X_2(A)$ dans Θ. Les homomorphismes g, g' sont remplacés par des homomorphismes g_1, g'_1 tels que

$$
\begin{aligned}
g_1((x,y,z)) &=(\mu+h)(x)+(\mu+h)(y)+(\mu+h)(z)\\
&=\mu(x)+\mu(y)+\mu(z)+h(x)+h(y)+h(z)\\
&=g((x,\,y,\,z))+k((x))+k((y))+k((z))=(g+\delta k)((x,\,y,\,z)),\\
g'_1((x).(y)) &=(\mu+h)([x,y])-[(\mu+h)(x),\,(\mu+h)(y)]\\
&=\mu([x,y])+h([x,y])-[\mu(x),\,\mu(y)]-[\mu(x),h(y)]+[\mu(y),h(x)]\\
&=g'((x).(y))+k(([x,y]))-x.k((y))+y.k((x))=(g'+\delta k)((x).(y)),
\end{aligned}
$$

donc $(g_1,\,g'_1)=(g,\,g')+\delta k$, ce qui prouve la proposition.

COROLLAIRE. — *L'extension* B *de* A *par* Θ *définit un élément de* $\mathrm{HJ}^2(A,\,\Theta)$.

PROPOSITION 24. — *Soient* B, B' *deux extensions de* A *par* Θ *définissant sur* Θ *la même structure de* A*-module. Si* B *et* B' *définissent le même élément de* $\mathrm{HJ}^2(A,\Theta)$, *ces deux extensions sont équivalentes.*

D'après la proposition 23, les choix de représentants μ, μ' peuvent être faits de telle manière qu'ils définissent, non seulement la même classe de cohomologie, mais le même cocycle $(g,\,g')$. Considérons alors l'application U de B dans B' qui transforme $\mu(x)+\theta$ en $\mu'(x)+\theta$ quels que soient $x\in A$ et $\theta\in\Theta$. Il est clair que cette application est bijective. Montrons que c'est un homomorphisme pour la structure additive et pour le crochet

$$
\begin{aligned}
&U(\mu(x)+\theta+\mu(x')+\theta')\\
&\quad =U(g((x,\,x',\,-x-x'))-\mu(-x-x')+\theta+\theta')\\
&\quad =U(\mu(x+x')+g((x,\,x',\,-x-x'))+\theta+\theta')\\
&\quad =\ \mu'\ (x+x')+g((x,\,x',\,-x-x'))+\theta+\theta'\\
&\quad =\mu'(x)+\mu'(x')+\theta+\theta'=U(\mu(x)+\theta)+U(\mu(x')+\theta'),\\
&U([\mu(x)+\theta,\,\mu(x')+\theta'])\\
&\quad =U([\mu(x),\,\mu(x')]+x.\theta'-x'.\theta)=U(\mu([x,\,x'])-g'((x).(x'))+x.\theta'-x'.\theta)\\
&\quad =\mu'([x,\,x'])-g'((x).(x'))+x.\theta'-x'.\theta=[\mu'(x),\,\mu'(x')]+x.\theta'-x'.\theta\\
&\quad =[\mu'(x)+\theta,\,\mu'(x')+\theta']=[U(\mu(x)+\theta),\,U(\mu(x')+\theta')].
\end{aligned}
$$

COROLLAIRE. — *Pour qu'une extension de* A *par* Θ *soit inessentielle, il faut et il suffit que l'élément de* $\mathrm{H\,J}^2(\mathrm{A}, \Theta)$ *qu'elle définit soit nul.*

PROPOSITION 25. — *Tout élément de* $\mathrm{H\,J}^2(\mathrm{A}, \Theta)$ *correspond à une extension de* A *par* Θ.

En effet, soit (g, g') un cocycle représentatif de la classe de cohomologie donnée, et définissons sur *l'ensemble* produit $\mathrm{B} = \mathrm{A} \times \Theta$ une addition et un crochet de la manière suivante :

$$\begin{aligned}(x, \theta) + (x', \theta') &= (x + x', g((x, x', -x - x')) + \theta + \theta'),\\ [(x, \theta), (x', \theta')] &= ([x, x'], -g'((x).(x')) + x.\theta' - x'.\theta).\end{aligned}$$

Montrons que B devient ainsi un anneau de Lie. L'addition est commutative, car

$$\begin{aligned}(x', \theta') + (x, \theta) &= (x' + x, g((x', x, -x' - x)) + \theta' + \theta)\\ &= (x + x', g((x, x', -x - x')) + \theta + \theta') = (x, \theta) + (x', \theta').\end{aligned}$$

Elle admet l'élément neutre (o, o), car

$$(x, \theta) + (0, 0) = (x, g((x, 0, -x)) + \theta) = (x, \theta).$$

Chaque élément (x, θ) admet un opposé, l'élément $(-x, -\theta)$, car

$$(x, \theta) + (-x, -\theta) = (0, g((x, -x, 0))) = (0, 0).$$

L'addition est associative, car

$$\begin{aligned}&((x, \theta) + (x', \theta')) + (x'', \theta'')\\ &\quad = (x + x', g((x, x', -x - x')) + \theta + \theta') + (x'', \theta'')\\ &\quad = (x + x' + x'', g((x + x', x'', -x - x' - x'')) + g((x, x' - x - x')) + \theta + \theta' + \theta''),\\ &(x, \theta) + ((x', \theta') + (x'', \theta''))\\ &\quad = (x, \theta) + (x' + x'', g(x', x'', -x' - x'') + \theta' + \theta'')\\ &\quad = (x + x' + x'', g(x, x' + x'', -x - x' - x'') + g(x', x'', -x' - x'') + \theta + \theta' + \theta'').\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}0 &= (\delta g + \delta g')\left(\begin{pmatrix} x & x' & -x - x' \\ 0 & x'' & -x'' \\ -x & -x' - x'' & x + x' + x'' \end{pmatrix}\right)\\ &= g((x, 0, -x)) + g((x', x'', -x' - x'')) + g((-x - x', -x'', x + x' + x''))\\ &\quad - g((x, x', -x - x')) - g((0, x'', -x'')) - g((-x, -x' - x'', x + x' + x''))\\ &= g((x, x' + x'', -x - x' - x'')) + g((x', x'', -x' - x''))\\ &\quad - g((x + x', x'', -x - x' - x'')) - g((x, x', -x - x')),\end{aligned}$$

d'où notre assertion.

Le crochet possède les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}[(x, \theta), (x, \theta)] &= ([x, x], -g'((x).(x)) + x.\theta - x.\theta) = (0, 0) = 0,\\ [(x', \theta'), (x, \theta)] &= ([x', x], -g'((x').(x)) + x'.\theta - x.\theta')\\ &= (-[x, x'], g'((x).(x')) - x.\theta' + x'.\theta) = -[(x, \theta), (x', \theta')].\end{aligned}$$

Le crochet est distributif par rapport à l'addition. En vertu de la propriété précédente, il suffit de vérifier la distributivité à droite. Or

$$\begin{aligned}[(x, \theta), (x', \theta') + (x'', \theta'')] &= [(x, \theta), (x'+x'', g((x', x'', -x'-x'')) + \theta' + \theta'')] \\ &= ([x, x'+x''], -g'((x).(x'+x'')) \\ &\quad + x.g((x', x'', -x'-x'')) + x.\theta' + x.\theta'' - (x'+x'').\theta)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}&[(x, \theta), (x', \theta')] + [(x, \theta), (x'', \theta'')] \\ &\quad = ([x, x'], -g'((x).(x')) + x.\theta' - x'.\theta) + ([x, x''], -g'((x).(x'')) + x.\theta'' - x''.\theta) \\ &\quad = ([x, x'] + [x, x''], g(([x, x'], [x, x''], -[x, x'] - [x, x''])) \\ &\qquad - g'((x).(x')) - g'((x).(x'')) + x.\theta' - x'.\theta + x.\theta'' - x''.\theta).\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}o &= (\delta g + \delta g')((x', x'', -x'-x'').(x)) \\ &= g(([x', x], [x'', x], -[x', x] - [x'', x])) + x.g((x', x'', -x'-x'')) \\ &\qquad - g'((x').(x)) - g'((x'').(x)) + g'((x'+x'').(x)) \\ &= -g'((x).(x'+x'')) + x.g((x', x'', -x'-x'')) \\ &\qquad - g(([x, x'], [x, x''], -[x, x'] - [x, x''])) + g'((x).(x')) + g'((x).(x'')),\end{aligned}$$

d'où notre assertion.

Enfin, l'identité de Jacobi est vérifiée, car

$$\begin{aligned}[(x, \theta), (x', \theta'), (x'', \theta'')] &= [([x, x'], -g'((x).(x')) + x.\theta' - x'.\theta), (x'', \theta'')] \\ &= ([x, x', x''], -g'(([x, x']).(x'')) + [x, x'].\theta'' \\ &\qquad + x''.g'((x).(x')) - x''.(x.\theta') + x''.(x'.\theta)).\end{aligned}$$

Permutant circulairement, et ajoutant, on trouve

$$\begin{aligned}&[(x, \theta), (x', \theta'), (x'', \theta'')] + [(x', \theta'), (x'', \theta''), (x, \theta)] + [(x'', \theta''), (x, \theta), (x', \theta')] \\ &\quad = ([x, x', x''] + [x', x'', x], g(([x, x', x''], [x', x'', x], -[x, x', x''] - [x', x'', x])) \\ &\qquad - g'(([x, x']).(x'')) + [x, x'].\theta'' + x''.g'((x).(x')) - x''.(x.\theta') + x''.(x'.\theta) \\ &\qquad - g'(([x', x'']).(x)) + [x', x''].\theta + x.g'((x').(x'')) - x.(x'.\theta'') + x.(x''.\theta')) \\ &\qquad + ([x'', x, x'], -g'(([x'', x]).(x')) + [x'', x].\theta' + x'.g'((x'').(x)) - x'.(x''.\theta) + x'.(x.\theta'')) \\ &\quad = (-[x'', x, x'], g(([x, x', x''], [x', x'', x], [x'', x, x'])) - g'(([x, x']).(x'')) \\ &\qquad - g'(([x', x'']).(x)) + x''.g'((x).(x')) + x.g'((x').(x'')) \\ &\qquad\qquad + x'.(x.\theta'') + x'.(x''.\theta) + [x, x''].\theta') \\ &\qquad + ([x'', x, x'], -g'(([x'', x]).(x')) + [x'', x].\theta' + x'.g'((x'').(x)) \\ &\qquad\qquad - x'.(x''.\theta + x'.(x.\theta'')) \\ &\quad = (o, g((-[x'', x, x'], [x'', x, x'], o)) + g(([x, x', x''], [x', x'', x], [x'', x, x'])) \\ &\qquad - g'(([x, x']).(x'')) - g'(([x', x'']).(x)) - g'(([x'', x]).(x')) \\ &\qquad\qquad + x''.g'((x).(x')) + x.g'((x').(x'')) + x'.g'((x'').(x))) \\ &\quad = (o, g(([x, x', x''], [x', x'', x], [x'', x, x'])) \\ &\qquad - g'(([x, x'])(x'')) + g'(([x, x'']).(x')) - g'(([x', x'']).(x)) \\ &\qquad\qquad + x.g'((x').(x'')) - x'.g'((x).(x'')) + x''.g'((x).(x'))) \\ &\qquad\qquad = (o, (\delta g + \delta g')((x).(x').(x''))) = (o, o) = o.\end{aligned}$$

BIBLIOGRAPHIE.

[1] S. Eilenberg et S. Mac Lane, *Homology theories for multiplicative systems* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. **71**, 1951, p. 294-330).

[2] E. Witt, *Treue Darstellung Liescher Ringe*, (*Z. Math.*, t. **177**, 1937, p. 152-160).