R. CROISOT

Applications résiduées

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 73, nº 4 (1956), p. 453-474
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1956_3_73_4_453_0>

APPLICATIONS RÉSIDUÉES

PAR R. CROISOT.

Introduction.

Ce travail a son origine dans la lecture d'un Mémoire de M. P. Dubreil, *Contribution à la théorie des demi-groupes* (III) [*cf.* note ([8])]. D étant un demi-groupe et $\mathfrak{X}$ un idéal à droite quelconque de D, les conditions suivantes :

$$\mathfrak{X}\,\mathrm{D} = \mathfrak{X} \text{ pour tout } \mathfrak{X};$$
$$\mathfrak{X}\cdot.\mathrm{D} = \mathfrak{X} \text{ pour tout } \mathfrak{X};$$
$$\mathfrak{X}\,\mathrm{D} = (\mathfrak{X}\cdot.\mathrm{D})\mathrm{D} \text{ pour tout } \mathfrak{X};$$
$$\mathfrak{X}\cdot.\mathrm{D} = \mathfrak{X}\,\mathrm{D}\cdot.\mathrm{D} \text{ pour tout } \mathfrak{X}$$

sont introduites et comparées dans ce Mémoire. Or, E étant l'ensemble ordonné des idéaux à droite de D, l'application α définie par $\mathfrak{X} \to \mathfrak{X}\,\mathrm{D}$ est une application isotone résiduée de E dans E (*cf.* la définition précise au paragraphe I), son application résiduelle étant l'application β définie par $\mathfrak{X} \to \mathfrak{X}\cdot.\mathrm{D}$. Les conditions rappelées ci-dessus s'interprètent facilement à l'aide de α et β.

J'introduis au paragraphe II, pour un ensemble ordonné E quelconque, une application isotone résiduée α de E dans E et son application résiduelle β, des conditions systématisant les conditions ci-dessus et je les compare entre elles. Dans les paragraphes III et IV, j'examine deux cas particuliers dans lesquels α vérifie *a priori* une condition supplémentaire. L'objet du paragraphe V est l'examen d'un exemple et d'applications diverses, notamment aux idéaux à droite d'un demi-groupe.

I. — Généralités.

Soit E un ensemble ordonné dont nous notons les éléments par des minuscules latines et la relation d'ordre par $\leqq$. Soit $\mathcal{D}$ le demi-groupe des applications de E dans E, celles-ci étant notées par des minuscules grecques. Pour tout élément $x \in \mathrm{E}$ et toute application $\xi \in \mathcal{D}$, nous désignons par $x\xi$ le transformé de x par ξ. Remarquons que les applications biunivoques sont celles des applications qui sont simplifiables à droite et que les applications de E sur E sont celles des applications qui sont simplifiables à gauche. Introduisons dans $\mathcal{D}$ la relation d'ordre suivante que nous notons également $\leqq$, aucune confusion n'étant à craindre :

$$\xi \leqq \eta \Leftrightarrow x\xi \leqq x\eta, \quad \forall x \in \mathrm{E}.$$

Il est évident que cette relation est bien réflexive, transitive et antisymétrique. Elle est régulière à gauche par rapport à la multiplication de $\mathcal{D}$; en effet, pour toute application $\zeta \in \mathcal{D}$,

$$\forall x \in \mathrm{E}, \; x\xi \leqq x\eta \Rightarrow \forall x \in \mathrm{E}, \; x\zeta\xi \leqq x\zeta\eta.$$

Limitons-nous au demi-groupe $\mathcal{D}'$ des applications isotones de E dans E; la trace sur $\mathcal{D}'$ de la relation d'ordre précédente est également régulière à droite car, pour $\zeta \in \mathcal{D}'$, on a

$$x\xi \leqq x\eta \Rightarrow x\xi\zeta \leqq x\eta\zeta.$$

Nous désignons par ε l'application identique (isotone) de E sur E.

Soit alors α une application isotone de E dans E qui est supposée de plus résiduée, c'est-à-dire que, pour tout $x \in \mathrm{E}$, il existe $z \in \mathrm{E}$ satisfaisant à $z\alpha \leqq x$ et l'ensemble des éléments z de E vérifiant cette relation possède un élément maximum que nous notons $x\beta$. De cette définition, il résulte que β est une application isotone de E dans E appelée *application résiduelle* de α et qu'on a, quel que soit $x \in \mathrm{E}$,

$$x \leqq x\alpha\beta \qquad \text{et} \qquad x\beta\alpha \leqq x.$$

Par conséquent, les applications α et β définissent une *correspondance de Galois inversée* dans E. Réciproquement, la donnée d'une telle correspondance définit une application isotone résiduée et son application résiduelle ([1]). En d'autres

([1]) Pour plus de détails concernant le lien qui existe entre la notion de résiduation et celle de correspondance de Galois, on pourra consulter P. Dubreil et R. Croisot, *Propriétés générales de la résiduation en liaison avec les correspondances de Galois* (*Collectanea Mathematica, Seminario matematico de Barcelona*, t. 7, 1954, p. 193-203).

termes, une application α est isotone résiduée si et seulement si

$$\alpha \in \mathcal{O}' \quad \text{et} \quad \exists \beta \in \mathcal{O}' \ \text{telle que} \ \beta\alpha \leqq \varepsilon \leqq \alpha\beta.$$

S'il en est ainsi, ces relations entraînent $\alpha\beta\alpha = \alpha$ et $\beta\alpha\beta = \beta$, d'où résulte que $\alpha\beta$ et $\beta\alpha$ sont des applications idempotentes.

Remarque 1. — Si l'on munit E de la relation d'ordre inverse, β est une application isotone résiduée dont l'application résiduelle est α.

PROPRIÉTÉ 1. — *L'ensemble des applications isotones résiduées de* E *dans* E *forme un demi-groupe* $\mathcal{O}'_1$ *et l'ensemble de leurs applications résiduelles forme un demi-groupe* $\mathcal{O}'_2$. *Ces deux demi-groupes sont anti-isomorphes, un anti-isomorphisme étant obtenu en faisant correspondre, à chaque application isotone résiduée* α, *son application résiduelle* β.

En effet, soient α_1, $\alpha_2 \in \mathcal{O}'$ et β_1, $\beta_2 \in \mathcal{O}'$ satisfaisant à $\beta_1\alpha_1 \leqq \varepsilon \leqq \alpha_1\beta_1$, $\beta_2\alpha_2 \leqq \varepsilon \leqq \alpha_2\beta_2$.

On a d'abord $\alpha_1\alpha_2 \in \mathcal{O}'$ et $\beta_2\beta_1 \in \mathcal{O}'$. De plus, on a

$$\beta_2\beta_1\alpha_1\alpha_2 \leqq \beta_2\varepsilon\alpha_2 = \beta_2\alpha_2 \leqq \varepsilon \leqq \alpha_1\beta_1 = \alpha_1\varepsilon\beta_1 \leqq \alpha_1\alpha_2\beta_2\beta_1,$$

d'où la propriété.

Remarque 2. — En particulier, si α est une application isotone résiduée dont l'application résiduelle est β, α^n est une application isotone résiduée dont l'application résiduelle est β^n.

Exemple. — Soit $E = \{1, 2, 3\}$, la relation d'ordre sur E étant induite par la relation d'ordre habituelle sur l'ensemble des entiers. Le demi-groupe $\mathcal{O}'$ se compose des applications suivantes :

$\xi_0 = \varepsilon$;

ξ_1 :	$1 \to 2$,	$2 \to 3$,	$3 \to 3$;
ξ_2 :	$1 \to 1$,	$2 \to 3$,	$3 \to 3$;
ξ_3 :	$1 \to 1$,	$2 \to 2$,	$3 \to 2$;
ξ_4 :	$1 \to 2$,	$2 \to 2$,	$3 \to 3$;
ξ_5 :	$1 \to 1$,	$2 \to 1$,	$3 \to 3$;
ξ_6 :	$1 \to 1$,	$2 \to 1$,	$3 \to 2$;
ξ_7 :	$1 \to 3$,	$2 \to 3$,	$3 \to 3$;
ξ_8 :	$1 \to 2$,	$2 \to 2$,	$3 \to 2$;
ξ_9 :	$1 \to 1$,	$2 \to 1$,	$3 \to 1$.

Les applications isotones résiduées sont $\alpha_0 = \varepsilon$, $\alpha_1 = \xi_2$, $\alpha_2 = \xi_3$, $\alpha_3 = \xi_5$, $\alpha_4 = \xi_6$, $\alpha_5 = \xi_9$, les applications résiduelles respectives étant $\beta_0 = \varepsilon$, $\beta_1 = \xi_5$,

$\beta_2 = \xi_2$, $\beta_3 = \xi_4$, $\beta_4 = \xi_1$, $\beta_5 = \xi_7$. Écrivons les tables de multiplication de $\mathcal{D}'_1$ et $\mathcal{D}'_2$ qui mettent en évidence l'anti-isomorphisme de la propriété 1.

$\times$	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5
α_0	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5
α_1	α_1	α_1	α_2	α_1	α_2	α_5
α_2	α_2	α_1	α_2	α_5	α_5	α_5
α_3	α_3	α_3	α_4	α_3	α_4	α_5
α_4	α_4	α_3	α_4	α_5	α_5	α_5
α_5	α_5	α_5	α	α_5	α_5	α_5

$\times$	β_0	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5
β_0	β_0	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5
β_1	β_1	β_1	β_1	β_3	β_3	β_5
β_2	β_2	β_2	β_2	β_4	β_4	β_5
β_3	β_3	β_1	β_5	β_3	β_5	β_5
β_4	β_4	β_2	β_5	β_4	β_5	β_5
β_5	β_5	β_5	β_5	β_5	β_5	β_5

Remarquons que $\mathcal{D}'_1 \bigcup \mathcal{D}'_2$ n'est pas un demi-groupe car on a, par exemple, $\xi_1 \xi_3 = \xi_8$.

En désignant par $\mathcal{D}_\alpha$ le sous demi-groupe de $\mathcal{D}'$ engendré par α, application isotone résiduée et β, son application résiduelle, nous nous proposons de comparer entre elles différentes conditions exprimant notamment que ε est un élément de $\mathcal{D}_\alpha$, que α est un élément d'ordre fini, que α est une application de fermeture ou une application d'ouverture (une application de fermeture est une application isotone π telle que $\varepsilon \leqq \pi$ et $\pi^2 = \pi$; une application d'ouverture est une application isotone π telle que $\pi \leqq \varepsilon$ et $\pi^2 = \pi$).

II. — Cas d'une application isotone résiduée α quelconque.

De façon à restreindre le nombre de conditions à retenir, nous démontrons d'abord plusieurs équivalences.

Théorème 1. — *n étant un entier positif fixé, pour tous les entiers k tels que $0 \leqq k \leqq n$, les conditions $\alpha^{n-k} = \beta^k$* (2) *sont équivalentes entre elles.*

Il suffit d'établir l'équivalence suivante :

$$\alpha^{n-k} = \beta^k \Leftrightarrow \alpha^{n-k-1} = \beta^{k+1} \text{ pour } k \text{ vérifiant } 0 \leqq k < n.$$

Supposons qu'on ait $\alpha^{n-k} = \beta^k$. On en tire $\beta\alpha^{n-k} = \beta^{k+1}$. De $\varepsilon \geqq \beta\alpha$, on déduit alors $\alpha^{n-k-1} \geqq \beta^{k+1}$. Mais on peut écrire aussi $\alpha^{n-k}\beta = \beta^{k+1}$ d'où résulte, à partir de $\varepsilon \leqq \alpha\beta$, $\alpha^{n-k-1} \leqq \beta^{k+1}$; d'où l'égalité $\alpha^{n-k-1} = \beta^{k+1}$.

De la même manière, si l'on a $\alpha^{n-k-1} = \beta^{k+1}$, on en déduit, d'une part, $\alpha^{n-k} = \alpha\beta^{k+1}$ et $\alpha^{n-k} \geqq \beta^k$, d'autre part, $\alpha^{n-k} = \beta^{k+1}\alpha$ et $\alpha^{n-k} \leqq \beta^k$; par suite, on a également $\alpha^{n-k} = \beta^k$.

Corollaire. — *Pour tout entier positif n, les deux conditions $\alpha^n = \varepsilon$ et $\beta^n = \varepsilon$ sont équivalentes.*

(2) On convient naturellement de poser, pour toute application ξ de E dans E, $\xi^0 = \varepsilon$.

Ce corollaire est aussi une conséquence immédiate du fait que β^n est l'application résiduelle de α^n (*cf.* remarque 2).

Lemme 1. — *L'égalité* $\varepsilon = \alpha\xi$ *avec* $\xi \in \mathcal{D}'$ *implique* $\varepsilon = \alpha\beta$. *L'égalité* $\varepsilon = \xi\alpha$ *avec* $\xi \in \mathcal{D}'$ *implique* $\varepsilon = \beta\alpha$.

De $\varepsilon = \alpha\xi$, résulte $\beta = \beta\alpha\xi$ d'où, puisqu'on a $\beta\alpha \leqq \varepsilon$, $\beta \leqq \xi$. On en déduit $\alpha\beta \leqq \alpha\xi = \varepsilon$, d'où $\alpha\beta = \varepsilon$, puisqu'on a toujours $\alpha\beta \geqq \varepsilon$.

De $\varepsilon = \xi\alpha$, résulte $\beta = \xi\alpha\beta$ d'où, puisqu'on a $\alpha\beta \geqq \varepsilon$, $\beta \geqq \xi$. On en déduit $\beta\alpha \geqq \xi\alpha = \varepsilon$ d'où $\beta\alpha = \varepsilon$, puisqu'on a toujours $\beta\alpha \leqq \varepsilon$.

Lemme 2. — *L'égalité* $\varepsilon = \beta\xi$ *avec* $\xi \in \mathcal{D}'$ *implique* $\varepsilon = \beta\alpha$. *L'égalité* $\varepsilon = \xi\beta$ *avec* $\xi \in \mathcal{D}'$ *implique* $\varepsilon = \alpha\beta$.

Le lemme 2 résulte du lemme 1 si l'on imagine E muni de l'ordre inverse (*cf.* remarque 1).

Propriété 2. — *Si l'application identique* ε *coïncide avec un élément de* $\mathcal{D}_\alpha$ *écrit en utilisant p fois* α *et q fois* β, *p étant différent de q, on a* $\alpha^{|p-q|} = \varepsilon$. *Réciproquement, si* ε *est égal à* α^n (*n entier positif*), *tout élément de* $\mathcal{D}_\alpha$ *écrit en utilisant p fois* α *et q fois* β *avec* $|p - q| = n$ *est égal à* ε.

Supposons que ε s'écrive sous forme d'un mot formé à l'aide de α et β : $\varepsilon = \alpha^{p_1}\beta^{q_1}\alpha^{p_2}\beta^{q_2}\ldots\alpha^{p_s}\beta^{q_s}$, avec $p_1 \geqq 0$, $p_i > 0$ pour $i > 1$, $q_j > 0$ pour $j < s$, $q_s \geqq 0$, s étant supérieur à 1 si $p_1 = q_s = 0$; posons $\sum_{i=1}^{s} p_i = p$, $\sum_{j=1}^{s} q_j = q$ et supposons $p \neq q$.

Si p_1 est différent de zéro, d'après le lemme 1, on a $\varepsilon = \alpha\beta$. Il en résulte que, dans une expression de ε par un mot formé à l'aide de α et β, on peut supprimer tout groupement $\alpha\beta$; la suppression d'un tel groupement diminue p et q d'une unité sans modifier $p - q$. En partant d'un mot déterminé, on peut faire évidemment seulement un nombre fini de telles suppressions; soit alors un mot égal à ε obtenu à partir du mot initial et dans lequel on ne puisse plus faire de suppression; le groupement $\alpha\beta$ n'apparaît plus dans ce mot qui est nécessairement de l'une des formes α^n, β^m, $\beta^m\alpha^n$, avec m et n positifs. Dans le premier cas, on a $n = p - q (> 0)$; dans le deuxième cas, on a $m = q - p (> 0)$ et, de $\beta^{|p-q|} = \varepsilon$, résulte aussi $\alpha^{|p-q|} = \varepsilon$ d'après le corollaire du théorème 1; dans le troisième cas, on a $n - m = p - q$, le lemme 1 montre que ε s'écrit aussi sous la forme $\beta\alpha$, et l'on est facilement ramené à l'un des deux autres cas.

Si p_1 est nul, d'après le lemme 2, on a $\varepsilon = \beta\alpha$ et l'on raisonne de façon analogue en utilisant la possibilité de supprimer le groupement $\beta\alpha$ dans toute expression de ε par un mot formé à l'aide de α et β.

Réciproquement, $\varepsilon = \alpha^n$ implique $\varepsilon = \beta^n$, $\varepsilon = \alpha\beta$, $\varepsilon = \beta\alpha$, d'après le corollaire du théorème 1 et le lemme 1. Partant du mot α^n ou du mot β^n égal à ε, on peut reconstituer n'importe quel mot tel que $p-q=n$ ou $q-p=n$ par introduction de groupements $\alpha\beta$ et $\beta\alpha$.

Nous venons donc de voir qu'imposer à ε de s'écrire sous forme d'un mot formé à l'aide de α et β en utilisant p fois α et q fois β, avec $p\neq q$, équivaut à lui imposer d'être égal à $\alpha^{|p-q|}$.

Dans cet ordre d'idées, il nous reste à caractériser simplement les conditions imposant à ε d'être égal à un mot en α et β avec $p=q$. Soit donc

$$\varepsilon=\alpha^{p_1}\beta^{q_1}\alpha^{p_2}\beta^{q_2}\ldots\alpha^{p_s}\beta^{q_s}, \tag{1}$$

avec $p_1\geqq 0$, $p_i>0$ pour $i>1$, $q_j>0$ pour $j<s$, $q_s\geqq 0$, s étant supérieur à 1 si $p_1=q_s=0$; en posant $\sum_{i=1}^{s}p_i=p$, $\sum_{j=1}^{s}q_j=q$, supposons $p=q$. Si p_1 est différent de zéro, on a $\varepsilon=\alpha\beta$ d'après le lemme 1. On voit alors facilement que, moyennant les inégalités $p_1\geqq q_1$, $p_1+p_2\geqq q_1+q_2,\ldots,p_1+p_2+\ldots+p_{s-1}\geqq q_1+q_2+\ldots+q_{s-1}$ (c'est-à-dire $p_s\leqq q_s$), la condition $\varepsilon=\alpha\beta$ entraîne, réciproquement, la condition (1). Au contraire, si ces inégalités ne sont pas toutes vérifiées, la condition (1) entraîne aussi la condition $\varepsilon=\beta\alpha$; la réciproque est évidente. Si p_1 est nul, on a $\varepsilon=\beta\alpha$ d'après le lemme 2. Alors moyennant les inégalités $q_1\geqq p_2$, $q_1+q_2\geqq p_2+p_3,\ \ldots,\ q_1+q_2+\ldots+q_{s-1}\geqq p_2+p_3+\ldots+p_s$ (c'est-à-dire $q_s=0$), la condition $\varepsilon=\beta\alpha$ entraîne, réciproquement, la condition (1). Si ces inégalités ne sont pas toutes vérifiées, la condition (1) équivaut à la condition $\varepsilon=\beta\alpha=\alpha\beta$.

Le théorème suivant résume ces différents résultats.

THÉORÈME 2. — *La condition* $\varepsilon=\alpha^{p_1}\beta^{q_1}\alpha^{p_2}\beta^{q_2}\ldots\alpha^{p_s}\beta^{q_s}$, ($p_1\geqq 0$, $p_i>0$ *pour* $i>1$, $q_j>0$ *pour* $j<s$, $q_s\geqq 0$; $s>1$ *si* $p_1=q_s=0$) *est équivalente à la condition* $\varepsilon=\alpha^{|p-q|}$ *si* $p=\sum_{i=1}^{s}p_i\neq q=\sum_{j=1}^{s}q_j$, *à la condition* $\varepsilon=\alpha\beta$ *si* $p=q$ *avec* $p_1\geqq q_1$, $p_1+p_2\geqq q_1+q_2,\ \ldots,\ p_1+p_2+\ldots+p_{s-1}\geqq q_1+q_2+\ldots+q_{s-1}$, *à la condition* $\varepsilon=\beta\alpha$ *si* $p=q$ *avec* $p_1=0$, $q_1\geqq p_2$, $q_1+q_2\geqq p_2+p_3,\ \ldots,$ $q_1+q_2+\ldots+q_{s-2}\geqq p_2+p_3+\ldots+p_{s-1}$, $q_s=0$, *à la condition* $\varepsilon=\alpha\beta=\beta\alpha$ *dans les autres cas*.

On peut caractériser d'une manière différente ces trois dernières conditions.

PROPRIÉTÉ 3. — *La condition* $\varepsilon=\alpha\beta$ *est équivalente au fait que* α *soit biunivoque ainsi qu'au fait que* β *soit une application de* E *sur* E [3].

Si l'on a $\varepsilon=\alpha\beta$, soient $x, y\in E$ tels que $x\alpha=y\alpha$; on en déduit $x\alpha\beta=y\alpha\beta$ d'où $x=y$ et α est biunivoque. Réciproquement, si α est biunivoque, de

(3) *Cf.* J. RIGUET, *Relation binaires, fermetures, correspondances de Galois* [*Bull. Soc. Math.*, t. 76, 1948, p. 114-155 (proposition 5)].

$\alpha\beta\alpha = \alpha = \varepsilon\alpha$, résulte $\alpha\beta = \varepsilon$ car α est alors un élément simplifiable à droite dans $\mathcal{O}$.

D'autre part, de $\varepsilon = \alpha\beta$, résulte, pour tout $x \in E$, $x = x\alpha\beta$ et le fait que β est une application de E sur E. Réciproquement, si β est une application de E sur E, de $\beta\alpha\beta = \beta = \beta\varepsilon$, résulte $\alpha\beta = \varepsilon$ car β est alors un élément simplifiable à gauche dans $\mathcal{O}$.

Remarque 3. — Cette dernière partie de la démonstration se rattache à une propriété très générale de la résiduation : s'il existe y tel que $x = y\beta$, on a $x = x\alpha\beta$ (4).

PROPRIÉTÉ 4. — *La condition $\varepsilon = \beta\alpha$ est équivalente au fait que α soit une application de* E *sur* E *ainsi qu'au fait que β soit biunivoque.*

Ceci résulte immédiatement de la propriété précédente puisque, E étant muni de la relation d'ordre inverse, β est résiduée de résiduelle α (*cf.* remarque 1).

PROPRIÉTÉ 5. — *La condition $\varepsilon = \alpha\beta = \beta\alpha$ est équivalente à la condition $\alpha\beta = \beta\alpha$ et au fait que α soit un automorphisme ainsi qu'au fait que β soit un automorphisme.*

D'après les deux propriétés précédentes, il suffit d'établir que, si α et β sont permutables, on a $\varepsilon = \alpha\beta = \beta\alpha$; ceci résulte de $\beta\alpha \leqq \varepsilon \leqq \alpha\beta$.

Concernant les conditions exprimant que α est d'ordre fini, que α est une application de fermeture ou une application d'ouverture, nous avons les résultats suivants :

PROPRIÉTÉ 6. — *La condition $\alpha^p = \alpha^{p+n}$ (p entier positif ou nul, n entier positif) est équivalente à la condition $\beta^p = \beta^{p+n}$.*

Il suffit de remarquer que β^p est la résiduelle de α^p et que β^{p+n} est celle de α^{p+n} (*cf.* remarque 2).

LEMME 3. — *La condition $\alpha \geqq \varepsilon$ équivaut à la condition $\beta \leqq \varepsilon$ et la condition $\alpha \leqq \varepsilon$ à la condition $\beta \geqq \varepsilon$.*

En effet, $\alpha \geqq \varepsilon$ entraîne $\beta = \beta\varepsilon \leqq \beta\alpha \leqq \varepsilon$. La réciproque en résulte puisque α est la résiduelle de β lorsque E est muni de l'ordre inverse.

De même, $\alpha \leqq \varepsilon$ entraîne $\beta = \varepsilon\beta \geqq \alpha\beta \geqq \varepsilon$. Réciproque comme ci-dessus.

THÉORÈME 3. — *Pour que α soit une application de fermeture, il faut et il suffit que β soit une application d'ouverture; ces conditions sont équivalentes à la condition $\alpha = \alpha\beta$ ainsi qu'à la condition $\beta = \beta\alpha$.*

(4) *Cf.* P. DUBREIL et R. CROISOT, *loc. cit.*, propriété 3. On pourra aussi trouver des cas particuliers de cette propriété dans M. L. DUBREIL-JACOTIN, L. LESIEUR et R. CROISOT, *Leçons sur les treillis* [*Cahiers scientifiques*, Gauthier-Villars, 1953, p. 153 (3°) et p. 154 (théorème 1)].

Pour que α soit une application de fermeture, c'est-à-dire pour qu'on ait $\alpha^2 = \alpha$ et $\alpha \geqq \varepsilon$, il faut et il suffit qu'on ait $\beta^2 = \beta$ et $\beta \leqq \varepsilon$ d'après la propriété 6 et le lemme 3, donc que β soit une application d'ouverture.

Si ces conditions sont réalisées, on a $\alpha\beta = \alpha^2\beta \geqq \alpha\varepsilon = \alpha$ et $\alpha = \alpha\beta\alpha \geqq \alpha\beta\varepsilon = \alpha\beta$, d'où $\alpha = \alpha\beta$. Réciproquement, la condition $\alpha = \alpha\beta$ implique $\alpha^2 = \alpha\beta\alpha = \alpha$ et $\alpha = \alpha\beta \geqq \varepsilon$.

De même, la condition $\beta = \beta\alpha$ équivaut au fait que, E étant muni de l'ordre inverse, β soit une application de fermeture; elle est donc équivalente aux précédentes conditions.

THÉORÈME 4. — *Pour que α soit une application d'ouverture, il faut et il suffit que β soit une application de fermeture; ces conditions sont équivalentes à la condition $\alpha = \beta\alpha$ ainsi qu'à la condition $\beta = \alpha\beta$.*

La première partie de cette propriété résulte comme ci-dessus de la propriété 6 et du lemme 3.

Si l'on a $\alpha = \alpha^2$ et $\alpha \leqq \varepsilon$, on en déduit $\beta\alpha = \beta\alpha^2 \leqq \varepsilon\alpha = \alpha$ et $\alpha = \alpha\beta\alpha \leqq \varepsilon\beta\alpha = \beta\alpha$, d'où $\alpha = \beta\alpha$. Réciproquement, la condition $\alpha = \beta\alpha$ implique $\alpha^2 = \alpha\beta\alpha = \alpha$ et $\alpha = \beta\alpha \leqq \varepsilon$.

La condition $\beta = \alpha\beta$ est équivalente aux précédentes puisqu'elle traduit le fait que β est une application d'ouverture lorsque E est muni de l'ordre inverse.

Afin de comparer entre elles les conditions que nous venons de mettre en évidence, nous ferons usage des notations suivantes : (p, n) désignera la condition $\alpha^p = \alpha^{p+n}$ (p entier positif ou nul, n entier positif); (F) désignera la condition pour que α soit une application de fermeture; (O) désignera la condition pour que α soit une application d'ouverture; (A), (B), (C) désigneront respectivement les conditions pour que α soit un automorphisme, une application biunivoque, une application de E sur E.

Nous pouvons alors énoncer le théorème fondamental.

THÉORÈME 5. — *Les diverses conditions* (p, n) *et les conditions* (F), (O), (A), (B), (C), *sont toutes logiquement distinctes. Les seules implications binaires existant entre elles sont les suivantes et leurs conséquences logiques :* $(p, n) \Rightarrow (p', n')$ *si l'on a* $p' \geqq p$ *et* n' *multiple de* n*;* $(0, 1) \Rightarrow (F)$; $(0, 1) \Rightarrow (O)$; $(F) \Rightarrow (1, 1)$; $(O) \Rightarrow (1, 1)$; $(O, n) \Rightarrow (A)$; $(A) \Rightarrow (B)$; $(A) \Rightarrow (C)$. *L'ensemble de ces conditions forme un demi-treillis par rapport à la conjonction logique.*

Démontrons d'abord les implications binaires énoncées. L'égalité $\alpha^p = \alpha^{p+n}$ entraîne $\alpha^{p'} = \alpha^{p'+n}$ si l'on a $p' \geqq p$ puis $\alpha^{p'} = \alpha^{p'+n'}$ si n' est multiple de n. La condition $(0, 1)$, $\alpha = \varepsilon$, implique évidemment que α est une application de fermeture ainsi qu'une application d'ouverture, et chacune de ces conditions implique la condition $(1, 1)$, $\alpha^2 = \alpha$. Comme on l'a déjà remarqué (lemme 1), la condition $(0, n)$, $\alpha^n = \varepsilon$, entraîne $\alpha\beta = \beta\alpha = \varepsilon$, c'est-à-dire la condition (A). Celle-ci entraîne évidemment (B) et (C).

Le tableau suivant résume ces implications, étant entendu que (p, n) implique (p, n') seulement si n' est multiple de n.

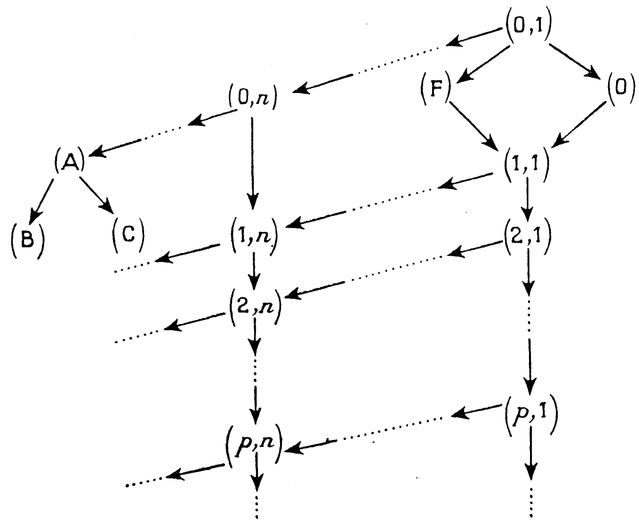

Fig. A.

Des exemples contraires vont nous permettre de constater que les différentes conditions retenues sont distinctes et qu'il n'y a pas entre elles d'autres implications binaires que les précédentes. Admettons provisoirement ces résultats et montrons que l'ensemble des conditions forme un demi-treillis par rapport à la conjonction logique. Supposons qu'on ait en même temps $\alpha^{p_1} = \alpha^{p_1+n_1}$ et $\alpha^{p_2} = \alpha^{p_2+n_2}$; posons $p = \min(p_1, p_2)$, $n = $ p. g. c. d. (n_1, n_2); (p, n) est la plus faible de celles de nos conditions qui, d'après les implications qui précèdent, entraînent à la fois (p_1, n_1) et (p_2, n_2); nous devons donc établir qu'on a $\alpha^p = \alpha^{p+n}$; en effet, α étant d'ordre fini, soient $p_0 \geqq 0$ et $n_0 > 0$ les valeurs entières minima telles que $\alpha^{p_0} = \alpha^{p_0+n_0}$; on a nécessairement $p_0 \leqq p_1, p_2$ et n_0 diviseur de n_1 et n_2; par suite on a $p_0 \leqq p$ et n_0 diviseur de n et il en résulte $\alpha^p = \alpha^{p+n}$. Si α vérifie à la fois la condition $(0, n)$ et la condition (F) ou la condition (O), on a $\alpha^n = \varepsilon$ et $\alpha^2 = \alpha$, d'où facilement $\alpha = \varepsilon$, c'est-à-dire la condition $(0, 1)$. Si α vérifie à la fois la condition (p, n) et l'une des conditions (A), (B) ou (C), on a $\alpha^p = \alpha^{p+n}$ avec α simplifiable à gauche ou à droite; il en résulte aisément $\varepsilon = \alpha^n$, c'est-à-dire la condition $(0, n)$. Si α vérifie à la fois les conditions (B) et (C), il vérifie évidemment la condition (A). S'il vérifie (F) et (O), on a $\alpha \geqq \varepsilon$ et $\alpha \leqq \varepsilon$, donc $\alpha = \varepsilon$, c'est-à-dire la condition $(0, 1)$. S'il vérifie l'une des conditions (F) ou (O) et l'une des conditions (A), (B) ou (C), il vérifie la condition $(1, 1)$ et l'une des conditions (A), (B), (C), donc aussi la condition $(0, 1)$ d'après ce qui précède.

Exemple 1. — Désignons par E_{pn} (p entier positif ou nul, n entier positif) un ensemble d'éléments notés e_{ij}, l'indice i variant de 0 à p et l'indice j de 1 à n. Munissons E_{pn} de la relation d'ordre ainsi définie : $e_{ij} \leqq e_{i'j'}$, si et seulement si $i \leqq i'$ et $j = j'$. Considérons l'application α de E_{pn} dans E_{pn} donnée par $e_{ij}\alpha = e_{i_1 j_1}$ avec $i_1 = \max(0,\ i-1)$ et $j_1 = j+1 \pmod{n}$. On voit facilement que α est isotone et résiduée et satisfait à $\alpha^p = \alpha^{p+n}$ mais ne satisfait pas à $\alpha^{p'} = \alpha^{p'+n'}$ sauf si p' est supérieur ou égal à p et n' multiple de n. De plus l'application α vérifie la condition (F) seulement pour $p=0$ et $n=1$, la condition (O) seulement pour $p=0$ ou 1 et $n=1$, les conditions (A), (B), (C) seulement pour $p=0$.

Exemple 2. — E désigne l'ensemble à trois éléments $\{1, 2, 3\}$ avec la relation d'ordre induite par la relation d'ordre habituelle sur l'ensemble des entiers. Soit α l'application telle que $1\alpha = 1$, $2\alpha = 3\alpha = 3$. Elle est isotone et résiduée. L'application α vérifie la condition (F) et ne vérifie pas les conditions (O), (B), (C).

Exemple 3. — Prenons pour ensemble E l'ensemble des entiers naturels avec la relation d'ordre habituelle et pour application α l'application définie par $n\alpha = \max(1,\ n-1)$. C'est une application isotone résiduée. Elle vérifie la condition (C) mais elle ne vérifie pas la condition (B).

Exemple 4. — Prenons le même ensemble E mais munissons-le de la relation d'ordre inverse et considérons l'application α' définie par $n\alpha' = n+1$. C'est une application isotone résiduée qui vérifie la condition (B) sans vérifier la condition (C).

Ces quatre exemples suffisent pour compléter la démonstration du théorème 5. En effet, d'après l'exemple 1, les différentes conditions (p, n) sont logiquement distinctes et sont liées par les seules implications mises en évidence. Le même exemple prouve que, seule des conditions (p, n), la condition $(0, 1)$ entraîne (F); la condition (F), n'entraînant pas la condition (B) d'après l'exemple 2, n'entraîne aucune condition $(0, n)$; ces deux remarques montrent qu'elle ne peut coïncider avec aucune condition (p, n). La condition (O) ne peut être impliquée que par une condition entraînant $(1, 1)$; or l'exemple 2 montre qu'elle n'est pas impliquée par (F), ni par $(1, 1)$ plus faible que (F); la condition $(0, 1)$ est donc la seule des conditions précédentes impliquant (O); d'après l'exemple 1 (ensemble E_{11}), la condition (O) n'implique pas (F) ni aucune des conditions $(0, n)$, plus fortes que (B) par exemple; elle ne peut par suite être équivalente à (F) ou à l'une des conditions (p, n). Parmi les conditions déjà envisagées, seules les conditions $(0, n)$ impliquent (A), (B), (C) puisque ni (O) ni (F) ne possèdent cette propriété d'après l'exemple 1 (ensemble E_{11}) et l'exemple 2; les conditions (A), (B), (C) n'entraînent aucune des conditions précédentes car aucune de celles-ci n'est impliquée par toutes les conditions $(0, n)$; en particulier, aucune des conditions (A), (B), (C) ne peut coïncider avec une des conditions déjà envisagées. Finalement, d'après les exemples 3 et 4, (B) et (C) sont indépendantes, ce qui assure en particulier que (A), (B), (C) sont distinctes.

Remarque 4. — L'ensemble E est infini dans les exemples 3 et 4. En fait, si E est fini, les conditions (A), (B), (C) sont équivalentes entre elles car une application de E dans E est alors biunivoque si et seulement si c'est une application de E sur E; il n'y a pas d'autre modification comme le montrent les exemples 1 et 2 ([5]).

On n'a pas d'implication nouvelle si l'on suppose que E est un treillis. En effet, on déduit facilement, de l'exemple 1, un exemple dans lequel les ensembles E_{pn} sont remplacés par des treillis; il suffit de leur adjoindre un élément nul et un élément universel qui soient conservés par l'application α.

III. — Cas où l'application α vérifie $\alpha^2 \leqq \alpha$.

Lorsque l'application α est telle qu'on ait *a priori* $\alpha^2 \leqq \alpha$, le tableau des conditions examinées dans le cas général subit des simplifications importantes.

Propriété 7. — *Si l'application α vérifie $\alpha^2 \leqq \alpha$, elle satisfait à la condition* (p, n) *si et seulement si elle satisfait à la condition* $(p, 1)$.

Déjà, dans le cas général, la condition $(p, 1)$ implique la condition (p, n). Supposons donc réalisée la condition (p, n); on a $\alpha^p = \alpha^{p+n}$; or la relation $\alpha^2 \leqq \alpha$ entraîne que la suite des puissances de α est décroissante, en particulier qu'on a $\alpha^p \geqq \alpha^{p+1} \geqq \alpha^{p+n}$; de l'égalité précédente, résulte alors l'égalité $\alpha^p = \alpha^{p+1}$, c'est-à-dire la condition $(p, 1)$.

Nous retiendrons donc seulement dans ce cas les conditions $(p, 1)$ parmi les conditions (p, n).

Théorème 6. — *Si l'application α vérifie $\alpha^2 \leqq \alpha$, les conditions* $(p, 1)$ *(p entier positif ou nul)*, (F), (O), (A), (B), (C), *sont logiquement distinctes et sont liées par les implications binaires résumées dans le tableau suivant et leurs conséquences logiques, à l'exclusion de toute autre. L'ensemble de ces conditions forme un demi-treillis par rapport à la conjonction logique.*

Les implications binaires du tableau ont déjà été démontrées dans le cas général; elles sont donc à plus forte raison valables ici. Les exemples contraires 1

([5]) Les exemples 3 et 4 et deux exemples simples qu'on déduit facilement de ceux-là [ensemble de l'exemple 3 avec l'application α définie par $1\alpha = 1$ et $n\alpha = n+1$ pour $n > 1$, ensemble de l'exemple 4 avec l'application α définie par $n\alpha = \max(1, n-1)$] montrent que, si l'on impose à l'ensemble E de vérifier la condition de chaîne ascendante ou la condition de chaîne descendante, on n'obtient rien de plus que dans le cas général. Les choses se présentent différemment dans les paragraphes III et IV (*voir* les remarques 5 et 6 terminant ces paragraphes).

(avec $n = 1$), 2, 3, 4 du cas général sont valables car ils vérifient tous $\alpha^2 \leqq \alpha$. Ajoutons-leur le suivant.

Exemple 5. — Soit comme ensemble E l'ensemble des entiers relatifs muni de la relation d'ordre habituelle. Considérons l'application α définie par $n\alpha = n - 1$. C'est une application isotone résiduée. Elle vérifie la condition $\alpha^2 \leqq \alpha$ et la condition (A) mais ne vérifie aucune des conditions $(p, 1)$.

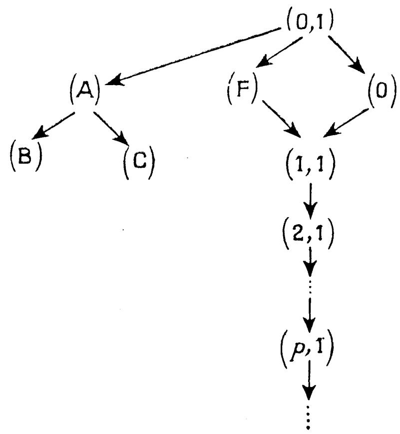

Fig. B.

A l'aide des exemples 1 à 5, on voit facilement comme dans le cas général que les conditions retenues sont distinctes et qu'elles ne sont liées par aucune implication logique qui ne soit conséquence de celles du tableau.

Enfin, l'ensemble des conditions forme un demi-treillis comme dans le cas général.

Remarque 5. — L'exemple 5 (comme les exemples 3 et 4) n'est pas valable lorsqu'on se limite au cas d'un ensemble fini E. Il n'est même pas valable lorsque E vérifie la condition de chaîne ascendante ou la condition de chaîne descendante. En fait, si l'on a $\alpha^2 \leqq \alpha$ et si E vérifie la condition de chaîne ascendante, la condition (C) implique la condition $(0, 1)$; si l'on a $\alpha^2 \leqq \alpha$ et si E vérifie la condition de chaîne descendante, la condition (B) implique la condition $(0, 1)$.

1° Supposons d'abord que l'ensemble E vérifie la condition de chaîne ascendante et que l'application α soit une application de E sur E telle qu'on ait $\alpha^2 \leqq \alpha$. Montrons qu'on a alors $\alpha = \varepsilon$: chaque élément x de E se met sous la forme $x = y\alpha$ et, de $y\alpha^2 \leqq y\alpha$, résulte $x\alpha \leqq x$. Soit alors m un élément de E maximal parmi les éléments x tels qu'on ait $x\alpha < x$ s'il en existe; on peut trouver y tel que $m = y\alpha$; on ne peut avoir $y\alpha = y$ qui impliquerait $m\alpha = y\alpha^2 = y\alpha = m$; on a donc $y\alpha < y$ avec $m < y$, ce qui contredit la maximalité de m. Par suite, il n'existe aucun élément x tel que $x\alpha < x$; autrement dit, on a $x\alpha = x$ pour tout x et $\alpha = \varepsilon$.

2° Supposons maintenant que l'ensemble E vérifie la condition de chaîne descendante et que l'application α soit biunivoque et telle qu'on ait $\alpha^2 \leqq \alpha$. Il suffit d'établir l'égalité $\alpha^2 = \alpha$. Soit $m\alpha$ un élément minimal parmi les éléments de la forme $x\alpha$ tels que $x\alpha^2 < x\alpha$ s'il en existe. On a $m\alpha^3 < m\alpha^2$ puisque α est biunivoque et l'élément $m\alpha^2$ est strictement inférieur à $m\alpha$ ce qui contredit l'hypothèse de minimalité. Donc, pour tout x, on a $x\alpha^2 = x\alpha$, ce qui démontre l'affirmation.

En particulier, si E est fini, les conditions (0, 1), (A), (B), (C), sont donc équivalentes.

IV. — Cas où l'application α vérifie $\alpha \leqq \varepsilon$.

Un cas encore plus particulier que le précédent a lieu quand l'application est *a priori* décroissante. On a alors quelques simplifications supplémentaires.

Propriété 8. — *Si l'application α est décroissante, pour qu'elle vérifie la condition* (0, 1), *il faut et il suffit qu'elle vérifie la condition* (F); *pour qu'elle vérifie la condition* (1, 1), *il faut et il suffit qu'elle vérifie la condition* (O).

La première partie de la propriété est évidente puisque la condition (F) entraîne en particulier $\alpha \geqq \varepsilon$. La seconde l'est aussi puisque la condition (1, 1) impose $\alpha^2 = \alpha$, ce qui entraîne que l'application isotone décroissante α est une application d'ouverture.

Théorème 7. — *Si l'application α est décroissante, les conditions* $(p, 1)$ (*p entier positif ou nul*), (A), (B), (C), *sont logiquement distinctes et sont liées par les implications binaires résumées dans le tableau suivant et leurs conséquences logiques à l'exclusion de toute autre. L'ensemble de ces conditions forme un demi-treillis par rapport à la conjonction logique.*

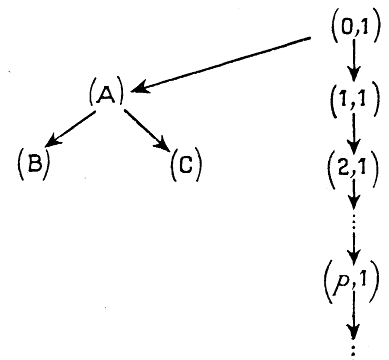

Fig. C.

Les démonstrations précédentes sont valables ainsi que les exemples contraires 1 (avec $n = 1, 3, 4, 5$).

Remarque 6. — Si E vérifie la condition de chaîne ascendante, les conditions (A), (C), (o, 1) sont équivalentes comme au paragraphe III. De même, si E vérifie la condition de chaîne descendante, les conditions (A), (B), (o, 1) sont équivalentes. Enfin, si E est fini, les conditions (A), (B), (C), (o, 1) sont équivalentes.

V. — Exemple et applications.

1° Exemple. — Soit un ensemble $A = \{x, y, z, \ldots\}$ et l'ensemble $E = \mathfrak{P}(A)$ des parties de A. Donnons-nous une relation binaire $\mathcal{R}$ définie dans A. Associons à chaque partie X de A la coupe de première espèce $\mathcal{R}(X)$ de $\mathcal{R}$ suivant X, c'est-à-dire l'ensemble des éléments $y \in A$ tels qu'il existe $x \in X$ avec $x\mathcal{R}y$. L'application α ainsi définie est isotone et résiduée, son application résiduelle β étant donnée par $X\beta = \{y\}_{\mathcal{R}(y) \subseteq X}$ (6).

Les résultats du paragraphe II sont donc valables et l'on pourrait les adapter au cas envisagé ici. Bornons-nous à traduire en propriétés de $\mathcal{R}$ les diverses conditions du théorème 5 ($\mathcal{E}$ désigne l'égalité) :

(o, 1) $\mathcal{R} = \mathcal{E}$;
(F) $\mathcal{E} \leqq \mathcal{R}$ et $\mathcal{R}^2 \leqq \mathcal{R}$ [$\mathcal{R}$ est une quasi-équivalence (7)];
(O) $\mathcal{R} \leqq \mathcal{E}$;
(o, n) $\mathcal{R}^n = \mathcal{E}$ ($\mathcal{R}$ définit une permutation $x \to y$ de A, produit de cycles disjoints dont l'ordre divise n);
(p, n) $\mathcal{R}^{p+n} = \mathcal{R}^p$;
(A) $\mathcal{R}$ définit une permutation $x \to y$ de A;
(B) $\forall x$, $\exists y$ tel que $z\mathcal{R}y \Leftrightarrow z = x$;
(C) $\forall y$, $\exists x$ tel que $x\mathcal{R}z \Leftrightarrow z = y$.

Les contre-exemples suivants montrent qu'il n'y a pas dans ce cas, entre les différentes conditions, d'implications binaires autres que celle du théorème 5.

Exemple 1'. — Soit l'ensemble $A_{pn} = \{0, 1, 2, \ldots, p, 1', 2', \ldots, (n-1)'\}$ et la relation $\mathcal{R}$ donnée par : $p\mathcal{R}(p-1)$, $(p-1)\mathcal{R}(p-2)$, …, $1\mathcal{R}0$, $0\mathcal{R}1'$, $1'\mathcal{R}2'$, …, $(n-2)'\mathcal{R}(n-1)'$, $(n-1)'\mathcal{R}0$. On a $\mathcal{R}^{p'+n'} = \mathcal{R}^{p'}$ si et seulement si p' est supérieur où égal à p et n' multiple de n. Les conditions (F) et (O) sont vérifiées seulement pour $p = 0$ et $n = 1$, les conditions (A), (B), (C) seulement pour $p = 0$.

Exemple 1''. — La relation $\mathcal{R} = \emptyset$ (relation jamais définie) sur un ensemble A quelconque non vide satisfait à (O) et non à (F), (B), (C).

(6) Il peut être utile de remarquer qu'on a $X\beta = (\mathcal{R}^{-1}(X'))'$, les notations étant celles de P. Dubreil, *Algèbre*, 2e éd. Gauthier-Villars, 1954. Ceci explique, par exemple, l'analogie qui existe entre les conditions (B) et (C).

(7) Suivant la terminologie de J. Riguet, *loc. cit.*

Exemple 2'. — Soit l'ensemble $A = \{1, 2\}$ et la relation $\mathcal{R}$ donnée par : $1\mathcal{R}1$, $2\mathcal{R}2$, $1\mathcal{R}2$. La condition (F) est vérifiée et les conditions (O), (B), (C) ne le sont pas.

Exemple 3'. — L'ensemble A étant l'ensemble des entiers naturels, définissons $\mathcal{R}$ par : $1\mathcal{R}1$, $n\mathcal{R}(n-1)$ pour tout $n > 1$. (C) est vérifiée et (B) ne l'est pas.

Exemple 4'. — L'ensemble A étant encore l'ensemble des entiers naturels, définissons $\mathcal{R}$ par $n\mathcal{R}(n+1)$ pour tout n. (B) est vérifiée et (C) ne l'est pas.

2° Application aux demi-groupes et aux ensembles munis d'un demi-groupe d'opérateurs. — Considérons un demi-groupe D et un idéal bilatère I de D. Prenons comme ensemble E l'ensemble des idéaux à droite de D, ceux-ci étant notés $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \ldots$, et comme application α l'application définie par $\mathfrak{X}\alpha = \mathfrak{X}I$. C'est une application isotone résiduée, sa résiduelle β étant définie par $\mathfrak{X}\beta = \mathfrak{X} \cdot . I$ (où $\mathfrak{X} \cdot . I$, résiduel à gauche de $\mathfrak{X}$ par I, est l'ensemble des éléments d de D tels que $dI \subseteq \mathfrak{X}$). L'application α vérifie la condition $\alpha \leqq \varepsilon$. Un cas particulier spécialement important est celui où I coïncide avec D [8].

Plus généralement, soit un ensemble $\Lambda = \{\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \ldots\}$ sur lequel opèrent les éléments d'un demi-groupe $D = \{d, d_1, d_2, \ldots\}$ d'opérateurs. On note λd le transformé de λ par d et l'on impose $(\lambda d_1)d_2 = \lambda(d_1 d_2)$ quels que soient $\lambda \in \Lambda$, $d_1, d_2 \in D$. Soit I un idéal bilatère de D. Prenons comme ensemble E l'ensemble des sous-ensembles de Λ qui sont stables par rapport aux opérateurs de D; notons-les $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \ldots$. Choisissons comme application α l'application définie par $\mathfrak{X}\alpha = \mathfrak{X}I$ (où $\mathfrak{X}I$ est l'ensemble des élements de Λ de la forme λd avec $\lambda \in \mathfrak{X}$ et $d \in I$). Cette application est isotone et résiduée, sa résiduelle β étant définie par $\mathfrak{X}\beta = \mathfrak{X} \cdot . I$ (où $\mathfrak{X} \cdot . I$, résiduel à gauche de $\mathfrak{X}$ par I, est l'ensemble des éléments λ de Λ tels que $\lambda I \subseteq \mathfrak{X}$). L'application α vérifie la condition $\alpha \leqq \varepsilon$ et on peut prendre en particulier $I = D$. Si Λ coïncide avec D, on retrouve le cas ci-dessus.

Les résultats obtenus dans l'étude générale conduisent au théorème suivant.

Théorème 8. — *Les différentes conditions (supposées vérifiées quel que soit $\mathfrak{X}$) de chacune des classes ci-dessous sont équivalentes entre elles :*

(I) $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}I$, $\mathfrak{X} = \mathfrak{X} \cdot . I$, $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}I^n$ (*n entier positif quelconque*),
$\mathfrak{X} = \mathfrak{X} \cdot . I^n$, $\mathfrak{X}I^p = \mathfrak{X} \cdot . I^q$ (*p et q entiers positifs quelconques*),
$\mathfrak{X}I = \mathfrak{X}I \cdot . I$, $\mathfrak{X} \cdot . I = (\mathfrak{X} \cdot . I)I$ [*condition* (0, 1)] [9];

(II) $\mathfrak{X}I = \mathfrak{X}I^2$, $\mathfrak{X} \cdot . I = \mathfrak{X} \cdot . I^2$, $\mathfrak{X}I = \mathfrak{X}I^n$ (*n entier supérieur à 1 quelconque*),
$\mathfrak{X} \cdot . I = \mathfrak{X} \cdot . I^n$, $\mathfrak{X} \cdot . I = \mathfrak{X}I \cdot . I$, $\mathfrak{X}I = (\mathfrak{X} \cdot . I)I$ [*condition* (1, 1)];

---

[8] *Cf.* P. Dubreil, *Contribution à la théorie des demi-groupes* (III) (*Bull. Soc. Math. Fr.*, t. 81, 1953, p. 289-306).

[9] Dans le cas des idéaux à droite d'un demi-groupe, ceci peut avoir lieu seulement lorsque I=D.

(III) *pour chaque valeur de p entier supérieur à* 1 :

$$\mathfrak{X}\mathrm{I}^p = \mathfrak{X}\mathrm{I}^{p+1}, \qquad \mathfrak{X}\cdot.\mathrm{I}^p = \mathfrak{X}\cdot.\mathrm{I}^{p+1}, \qquad \mathfrak{X}\mathrm{I}^p = \mathfrak{X}\mathrm{I}^{p+n} \quad (n \textit{ entier positif quelconque}),$$
$$\mathfrak{X}\cdot.\mathrm{I}^p = \mathfrak{X}\cdot.\mathrm{I}^{p+n} \qquad [\textit{condition } (p, 1)];$$

(IV) $(\mathfrak{X}\cdot.\mathrm{I})\,\mathrm{I} = \mathfrak{X}\mathrm{I}\cdot.\mathrm{I}$, *l'application* $\mathfrak{X} \to \mathfrak{X}\mathrm{I}$ *est un automorphisme de* E, *l'application* $\mathfrak{X} \to \mathfrak{X}\cdot.\mathrm{I}$ *est un automorphisme de* E [*condition* (A)];

(V) $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}\mathrm{I}\cdot.\mathrm{I}$, *l'application* $\mathfrak{X} \to \mathfrak{X}\mathrm{I}$ *est biunivoque, l'application* $\mathfrak{X} \to \mathfrak{X}\cdot.\mathrm{I}$ *est une application de* E *sur* E [*condition* (B)].

(VI) $\mathfrak{X} = (\mathfrak{X}\cdot.\mathrm{I})\mathrm{I}$, *l'application* $\mathfrak{X} \to \mathfrak{X}\mathrm{I}$ *est une application de* E *sur* E, *l'application* $\mathfrak{X} \to \mathfrak{X}\cdot.\mathrm{I}$ *est biunivoque* [*condition* (C)].

Les conditions des différentes classes sont logiquement distinctes, elles sont liées par les seules implications indiquées au théorème 7 *et leur ensemble constitue un demi-treillis par rapport à la conjonction logique.*

Pour démontrer ce théorème, il suffit de s'assurer que les exemples contraires utilisés dans la démonstration du théorème 7 fournissent des exemples contraires pour le cas examiné ici. En fait, nous allons voir qu'on peut interpréter les ensembles E des exemples 1 et 4 comme ensembles de tous les idéaux d'un demi-groupe abélien D convenablement choisi et leurs applications α comme la multiplication de ces idéaux par D. Les ensembles E des exemples 3 et 5 peuvent être interprétés comme ensembles des sous-ensembles stables d'un ensemble convenable par rapport à un demi-groupe abélien d'opérateurs D, l'application α coïncidant avec la multiplication par D.

Exemple 1 (*avec* $n = 1$). — Soit le demi-groupe $\mathrm{D} = \{1, 2, \ldots, p+1\}$, la multiplication étant définie par $rs = \min(p+1, r+s)$. Les idéaux de D sont les sous-ensembles $\mathfrak{X}_0 = \{p+1\}$, $\mathfrak{X}_1 = \{p, p+1\}$, $\mathfrak{X}_2 = \{p-1, p, p+1\}, \ldots,$ $\mathfrak{X}_{p-1} = \{2, \ldots, p+1\}$, $\mathfrak{X}_p = \mathrm{D}$.

L'identification de $\mathfrak{X}_i$ avec e_{i1} conduit bien à l'ensemble E_{p1}, la relation d'ordre étant la relation d'inclusion; on voit aisément que la multiplication par D donne l'application α.

Exemple 3. — Soit l'ensemble des entiers positifs que nous prenons comme ensemble A. Soit D le demi-groupe d'applications de A dans A engendré par l'application $n \to \max(1, n-1)$. Les sous-ensembles stables de A sont ses sections commençantes (au sens de la relation d'ordre habituelle) (n). On a $(n)\mathrm{D} = (n')$ avec $n' = \max(1, n-1)$, On retrouve bien l'exemple 3.

Exemple 4. — Soit le demi-groupe additif des entiers positifs que nous prenons pour D. Ses idéaux sont ses sections finissantes (n) et l'on a $(n)\mathrm{D} = (n+1)$. C'est bien l'exemple 4.

Exemple 5. — Soit l'ensemble des entiers que nous prenons comme ensemble

Λ. Soit D le demi-groupe d'applications de Λ dans Λ engendré par l'application $n \to n - 1$. Les sous-ensembles stables de Λ sont ses sections commençantes (au sens de la relation d'ordre habituelle) (n). On a $(n)D = (n-1)$. On retrouve l'exemple 5.

Remarque 7. — D'après la remarque 6, si E vérifie la condition de chaîne ascendante, les conditions (A), (C), (0, 1) sont équivalentes; si E vérifie la condition de chaîne descendante, les conditions (A), (B), (0, 1) sont équivalentes; si E est fini, les conditions (A), (B), (C), (0, 1) sont équivalentes.

3° APPLICATION AUX DEMI-GROUPE ORDONNÉS, RÉSIDUÉS A GAUCHE PAR RAPPORT A UN ÉLÉMENT. — On peut généraliser dans une direction différente le cas des idéaux à droite d'un demi-groupe. Considérons un demi-groupe E muni d'une relation d'ordre et soit a un élément de E tel que l'on ait :

1° $x \in E, y \in E, x \leqq y \Rightarrow xa \leqq ya$;

2° $\forall x \in E$, $\exists y$ vérifiant $ya \leqq x$ et l'ensemble des éléments y ayant cette propriété possède un élément maximum noté $x \cdot . a$.

En particulier, ceci est réalisé si E est un demi-groupe ordonné, résidué à gauche par rapport à a [10].

L'application α de E dans E définie par $x\alpha = xa$ est alors isotone et résiduée et les résultats du paragraphe II sont applicables. Si l'élément a est tel qu'on ait $xa^2 \leqq xa$ pour tout $x \in E$, ce qui se produit notamment si l'on a affaire à un demi-groupe ordonné et si a vérifie $a^2 \leqq a$, on peut appliquer les résultats du paragraphe III. Enfin, si l'élément a est quasi-entier à droite ($xa \leqq x$ pour tout $x \in E$), on peut appliquer les résultats du paragraphe IV. C'est ce qui a lieu lorsque E est l'ensemble des idéaux à droite d'un demi-groupe et l'application α la multiplication à droite par un idéal bilatère. De plus, on a dans ce cas $xa \leqq a$ pour tout $x \in E$.

Examinons avec quelques détails le cas où a est quasi-entier à droite et vérifie en outre la relation $xa \leqq a$ pour tout $x \in E$. Introduisons, pour chaque entier positif p, à côté des conditions utilisées jusqu'ici, les conditions

$$(C_p) \quad a^p = a^{p+1}.$$

PROPRIÉTÉ 9. — *Les conditions* (0, 1), (A), (C) *sont équivalentes.*

Il suffit de montrer que la condition (C) implique la condition (0, 1). L'application α étant une application de E sur E, il existe $u \in E$ tel que $a = ua$. Mais, puisque tout élément y de E se met sous la forme xa et puisqu'on a $xa \leqq a$, a est maximum dans E. Il en résulte $ua \leqq a^2$, la multiplication par a à droite étant isotone par rapport à la relation d'ordre. Donc, on a $a \leqq a^2$ et par

(10) C'est-à-dire tel que les résiduels à gauche $x \cdot . a$ existent pour tout x.

suite $a = a^2$. Soit alors y un élément quelconque de E et son expression sous la forme xa; on a $y = xa = xa^2 = (xa)a = ya$, c'est-à-dire que la condition (o, 1) est vérifiée.

Théorème 9. — *Les conditions $(p,\ 1)$ (p entier positif ou nul), (B), (C_p) (p entier positif) sont logiquement distinctes et sont liées par les implications binaires résumées dans le tableau suivant et leurs conséquences logiques à l'exclusion de toute autre. L'ensemble de ces conditions forme un demi-treillis par rapport à la conjonction logique.*

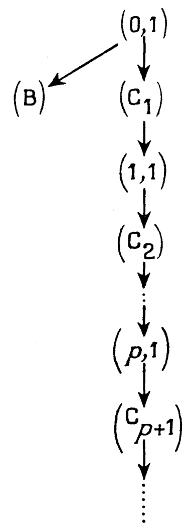

Fig. D.

On sait que (o, 1) implique (B). Quel que soit p, $(p,\ 1)$ entraîne $xa^p = xa^{p+1}$ pour tout $x \in$ E, en particulier pour $x = a$, ce qui donne $a^{p+1} = a^{p+2}$, c'est-à-dire (C_{p+1}). D'autre part, (C_p) entraîne évidemment $xa^p = xa^{p+1}$ quel que soit $x \in$ E, donc $(p,\ 1)$.

Pour nous assurer que les conditions sont distinctes et qu'il n'y a pas d'autre implication, nous utiliserons des exemples contraires qui sont chacun l'ensemble des idéaux à droite d'un demi-groupe D, l'élément a étant D lui-même. Nous pouvons d'abord utiliser l'exemple 1 (avec $n = 1$) et l'exemple 4. L'ensemble E_{p1} de l'exemple 1 (avec p positif) vérifie la condition $(p,\ 1)$, mais non la condition (C_p) ni la condition (B). Par suite, $(p,\ 1)$ n'implique pas (C_p) et ceci, quel que soit p positif. Cette condition n'implique pas non plus (B). L'exemple 4 montre que (B) n'entraîne aucune autre condition. Il reste donc à montrer que (C_1) n'entraîne pas (B) et que (C_{p+1}) n'entraîne pas $(p,\ 1)$ pour p positif.

Exemples 6_1 et 6_2. — *a. Exemple* 6_1. — Soit D le demi-groupe des nombres rationnels supérieurs à 1 muni de la multiplication ordinaire. Il satisfait à $D = D^2$, c'est-à-dire à la condition (C_1). Il ne satisfait pas à la condition (B) car l'idéal des $x \in D$ vérifiant $x \geqq 2$ et l'idéal des $x \in D$ vérifiant $x > 2$ donnent le même idéal lorsqu'on les multiplie par D.

b. Exemple 6_2. — Soit D le demi-groupe à trois éléments a, b, c, dont la table de multiplication est la suivante :

$\times$	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	c
c	a	a	a

Il satisfait à la condition (C_1) et il ne satisfait pas à la condition (B) car $\{a\}$ et $\{a, c\}$ sont des idéaux à la droite de D tels que $\{a\}D = \{a, c\}D$.

c. Remarque. — On ne peut obtenir un exemple contraire à l'aide d'un demi-groupe *abélien fini*. En effet, pour un demi-groupe abélien fini, les conditions (0, 1) et (C_1) sont équivalentes. Supposons que le demi-groupe abélien fini D vérifie $D = D^2$ et soit x un élément quelconque de D. Démontrons que x possède un élément unité dans D. S'il n'en n'est pas ainsi, posons $x = x_1 y_1$. L'élément x_1 ne peut admettre d'élément unité car un tel élément serait élément unité de x; de plus on a nécessairement $x_1 \neq x$. Posons $x_1 = x_2 y_2$; x_2 est sans élément unité et l'on a $x_2 \neq x_1$, $x_2 \neq x$. Le procédé se poursuit indéfiniment et conduit à une suite infinie d'éléments x_i tous distincts ce qui est impossible puisque D est supposé fini. De là, résulte aisément que tout idéal $\mathfrak{X}$ de D vérifie $\mathfrak{X}D = \mathfrak{X}$, c'est-à-dire la condition (0, 1).

EXEMPLES 7_1 ET 7_2. — Supposons, d'une façon générale, que nous ayons un demi-groupe D dont le centre soit non vide tel que $D = D^2$ et $x \notin xD$ pour un $x \in D$. Un tel demi-groupe vérifie donc (C_1) et ne vérifie pas (B) (car on a $[\{x\} \cup xD]D = xD = xD.D$). Nous allons montrer comment on peut en déduire un demi-groupe Δ vérifiant (C_{p+1}) et ne vérifiant pas $(p, 1)$. Choisissons dans D un élément d qui appartienne au centre de D. Soit D' le demi-groupe obtenu en adjoignant à D un élément unité e. Considérons l'ensemble Δ' des couples (k, d') où k est un entier vérifiant $0 \leqq k < 2^p$ et d' un élément quelconque de D'. Introduisons la multiplication suivante qui fait de Δ' un demi- groupe : $(k_1, d'_1)(k_2, d'_2) = (k_1 + k_2, d'_1 d'_2)$ si $k_1 + k_2 < 2^p$, $(k_1 + k_2 - 2^p, dd'_1 d'_2)$ si $k_1 + k_2 \geqq 2^p$. Le demi-groupe Δ s'obtient à partir de Δ' en supprimant l'élément $(0, e)$. On obtient facilement les puissances successives de Δ :

$$\Delta^2 = \Delta - \{(1, e)\}, \qquad \Delta^3 = \Delta - \{(1, e), (2, e), (3, e)\}, \qquad \ldots,$$
$$\Delta^k = \Delta - \{(1, e), \ldots, (2^{k-1} - 1, e)\}, \qquad \ldots, \qquad \Delta^p = \Delta - \{(1, e), \ldots, (2^{p-1} - 1, e)\},$$
$$\Delta^{p+1} = \Delta - \{(1, e), \ldots, (2^p - 1, e)\} = \{(k, d)\}_{0 \leqq k < 2^p,\, d \in D}, \qquad \Delta^{p+2} = \Delta^{p+1}, \qquad \ldots.$$

D'autre part, on a $(0, x)\Delta^p \ni (2^{p-1}, x)$ et $(0, x)\Delta^{p+1} \not\ni (2^{p-1}, x)$ ce qui prouve que l'idéal à droite $\mathfrak{X} = (0, x)\Delta \cup \{(0, x)\}$ ne vérifie pas $\mathfrak{X}\Delta^p = \mathfrak{X}\Delta^{p+1}$. Donc la condition (C_{p+1}) est réalisée sans qu'il en soit ainsi de la condition $(p, 1)$.

a. Exemple 7_1. — On peut en particulier appliquer la construction précédente au demi-groupe D de l'exemple 6_1. On obtient un demi-groupe abélien Δ qui est suceptible d'une interprétation concrète simple lorsqu'on prend pour d un nombre rationnel dont la racine carrée n'est pas rationnelle. Δ est en effet isomorphe au demi-groupe multiplicatif engendré par D et par $\sqrt[2p]{d}$.

b. Exemple 7_2. — De même, en partant du demi-groupe de l'exemple 6_2, et en prenant pour élément d l'élément a de ce demi-groupe, on obtient un demi-groupe fini Δ ayant $2^{p+2} - 1$ éléments.

c. Remarque. — Pour un demi-groupe abélien fini, les conditions $(p, 1)$ et (C_{p+1}) sont équivalentes. Supposons que le demi-groupe abélien fini D vérifie $D^{p+1} = D^{p+2}$; le demi-groupe $D_1 = D^{p+1}$ (également abélien fini) vérifie $D_1 = D_1^2$. Donc, pour tout idéal à droite $\mathfrak{X}_1$ de D_1, on a $\mathfrak{X}_1 D_1 = \mathfrak{X}_1$. Or, $\mathfrak{X}$ étant un idéal à droite quelconque de D, $\mathfrak{X}D^p$ est un idéal à droite de D_1. On a donc $\mathfrak{X}D^{2p+1} = \mathfrak{X}D^p$, d'où résulte $\mathfrak{X}D^{p+1} = \mathfrak{X}D^p$.

COROLLAIRE. — D *étant un demi-groupe et* I *un idéal bilatère de* D, *les conditions des classes* IV *et* VI *du théorème* 8 (*supposées vérifiées pour tout idéal à droite* $\mathfrak{X}$ *de* D) *sont équivalentes aux conditions de la classe* I. *Les conditions des classes restantes* I [*condition* (0, 1)], II [*condition* (1, 1), III [*condition* $(p, 1)$ *pour chaque entier p supérieur à* 1], V [*condition* (B)] *ainsi que, pour chaque entier positif p, les conditions* (C_p) $I^p = I^{p+1}$ *sont logiquement distinctes et sont liées par les implications binaires indiquées au théorème* 9. *Leur ensemble forme un demi-treillis par rapport à la conjonction logique.*

4° *Remarque.* — Il pourrait paraître séduisant de généraliser d'une manière analogue le cas des sous-ensembles stables d'un ensemble A muni d'un demi-groupe D d'opérateurs : considérons un ensemble ordonné $E = \{x, y, \ldots\}$ muni d'un demi-groupe ordonné $T = \{a, b, \ldots\}$ d'opérateurs ; on impose les conditions suivantes : 1° $(xa)b = x(ab)$, $\forall x \in E$, $a \in T$, $b \in T$; 2° les relations $x \leqq y$, $a \leqq b$ impliquent $xa \leqq yb$; 3° quels que soient $x \in E$, $a \in T$, il existe $y \in E$ vérifiant $ya \leqq x$ et l'ensemble des éléments y ayant cette propriété possède un élément maximum noté $x \cdot . a$. Les conditions sont remplies lorsque E est l'ensemble des sous-ensembles stables de A et T l'ensemble des idéaux bilatères de D. De plus, on a, dans ce cas, $xa \leqq x$, $\forall x \in E$, $a \in T$.

En réalité, il est inutile d'examiner ce problème car il constitue une représentation des cas traités aux paragraphes II, III et IV. En effet, il suffit de considérer, à côté de l'ensemble E de ces paragraphes, le demi-groupe T d'applications de E dans E engendré par l'application α, T étant muni de la relation d'ordre triviale : $\alpha^n \leqq \alpha^m \Leftrightarrow n = m$; dans le cas du paragraphe III, on pourra munir T de la relation d'ordre $\alpha^n \leqq \alpha^m \Leftrightarrow n \geqq m$; dans le cas du paragraphe IV, on pourra adjoindre à T l'application identique $\varepsilon = \alpha^0$ de E sur E et imposer $\alpha^n \leqq \alpha^m \Leftrightarrow n \geqq m$.

5° *Application aux anneaux et aux* A-*modules*. — On pourrait faire une étude analogue à celle du 1° en partant d'un anneau A et d'un idéal bilatère I de A, l'application α étant obtenue en associant à chaque idéal à droite $\mathfrak{X}$ de A son produit $\mathfrak{X}$I par I $\left(\text{ensemble des } \sum_{i=1}^{n} x_i a_i \text{ avec } x_i \in \mathfrak{X},\ a_i \in \mathrm{I}\right)$.

De même que dans le 2°, on pourrait plus généralement considérer un A-module à droite $\mathcal{M}$, l'ensemble des sous-modules $\mathfrak{X}$ de $\mathcal{M}$ et l'application définie par $\mathfrak{X}\alpha = \mathfrak{X}\mathrm{I}$.

Remarquons que le cas des idéaux à droite d'un anneau est également un cas particulier du cas traité au 3°.

6° *Autres applications*. — *a*. Une série de problèmes un peu différents est obtenue en remplaçant les idéaux à droite de D ou de A ou les sous-ensembles de A ou de $\mathcal{M}$ stables par rapport aux opérateurs de D ou de A par tous les sous-ensembles de D ou de A ou par tous les sous-ensembles de A ou de $\mathcal{M}$. On obtiendrait notamment le cas de tous les sous-ensembles d'un demi-groupe ou d'un anneau comme cas particulier d'un problème analogue à celui traité au 3° (dans lequel on aurait seulement $xa^2 \leqq xa$ pour tout $x \in$ E et où l'on appliquerait les résultats du paragraphe III).

b. Inversement, étant donné un demi-groupe D ou un anneau A, on peut considérer seulement l'ensemble de ses idéaux bilatères qu'on prendra comme ensemble E, l'application α étant définie par la multiplication à droite par un idéal bilatère fixé. Naturellement, ce problème n'est qu'un cas particulier du problème traité au 3°.

Le même ensemble E peut être aussi muni de l'application α définie par $\mathfrak{X} \to \mathrm{I}\mathfrak{X}\mathrm{J}$ où I et J sont deux idéaux bilatères fixés; l'application résiduée β est définie par $\mathfrak{X} \to (\mathfrak{X} .\!\cdot \mathrm{I}) \cdot\!. \mathrm{J}$.

Ce problème peut être traité comme un cas particulier d'un problème analogue à celui du 3° : on considère un demi-groupe E muni d'une relation d'ordre et deux éléments $a \in$ E, $b \in$ E tels que l'on ait :

1° $x \in \mathrm{E}, y \in \mathrm{E}, x \leqq y \Rightarrow axb \leqq ayb$;

2° $\forall x \in \mathrm{E}$, $\exists y$ vérifiant $ayb \leqq x$ et l'ensemble des éléments ayant cette propriété possède un élément maximum noté $(x .\!\cdot a) \cdot\!. b$.

Ici, on peut supposer de plus $axb \leqq x$ pour tout $x \in$ E. Les résultats du paragraphe III sont alors applicables. En se limitant au cas où l'on a $b = a$ et $a^3 \leqq a^2 \leqq a$, on pourrait comparer les conditions étudiées dans ce Mémoire aux conditions

$$(\mathrm{C}_p) \quad a^p = a^{p+1} \quad ([11]).$$

([11]) On pourra trouver dans R. Croisot, *Équivalences principales bilatères définies dans un demi-groupe* [*J. Math. pures et appl.*, t. 36, 1957 (corollaire de la propriété 14)], un résultat inspiré d'une telle étude dans le cas où E est l'ensemble des idéaux bilatères d'un demi-groupe D, I et J coïncidant avec D. L'étude complète, même dans ce cas particulier, n'a pas été faite.