JOSEPH HERSCH

Longueurs extrémales et géométrie globale

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 72, nº 4 (1955), p. 401-414
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1955_3_72_4_401_0>

LONGUEURS EXTRÉMALES

ET

GÉOMÉTRIE GLOBALE

PAR M. JOSEPH HERSCH.

1. INTRODUCTION. — 1.1. Les résultats qui vont suivre reposent de façon essentielle sur la *représentation conforme*; aussi considérons-nous des *variétés riemanniennes* à deux dimensions, admettant des *paramètres isothermes* locaux.

Nous appelons *triangle* la figure formée par un domaine de Jordan et trois points désignés sur sa frontière; ils la partagent en trois « côtés ». Un *quadrilatère* sera un domaine de Jordan avec quatre points-frontière désignés.

1.2. Dans son travail d'habilitation [7], O. Teichmüller attira l'attention sur une propriété extrémale remarquable du carré : Soit Q un quadrilatère de côtés β', α', β'', α'' et d'aire A; appelons Λ la borne inférieure des longueurs de tous les arcs rectifiables (dans Q) reliant soit β' à β'', soit α' à α'' (c'est-à-dire deux côtés opposés); alors $\Lambda^2 \leqq A$. Pour un carré du plan, on a évidemment l'égalité. Dans un article récent, P. M. Pu [5] a démontré le théorème suivant :

Soient A *l'aire d'une variété riemannienne du type topologique du plan projectif* (*modèle*) *et* Λ *la borne inférieure des longueurs des cycles rectifiables non homotopes à zéro; alors* $\Lambda^2 \leqq \frac{\pi A}{2}$.

Dans le présent travail, mon intention est de montrer que ces deux propriétés, ainsi que d'autres, peuvent être obtenues d'une façon simple et unitaire, grâce à la notion de *longueur extrémale d'une famille de courbes* (Ahlfors et Beurling [1]).

2. DÉFINITION DE LA LONGUEUR EXTRÉMALE. QUELQUES PROPRIÉTÉS. EXEMPLES. — 2.1. J'utilise une forme légèrement modifiée [4] de la définition initiale d'Ahlfors et Beurling. Soit $\{c\}$ une famille de courbes données sur une variété

riemannienne G (ou dans un domaine G d'une variété). Pour toute fonction réelle non négative ρ sur G (*répartition*), j'écris

$$C_\rho(c) = \underline{\int_c} \rho\, ds \qquad \text{et} \qquad A_\rho = \overline{\iint_G} \rho^2\, d\tau,$$

où ds = élément linéaire, $d\tau$ = élément de surface, $\underline{\int}$ et $\overline{\int}$ = intégrales inférieure et supérieure de Darboux.

Définition. — $L_{\{c\}}^{-1} = M\{c\} = \inf_\rho A_\rho$ *sous la condition* $C_\rho(c) \geqq 1$ *pour toute* $c \in \{c\}$. $L_{\{c\}}$ est appelée la *longueur extrémale* de la famille $\{c\}$.

Toute répartition ρ avec $C_\rho(c) \geqq 1$ pour toute $c \in \{c\}$ est dite « admissible » pour la famille $\{c\}$.

2.2. On trouvera dans [4] diverses propriétés des longueurs extrémales et leurs démonstrations; voici quelques énoncés dont nous aurons besoin ici :

2.2.1. $L_{\{c\}}$ est invariante par toute transformation conforme (biunivoque) de G et de la famille $\{c\}$.

2.2.2. Si $\{c\} \subset \{\gamma\}$, alors $L_{\{c\}} \geqq L_{\{\gamma\}}$.

2.2.3. Si la *famille* $\{c\}$ dans le plan (ou sur la sphère de Riemann) est *symétrique* par rapport à une droite, que nous prenons comme axe réel (c'est-à-dire $c \in \{c\}$ entraîne $\bar{c} \in \{c\}$), alors il suffit de considérer les *répartitions* $\tilde{\rho}$ également *symétriques* $\tilde{\rho}(z) = \tilde{\rho}(\bar{z})$:

$$M\{c\} = \inf_{\tilde{\rho}} A_{\tilde{\rho}} \qquad \text{sous la condition} \quad C_{\tilde{\rho}}(c) \geqq 1 \quad \text{pour toute } c \in \{c\}.$$

2.2.4. Appelons $\Lambda_{\{c\}}$ la borne inférieure des longueurs des courbes $c \in \{c\}$, ou plus précisément (des courbes c non rectifiables étant admises)

$$\Lambda_{\{c\}} = \inf_{c \in \{c\}} \underline{\int_c} ds;$$

A étant l'aire de G, on a, en vertu de la définition,

$$M\{c\} \leqq A_{\rho \equiv \frac{1}{\Lambda_{\{c\}}}} = \frac{A}{\Lambda_{\{c\}}^2}, \qquad \text{soit} \quad \Lambda_{\{c\}}^2 \leqq L_{\{c\}} A.$$

Toute figure pour laquelle on a l'égalité sera dite *figure extrémale* (pour la famille $\{c\}$).

2.3.1. Toute répartition ρ admissible pour une famille $\{c\}$ (dans une figure G) et telle que $A_\rho = M\{c\}$, est dite *répartition extrémale* pour $\{c\}$. *Deux répartitions extrémales* ρ_1 et ρ_2 *pour* $\{c\}$ *dans* G *ne peuvent différer que sur un ensemble de mesure superficielle nulle* (H. Renggli [6]). En effet, on a $A_{\rho_1} = A_{\rho_2} = M\{c\}$, et $A_{\frac{\rho_1+\rho_2}{2}}$ ne peut pas être inférieure à $M\{c\}$. Les figures extrémales pour une famille $\{c\}$ sont celles dans lesquelles une répartition constante est extrémale pour $\{c\}$.

2.3.2. Soient G et G' deux figures conformément équivalentes :

$$G' = w(G), \qquad w(z) = \text{application analytique et biunivoque.}$$

Supposons que G soit extrémale pour une famille $\{c\}$ et que G' soit extrémale pour la famille $\{c'\} = \{w(c)\}$. On a alors deux répartitions constantes : $\rho(z) \equiv C$ extrémale pour $\{c\}$ dans G, et $\rho'(w) \equiv C'$ extrémale pour $\{c'\}$ dans G'; en vertu de 2.2.1,

$$A_\rho = M\{c\} = M\{c'\} = A_{\rho'}.$$

Or, la répartition $\rho^\star(z) = \rho'(w)\left|\frac{dw}{dz}\right| = C'\left|\frac{dw}{dz}\right|$ est aussi concurrente pour $\{c\}$, et $A_{\rho^\star} = A_{\rho'} = M\{c\}$, donc ρ et $\rho^\star$ sont toutes deux extrémales pour $\{c\}$; en vertu de 2.3.1, on a $\rho = \rho^\star$, sauf sur un ensemble de mesure superficielle nulle, donc $\left|\frac{dw}{dz}\right| = \frac{C}{C'}$ partout (continuité) : *à un facteur constant près,* G *et* G' *sont isométriques.*

En ce sens, nous pouvons dire : *Une famille* $\{c\}$ *étant définie dans une configuration conforme* (ensemble de figures conformément équivalentes), *il existe essentiellement au plus une figure extrémale pour* $\{c\}$.

2.4. Le *module* μ *d'un quadrilatère* Q est l'un des rapports des côtés d'un rectangle (plan) qui lui est conformément équivalent. Soient β', α', β'', α'' les « côtés » de Q; $\{c\}$ la famille des arcs de Jordan dans Q joignant β' à β''; et $\{\gamma\}$ la famille de ceux qui joignent α' à α''. Alors $L_{\{c\}} = \mu$ et $L_{\{\gamma\}} = \mu^{-1}$ (ou inversement, selon le choix de μ). Par conséquent, $L_{\{c\}} L_{\{\gamma\}} = 1$; A étant la surface de Q, on a donc

$$A_{\{c\}} A_{\{\gamma\}} \leqq A \quad \text{(Teichmüller).}$$

On a l'égalité pour les rectangles plans (figures extrémales).

2.5. Considérons dans 2.4 la famille $\{u\} = \{c\} \cup \{\gamma\}$; on voit aisément (représentation conforme sur un rectangle) que

$$L_{\{u\}} = \min(L_{\{c\}}, L_{\{\gamma\}}), \qquad \text{d'où} \qquad L^2_{\{u\}} \leqq 1$$

et

$$A^2_{\{u\}} \leqq A \quad \text{(Teichmüller).}$$

Figures extrémales : les carrés dans le plan.

2.6. Cas analogue à 2.4. Considérons un domaine doublement connexe de surface A; soient $\{c\}$ la famille des arcs de Jordan reliant les deux contours, et $\{\gamma\}$ celle des courbes (fermées) de Jordan qui les séparent l'un de l'autre. Alors on a de nouveau

$$L_{\{c\}} L_{\{\gamma\}} = 1, \qquad \text{d'où} \qquad A_{\{c\}} A_{\{\gamma\}} \leqq A.$$

Figures extrémales : cylindres.

2.7. Des inégalités analogues à 2.4 et 2.6 sont valables pour *trois dimensions :*

$$\text{Volume} \geqq (\text{borne inférieure de surfaces}) \times (\text{borne inférieure de longueurs}).$$

C'est une conséquence immédiate de [3].

3. Une propriété extrémale du triangle rectangle isocèle. Corollaires. — 3.1. Soient a, b, e les « côtés » d'un triangle (*cf.* 1.1); nous voulons déterminer la longueur extrémale $L_{\{c_1\}}$ de la famille des arcs de Jordan c_1 dans le triangle, à extrémités sur a et e, et ayant un point sur b. Comme tous les triangles sont conformément équivalents, $L_{\{c_1\}}$ est un nombre universel.

3.1.1. Considérons d'abord le triangle défini dans le demi-plan complexe supérieur par les points-frontière $-X$, X et ∞ $(X > 0)$; ses côtés sont

$$a: \ -\infty \leqq x \leqq -X; \qquad b: \ -X \leqq x \leqq X; \qquad e: \ X \leqq x \leqq \infty.$$

La famille $\{c_1\}$ est bien définie.

Considérons maintenant le quadrilatère Q de module $\mu = 1$, obtenu en coupant le plan complexe le long des demi-droites réelles $-\infty \leqq x \leqq -X$ et $X \leqq x \leqq \infty$, les quatre côtés étant

$$\beta': \ -\infty \leqq x \leqq -X, \ y = +0; \qquad \alpha': \ -\infty \leqq x \leqq -X, \ y = -0;$$
$$\beta'': \ X \leqq x \leqq \infty, \ y = -0; \qquad \alpha'': \ X \leqq x \leqq \infty, \ y = +0.$$

Appelons $\{u\}$ la famille des arcs de Jordan dans Q, reliant soit β' à β'', soit α' à α''; nous savons (2.5) que $L_{\{u\}} = \min(\mu, \mu^{-1}) = 1$.

Soit ρ_1 une répartition dans le demi-plan supérieur, admissible pour $\{c_1\}$; nous la prolongeons dans tout le plan par $\rho(x+iy) = \rho_1(x+i|y|)$; ρ est admissible pour $\{u\}$ (dans Q) et $A_\rho = 2A_{\rho_1}$; d'où

$$M\{u\} \leqq 2M\{c_1\}, \qquad L_{\{c_1\}} \leqq 2L_{\{u\}} = 2.$$

D'autre part, il est permis, en vertu de 2.2.3, de restreindre le problème variationnel définissant $L_{\{u\}}$ aux répartitions symétriques $\tilde{\rho}(z) = \tilde{\rho}(\bar{z})$; la restriction $\tilde{\rho}^+$ d'une telle $\tilde{\rho}$ au demi-plan supérieur est admissible pour $\{c_1\}$, et $A_{\tilde{\rho}^+} = \frac{A_{\tilde{\rho}}}{2}$; d'où

$$M\{c_1\} \leqq \inf_{\tilde{\rho}} \frac{A_{\tilde{\rho}}}{2} = \frac{M\{u\}}{2}, \qquad L_{\{c_1\}} \geqq 2L_{\{u\}} = 2.$$

Nous avons donc

$$L_{\{c_1\}} = 2.$$

3.1.2. Considérons un triangle rectangle isocèle d'hypothénuse b, les cathètes a et c ayant la longueur 1; la répartition constante $\rho \equiv 1$ est admissible pour $\{c_1\}$ et $A_\rho = \frac{1}{2} = M\{c_1\}$, ρ est donc extrémale.

3.1.3. En vertu de 2.2.4 et 2.3.2, nous avons donc le théorème :

Soit donné un triangle T *de surface* A; *sur chacun de ses côtés, il existe une infinité de points dont la somme des distances* (dans T) *aux deux autres côtés est* $\leqq \sqrt{2A}$.

3.2.1. Considérons deux points fixes p, q dans le plan, et la famille $\{c_2\}$ de toutes les courbes « en forme de 8 autour de p et q », c'est-à-dire : chaque c_2 consiste en deux courbes de Jordan avec un point commun, l'une $(p\,|\,q, \infty)$ entourant p et non q, l'autre $(q\,|\,p, \infty)$ entourant q et non p. *La longueur extrémale est*

$$L_{\{c_2\}} = 4.$$

Démonstration. — Nous prenons $p = -X$ et $q = X$, et comparons $\{c_2\}$ avec les familles $\{u\}$ et $\{c_1\}$ considérées en 3.1.1. Si ρ est admissible pour $\{u\}$, $\frac{\rho}{2}$ est admissible pour $\{c_2\}$, d'où

$$M\{c_2\} \leqq \frac{M\{u\}}{4}, \qquad L_{\{c_2\}} \geqq 4L_{\{u\}} = 4.$$

Si $\tilde{\rho}$ est admissible pour $\{c_2\}$, $2\tilde{\rho}^+$ est admissible pour $\{c_1\}$, d'où

$$M\{c_1\} \leqq 2M\{c_2\}, \qquad L_{\{c_2\}} \leqq 2L_{\{c_1\}} = 4.$$

3.2.2. Il est évidemment inessentiel que le troisième point désigné sur la sphère soit ∞ ou tout autre (transformation bilinéaire !), la propriété $L_{\{c_2\}} = 4$ reste donc valable pour une sphère avec trois points désignés p, q, z.

Considérons maintenant une *surface fermée de genre zéro*, qui peut être représentée conformément sur une sphère; soient p, q, z trois points fixes de cette surface; soit $\{c_2\}$ la famille des courbes connexes consistant en deux courbes de Jordan $(p\,|\,q, z)$ et $(q\,|\,p, z)$. Alors $L_{\{c_2\}} = 4$.

3.2.3. En vertu de 2.2.4, nous avons le théorème :

Soient p, q, z *trois points donnés sur une surface fermée* F, *d'aire* A *et de genre zéro : alors il existe un point* x *par lequel on peut mener deux lacets* $(p\,|\,q, z)$ *et* $(q\,|\,p, z)$ *sur* F, *de longueur totale* $\leqq 2\sqrt{A}$.

Il est clair que l'on admet tacitement la possibilité qu'un lacet passe par un des points donnés (cas limite).

3.2.4. Soit maintenant q le point à l'infini du plan complexe. Soient p et z deux points fixes du plan et $\{c_2\}$ la famille des courbes connexes consistant chacune en deux courbes de Jordan entourant l'une p et z, l'autre p et non pas z. Alors $L_{\{c_2\}} = 4$.

Les propriétés 3.2.1 et 3.2.4 restent naturellement valables sur toute surface de Riemann simplement connexe du type parabolique.

4. Une autre propriété extrémale du triangle rectangle isocèle. Corollaires. — 4.1. Soient de nouveau a, b, e les côtés d'un triangle; quelle est la longueur extrémale $L_{\{\gamma_1\}}$ de la famille des chemins (arcs de Jordan)

$$\gamma_1 : \quad a \to b \to e \to a ?$$

(Les extrémités, sur a, ne coïncident *pas* nécessairement !)

De la configuration conforme de tous les triangles, il nous suffit de choisir un représentant (figure) T : un triangle rectangle isocèle d'hypothénuse a, les cathètes b et e ayant la longueur 1. La répartition $\rho_1 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}$ dans T est admissible pour $\{\gamma_1\}$, d'où $L_{\{\gamma_1\}} \geqq 4$. Appelons $\{\tilde{\gamma}_1\}$ la sous-famille de $\{\gamma_1\}$ formée par les courbes $\tilde{\gamma}_1$ symétriques relativement à la hauteur de T perpendiculaire à a. La comparaison avec le paragraphe 3.1 montre que $L_{\{\tilde{\gamma}_1\}} = 2L_{\{c_1\}} = 4$, d'où (par 2.2.2) $L_{\{\gamma_1\}} \leqq 4$. Nous avons donc

$$L_{\{\gamma_1\}} = 4.$$

4.1.1. Grâce à 2.2.4, nous avons le théorème :

Soit donné un triangle T *de surface* A; *pour chaque choix du côté* a, *il existe deux points* $B \in b$ *et* $E \in e$ *sur les deux autres côtés, tels que la somme des distances* $BE + Ba + Ea$ (dans T) *soit* $\leqq 2\sqrt{A}$.

2.3.2 montre que la paire de points (B, E) peut être choisie d'une infinité de manières.

4.2. Soient β', α', β'', α'' (dans cet ordre) les côtés d'un quadrilatère de module 1 (*cf.* 2.4); quelle est la longueur extrémale $L_{\{\gamma_2\}}$ de la famille des courbes (*fermées*) de Jordan

$$\gamma_2 : \quad \beta' \to \alpha' \to \beta'' \to \alpha'' \to \beta' \quad \text{(quadrilatères inscrits) ?}$$

Il suffit de considérer, dans le plan complexe, le carré Q de sommets 1, i, -1, $-i$. La répartition $\rho_2 \equiv \frac{1}{4}$ dans Q est admissible pour $\{\gamma_2\}$, d'où $L_{\{\gamma_2\}} \geqq 8$. La sous-famille $\{\tilde{\gamma}_2\} \subset \{\gamma_2\}$ des courbes $\tilde{\gamma}_2$ symétriques par rapport à l'axe réel a (*cf.* 2.2.3) la longueur extrémale

$$L_{\{\tilde{\gamma}_2\}} = 2L_{\{\gamma_1\}} = 8, \qquad \text{d'où} \qquad L_{\{\gamma_2\}} \leqq 8.$$

Donc

$$L_{\{\gamma_2\}} = 8.$$

4.3.1. Soient p, q deux points fixes du plan complexe. Soit $\{\gamma_3\}$ la famille des courbes γ_3 consistant en trois courbes de Jordan : $(\infty \mid p, q)$ entourant p et q, $(q \mid p, \infty)$ entourant q et non p, $(p \mid q, \infty)$ entourant p et non q, *la seconde ayant un point commun avec chacune des deux autres*. Alors

$$L_{\{\gamma_3\}} = 8.$$

Démonstration. — Prenons $p = -X$, $q = X$ (X réel > 0) dans le plan complexe. Soit $\{\tilde{\gamma}_3\} \subset \{\gamma_3\}$ la sous-famille des courbes $\tilde{\gamma}_3$ symétriques par rapport à l'axe réel; à l'aide de 2.2.3, la comparaison avec 4.1 montre immédiatement que

$$L_{\{\tilde{\gamma}_3\}} = 2L_{\{\gamma_1\}} = 8, \qquad \text{d'où} \qquad L_{\{\gamma_3\}} \leqq 8.$$

Appliquons 4.1 au triangle défini par le demi-plan supérieur et les côtés

$$a : \ -\infty \leqq x \leqq -X; \qquad b : \ -X \leqq x \leqq X; \qquad c : \ X \leqq x \leqq +\infty.$$

Soit ρ_1 admissible pour $\{\gamma_1\}$; je définis une répartition ρ_3 dans le plan ouvert par $\rho_3(x+iy) = \frac{\rho_1(x+i|y|)}{2}$. Je dis que ρ_3 est admissible pour $\{\gamma_3\}$. Soit f l'application $f(x+iy) = x+i|y|$ du plan ouvert sur le demi-plan $y \geqq 0$; $C_{\rho_3}(\gamma_3) = \frac{C_{\rho_1}(f(\gamma_3))}{2}$; on vérifie facilement que la courbe $f(\gamma_3)$ consiste en deux courbes $\in \{\gamma_1\}$, donc

$$C_{\rho_1}(f(\gamma_3)) \geqq 2, \qquad C_{\rho_3}(\gamma_3) \geqq 1,$$

ρ_3 est bien admissible pour $\{\gamma_3\}$;

$$M\{\gamma_3\} \leqq A_{\rho_3} = \frac{A_{\rho_1}}{2}, \qquad \text{d'où} \qquad M\{\gamma_3\} \leqq \frac{M\{\gamma_1\}}{2} \quad \text{et} \quad L_{\{\gamma_3\}} \geqq 2L_{\{\gamma_1\}} = 8.$$

Donc

$$L_{\{\gamma_3\}} = 8.$$

4.3.2. Au lieu du point à l'infini (pôle Nord), nous pouvons désigner (outre p et q) un point quelconque z de la sphère. Il reste $L_{\{\gamma_3\}} = 8$, et cette propriété se généralise (par représentation conforme) aux surfaces de genre zéro avec trois points désignés p, q, z.

En vertu de 2.2.4, nous avons donc le théorème :

Soient p, q, z trois points donnés sur une surface fermée F, *d'aire* A *et de genre zéro; alors il existe sur* F *deux points x et y et trois lacets $(z \mid p, q)$ par x, $(q \mid p, z)$ par x et y, $(p \mid q, z)$ par y, de longueur totale* (somme des trois longueurs) $\leqq \sqrt{8A}$.

4.3.3. Soit maintenant q le point à l'infini du plan complexe : Soient p et z deux points fixes du plan; soit $\{\gamma_3\}$ la famille des courbes connexes consistant chacune en trois courbes de Jordan entourant l'une p et z, la seconde p et non z, la troisième z et non p, la *première* ayant un point commun avec chacune des deux autres. Alors $L_{\{\gamma_3\}} = 8$.

De nouveau, les propriétés 4.3.1 et 4.3.3 restent valables sur toute surface de Riemann simplement connexe du type parabolique.

5. Propriétés extrémales du triangle équilatéral plan. Corollaires. — 5.1. Soit T un triangle et $\{\zeta_1\}$ la famille des courbes dont chacune ζ_1 consiste en trois arcs de Jordan, reliant un point (*variable*) de T aux trois côtés. Nous allons montrer que

$$L_{\{\zeta_1\}} = \sqrt{3}.$$

5.1.1. Je choisis comme domaine normal un triangle équilatéral de côté 2. Appelons a, b, e ses côtés. La répartition $\rho \equiv \frac{1}{\sqrt{3}}$ est admissible pour $\{\zeta_1\}$; en effet, soit $\zeta_1 \in \{\zeta_1\}$ et $p \in \zeta_1$ son « point de bifurcation »; traçons les segments rectilignes reliant p aux trois sommets du triangle; il est ainsi décomposé en trois triangles de surfaces respectivement égales aux distances pa, pb, pe, d'où

$$pa + pb + pe = S = \sqrt{3}, \quad C_\rho(\zeta_1) \geqq 1 \qquad \text{donc} \quad L_{\{\zeta_1\}} \geqq \frac{1}{A_\rho} = \sqrt{3}.$$

5.2. Dans notre triangle T, soit $\{\zeta_2\} \subset \{\zeta_1\}$ la famille réunion des trois familles $\{c_1\}$ du paragraphe 3.1, relatives à chacun des trois côtés :

$$\{\zeta_2\} = \{c_{1a}\} \cup \{c_{1b}\} \cup \{c_{1e}\},$$

avec $\{c_{1a}\}$ = famille des arcs de Jordan dans T, à extrémités sur b et e, et ayant un point sur a. Nous reprenons comme domaine normal le triangle équilatéral de 5.1.1. En vertu de 2.2.3, on a le droit de restreindre le problème de variation définissant $L_{\{\zeta_2\}}$ aux répartitions $\tilde{\rho}$ symétriques relativement aux trois hauteurs du triangle. Soit $\tilde{\rho}$ une telle répartition, admissible pour $\{\zeta_2\}$. Construisons le rectangle de base b (longueur 2) et de hauteur $= \sqrt{3}$, dans lequel est inscrit notre triangle équilatéral, et prolongeons la répartition $\tilde{\rho}$ dans tout le rectangle par réflexion relativement aux côtés a et e du triangle, soit $\tilde{\rho}\square$ la répartition $\tilde{\rho}$ prolongée. Soit $\{\lambda\}$ la famille des segments verticaux reliant les côtés horizontaux du rectangle. On voit facilement que $\tilde{\rho}\square$ est admissible pour $\{\lambda\}$, donc

$$A_{\tilde{\rho}\square} \geqq M\{\lambda\} = \frac{2}{\sqrt{3}};$$

d'autre part (vu les propriétés de symétrie de $\tilde{\rho}$), $A_{\tilde{\rho}\square} = 2A_{\tilde{\rho}}$; donc $A_{\tilde{\rho}} \geqq \frac{1}{\sqrt{3}}$, d'où

$$M\{\zeta_2\} = \inf_{\tilde{\rho}} A_{\tilde{\rho}} \geqq \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad L_{\{\zeta_2\}} \leqq \sqrt{3}.$$

Nous avons ainsi, en tenant compte de 5.1.1,

$$\sqrt{3} \leqq L_{\{\zeta_1\}} \leqq L_{\{\zeta_2\}} \leqq \sqrt{3},$$

d'où finalement

$$L_{\{\zeta_1\}} = L_{\{\zeta_2\}} = \sqrt{3}.$$

Figures extrémales pour les deux familles : les triangles équilatéraux plans.

5.2.1 En vertu de 2.2.4 et 2.3.2, nous avons le théorème :

Sur le contour d'un triangle T *de surface* A, *il existe une infinité de points dont la somme des distances* (dans T) *aux deux côtés autres que le leur, est* $\leqq \sqrt{\sqrt{3}\,A}$.

Ce résultat est à rapprocher de 3.1.3.

5.3.1. Soient p, q deux points fixes du plan complexe; $\{\zeta_3\}$ la famille des courbes connexes dont chacune est composée de deux courbes de Jordan appartenant à deux des trois catégories $(p\,|\,q, \infty)$, $(q\,|\,p, \infty)$, $(\infty\,|\,p, q)$. En d'autres termes, $\{\zeta_3\}$ est, sur la sphère de Riemann, la famille des « courbes en 8 » autour de *deux* des trois points p, q, ∞. Alors

$$L_{\{\zeta_3\}} = 2\sqrt{3}.$$

Démonstration. — Prenons $p = X$, $q = -X$ (X réel > 0); nous comparons notre problème avec celui du paragraphe 5.2 pour le triangle défini par le demi-plan supérieur et les points-frontière $-X$, X et ∞. En vertu de 2.2.3, on trouve facilement que $L_{\{\zeta_3\}} \leqq 2L_{\{\zeta_2\}} = 2\sqrt{3}$. Pour démontrer l'inégalité contraire, je pose de nouveau (*cf.* 4.3.1) $f(x+iy) = x + i\,|y|$; soit ρ_2 (définie pour $y \geqq 0$) admissible pour $\{\zeta_2\}$; je définis $\rho_3(x+iy) = \dfrac{\rho_2(x+i\,|y|)}{2}$; $A_{\rho_3} = \dfrac{A_{\rho_2}}{2}$; il faut montrer que ρ_3 est admissible pour $\{\zeta_3\}$; $C_{\rho_3}(\zeta_3) = \dfrac{C_{\rho_2}(f(\zeta_3))}{2}$; or on vérifie (et c'est un point essentiel) que $f(\zeta_3)$ consiste en deux arcs $\in \{\zeta_2\}$, donc $C_{\rho_2}(f(\zeta_3)) \geqq 2$, ρ_3 est bien admissible pour $\{\zeta_3\}$; donc

$$M_{\{\zeta_3\}} \leqq \frac{M_{\{\zeta_2\}}}{2}, \qquad L_{\{\zeta_3\}} \geqq 2L_{\{\zeta_2\}} = 2\sqrt{3}.$$

Donc

$$L_{\{\zeta_3\}} = 2\sqrt{3}.$$

5.3.2. De nouveau (*cf.* 3.2.2 et 4.3.2), on peut remplacer le pôle Nord par tout autre point sur la sphère de Riemann, et généraliser le résultat, par représentation conforme, à une surface fermée de genre zéro. En vertu de 2.2.4, nous avons donc :

Soient p, q, z trois points donnés sur une surface fermée F, *d'aire* A *et de genre zéro; alors il existe sur* F *un point x par lequel on peut mener deux lacets, de deux des trois types* $(p\,|\,q, z)$, $(q\,|\,z, p)$, $(z\,|\,p, q)$, *et de longueur totale* $\leqq \sqrt{2\sqrt{3}\,A}$.

6. Plan projectif et propriétés extrémales de domaines sphériques. — 6.1. Soit $\{\gamma_1\}$ la famille des grands cercles sur une sphère de rayon R. Considérons deux points quelconques p, q sur la sphère; la famille étant symétrique relativement au grand cercle médiateur de p et q, il suffit (en vertu de 2.2.3) de considérer les répartitions ρ telles que $\rho(p)=\rho(q)$; donc on peut se restreindre aux répartitions constantes admissibles; la plus petite est

$$\rho_1 \equiv \frac{1}{2\pi R}, \qquad \text{d'où} \qquad M\{\gamma_1\} = A_{\rho_1} = \frac{1}{\pi};$$
$$L_{\{\gamma_1\}} = \pi.$$

6.2. Coupons la sphère par son équateur; et soit $\{\gamma_2\}$ la famille des demi-grands cercles dans l'hémisphère Nord. La répartition constante $\rho_2 \equiv \frac{1}{\pi R}$ est admissible pour $\{\gamma_2\}$, donc $M\{\gamma_2\} \leqq \frac{2}{\pi}$. Soit ρ admissible, alors le prolongement par symétrie (par rapport au plan de l'équateur) de la répartition $\frac{\rho}{2}$ est une répartition $\tilde{\rho}$ admissible pour $\{\gamma_1\}$, et $A_{\tilde{\rho}} = \frac{A_\rho}{2}$, d'où

$$\frac{1}{\pi} = M\{\gamma_1\} \leqq \frac{M\{\gamma_2\}}{2}, \qquad \text{donc} \quad M\{\gamma_2\} = \frac{2}{\pi},$$
$$L_{\{\gamma_2\}} = \frac{\pi}{2}.$$

6.3. Sur notre hémisphère, soit $\{\gamma_3\} \supset \{\gamma_2\}$ la famille des arcs de Jordan joignant deux points diamétralement opposés quelconques (de l'équateur). $L_{\{\gamma_3\}} \leqq L_{\{\gamma_2\}} = \frac{\pi}{2}$; mais $\rho \equiv \frac{1}{\pi R}$ est admissible pour $\{\gamma_3\}$, donc $L_{\{\gamma_3\}} \geqq \frac{\pi}{2}$; donc

$$L_{\{\gamma_3\}} = \frac{\pi}{2}.$$

6.4. Par projection stéréographique, on voit que $\frac{\pi}{2}$ est aussi la longueur extrémale de la famille des arcs de Jordan dans $|z| \leqq 1$ joignant deux points diamétralement opposés (variables) de la circonférence $|z|=1$. La représentation conforme permet de passer à un domaine de Jordan quelconque.

Interprétation. — Soit P *un modèle du plan projectif; la famille* $\{\gamma_4\}$ *des cycles non homotopes à zéro a une longueur extrémale égale à* $\frac{\pi}{2}$. (Conditions imposées au modèle, *cf.* 1.1.)

En effet : le revêtement universel $\hat{P}$ de P est une variété riemannienne à deux feuillets, homéomorphe à la sphère; appliquons-le conformément sur une sphère en sorte que deux points « superposés » de $\hat{P}$ (c'est-à-dire ayant même projection sur P) aient pour images deux points antipodes de la sphère. En vertu de 6.3, $L_{\{\gamma_4\}} = \frac{\pi}{2}$.

6.4.1 En vertu de 2.2.4, nous retrouvons ici un théorème de Pu [5] : *Si* A *est l'aire d'un modèle* (*cf.* 1.1) *du plan projectif et* Λ *la borne inférieure des longueurs de ses cycles non homotopes à zéro, alors*

$$\Lambda^2 \leqq \frac{\pi A}{2}.$$

Grâce à 2.3.2, nous avons même : il existe une infinité de cycles de longueur $\leqq \sqrt{\frac{\pi A}{2}}$.

La figure extrémale est celle du paragraphe 6.3, les points diamétralement opposés de l'équateur étant identifiés.

6.4.2 *Application aux surfaces de révolution.* — Je considère une surface de révolution (domaine de Jordan) d'aire A, ayant pour frontière un parallèle Γ, et coupant l'axe de rotation en un point. Soient q et t deux points diamétralement opposés sur Γ; *leur distance sur la surface est* $\Lambda_{qt} \leqq \sqrt{\frac{\pi A}{2}}$. Domaine extrémal : hémisphère.

Exemple : Cône de révolution, $r =$ rayon de la base, $R =$ longueur des génératrices. Le raisonnement est applicable (approximation par des surfaces régulières).

$$A = \pi r R, \qquad \text{d'où} \qquad \Lambda \leqq \pi \sqrt{\frac{rR}{2}}.$$

Le calcul exact (développement du cône) donne $\Lambda = 2R \sin \frac{\pi r}{2R}$; posons $\frac{\pi r}{2R} = x$, notre inégalité donne $\frac{\sin^2 x}{x} \leqq \frac{\pi}{4}$; si $x = \frac{\pi}{3}$, cela donne $\pi \geqq 3$. La précision est satisfaisante.

6.4.3. L'inégalité de 6.4.1 se laisse appliquer au problème des surfaces (d'aire A) dont les points conjugués ont une distance géodésique fixe D (*cf.* Blaschke [2], p. 224). On sait que chaque point p a alors un seul conjugué p', et que l'identification des paires (p, p') fournit un modèle du plan projectif, d'aire $\frac{A}{2}$. En vertu de 6.4.1, on en déduit que $D^2 \leqq \frac{\pi A}{4}$, soit $A \geqq \frac{4D^2}{\pi}$. *La surface considérée a une aire au moins égale à celle de la sphère de diamètre géodésique* D $\left(\text{c'est-à-dire de rayon } \frac{D}{\pi}\right)$.

6.5. Reprenons le cercle-unité $|z| < 1$; on a vu (6.4) que la famille $\{\eta_4\}$ des arcs de Jordan reliant deux points diamétralement opposés (variables) de $|z| = 1$, a la longueur extrémale $L_{\{\eta_4\}} = \frac{\pi}{2}$. La transformation $w = z^2$ applique le cercle-unité sur un revêtement G' à deux feuillets au-dessus de lui, et $\{\eta_4\}$ sur la famille $\{\eta'_4\}$ des arcs de Jordan à extrémités (sur $|w| = 1$) superposées, dont la projection entoure le point de ramification $w = 0$. Comme $w(z)$ est conforme partout sauf à l'origine, on a encore $L_{\{\eta'_4\}} = L_{\{\eta_4\}} = \frac{\pi}{2}$.

Considérons maintenant le cercle-unité $|w| \leqq 1$ et la famille $\{\eta_5\}$ des courbes (fermées) de Jordan ayant un point sur $|w| = 1$ et entourant l'origine $w = 0$. Soit ρ admissible pour $\{\eta_5\}$, alors je construis, en calquant ρ sur les deux feuillets de G′, une répartition ρ' admissible pour $\{\eta'_4\}$; car $C_{\rho'}(\eta'_4) = C_\rho(\eta_5) \geqq 1$; et $A_{\rho'} = 2 A_\rho$; d'où $M\{\eta'_4\} \leqq 2 M\{\eta_5\}$. D'autre part, désignons par w_1 et w_2 les deux points de G′ de projection w; soit ρ' sur G′, admissible pour $\{\eta'_4\}$; alors $\rho(w) = \frac{\rho'(w_1) + \rho'(w_2)}{2}$ est admissible pour $\{\eta_5\}$, car $C_\rho(\eta_5) = \frac{C_{\rho'}(\eta'_{4,1}) + C_{\rho'}(\eta'_{4,2})}{2} \geqq 1$; et $A_\rho \leqq \frac{A_{\rho'}}{2}$ (principe de symétrie analogue à 2.2.3, *cf.* [4]), d'où $M\{\eta_5\} \leqq \frac{M\{\eta'_4\}}{2}$. Donc

$$L_{\{\eta_5\}} = 2 L_{\{\eta'_4\}} = \pi.$$

La représentation conforme donne :

Soient G *un domaine de Jordan,* Γ *sa frontière, et p un point fixe dans* G. *La famille* $\{\eta_5\}$ *des courbes de Jordan dans* $G \cup \Gamma$, *entourant p et ayant un point sur* Γ, *a la longueur extrémale*

$$L_{\{\eta_5\}} = \pi.$$

6.5.1. En vertu de 2.2.4, nous avons le corollaire :

Dans un domaine de Jordan d'aire A, *chaque point possède un lacet partant du bord, l'entourant (ou le contenant), de longueur* $\leqq \sqrt{\pi A}$.

Ces lacets et leur intérieur *recouvrent* donc tout le domaine.

6.5.2. *Application aux surfaces de révolution.* — Je considère de nouveau (*cf.* 6.4.2) une surface de révolution (domaine de Jordan) d'aire A, ayant pour frontière un parallèle Γ et coupant l'axe de rotation en un point *p*. *Prenons un point* $q \in \Gamma$; *il existe par q un lacet sur la surface, contournant ou coupant l'axe et de longueur* $\leqq \sqrt{\pi A}$.

Exemple : Cône de révolution, $r =$ rayon de la base, $R =$ longueur des génératrices. $A = \pi r R$; soit Λ la longueur du plus petit lacet. Si $R \leqq 2r$, $\Lambda = 2R$ et notre inégalité donne $2R \leqq \pi\sqrt{rR}$, soit $R \leqq \frac{\pi^2 r}{4}$, $\pi^2 \geqq 8$; si $R > 2r$, $\Lambda = 2R \sin\frac{\pi r}{R}$, notre inégalité donne $2R\sin\frac{\pi r}{R} \leqq \pi\sqrt{rR}$; posons $x = \frac{\pi r}{R}$, nous avons de nouveau $\sin^2 x \leqq \frac{\pi x}{4}$ (*cf.* 6.4.2) : précision satisfaisante.

6.5.3. *Domaine extrémal.* — En tant que surface de Riemann, c'est une moitié de l'hémisphère supérieur, les points-frontière d'égale cote étant deux à deux identifiés; $p=$ pôle Nord. On a, en effet, $A=\pi R^2$ et $\Lambda=\pi R$. On peut aussi le construire en superposant deux exemplaires identiques d'un triangle sphérique trirectangle, et en identifiant point par point deux des trois paires de côtés superposés; p est alors le point de rencontre de ces deux « coutures ». C'est dans l'espace (isométrie!) une surface de révolution donnée par l'intégrale elliptique

$$z(r)=\int_0^r \frac{\sqrt{3R^2+4t^2}}{\sqrt{R^2-4t^2}}\,dt,$$

avec $r^2=x^2+y^2$, $0\leqq r\leqq \frac{R}{2}$; $p=0$ point singulier.

6.6. *La famille* $\{\eta_6\}$ *des triangles inscrits dans un triangle donné* T *a la longueur extrémale* 2π.

Démonstration. — Il suffit de considérer le cas où T est le demi-cercle-unité supérieur, avec les points-frontière désignés -1, 0, 1. Soit de nouveau $\{\eta_5\}$ la famille des courbes de Jordan dans $|z|\leqq 1$, entourant l'origine et avec un point (au moins) sur $|z|=1$. Posons $f(x+iy)=x+i|y|$; soit ρ (définie dans le demi-cercle supérieur fermé) admissible pour $\{\eta_6\}$; je prolonge ρ par $\tilde{\rho}=f^\star(\rho)$:

$$\tilde{\rho}(x+iy)=\rho(x+i|y|),\qquad C_{\tilde{\rho}}(\eta_5)=C_{f^\star(\rho)}(\eta_5)=C_\rho(f(\eta_5));$$

or $f(\eta_5)\in\{\eta_6\}$, donc $\tilde{\rho}$ est admissible pour $\{\eta_5\}$; comme $A_{\tilde{\rho}}=2A_\rho$, on a

$$\pi^{-1}=M\{\eta_5\}\leqq 2M\{\eta_6\}.$$

D'autre part, en vertu de 2.2.3, on peut se restreindre, pour déterminer $L_{\{\eta_5\}}$, aux répartitions $\tilde{\rho}(z)=\tilde{\rho}(\bar{z})$; soit $\tilde{\rho}$ admissible pour $\{\eta_5\}$, et $\tilde{\rho}^+$ sa restriction au demi-cercle supérieur; alors $C_{\tilde{\rho}^+}(\eta_6)=\dfrac{C_{\tilde{\rho}}(\eta_6+\bar{\eta}_6)}{2}$; $\eta_6+\bar{\eta}_6$ est composée de deux courbes $\in\{\eta_5\}$, donc $C_{\tilde{\rho}^+}(\eta_6)\geqq 1$, $\tilde{\rho}^+$ est admissible pour $\{\eta_6\}$, et

$$A_{\tilde{\rho}^+}=\frac{A_{\tilde{\rho}}}{2},\qquad \text{d'où}\qquad M\{\eta_6\}\leqq\frac{M\{\eta_5\}}{2}=\frac{1}{2\pi}.$$

Donc

$$L_{\{\eta_6\}}=2\pi.$$

6.6.1. En vertu de 2.2.4, on a le corollaire :

Dans tout triangle T *d'aire* A, *il existe un triangle inscrit de périmètre* $\leqq\sqrt{2\pi A}$.

Il y en a même une *infinité* (*cf.* 2.3.2 et 6.6.2).

6.6.2. *Domaine extrémal : c'est un triangle sphérique trirectangle* T.

Démonstration. — Soit R le rayon de la sphère; l'aire de T est $\frac{\pi R^2}{2}$, le corollaire donne donc $\Lambda \leqq \pi R$. Nous pouvons supposer que le côté e de T soit sur l'équateur, les côtés a et b se coupant au pôle Nord. Soit E un point de e; construisons ses images E_a et E_b relativement aux côtés (grands cercles) a et b; E_a et E_b (tous deux sur l'équateur) sont antipodes. Tous les triangles inscrits dans T passent par un point E de e, ils ont donc un périmètre égal à la longueur d'un arc reliant E_a à E_b sur la sphère, donc $\geqq \pi R$. Par chaque paire de points $E \in e$, $A \in a$, il existe un triangle inscrit EAB de périmètre $\Lambda = \pi R$, facile à construire : B est l'intersection du grand cercle $E_a A E_b$ avec b.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] L. Ahlfors et A. Beurling, *Conformal invariants and function theoretic null-sets* (*Acta Math.*, t. 83, 1950, p. 101-129).

[2] W. Blaschke, *Vorlesungen über Differentialgeometrie I*, 3. Auflage, Springer, 1929; Dover, 1945.

[3] J. Hersch, « *Longueurs extrémales* » *dans l'espace, résistance électrique et capacité* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 238, 1954, p. 1639).

[4] J. Hersch, *Longueurs extrémales et théorie des fonctions* (*Comm. Math. Helv.*, t. 29, 1955, fasc. 4).

[5] P. M. Pu, *Some inequalities in certain non orientable Riemannian manifolds* (*Pacific J. Math.*, t. 2, 1952, p. 55-71).

[6] H. Renggli, *Un théorème de représentation conforme* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 235, 1952, p. 1593).

[7] O. Teichmüller, *Untersuchungen über konforme und quasikonforme Abbildung* (*Deutsche Math.*, t. 3, 1938, p. 621-678).

Remarque. — Pendant la correction des épreuves, j'apprends par un cours polycopié de l'Oklahoma College (sur la représentation conforme) que L. Ahlfors avait déja calculé $L_{\{c_1\}}$ et $L_{\{\zeta_2\}}$ en 1951 (*cf.* 3.1 et 5.2).