Annales scientifiques de l'É.N.S.

Szolem Mandelbrojt

Fonctions analytiques et analyse harmonique

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 74, nº 1 (1957), p. 1-23
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1957_3_74_1_1_0>

ANNALES
SCIENTIFIQUES
DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

FONCTIONS ANALYTIQUES
ET
ANALYSE HARMONIQUE

PAR M. SZOLEM MANDELBROJT.

Nous commençons par quelques notions classiques dont le développement est basé essentiellement sur un théorème de Carleman concernant la « transformée de Fourier-Carleman » d'une fonction bornée dont le produit de composition avec une fonction de la classe L est nulle.

Si $f \in L$ sur R (la droite réelle), on désignera par $\mathfrak{T}(f)$ sa transformée de Fourier

$$\mathfrak{T}(f) = F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(t)\, e^{-iut}\, dt.$$

La classe des transformées de Fourier des fonctions appartenant à L sera désignée par A. Autrement dit : une condition nécessaire et suffisante pour que $F \in A$ est qu'il existe une fonction $f \in L$ telle que $F = \mathfrak{T}(f)$.

Désignons par L^∞ l'ensemble des fonctions essentiellement bornées sur R. Si $f \in L^\infty$ on désignera par $\|f\|_\infty$ sa norme dans L^∞ : $\|f\|_\infty = \inf M$, où M est une quantité quelconque telle que $|f| < M$ p.p. Si $f \in L$ on désignera par $\|f\|_1$ sa norme dans L. Que f appartienne à L ou à L^∞, on désignera par $\mathcal{FC}(f)$ le couple (F^+, F^-) défini de la manière suivante :

$$F^+(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} f(t)\, e^{-itz}\, dt \qquad (y > 0),$$

$$F^-(z) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} f(t)\, e^{-itz}\, dt \qquad (y < 0).$$

Le couple $\mathcal{FC}(f)$ — la transformée de Fourier-Carleman — introduite par Carleman [3], du moins d'une manière systématique, est donc composé d'une fonction holomorphe dans le demi-plan supérieur, $F^+(z)$, et d'une fonction holomorphe dans le demi-plan inférieur, $F^-(z)$.

On voit immédiatement que, si $f \in L$, F^+ et F^- sont continues respectivement dans le demi-plan supérieur $y \geqq 0$ et dans le demi-plan inférieur $y \leqq 0$, et l'on a

$$|F^+(z)| \leqq (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \|f\|_1 \qquad (y \geqq 0),$$

$$|F^-(z)| \leqq (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \|f\|_1 \qquad (y \leqq 0).$$

Si $f \in L^\infty$ on peut seulement affirmer que

$$|F^+(z)| \leqq (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \|f\|_\infty\, y^{-1} \qquad (y > 0),$$

$$|F^-(z)| \leqq (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \|f\|_\infty\, |y|^{-1} \qquad (y < 0).$$

On a dans les deux cas, pour $\alpha > 0$,

$$F^+(x + i\alpha) - F^-(x - i\alpha) = \mathcal{G}(f(t)\, e^{-\alpha|t|}).$$

Si $f \in L$, on désignera par $s(f)$ le support de $F = \mathcal{G}(f)$, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs u telles que $F(u) \neq 0$. Si f appartient à L ou à L^∞ on désignera par $c(f)$ l'ensemble des valeurs x_0 possédant la propriété suivante : il existe un voisinage V_{x_0} de $x_0 (V_{x_0} \subset R)$ et une fonction $F(z)$ holomorphe dans la région composée du demi-plan supérieur, du demi-plan inférieur et de V_{x_0}, et telle que $F(z) = F^+(z)$ pour $y > 0$, $F(z) = F^-(z)$ pour $y < 0$. L'ensemble $c(f)$ sera appelé ensemble de concordance de f. L'ensemble $\sigma(f)$, complémentaire de l'ensemble de concordance (par rapport à R) : $\sigma(f) = \mathcal{C}c(f)$, est appelé spectre de f. Il est clair que, si $f \in L$, on a $\sigma(f) = \overline{s(f)}$ ($\overline{E}$ désigne la fermeture de E). Avec les notations adoptées, le théorème de Carleman [3] s'énonce de la manière suivante :

Théorème I (Carleman). — *Si $f \in L$, $h \in L^\infty$ et si*

$$f \star h = 0,$$

on a $s(f) \subset c(h)$.

On tire du théorème de Carleman le théorème suivant, qui en est une conséquence presque immédiate.

THÉORÈME II. — *Si* $f \in L$, $h \in L^\infty$ *on a*

$$\sigma(f \star h) \subset \sigma(f) \cap \sigma(h).$$

En posant

$$\delta(x) = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^2},$$

$\Delta(u) = 1 - |u|$ pour $|u| \leqq 1$, $\Delta(u) = 0$ pour $|u| \geqq 1$, on sait que $\Delta = \mathfrak{F}(\delta)$. Si $(a, b) \subset c(f)$, en posant

$$\xi = \frac{a+b}{2}, \qquad l = \frac{b-a}{2},$$

$$\delta_{\xi,l}(x) = l\,\delta(lx)\,e^{i\xi x}, \qquad \Delta_{\xi,l}(u) = \Delta\left(\frac{u-\xi}{l}\right) = \mathfrak{F}(\delta_{\xi,l}),$$

on voit que

$$F(u)\,\Delta_{\xi,l}(u) \equiv 0 \qquad [F = \mathfrak{F}(f)];$$

et, par conséquent, $\delta_{\xi,l} \star f = 0$, ce qui permet d'écrire

$$\delta_{\xi,l} \star f \star h = 0,$$

et, d'après le théorème I,

$$(a, b) = s(\delta_{\xi,l}) \subset c(f \star h),$$

ce qui démontre que $c(f) \subset c(f \star h)$ (*voir* [8]). Si, maintenant,

$$[a, b] \subset c(h), \qquad \mathcal{FC}(h) = (H^+, H^-),$$

on a pour $\alpha > 0$, ξ et l étant définis comme plus haut,

$$(1) \quad (2\pi)^{\frac{1}{2}} A_\alpha(u) = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \Delta_{\xi,l}(u)[H^+(u+i\alpha) - H^-(u-i\alpha)] = \mathfrak{F}[\delta_{\xi,l}(x) \star h(x)\,e^{-\alpha|x|}],$$

et

$$\delta_{\xi,l}(x) \star h(x)\,e^{-\alpha|x|} = \int_{\xi-l}^{\xi+l} A_\alpha(u)\,e^{iux}\,du.$$

On a, par conséquent,

$$\delta_{\xi,l} \star h = \lim_{\alpha=0} \int_{\xi-l}^{\xi+l} A_\alpha(u)\,e^{iux}\,du = 0$$

et

$$f \star \delta_{\xi,l} \star h = \delta_{\xi,l} \star f \star h = 0,$$

et le théorème I fournit la relation $(a, b) \subset c(f \star h)$. Ainsi, on a aussi $c(h) \subset c(f \star h)$.

On connaît aussi cette autre définition du spectre d'une fonction appartenant à L^∞ : Le spectre de $h \in L^\infty$ est l'ensemble des points u tels que si $f \in L$ et $f \star h = 0$, on a nécessairement $u \notin s(f)$ [16]. Le théorème de Carleman montre que les deux définitions du spectre d'une fonction appartenant à L^∞ sont équivalentes. Nous utilisons ici, de préférence, la première définition, définition relevant de la théorie des fonctions d'une variable complexe.

Mentionnons les faits suivants :

THÉORÈME III. — *Soit* $h \in L^\infty$. *Une condition nécessaire et suffisante pour que* $(a,\ b) \subset c(h)$ *est que, quel que soit* l, *avec* $0 < l < \frac{b-a}{2}$, *on ait pour* $\xi \in (a+l,\ b-l)$

$$\int h(t)\,\delta(lt)\,e^{-i\xi t}\,dt = 0.$$

Le fait que la condition est nécessaire est évident d'après (1). On voit aussi que la condition est suffisante lorsqu'on intègre l'expression du milieu de (1) deux fois par parties. C'est en effectuant cette opération que J. P. Kahane a démontré, très simplement, le théorème de Carleman.

Les théorèmes IV et V ont été démontrés dans [8].

THÉORÈME IV. — *Si* $h \in L^\infty$ *et si* ξ *est un point isolé de* $\sigma(h)$, ξ *est un pôle simple de la fonction* $H(z)$ *égale à* $H^+(z)$ *pour* $y > 0$ *et égale à* $H^-(z)$ *pour* $y < 0$, *et pour* l *suffisamment petit, le résidu de* ξ *est donné par*

$$-2\pi a i = l \int h(t)\,\delta(lt)\,e^{-i\xi t}\,dt.$$

THÉORÈME V. — *Si* $f \in L$, $h \in L^\infty$, *et si* $\xi \in \overline{c(f)}$, ξ *ne peut être un point isolé de* $\sigma(f \star h)$.

On peut alors améliorer le théorème II de la manière suivante :

THÉORÈME VI. — *Si* $f \in L$, $h \in L^\infty$ *on a*

$$\sigma(f \star h) \subset \overline{s(f) \cap \sigma(h)} \cup \mathfrak{P} \quad (^1),$$

où $\mathfrak{P}$ *est la partie parfaite de* $\sigma^\bullet(f) \cap \sigma(h)$, $\sigma^\bullet(f)$ *désignant la frontière de* $\sigma(f)$ ($\mathfrak{P}$ est vide, si $\sigma^\bullet(f) \cap \sigma(h)$ ne contient aucun ensemble parfait).

Il est clair que $\overline{s(f) \cap \sigma(h)} \cup \mathfrak{P}$ est un sous-ensemble de $\sigma(f) \cap \sigma(h)$. D'autre part, tout point de $\sigma(f) \cap \sigma(h)$ qui est, à la fois, un zéro isolé de F $[F = \mathfrak{T}(f)]$ et un point isolé de $\sigma(h)$ appartient à $\sigma^\bullet(f) \cap \sigma(h)$, mais n'appartient pas à $\overline{s(f) \cap \sigma(h)}$. Le théorème VI montre qu'un tel point, tout en faisant partie de $\sigma(f) \cap \sigma(h)$, n'appartient pas à $\sigma(f \star h)$.

a étant un nombre positif, posons

$$A_a = \cup\,(\xi - a,\ \xi + a) \qquad [\xi \in s(f) \cap \sigma(h)],$$

et soit $\mathfrak{P}_a$ l'ensemble des autres points de $\sigma(f \star h)$. Il est clair que $\mathfrak{P}_a \subset \sigma^\bullet(f) \cap \sigma(h)$. $\mathfrak{P}_a$ est un ensemble fermé, car si $\xi_n \in \mathfrak{P}_a$ et $\lim_{n=\infty} \xi_n = \xi$, ξ ne peut appartenir à aucun intervalle $(\xi' - a,\ \xi' + a)$ avec $\xi' \in s(f) \cap \sigma(h)$. D'autre part, aucun

---

(1) $\overline{s(f) \cap \sigma(h)}$ est la fermeture de $s(f) \cap \sigma(h)$.

point ξ_0 de $\mathfrak{T}_a$ ne peut être un point isolé de cet ensemble, car autrement il serait aussi un point isolé de $\sigma(f\star h)$, étant donné que tout point ξ de $\sigma(f\star h)$ n'appartenant pas à $\mathfrak{T}_a$ satisfait à l'inégalité $|\xi-\xi_0|\geqq a$; or $\xi_0\in\sigma^\bullet(f)$, et d'après le théorème V, ξ_0 ne peut pas être isolé de $\sigma(f\star h)$. Si $\mathfrak{T}_a$ n'est pas vide, il est parfait.

Si maintenant un point ξ de $\sigma(f\star h)$ n'appartient pas à $\mathfrak{T}$ il n'appartient à $\mathfrak{T}_a$, pour aucune valeur de $a>0$. Il appartient donc à A_a pour toute valeur de a, et il appartient, par conséquent, à $\overline{s(f)\cap\sigma(h)}$.

On a, en particulier, le fait connu suivant :

Si $f\in L$, $h\in L^\infty$ et si $\overline{c(f)}\supset\sigma(h)$, $\sigma(f\star h)$ est parfait ou vide.

Problème général.

Nous allons formuler un problème qui peut être relié, dans une certaine mesure, au problème de « synthèse harmonique ».

Soit f une fonction p fois dérivable sur $R(0\leqq p)$, avec

$$f^{(n)}\in L \qquad \text{pour} \quad 0\leqq n<p+1$$

(nous n'écrivons pas $0\leqq n\leqq p$ pour pouvoir inclure le cas le plus important : $p=\infty$). Posons

$$\mathcal{D}_f^q(r)=\sup_{0\leqq n<q+1}\frac{r^n}{\|f^{(n)}\|_1} \qquad (r>0,\ q\leqq p).$$

Cette fonction $\mathcal{D}_f^q$ sera appelée la « q dérivabilité » de f. Si $p=\infty$, la fonction $\mathcal{D}_f^\infty$ sera désignée par $\mathcal{D}_f$ et nous l'appellerons la dérivabilité de f. Soit Λ un sous-ensemble de l'ensemble d'entiers n : $0\leqq n<q+1\ (0\leqq q\leqq p)$ contenant, s'il n'est pas vide, la valeur $n=0$. Soit $D(r)\ (r>0)$ une fonction non décroissante. Soit, enfin, $h\in L^\infty$. Une relation entre les éléments $D(r)$, Λ, f, h sera appelée une relation $\mathcal{R}_q$, et sera désignée par

$$\mathcal{R}_q=\mathcal{R}_q[D(r),\Lambda;f,h]$$

si de $\mathcal{R}_q$ et des conditions

$$\mathcal{D}_f^q(r)\geqq D(r) \qquad (r>r_0),$$
$$f^{(\lambda)}(-x) \quad \text{orthogonal à } h(x) \qquad (\lambda\in\Lambda)$$
$$\left(\text{c'est-à-dire : } \int f^{(\lambda)}(-x)\,h(x)\,dx=0\right)$$

résulte que

$$f\star h=0.$$

Ainsi, par exemple, d'après un théorème connu, mentionné plus haut, la condition : $\overline{c(f)}\supset\sigma(h)$, $\sigma^\bullet(f)$ dénombrable, est une relation $\mathcal{R}_0[0,\Phi,f,h]$ (*voir* [8]).

Nous nous intéressons surtout au cas où Λ est une suite infinie; ceci ne peut correspondre qu'au cas où $p = q = \infty$, Λ étant une suite partielle (ou la suite entière) de la suite d'entiers $n \geqq 0$, comprenant la valeur $n = 0$. Nous verrons par exemple, plus loin, qu'une relation $\mathcal{R}_\infty$ fournit une condition d'unicité pour le problème des moments $\int t^\lambda \, dV = m_\lambda (\lambda \in \Lambda)$, avec la distribution répandue sur un ensemble fermé donné. Une telle relation fournit aussi une condition d'approximation d'une fonction sur un ensemble fermé donné (non nécessairement compact) par des polynomes, ne contenant que les puissances $\lambda \in \Lambda$, munis d'un poids (approximation polynomiale tempérée).

Pour pouvoir formuler des relations $\mathcal{R}$, il nous faut introduire quelques nouvelles notions de la théorie des fonctions d'une variable complexe. Soit E un ensemble sur la droite réelle du plan complexe $z = x + iy$. Nous désignerons par P(E) le plan complexe dont on a enlevé l'ensemble E, si E n'est pas la droite réelle tout entière; si E = R, P(E) désignera le demi-plan supérieur.

Nous dirons alors qu'une fonction positive $\mathrm{M}(r)(r > 0)$ est une fonction associée à E, si toute fonction $\Phi(z)$, holomorphe et uniforme dans P(E) et y satisfaisant à l'inégalité

$$|\Phi(z)| \leqq \mathrm{M}(|z|)\,|y|^{-1}$$

est identiquement nulle (*voir* [11]).

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème suivant :

Théorème VII. — *Soit* $f^{(n)} \in \mathrm{L}\,(0 \leqq n < q + 1)$, $h \in \mathrm{L}^\infty$; *soit* Λ *l'ensemble vide si* $q = 0$, *l'ensemble des entiers* n *avec* $0 \leqq n < q$ *si* q *est fini positif, et l'ensemble de tous les entiers* $n \geqq 0$, *si* $q = \infty$. *Soit* $\mathrm{M}(r)$ *une fonction non croissante, positive.*

La condition « $\mathrm{M}(r)$ *est associée à* $\overline{s(f) \cap \sigma(h)} \cup \mathfrak{P}$, *où* $\mathfrak{P}$ *est la partie parfaite de* $\sigma^\bullet(f) \cap \sigma(h)$ (*ou l'ensemble vide, si cet ensemble n'a pas de sous-ensemble parfait*) » *est une relation* $\mathcal{R}_q[(\mathrm{M}(r)^{-1}, \Lambda;\ f,\ h]$. *En particulier, la condition* « $\mathrm{M}(r)$ *est associée à* $\sigma(f) \cap \sigma(h)$ » *est une telle condition* (²).

D'une manière plus explicite, le théorème VII s'énonce de la manière suivante :

Théorème VII *bis*. — *Si la fonction* $[\mathcal{D}_f^q(r)]^{-1}$ *est associée à* $\sigma(f) \cap \sigma(h)$, *ou même seulement à* $\overline{s(f) \cap \sigma(h)} \cup \mathfrak{P}$, *et si*

$$\int f^{(\lambda)}(-x)\, h(x)\, dx = 0 \qquad (\lambda \subset \Lambda),$$

l'ensemble $\mathfrak{P}$ *et la suite* Λ *étant définis comme dans le théorème* VII, *alors* $f \star h = 0$.

(²) Il est clair que si une fonction est associée avec un ensemble E, cette fonction est aussi associée avec tout sous-ensemble de E.

Posons

$$\varphi = f \star h.$$

Cette fonction admet des dérivées d'ordre inférieur à $q+1$ et

$$\varphi^{(n)} = f^{(n)} \star h.$$

On a, par conséquent,

$$|\varphi^{(n)}(x)| \leq \| f^{(n)} \|_1 \, \| h \|_\infty.$$

On voit, d'autre part, en vertu de l'orthogonalité de $h(x)$ avec les fonctions $f^{(\lambda)}(-x)$ $(\lambda \in \Lambda)$ que

$$\varphi^{(\lambda)}(0) = \int f^{(\lambda)}(-x)\, h(x)\, dx = 0.$$

Soit alors $\mathcal{FC}(\varphi) = (\Phi^+, \Phi^-)$. Si $q > 0$, on voit, en effectuant n intégrations par parties $(n < q)$ des expressions qui fournissent Φ^+ et Φ^-, que

$$(2) \qquad \begin{cases} \Phi^+(z) = (-i)^n \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \dfrac{1}{z^n} \displaystyle\int_{-\infty}^{0} \varphi^{(n)}(t)\, e^{-itz}\, dt & (y > 0), \\ \Phi^-(z) = (-i)^n \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \dfrac{1}{z^n} \displaystyle\int_{-0}^{\infty} \varphi^{(n)}(t)\, e^{-itz}\, dt & (y < 0), \end{cases}$$

ce qui permet d'écrire, en désignant par Φ la fonction analytique, uniforme dans $P[\sigma(\varphi)]$ égale à Φ^+ pour $y > 0$ et égale à Φ^- pour $y < 0$

$$|z|^n \, |\Phi(z)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \| f^{(n)} \|_1 \, \| h \|_\infty \, |y|^{-1}.$$

On a donc aussi

$$(3) \qquad |\Phi(z)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \| h \|_\infty \, [\mathcal{O}^q_f(|z|)]^{-1} |y|^{-1}.$$

Le théorème VI permet d'affirmer que Φ est holomorphe et uniforme dans $P\left(\overline{s(f) \cap \sigma(h) \cup \mathfrak{T}}\right)$; elle satisfait à l'inégalité (3); comme la fonction $[\mathcal{O}^q(r)]^{-1}$ est associée à l'ensemble $\overline{s(f) \cap \sigma(h) \cup \mathfrak{T}}$, on voit que la fonction Φ est identiquement nulle. Il résulte alors de

$$\Phi(x + i\alpha) - \Phi(x - i\alpha) = \mathcal{E}[\varphi(t)\, e^{-\alpha |t|}] = 0 \qquad (\alpha > 0)$$

que $\varphi \equiv 0$, ce qui démontre le théorème.

Nous venons de démontrer le théorème suivant [dans ce qui suit φ n'est pas supposé être de la forme $f \star h$; cette forme particulière de φ n'intervient pas dans l'établissement de (2)] :

Théorème VIII. — *Si* $\varphi^{(n)} \in L^\infty$ $(n \geq 0)$, *avec* $\| \varphi^{(n)} \|_\infty \leq M_n$, *si* $\varphi^{(n)}(0) = 0$ $(n \geq 0)$, *et si la fonction* $M(r) = \inf\limits_{n \geq 1} \dfrac{M_n}{r^n}$ *est associée à* $\sigma(\varphi)$, *on a* $\varphi \equiv 0$.

Ce théorème a été implicitement démontré dans [11], Nous allons maintenant établir le lemme suivant :

LEMME I. — *Soit* $\varphi^{(n)} \in L^{\infty}$ $(n \geq 0)$, *soit* Λ *une suite d'entiers non négatifs, et supposons que* $\varphi^{(\lambda)}(0) = 0$ *pour* $\lambda \in \Lambda$. *Désignons par* $M = \{\nu_n\}$ *la suite complémentaire à la suite* Λ *par rapport à la suite de tous les entiers non négatifs. Désignons par* $\Phi(z)$ *la fonction holomorphe et uniforme dans* $P[\sigma(\varphi)]$, *égale à* Φ^+ *pour* $y > 0$ *et à* Φ^- *pour* $y < 0$, $[(\Phi^+, \Phi^-) = \mathcal{FC}(\varphi)]$. $\Phi(z)$ *satisfait pour tout* z *n'appartenant pas à la réunion des carrés* $|x - \xi| < a$, $|y| < a$, *où* ξ *est un point quelconque de* $\sigma(\varphi)$, *aux inégalités suivantes :*

$$(4) \qquad \left| (2\pi)^{\frac{1}{2}} \Phi(z) - \sum_{1}^{m} \frac{\varphi^{(\nu_k)}(0)}{z^{\nu_k+1}} \right| \leq \frac{5}{a} \frac{\| \varphi^{(q+1)} \|_{\infty}}{|z|^{q+1}} \qquad (\nu_m \leq q < \nu_{m+1},\ m \geq 1).$$

En intégrant $q+1$ fois par parties l'intégrale qui fournit, par exemple, Φ^+, et en tenant compte du fait que $\varphi^{(\lambda)}(0) = 0$ $(\lambda \in \Lambda)$, on obtient, pour $y > 0$,

$$(2\pi)^{\frac{1}{2}} \Phi^+(z) - \sum_{1}^{m} \frac{\varphi^{(\nu_k)}(0)}{z^{\nu_k+1}} = \frac{(-i)^q}{z^{q+1}} \int_{-\infty}^{0} \varphi^{(q+1)}(t)\, e^{-itz}\, dt.$$

Une inégalité semblable étant valable pour $\Phi^-(z)$, pour $y < 0$, on voit que Φ satisfait aux inégalités

$$(5) \qquad \left| (2\pi)^{\frac{1}{2}} \Phi(z) - \sum_{1}^{m} \frac{\varphi^{(\nu_k)}(0)}{z^{(\nu_k)+1}} \right| \leq \frac{1}{|z|^{q+1}} \frac{1}{|y|} \| \varphi^{(q+1)} \|_{\infty}.$$

Il suffit alors de démontrer que les inégalités (4) sont valables lorsque z est tel que $|y| \leq a$, $|x - \xi| \geq a$ pour tout ξ appartenant à $\sigma(\varphi)$. z étant un tel point, considérons la fonction

$$\Phi_1(w) = w^{q+1} \left[(2\pi)^{\frac{1}{2}} \Phi(w) - \sum_{1}^{m} \frac{\varphi^{(\nu_k)}(0)}{w^{\nu_k+1}} \right] [w - x + a][w - x - a] \quad (^3)$$

sur le carré

$$\Delta = |u - x| \leq a \qquad |v| \leq a \qquad (w = u + iv).$$

On a, d'après (5)

$$|\Phi_1(w)| \leq 5a \| \varphi^{(q+1)} \|_{\infty} \qquad (\nu_m \leq q < \nu_{m+1}),$$

ce qui prouve que pour $u = x$, $|v| \leq a$

$$|w|^{q+1} \left| (2\pi)^{\frac{1}{2}} \Phi(w) - \sum_{1}^{m} \frac{\varphi^{(\nu_k)}(0)}{w^{\nu_k+1}} \right| \leq \frac{5}{a} \| \varphi^{(q+1)} \|_{\infty}.$$

La conclusion du lemme devient évidente.

---

(3) L'artifice consistant à multiplier une fonction $\Psi(w)$, holomorphe sur un carré $|u - x| \leq a$, $|v| \leq a$ et y satisfaisant à l'inégalité $|\Psi(w)| \leq A|v|^{-1}$, par $(w - x - a)(w - x + a)$, pour pouvoir évaluer $|\Psi|$ dans le carré, est dû à M. Riesz ([17]).

Nous allons maintenant généraliser la notion de « fonction associée à un ensemble » [du moins lorsqu'il s'agit des fonctions $M(r)$ assez régulières]. Soit, d'abord, $\{M_n\}$ une suite de nombres positifs, $\{\mu_n\}$ une suite d'entiers non négatifs croissants, et soit E un ensemble fermé. Nous dirons que la suite $\{M_n\}$ est associée à la suite $M \equiv \{\mu_n\}$ (qui peut être finie, ou même vide) et à l'ensemble E si une fonction $F(z)$, holomorphe et uniforme dans $P(E)$ (le plan complexe duquel on a enlevé E; le demi-plan supérieur si $E = R$) satisfaisant, pour tout $a > 0$, aux relations

$$(6)\qquad \begin{cases} \left| F(z) - \sum_{1}^{m} \dfrac{d_k}{z^{\mu_k}} \right| \leqq \dfrac{AM_q}{a\,|z|^q} & (\mu_m \leqq q < \mu_{m+1},\ m \geqq 1), \\ |F(z)| \leqq \dfrac{A}{a}, \end{cases}$$

où $\{d_k\}$ est une suite complexe, et où A est une constante, z prenant toutes les valeurs n'appartenant pas à la réunion des carrés $|x - \xi| < a$, $|y| < a$, $\xi \in E$, est identiquement nulle.

La fonction $M(r) = \inf\limits_{n \geqq 1} \dfrac{M_n}{r^n}$ est alors aussi dite associée à la suite $\{\mu_n\}$ et à l'ensemble E. On voit, d'après le raisonnement qui a servi à démontrer le lemme, qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite $\{M_n\}$ [ou la fonction correspondante $M(r)$] soit associée à la suite $\{\mu_n\}$ et à l'ensemble E est qu'il résulte de (5), lorsque $|y| \geqq a$, et du fait que $\Phi(z)$ est holomorphe dans $P(E)$ que $\Phi(z) \equiv 0$.

Ainsi, lorsque $M(r)$ est de la forme $M(r) = \inf\limits_{n \geqq 1} \dfrac{M_n}{r^n}$, être associée à une suite vide ($\{\mu_n\}$ n'a aucun terme) et à un ensemble E, équivaut au fait d'être associée à l'ensemble E dans le sens donné à cette expression à la page 6.

Le lemme I permet d'énoncer le théorème suivant :

Théorème IX. — *Soit $\{M_n\}$ une suite positive et soit Λ une suite d'entiers non négatifs, $0 \in \Lambda$, soit $\varphi^{(n)} \in L^\infty (n \geqq 0)$ et supposons que*

$$\varphi^{(\lambda)}(0) = 0 \,(\lambda \in \Lambda), \qquad \|\varphi^{(n)}\|_\infty \leqq M_n.$$

Soit $\{\mu_n - 1\}$ la suite complémentaire à la suite Λ par rapport à l'ensemble des entiers non négatifs. Si la suite $\{M_n\}$ est associée à la suite $\{\mu_n\}$ et à l'ensemble $\sigma(\varphi)$, la fonction φ est identiquement nulle.

Posons $z = -ie^s$, et désignons par $\mathcal{E}_a^1$ l'ensemble des valeurs σ telles que $\sigma = \log x$, avec $x > a > 0$, $x \in E_a$, et par $\mathcal{E}_a^2$ l'ensemble des $\sigma = \log|x|$, avec $x < -a$, $x \in E_a$, E_a étant la réunion des intervalles $(\xi - a, \xi + a)$, où ξ est un point quelconque de E. Désignons par $G_1^{(a)}(\sigma)$ et $G_2^{(a)}(\sigma)$ deux fonctions positives, continues quelconques satisfaisant aux propriétés suivantes : Si $\sigma \in \mathcal{E}_a^1$,

$G_1^{(a)}(\sigma) = \frac{1}{2} - a e^{-\sigma}$; si $\sigma \notin \mathcal{E}_a^1$ et $\sigma \in \mathcal{E}_a^2$, $G_1^{(a)}(\sigma) = 1 - a e^{-\sigma}$; si $\sigma \in \mathcal{E}_a^2$, $G_2^{(a)}(\sigma) = \frac{1}{2} - a e^{-\sigma}$; si $\sigma \notin \mathcal{E}_a^2$ et $\sigma \in \mathcal{E}_a^1$, $G_2^{(a)}(\sigma) = 1 - a e^{-\sigma}$. Lorsqu'on a, à la fois $\sigma \notin \mathcal{E}_a^1$, $\sigma \notin \mathcal{E}_a^2$ on n'impose, pour le moment, aucune restriction sur les fonctions $G_1^{(a)}(\sigma)$ et $G_2^{(a)}(\sigma)$.

Les inégalités (6) peuvent alors être traduites de la manière suivante : Dans la région Δ_a définie par $-\pi G_2^{(a)}(\sigma) < t < \pi G_1^{(a)}(\sigma)$, la fonction $\Phi(s) = F(-i e^s)$ est holomorphe et y satisfait aux inégalités

$$(7)\qquad \begin{cases} \left| \Phi(s) - \sum_1^m i^{\mu_k} d_k e^{-\mu_k s} \right| \leqq \dfrac{A}{a} e^{-q\sigma} (\mu_m \leqq q < \mu_{m+1}), \\ |\Phi(s)| \leqq \dfrac{A}{a}. \end{cases}$$

Or, en suivant les méthodes basées sur les séries adhérentes, on peut démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME X. — *Soit* $\mathcal{F}(s)$ *une fonction holomorphe dans une région* Δ *donnée par* $\sigma > \sigma_0$, $-\pi G_2(\sigma) < t < \pi G_1(\sigma)$, *les fonctions positives, continues,* $G_1(\sigma)$, $G_2(\sigma)$ *jouissant de l'une des propriétés* 1°, 2° *suivantes :*

1° *Les fonctions* $G_1(\sigma)$, $G_2(\sigma)$ *sont à variation bornée sur* $[\sigma_0, \infty)$ *avec*

$$G_1(\sigma) \geqq G_1 > 0, \qquad G_2(\sigma) \geqq G_2 > 0 \qquad (\sigma \geqq \sigma_0);$$

2° *On a* $0 < G_1 \leqq G_1(\sigma) < M < \infty$, $0 < G_2 \leqq G_2(\sigma) < M$, *ces fonctions* $G_1(\sigma)$, $G_2(\sigma)$ *possédant une dérivée continue appartenant à* L^2 *et* $\lim_{\sigma=\infty} G_1'(\sigma) = \lim_{\sigma=\infty} G_2'(\sigma) = 0$.

Supposons que dans Δ *les inégalités suivantes soient satisfaites* $(0 < \mu_1 < \mu_2 < \ldots)$

$$\left| \mathcal{F}(s) - \sum_1^m a_k e^{-\mu_k s} \right| \leqq C M_q e^{-q\sigma} \qquad (\mu_m \leqq q < \mu_{m+1},\ m \geqq 1).$$

Soient $D^*(\mu)$, D^* *respectivement la fonction de densité supérieure de* $\{\mu_n\}$ *et la densité supérieure de* $\{\mu_n\}$ (⁴). *Posons*

$$C(\sigma) = \operatorname{Sup}_q (q\sigma - \log M_q), \qquad G(\sigma) = G_1(\sigma) + G_2(\sigma).$$

Si $D^* < \dfrac{G_1 + G_2}{2}$ *et si*

$$(8)\qquad \int^{\infty} C(\sigma)\, e^{-\int^{\sigma} \frac{du}{G(u) - 2D^*[C(u)]}}\, d\sigma = \infty,$$

(⁴) *Voir* [15]; $D^*(\mu)$ est défini de la manière suivante :

$$N(\mu) = \sum_{\mu_n < \mu} 1,\ (\mu > 0), \qquad D(\mu) = \frac{N(\mu)}{\mu}, \qquad D^*(\mu) = \operatorname{Sup}_{x \geqq \mu} D(x),$$

$$D^* = \lim D^*(\mu) = \overline{\lim}\, \frac{n}{\mu_n}.$$

on a pour tout σ_1 *et tout* R *tels que*

$$\sigma_1 - R > \sigma_0, \qquad D^* < R < \frac{G_1 + G_2}{2},$$

et tout entier positif k, l'inégalité suivante :

$$|a_k| \leqq A(R)\mu_k M_k^* M(s_1, R) e^{\mu_k \sigma_1},$$

où $A(R) < \infty$ *ne dépend que de* R,

$$M_k^* = \prod_{n \neq k} \frac{\mu_n^2}{|\mu_n^2 - \mu_k^2|}, \qquad s_1 = \sigma_1 + i\frac{G_1 - G_2}{2}, \qquad M(s_1, R) = \max_{|s - s_1| \leqq \pi R} |\mathcal{F}(s)|.$$

Si $G_1(\sigma) = G_2(\sigma)$, ces fonctions satisfaisant à 1°, le théorème X n'est qu'un cas très particulier du théorème 3.7.1 de [15]. Mais le théorème 3.7.1 est aussi valable dans le cas où le domaine Δ n'est pas symétrique. Il suffit, pour le voir, de modifier la démonstration de ce théorème en se basant, à partir de la formule (3.3.8) sur le théorème 6 de [11], ou sur le résultat établi dans [4] (au lieu du théorème 2.2.VI, du livre [15]).

Le théorème suivant résulte alors presque immédiatement du théorème X :

THÉORÈME XI. — *La suite* $\{M_n\}$ *est associée à une suite d'entiers positifs* $\{\mu_n\}$ *et à l'ensemble fermé* E *si les conditions suivantes sont satisfaites :*

En désignant par $G_1(\sigma)$ *et* $G_2(\sigma)$ *des fonctions positives, continues satisfaisant à une des conditions* 1° *ou* 2°, *avec* $\sigma_0 = -\infty$, $G_1 = G_2 = \frac{1}{2}$ *et aux conditions que voici :* $G_1(\sigma) = \frac{1}{2}$ *si* $\sigma \in \mathcal{E}_a^1$; $G_1(\sigma) = 1$ *si* $\sigma \notin \mathcal{E}_a^1$, $\sigma \in \mathcal{E}_a^2$; $G_2(\sigma) = \frac{1}{2}$ *si* $\sigma \in \mathcal{E}_a^2$, $G_2(\sigma) = 1$ *si* $\sigma \notin \mathcal{E}_a^2$, $\sigma \in \mathcal{E}_a^1$, *a étant un nombre positif donné,* $\mathcal{E}_a^1$, $\mathcal{E}_a^2$ *étant définis, à partir de* E, *comme à la page* 9. *En désignant par* D^* *et* $D^*(\mu)$ *la densité supérieure de* $\{\mu_n\}$ *et la fonction de densité supérieure de* $\{\mu_n\}$ *et en posant*

$$C(\sigma) = \operatorname{Sup}_{q \geqq 1}(q\sigma - \log M_q) \qquad G(\sigma) = G_1(\sigma) + G_2(\sigma),$$

on a

$$D^* < \frac{1}{2}, \qquad \int^{\infty} C(\sigma)\, e^{-\int^{\sigma} \frac{du}{G(u) - 2D^*[C(u)]}} d\sigma = \infty.$$

En effet, si (6) est satisfait dans P(E), (7) est satisfait dans Δ_a, pour tout $a > 0$, assez petit, avec $G_1^a(6)$, $G_2^a(\sigma)$ définis pour σ tel que $\sigma \notin \mathcal{E}_a^1$, $\sigma \notin \mathcal{E}_a^2$ respectivement par

$$G_1^a(\sigma) = G_1(\sigma) - a e^{-\sigma}, \qquad G_2^a(\sigma) = G_2(\sigma) - a e^{-\sigma}.$$

La relation (8) a encore lieu si, pour a assez petit on remplace dans l'intégrale $G(\sigma)$ par $G_a(\sigma) = G_1^a(\sigma) + G_2^a(\sigma)$, car, a étant petit et c étant grand, on a

$$0 < \int_c^{\infty} \frac{du}{G(u) - 2D^*[C(u)]} - \int_c^{\infty} \frac{du}{G_a(u) - 2D^*[C(u)]} < \infty.$$

En choisant $a \leqq \left(\frac{1}{2} - R\right) e^{\sigma_1 - R}$, où $\sigma_1 < 0$, $D^{\bullet} < R < \frac{1}{2}$, on voit que pour $\sigma \geqq \sigma_1 - R$

$$G_a^1(\sigma) \geqq R, \qquad G_a^2(\sigma) \geqq R.$$

On peut ainsi appliquer le théorème X, ce qui fournit

$$|d_k| \leqq A(R)\mu_k M_k^* M(s_1, R)\, e^{\mu_k \sigma_1},$$

où $M(s_1, R)$ est, cette fois-ci, égal à $2A\, e^{R-\sigma_1}(1-2R)^{-1}$. Comme $\mu_k - 1 > 0$, on voit, en faisant tendre σ_1 vers $-\infty$, que $d_k = 0\ (k \geqq 1)$. Ainsi, dans Δ_a, on a

$$|\Phi(s)| \leqq \frac{A}{a} M_q\, e^{-q\sigma} \qquad (q \geqq \mu_1).$$

On a donc dans cette région $\log|\Phi(s)| \leqq -C(\sigma) - p$, où p est une constante (qui dépend de a). Comme

$$\int^{\infty} C(\sigma)\, e^{-\int^{\sigma} \frac{du}{G(u)}}\, d\sigma = \infty,$$

on a $\Phi(s) \equiv 0$ ([5]). Donc $F(z) \equiv 0$, et le théorème est démontré.

Les théorèmes IX et XI fournissent immédiatement une condition explicite portant sur les suites $\{M_n\}$, Λ et sur $\sigma(\varphi)$ pour que de $\|\varphi^{(n)}\| \leqq M_n\ (n \geqq 0)$ et $\varphi^{(\lambda)}(0) = 0\ (\lambda \in \Lambda)$ résulte que $\varphi \equiv 0$. Si l'on applique le résultat qu'on obtient ainsi à la fonction $\varphi = f \star h$, où $f \in L$, $h \in L^{\infty}$, avec $\int f^{(\lambda)}(-x) h(x)\, dx = 0$, c'est-à-dire $\varphi^{(\lambda)}(0) = 0\ (\lambda \in \Lambda)$, en tenant compte du théorème VI, on obtient le théorème suivant :

Théorème XII. — *Soit $f^{(n)} \in L\ (n \geqq 0)$, $h \in L^{\infty}$. Soit Λ une suite d'entiers non négatifs contenant $\lambda = 0$, et désignons par $D_{\bullet}$ et $D_{\bullet}(\lambda)$ respectivement la densité inférieure de $\{\lambda_n\} = \Lambda$ et sa fonction de densité inférieure [c'est-à-dire $D_{\bullet}(\lambda) = \inf_{x \geqq \lambda} D(x)$, $\lim_{\lambda = \infty} D_{\bullet}(\lambda) = D_{\bullet}$]. Si $D_{\bullet} > \frac{1}{2}$, si*

$$\int f^{(\lambda)}(-x)\, h(x) = 0 \qquad (\lambda \in \Lambda)$$

et si, en désignant par $G_1(\sigma)$, $G_2(\sigma)$ les fonctions définies dans l'énoncé du théorème XI et correspondant à $E = \overline{s(f) \cap \sigma(h)} \cup \mathfrak{T}$, où $\mathfrak{T}$ est la partie parfaite de $\sigma^{\bullet}(f) \cap \sigma(h)$, on a

$$(9) \qquad \int^{\infty} \log \mathcal{D}_f(\sigma)\, e^{-\int^{\sigma} \frac{du}{G(u) + 2D_{\bullet}[\log \mathcal{D}_f(u)] - 2}}\, d\sigma = \infty,$$

([5]) Ceci résulte du théorème 2.4.1 de [15] (*voir* [7]) généralisé, dans [11], pour des régions non symétriques assez générales. Δ_a est une région à laquelle cette généralisation s'applique.

où $\mathcal{D}_f(\sigma)$ *est la dérivabilité de* f, *et où* $G(u) = G_1(u) + G_2(u)$, *alors*

$$f \star h = 0.$$

Si l'on ajoute aux hypothèses du théorème XII l'hypothèse $g \in L$, $g \star h = 0$, l'ensemble E dans son énoncé peut être remplacé par l'ensemble

$$E_1 = \overline{s(f) \cap \overline{c(g)}} \cup \mathcal{T}_1,$$

où $\mathcal{T}_1$ est la partie parfaite de $\sigma^{\bullet}(f) \cap \overline{c(g)}$, car, d'après le théorème I,

$$\overline{c(g)} \supset \sigma(h).$$

L'emploi du théorème de Banach-Riesz permet d'énoncer le théorème suivant (*voir* [12]) :

THÉORÈME XIII. — *Soit* $f^{(n)} \in L (n \geqq 0)$, $g \in L$, *et soit* $\Lambda = \{\lambda_n\}$ *la suite définie dans l'énoncé du théorème* XII, *avec* $D_{\bullet} > \frac{1}{2}$. *Désignons par* $G_1(\sigma)$, $G_2(\sigma)$ *les fonctions définies dans l'énoncé du théorème* XI *et correspondant à* $E = \overline{s(f) \cap \overline{c(g)}} \cup \mathcal{T}_1$, *où* $\mathcal{T}_1$ *est la partie parfaite de* $\sigma^{\bullet}(f) \cap \overline{c(g)}$, *et soit*

$$G(u) = G_1(u) + G_2(u).$$

Si l'intégrale (9) [*avec* $G(u)$ *défini comme dans l'énoncé actuel*] *diverge, quel que soit* a *réel*, $f(x+a)$ *est un point limite, dans* L (*avec la topologie de* L) *des expressions de la forme* $\sum_{n=1}^{N} a_n f^{(\lambda_n)}(x) + \sum_{n=1}^{M} b_n g(\xi_n + x)$. *Autrement dit, la fermeture de l'ensemble des combinaisons linéaires de cette forme* (*dans* L) *contient l'ensemble* $\tau(f)$ (*la fermeture des combinaisons linéaires des translatées de* f).

Désignons par A_f l'ensemble des transformées de Fourier des fonctions appartenant à $\tau(f)$. Il résulte du théorème XIII que si $\Psi_1 \in A_f$, à tout $\varepsilon > 0$ correspond un polynome ne contenant que des puissances x^{λ_n} et une expression de la forme $\sum_1^N c_n e^{i\xi_n x}$ tels que sur R

$$\left| \Psi_1(x) - P(x)F(x) - \sum_1^N c_n e^{i\xi_n x} G(x) \right| < \varepsilon,$$

où $F = \mathcal{C}(f)$, $G = \mathcal{C}(g)$.

Comme, quel que soit $\psi \in L$, $\Psi_{\bullet} F = \mathcal{C}(\psi \star f) \in A_f$, l'inégalité

$$\left| \Psi(x)F(x) - P(x)F(x) - \sum_1^N c_n e^{i\xi_n x} G(x) \right| < \varepsilon$$

est réalisable quelle que soit la fonction Ψ de A, $P(x)$ étant, comme plus haut, un polynome ne contenant que des puissances de la forme $x^{\lambda_n}(\lambda_n \in \Lambda)$.

E étant un ensemble fermé, il existe une fonction $g \in L$ satisfaisant à la condition $\sigma(g) = \overline{\mathcal{C}E}$($\mathcal{C}E$ étant l'ensemble complémentaire de E par rapport à R). Si, en effet, $\mathcal{C}E$ est la réunion d'intervalles finis $I_j (j \geqq 1) (\mathcal{C}E = \cup I_j)$, en désignant par ξ_j et $2 l_j$ respectivement le milieu et la longueur de I_j, désignons par $\{\alpha_j\}$ une suite positive telle que $\sum \alpha_n (l_n + 1) < \infty$. La fonction

$$g(x) = \sum \alpha_n l_n \delta(l_n x) e^{i\xi_n x}$$

a les propriétés voulues. On a alors $G(u) = 0$ pour $u \in E(G = \mathcal{E}(g))$, et, quel que soit $f \in L$, on a $\overline{s(f) \cap c(g)} \cup \mathcal{R}_1 \subset E(\mathcal{R}_1$, partie parfaite de $\sigma(f) \cap \overline{c(g)})$.

Ainsi, le théorème XIII conduit au théorème suivant :

Théorème XIV. — *Soit* $f^{(n)} \in L$, $F = \mathcal{E}(f)$. *Soit* Λ *une suite d'entiers non négatifs contenant* $\lambda = 0$ *et supposons que* $D_{\bullet} > \frac{1}{2}$. *Soit* E *un ensemble fermé sur* R, *et désignons par* $G_1(\sigma)$, $G_2(\sigma)$ *les fonctions définies comme dans l'énoncé du théorème* XII. *Posons* $G(\sigma) = G_1(\sigma) + G_2(\sigma)$. *Si* (9) *a lieu, quelle que soit la fonction* Ψ *de* A, *et quel que soit* $\varepsilon > 0$, *il existe un polynome* $P(x)$ *ne contenant que des puissances* $x^{\lambda} (\lambda \in \Lambda)$ *tel que, sur* E,

$$|\Psi(x) - P(x)| |F(x)| < \varepsilon.$$

Comme toute fonction $\Phi(x)$, continue sur R, avec $\lim\limits_{|x|=\infty} \Phi(x) = 0$, est une limite uniforme des fonctions de la classe A, on a

Corollaire. — *Dans le théorème* XIV, $\Psi(x)$ *peut être remplacé par toute fonction continue* Φ *avec* $\lim\limits_{|x|=\infty} \Phi(x) = 0$.

On obtient aussi facilement des conditions pour l'unicité du problème général des moments

$$\int t^{\lambda} dV = m_{\lambda} \qquad (\lambda \in \Lambda),$$

la mesure positive V étant portée par un ensemble fermé, donné E.

Théorème XV. — *Soit* E *un ensemble fermé, soit* $\{\lambda_n\} = \Lambda$ *une suite d'entiers non négatifs contenant* $\lambda_1 = 0$, *avec* $D_{\bullet} > \frac{1}{2}$, *et soit* $\{M_n\}$ *une suite de nombres réels. Supposons qu'il existe une mesure positive* V *portée par* E *tel que*

$$\int t^{\lambda_n} dV = M_n \qquad (n \geqq 1, \lambda_1 = 0). \tag{10}$$

Soit $G(\sigma)$ *la fonction définie dans théorème* XIV *et posons*

$$C_1(\sigma) = \sup_{\substack{\lambda_n \in \Lambda \\ \lambda_n - \text{pair}}} (\lambda_n \sigma - \log M_n). \tag{11}$$

Si

$$\int^{\infty} C_1(\sigma)\, e^{-\int^{\sigma} \frac{du}{G(u) + 2D.[C_1(u)] - 2}}\, d\sigma = \infty,$$

la solution V *de* (10) *est unique.*

Soient, en effet, $V = V_1$ et $V = V_2$ deux mesures positives portées par E et satisfaisant à (10). Posons

$$h(u) = \int e^{itu}[dV_1 - dV_2],$$

et soit $(H^+, H^-) = \mathcal{FC}(h)$. On voit facilement que

$$h^{(\lambda_n)}(0) = i^{\lambda_n} \int t^{\lambda_n}[dV_1 - dV_2] = 0$$

et, pour λ_n pair,

$$\| h^{(\lambda_n)} \| \leqq \int t^{\lambda_n}[dV_1 + dV_2] = 2M_n,$$

c'est-à-dire

$$C(\sigma) = \sup_{n \geqq 0} (n\sigma - \log \| h^{(n)} \|_{\infty}) \geqq -\log 2 + \sup_{\lambda_n - \text{pair}} (\lambda_n \sigma - \log M_n) = -\log 2 + C_1(\sigma).$$

On voit aussi que pour $y > 0\ (z = x + iy)$

$$H^+(x + iy) - H^-(x - iy) = 2iy \int \frac{dV_1 - dV_2}{|u - z|^2},$$

ce qui prouve que, si $[a, b] \subset \mathcal{C}E$, on a

$$\lim_{y=0} [H^+(x + iy) - H^-(x - iy)] = 0$$

uniformément par rapport à x sur $[a, b]$. Ainsi $\sigma(h) \subset E$. Les théorèmes IX et XI permettent alors d'affirmer (*voir* p. 9, 11) que $h \equiv 0$, ce qui prouve que les deux mesures V_1 et V_2 sont égales.

Si E est contenu dans la demi-droite réelle positive, on peut, dans la définition de $C_1(\sigma)$ [formule (11)] enlever la restriction « λ_n pair » (6).

Sur quelques propriétés arithmétiques du spectre.

La transformée de Fourier-Carleman a aussi un sens pour des fonctions qui, sans appartenir à L^{∞}, ne croissent pas trop rapidement avec $|x|$. Carleman [3]

(6) *Voir* notre Mémoire [12], ainsi que la *Thèse* de J. P. Kahane ([5]), où d'autres résultats concernant l'approximation polynomiale pondérée et les problèmes des moments sont établis.

a étudié en détail les couples (F^+, F^-) pour les fonctions f dont la croissance est, par exemple, comparable à celle d'une puissance de x. Il est clair que le couple (F^+, F^-) peut être défini, en général, pour les fonctions f localement mesurables et telles que pour tout $\varepsilon > 0$, on a $f(x)e^{-\varepsilon|x|} \in L^\infty$. On peut ainsi définir pour une telle fonction l'ensemble $c(f)$, c'est-à-dire la réunion des intervalles à travers lesquels on peut prolonger F^+ en F^-. Il en résulte la définition du spectre $\sigma(f)$, qui est l'ensemble complémentaire de l'ensemble $c(f)$.

Nous considérons ici une classe particulière de ces fonctions, définies de la manière suivante : Soit $S(u)$ une fonction positive non décroissante telle que

$$\int^{\infty} \frac{S(u)}{u^2}\, du < \infty. \tag{12}$$

Nous désignerons par $C(S)$ la classe des fonctions f localement mesurables qui satisfont à la relation

$$f(x) = O[e^{S(|x|)}] \qquad (|x| \to \infty).$$

Nous avons démontré dans [10] que si $S(u)$ satisfait à la condition (12), il existe une fonction $\delta^\star(z)$ possédant les propriétés suivantes (nous citons ici le résultat avec un choix particulier des constantes).

Posons

$$h(v) = \int_v^{\infty} \frac{S(u)}{u^2}\, du \qquad (v > 0).$$

Il existe une suite positive $\{k_n\}$, avec $\Sigma k_n = \frac{1}{4}$, telle que la fonction

$$\delta^\star(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin\left(\frac{3z}{4}\right)}{z} \prod \frac{\sin k_n z}{k_n z} \tag{13}$$

est une fonction entière (le produit convergeant uniformément sur tout compact). La transformée de Fourier $\Delta^\star(u)$ de $\delta^\star(x)$ est de la forme

$$\Delta^\star(u) = \lim_{n=\infty} \frac{1}{2^n k_1 k_2 \ldots k_n} \int_{-k_n}^{k_n} dt_n \int_{-k_{n-1}}^{k_{n-1}} dt_{n-1} \ldots \int_{-k_1}^{k_1} F_0(u + t_1 + \ldots + t_n)\, dt_1,$$

où $F_0(u) = 1$ pour $|u| \leqq \frac{3}{4}$, $F_0(u) = 0$ pour $|u| > \frac{3}{4}$.

Si les suites positives $\{l_n\}$ et $\{g_n\}$, $l_n < 1\ (n \geqq 1)$, avec $\lim l_n = 0$, $\lim g_n = \infty$, sont telles que

$$\Sigma h\left(\frac{g_n}{l_n}\right) \frac{1}{l_n} < \infty,$$

on peut choisir les constantes k_n dans (13) $\left(\text{tout en ayant } \Sigma k_n = \frac{1}{4}\right)$ de telle sorte que

$$|\delta^\star(l_n z)| \leqq e^{2 l_n g_n + l_n |y| - S(|z|)} \frac{1}{1 + l_n^2 x^2} \qquad (n \geqq 1). \tag{14}$$

Il est clair que $\Delta^\star(u)=0$ pour $|u|\geqq 1$ et $\Delta^\star(u)=1$ pour $|u|\leqq \frac{1}{2}$. Il est d'ailleurs facile à voir que cette fonction est indéfiniment dérivable.

La fonction $S=S(u)$ étant donnée, la fonction $\delta^\star$ que nous venons de définir sera désignée par $\delta^\star_S(z)$.

Comme je l'avais indiqué dans mon Mémoire [10], l'existence de la fonction $\delta^\star(z)$ résulte d'un théorème que j'ai démontré en 1941 (*voir* [9]). Sous une forme moins précise, une fonction entière d'une croissance semblable a été utilisée par Agmon [1]. La construction d'Agmon est une adaptation d'un lemme de Levinson [6].

Nous pouvons maintenant démontrer le lemme suivant :

Lemme II. — *Soit* $S(u)$ *une fonction non décroissante. Soit* $f\in C(S)$ *et soit* $F(z)$ *la fonction égale à* F^+ *pour* $y>0$ *et à* F^- *pour* $y<0$, *où* $(F^+, F^-)=\mathcal{FC}(f)$. *Si* ξ *est un point isolé de* $\sigma(f)$, ξ *est une singularité isolée, non critique, de* F *dont le résidu a est fourni par la relation*

$$2\pi ai=-l\int f(t)\,\delta^\star_S(lt)\,e^{-i\xi t}\,dt \tag{15}$$

pour l suffisamment petit. Cette intégrale est nulle si $[\xi-l,\ \xi+l]\subset c(f)$.

Si $l>0$ est tel que $[\xi-l,\ \xi+l]$ ne contient pas d'autres points de $\sigma(f)$ que ξ, on a pour $\alpha>0$

$$\begin{aligned}
&l\int f(t)\,\delta^\star(lt)\,e^{-\alpha|t|}\,e^{-i\xi t}\,dt\\
&=\int_{\xi-l}^{\xi+l}\Delta^\star\left[\frac{u-\xi}{l}\right][F^+(u+i\alpha)-F^-(u-i\alpha)]\,du\\
&=-i\int_{-\alpha}^{\alpha}\left[F\left(-\frac{l}{2}+iy\right)-F\left(\frac{l}{2}+iy\right)\right]dy\\
&+\int_{\xi-l}^{\xi-\frac{l}{2}}\Delta^\star\left[\frac{u-\xi}{l}\right][F(u+i\alpha)-F(u-i\alpha)]\,du\\
&+\int_{\xi+\frac{l}{2}}^{\xi+l}\Delta^\star\left[\frac{u-\xi}{l}\right][F(u+i\alpha)-F(u-i\alpha)]\,du+\int_C F(z)\,dz,
\end{aligned}$$

C étant un rectangle de centre ξ, dont les côtés, parallèles aux axes, sont, respectivement, de longueur l et 2α. L'intégrale sur C est prise dans le sens négatif. Cette intégrale est égale à $-2\pi ai$. Les trois autres intégrales à droite du dernier signe d'égalité tendent vers zéro avec α.

La classe des fonctions $C(S)$ a été considérée par Beurling [2]. Pour ces classes il a démontré le théorème d'unicité spectrale, c'est-à-dire le fait que la fonction est nulle si son spectre est vide. Ce théorème résulte du lemme II, très élémentaire (une fois notre fonction $\delta^\star$ introduite), immédiatement. Mais, nous introduisons cette classe C(S) dans un tout autre but, qui est atteint par le théorème de caractère arithmétique qui suivra (th. XVI).

Soit $f \in C(S)$, et supposons que $\sigma(f) \subset (c, \infty)$, $(c > -\infty)$. Il existe une fonction $f(z)$ holomorphe dans le demi-plan $y > 0$ et telle que, pour tout $N > 0$, on a

$$\lim_{y \downarrow 0} \int_{-N}^{N} |f(x+iy) - f(x)|\, dx = 0. \tag{16}$$

En effet, pour $l > 0$, assez petit, et $a > l - c$, on a

$$p(x) = \delta^\star(lx) f(x)\, e^{aix} \in L^\infty \cap L,$$

et $\sigma(p) \subset (0, \infty)$. Il résulte alors d'un théorème établi dans [13], qu'il existe une fonction $f_l(z)$, holomorphe et bornée pour $y > 0$, telle que, pour $N > 0$,

$$\lim_{y \downarrow 0} \int_{-N}^{N} |f_l(x+iy) - p(x)|\, dx = 0$$

[car si la fonction $\varphi \in L$ est telle que $\Phi(u) = 0$ pour $u \geqq 0$, $\Phi(u) \neq 0$, pour $u < 0$, $\Phi = \mathcal{C}(\varphi)$, on a $\varphi \star p = 0$]. Or N étant fixe et l étant assez petit, la fonction $\varphi_l(z) = [\delta^\star(lz)]^{-1} e^{-aiz}$ est holomorphe dans la bande $|x| \leqq N$ et l'on a

$$\lim_{y \downarrow 0} \int_{-N}^{N} |f_l(z)\, \varphi_l(z) - f(x)|\, dx = 0.$$

Comme, pour l_1 et l_2 assez petits on a aussi

$$\lim_{y \downarrow 0} \int_{-N}^{N} |f_{l_1}(z)\, \varphi_{l_1}(z) - f_{l_2}(z)\, \varphi_{l_2}(z)|\, dx = 0,$$

on voit que, pour l assez petit, la fonction $f(z) = f_l(z)\, \varphi_l(z)$ est indépendante de l, et satisfait à la relation (16)

Si $f \in C(S)$, avec $\sigma(f) \subset (c, \infty)$, $(c > -\infty)$, nous dirons que la fonction $f(z)$, holomorphe pour $y > 0$ et satisfaisant à (16), est le prolongement généralisé de f dans le demi-plan $y > 0$.

Supposons qu'il existe un intervalle (a, b) avec $0 \leqq a < b \leqq 2\pi$ et un nombre d tels qu'il existe une fonction $f(z)$ holomorphe dans la région H qui est la réunion des demi-bandes $a + 2\varkappa\pi < x < b + 2\varkappa\pi$, $y > d$, $\varkappa$ prenant toutes les valeurs entières, et du demi-plan $y > 0$. Supposons, en plus, que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $v > 0$, $f(z)$ satisfait, dans l'intersection des régions $H_{\varepsilon, v} = H - \bigcup_{z_0 \in \complement H} D(z_0, \varepsilon)$, $y < v$, où $D(z_0, \varepsilon)$ est le disque $|z - z_0| < \varepsilon$, à la relation $f(z) = O[e^{S|x|}]$, la fonction $f(z)$ étant égale au prolongement généralisé de $f(x)$ dans le demi-plan supérieur. Nous dirons alors que le prolongement généralisé de f peut être prolongé analytiquement directement à travers (a, b), modulo 2π, jusqu'à la profondeur d, et que ce prolongement appartient à la classe $C(S)$.

Désignons par $[u]$ la partie entière du nombre réel u et par (u) sa partie fractionnaire : $u = [u] + (u)$.

Λ étant une suite appartenant à $\sigma(f)$, désignons par Ω_Λ la suite des valeurs prises par les quantités (λ), où λ est un élément quelconque de Λ. Si $\omega \in \Omega_\Lambda$, désignons par Λ^ω l'ensemble des λ pour lesquels $(\lambda) = \omega$. Désignons par λ^ω le plus petit terme de Λ^ω et par ν^ω le nombre des termes de Λ^ω (ν^ω peut être égal à $+\infty$).

La suite Λ [de points appartenant à $\sigma(f)$] est dite uniformément isolée dans $\sigma(f)$, s'il existe un nombre positif q tel que l'intervalle $(\lambda - q, \lambda + q)$, pour tout λ de Λ, ne contient aucun autre point de $\sigma(f)$ que λ. Posons

$$\delta^\omega = \inf_{\substack{(\xi)\neq\omega \\ \xi\in\sigma(f)}} |\omega - (\xi)|.$$

Nous pouvons maintenant énoncer et démontrer le théorème suivant :

Théorème XVI. — *Soit* $S = S(u)$ *une fonction non décroissante vérifiant la condition*

$$\int^\infty \frac{S(u)}{u^2}\, du < \infty,$$

et posons

$$\int_v^\infty \frac{S(u)}{u^2}\, du = h(v) \quad (v > 0)$$

Soit $f \in C(S)$, *avec* $\sigma(f) \subset (0, \infty)$. *Soit* Λ *une suite uniformément isolée dans* $\sigma(f)$, *et désignons par* $a(\lambda)$ $(\lambda \in \Lambda)$ *le résidu* de λ [7].

Supposons que les éléments de Ω_Λ — *la partie fractionnaire de* Λ — *soient isolés, que tout* $\xi \in \sigma(f)$ *avec* $(\xi) \in \Omega_\Lambda$ *appartienne à* Λ [8] *et que*

$$h\left(\frac{\lambda^\omega}{\delta^\omega}\right) = o(\delta^\omega) \qquad (\omega \in \Omega_\Lambda,\ \delta^\omega \to 0), \tag{17}$$

$$\lim \frac{\nu^\omega}{\lambda^\omega} = 0 \qquad (\omega \in \Omega_\Lambda,\ \delta^\omega \to 0), \tag{18}$$

Si le prolongement généralisé de f *peut être prolongé analytiquement à travers un intervalle* (a, b), *modulo* 2π, *jusqu'à la profondeur* d, *ce prolongement analytique appartenant à la classe* $C(S)$, *on a*

$$\overline{\lim_{\lambda=\infty}} \frac{\log|a(\lambda)|}{\lambda} \leq d. \tag{19}$$

---

(7) Par le résidu de λ il faut comprendre le résidu de λ comme singularité de $F(z)$ [$F = F^+$ pour $y > 0$, $F = F^-$ pour $y < 0$, $(F^+, F^-) = \mathcal{FC}(f)$].

(8) C'est-à-dire qu'aucun point de $\sigma(f) - \Lambda$ ne peut avoir la même partie fractionnaire qu'un point de Λ.

Choisissons une suite partielle $\{\omega_p\}$ de l'ensemble Ω_Λ jouissant des propriétés suivantes :

1° Cette suite ne contient ni le point $\inf \Omega_\Lambda$, ni le point $\sup \Omega_\Lambda$ [9]; la suite $\{\delta^{\omega_n}\}$ est (strictement) décroissante; q étant tel que $(\lambda - q, \lambda + q)$ $(\lambda \in \Lambda)$ ne contient pas d'autres points de $\sigma(f)$ que λ, on a

$$|\omega_p - \omega_n| < \min\left(\frac{q}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

pour tout couple (n, p) d'entiers positifs.

2° $$\lim_{n=\infty} \frac{1}{\lambda^{\omega_n}} \sum_{1}^{n-1} \nu^{\omega_k} = 0;$$

3° $$\sum h\left[\frac{\lambda^{\omega_n}}{\delta^{\omega_n}}\right] \frac{1}{\delta^{\omega_n}} < \infty;$$

4° $\lambda^{\omega_{n+1}}$ est supérieur au plus grand terme de Λ_{ω_n}.

En posant $2l_n = \delta^{\omega_n}$, $g_n = \lambda^{\omega_n}$, considérons la fonction $\delta^\star = \delta^\star_S$ satisfaisant à (14) (ce qui est possible en vertu de 3°), et posons

$$\varphi(z) = \sum \left(\frac{l_n}{n^2}\right) e^{-\varepsilon_n g_n - i\omega_n z}\, \delta^\star(l_n z).$$

On a, évidemment, en vertu de (14)

$$(20) \qquad |\varphi(z)| \leq e^{c|y| - S(|z|)} \sum \frac{l_n}{n^2(1 + l_n^2 x^2)} = L(x)\, e^{c|y| - S(|z|)},$$

où c est une constante, et où $L(x) \in L$, cette fonction tendant vers zéro lorsque $|x|$ tend vers l'infini.

Posons

$$\psi(z) = \frac{1}{1 - e^{iz}}$$

et considérons l'expression

$$(21) \qquad A(s) = \int_{-\infty + iy_0}^{\infty + iy_0} f(z)\, \varphi(z)\, \psi(s - z)\, dz, \qquad (y_0 > 0) \qquad (s = \sigma + it),$$

où $f(z)$ est le prolongement généralisé de f. Cette intégrale converge uniformément, par rapport à s, lorsque s varie sur un compact situé dans le demi-plan $t > y_0$. En déformant convenablement le contour d'intégration, on voit que

---

[9] Un de ces points (ou les deux) peut appartenir à Ω_Λ.

la fonction $A(s)$ est holomorphe dans H. On voit aussi que pour $t > y_0$ on peut écrire

$$A(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{ins} \int_{-\infty + iy_0}^{\infty + iy_0} e^{-inz} f(z) \varphi(z)\, dz$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{ins} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{l_p}{p^2} e^{-\varepsilon_p g_p} \int e^{-i(n+\omega_p)x} f(x)\, \delta^{\star}(l_p x)\, dx.$$

Nous allons maintenant calculer la valeur de

$$N_{n,p} = l_p \int e^{-i(n+\omega_p)x} f(x)\, \delta^{\star}(l_p x)\, dx.$$

Soit $\xi \in \sigma(f)$. Si $[\xi] \neq n$, on a, en vertu de 1° :

$$|\xi - (n + \omega_p)| = |(\xi) - \omega_p + [\xi] - n| \geqq 1 - |(\xi) - \omega_p| \geqq 1 - (1 - \delta^{\omega_p}) = \delta^{\omega_p} = 2 l_p,$$

car, comme $\omega_p > \delta^{\omega_p}$ et $\omega_p + \delta^{\omega_p} < 1$, on a, si $(\xi) > \omega$,

$$1 - \delta^{\omega_p} > 1 - \omega_p > (\xi) - \omega_p,$$

et si $(\xi) < \omega_p$, on a

$$1 - \delta^{\omega_p} > \omega_p > \omega_p - (\xi).$$

Si, au contraire, $[\xi] = n$ on a, si $(\xi) \neq \omega_p$, en vertu de 1°,

$$|\xi - (n + \omega_p)| \geqq \delta^{\omega_p} = 2 l_p,$$

et, si $(\xi) = \omega_p$, il existe un $\lambda_m \in \Lambda_{\omega_p}$ tel que $\xi = \lambda_m$. Autrement dit, si $\xi \in \sigma(f)$, excepté le cas où $\xi = \lambda_m \subset \Lambda_{\omega_p}$, $[\lambda_m] = n$, on a

$$|\xi - (n + \omega_p)| \geqq 2 l_p.$$

D'autre part, à chaque n correspond au plus un couple d'entiers (m, p) tel que $|\lambda_m - (n + \omega_p)| \leqq l_p$. Si, en effet, on a simultanément

$$|\lambda_m - (n + \omega_p)| \leqq l_p, \qquad |\lambda_s - (n + \omega_r)| \leqq l_r,$$

on aurait $|\lambda_m - \lambda_s| \leqq l_p + l_r + |\omega_p - \omega_r|$ et, en vertu de 1°, on aurait $|\lambda_m - \lambda_s| < q$, ce qui prouve que $\lambda_m = \lambda_s$, $m = s$. Mais alors, on a aussi $|\omega_p - \omega_r| \leqq l_p + l_r$, et si, par exemple, on avait $r > p$, on aurait $|\omega_p - \omega_r| < 2 l_p = \delta^{\omega_p}$, ce qui est impossible; on a donc aussi $p = r$.

Il existe une infinité d'entiers positifs n tels que pour un, et un seul couple (m, p) on a $\lambda_m = n + \omega_p$; pour tout $\xi \in \sigma(f)$ qui n'est pas de la forme $\xi = \lambda_m = n + \omega_p$, on a $|\xi - (n + \omega_p)| > l_p$. Donc, en vertu du lemme II, si $\lambda_m = n + \omega_p$, $\lambda_m \in \Lambda$, on a $N_{n,p} = -2\pi a(\lambda_m) i$; pour tout autre couple (n, p) on a $N_{n,p} = 0$.

Il résulte de (18) et de 2° que

$$\lim \frac{m}{\lambda_m} = 0. \tag{22}$$

$\Big($Ici $\{\lambda_m\}$ est la suite extraite de Λ et qui est la réunion $\bigcup\limits_n \Lambda^{\omega_n}$, la suite $\{\omega_n\}$ étant définie comme plus haut.$\Big)$

Comme dans (21) $y_0 > 0$ est arbitraire (positif), on voit que pour $t > 0$ on peut écrire

$$-\frac{1}{2\pi i}\mathrm{A}(s) = \Sigma e^{in_k s} a(\lambda_{n_k}) e^{-\varepsilon_{n_k} g'_{n_k}} \frac{1}{p^2_{n_k}} = \Sigma b_k e^{in_k s},$$

où $[\lambda_{n_k}] = n_k$, où g'_{n_k} est le plus petit terme de $\Lambda^{(\lambda_{n_k})}$ $(g'_{n_k} = \lambda^{(\lambda_{n_k})})$, et où p_{n_k} est donné par la relation $(\lambda_{n_k}) = \omega_{p_{n_k}}$. Ainsi, on a les inégalités

$$\text{(23)} \qquad \begin{gathered} g'_{n_k} < [\lambda_{n_k}] + 1 = n_k + 1, \\ \lim \frac{k}{n_k} = 0, \end{gathered}$$

et, d'après (18) et 2°, aussi

$$p_{n_k} \leqq \sum_{m=1}^{p_{n_k}-1} \nu^{\omega_m} + \nu^{\omega_{p_{n_k}}} = o(n_k).$$

On en conclut que

$$h = \overline{\lim} \frac{\log|b_k|}{n_k} = \overline{\lim} \frac{\log|a(\lambda_{n_k})|}{\lambda_{n_k}} \geqq \overline{\lim_{\lambda}} \frac{\log|a(\lambda)|}{\lambda}.$$

Mais, d'après le théorème de Fabry, (23) indique que la fonction $\mathrm{A}(s)$ admet la droite $t = h$ comme coupure, et, d'après la définition de d, on doit avoir $h \leqq d$, ce qui prouve le théorème.

Pour les applications du théorème XVI il est intéressant de faire la remarque suivante :

Si $\mathrm{S}(u)$ *est une constante, la condition* (17) *est automatiquement satisfaite. Si* $\mathrm{S}(u) = \log u$, *la condition* (17) *est équivalente à la condition* $\lim (\delta^{\omega})^{\frac{1}{\lambda^{\omega}}} = 1$. *Et, enfin, lorsque* $\mathrm{S}(u) = u^{\alpha} (0 < \alpha < 1)$, *cette condition devient* $\lambda^{\omega} = o\left[(\delta^{\omega})^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right]$.

Le théorème XVI peut être appliqué aux séries de Dirichlet, il fournit alors une autre démonstration du théorème principal établi dans [10].

BIBLIOGRAPHIE.

[1] S. Agmon, *A composition theorem for Dirichlet series* (*J. d'Analyse Math.*, t. 1, 1951).

[2] A. Beurling, *Sur les spectres des fonctions*, Colloques internationaux. Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1949.

[3] T. Carleman, *L'intégrale de Fourier et questions qui s'y rattachent*, Upsala, 1944.

[4] J. Ferrand, *Note on a paper by Mandelbrojt and Mac Lane* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. **61**, 1947).

[5] J. P. Kahane, *Sur quelques problèmes d'unicité et de prolongement relatifs aux fonctions approchables par des sommes exponentielles* (*Ann. Inst. Fourier*, t. 5, 1953 et 1954).

[6] N. Levinson, *Gap and density theorems*, Colloquium, Pub. New-York, 1940.

[7] S. Mandelbrojt et G. R. Mac Lane, *On functions holomorphic in a strip region and an extension of Watson's problem* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. **61**, 1947).

[8] S. Mandelbrojt et S. Agmon, *Une généralisation du théorème taubérien de Wiener* (*Acta Sc. Math. Szeged*, t. **12**, Part. B, 1950).

[9] S. Mandelbrojt, *Some theorems connected with the theory of infinitely differentiable functions* (*Duke Math.*, t. **11**, n° 2, 1944).

[10] S. Mandelbrojt, *Influence des propriétés arithmétiques des exposants dans une série de Dirichlet* (*Ann. Éc. Norm. Sup.*, t. **71**, 1954, p. 301).

[11] S. Mandelbrojt, *General theorems on closure* (*The Rice Institute Pamphlet*, novembre 1951).

[12] S. Mandelbrojt, *Quelques nouveaux théorèmes de fermeture* (*Ann. Soc. polon. Math.*, t. **25**, 1952).

[13] S. Mandelbrojt, *La transformée de Fourier et les fonctions holomorphes dans un demi-plan* (*J. Math. pures et appl.*, t. **35**, 1956, p. 211).

[14] S. Mandelbrojt, *Séries de Fourier et classes quasi analytiques de fonctions*, Gauthier-Villars, Paris, 1935.

[15] S. Mandelbrojt, *Séries adhérentes. Régularisation des suites. Applications*, Gauthier-Villars, Paris, 1952.

[16] H. Pollard, *The harmonic analysis of bounded function* (*Duke Math. J.*, t. **20**, 1953).

[17] M. Riesz, *Ein Korvengenzsatz für Dirichletsche Reihen* (*Acta Math.*, t. **40**, 1916).