ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

MAURICE BLAMBERT

**Sur les points singuliers des séries de Dirichlet d'une classe de Cramer**

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série*, tome 72, nº 3 (1955), p. 199-235

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1955_3_72_3_199_0>

# SUR LES POINTS SINGULIERS

DES

# SÉRIES DE DIRICHLET

# D'UNE CLASSE DE CRAMER

PAR M. MAURICE BLAMBERT.

*A la Mémoire de Georges Valiron.*

## INTRODUCTION.

Dans ce Mémoire, je suppose connues les propriétés classiques des séries de Dirichlet. Je me propose de retrouver sous certaines conditions, et de généraliser d'une certaine manière, un résultat dû à G. Pólya relatif aux points singuliers des fonctions définies par la relation fonctionnelle $\psi(s) = \sum_{r=0}^{\infty} \gamma_r \varphi^{(r)}(s)$, où les coefficients constants $\gamma_r$ et la fonction $\varphi(s)$ sont donnés. Ce résultat consiste en une contribution intéressante au problème suivant : Connaissant les singularités de $\varphi(s)$, que dire des singularités de $\psi(s)$?

Il est vrai que je ne redémontre pas dans toute sa généralité la propriété en question, mais la méthode utilisée a l'avantage de me permettre de formuler d'autres résultats que je crois nouveaux à ce jour et qui, pour la classe des fonctions à laquelle je me limite, constituent une généralisation du résultat de G. Pólya. Cette méthode est, dans l'essentiel, l'application d'un important théorème dû à V. Bernstein. Les résultats obtenus sont intéressants, non seulement en eux-mêmes, mais aussi par le rôle fondamental qu'ils jouent dans certains problèmes importants de la composition des singularités des séries de Dirichlet générales [j'ai d'ailleurs mis en évidence, dans deux Mémoires et diverses Notes (¹), l'étroite liaison entre la théorie des équations différentielles d'ordre fini ou non et des problèmes de cette espèce].

Il est vrai aussi que je modifie la forme sous laquelle G. Pólya a représenté $\psi(s)$, forme qui rattache le probléme à la théorie des équations différentielles linéaires d'ordre infini non homogènes. La méthode utilisée, eu égard aux limitations qu'elle suppose, conduit tout naturellement à conserver à $\psi(s)$ la représentation dirichletienne dans les énoncés des résultats, représentation qui est du type, communément appelé maintenant, de Cramér. Cette dernière remarque justifie le titre du Mémoire. Enfin, terminons en disant que le problème en question, soit qu'on le rattache plus particulièrement à la théorie des équations différentielles ou à celle des séries de Dirichlet, est en rapport étroit avec une riche suite de travaux dus, entre autres, à F. Schürer, J. F. Ritt, H. Cramér, G. Valiron, H. Muggli, et plus récemment R. P. Boas, R. Wilson, etc.

M. Chattelun a bien voulu lire ce travail et m'adresser d'utiles remarques; qu'il en soit ici remercié.

## CHAPITRE I.

Je rappelle quelques définitions et propriétés indispensables à l'intelligence du texte.

Soient $\varphi(s)=\Sigma b_p e^{-s\mu_p}$, $\mu_p\uparrow\infty$ et $\sigma_C^\varphi$, $\sigma_A^\varphi$ les abscisses de convergence simple, absolue de cette série. Soit $-\infty<\sigma_1<\infty$, et soit $\Delta$ un domaine (ensemble connexe de points tous intérieurs), situé dans le demi-plan $\sigma>\sigma_1$, ayant les caractères suivants :

(A) $\Delta$ contient des points $s$ tels que $\mathcal{R}s=\sigma>\sigma_A^\varphi$;

(B) la fonction $\varphi(s)$ est holomorphe dans $\Delta$, égale à la somme de la série $\Sigma b_p e^{-s\mu_p}$ pour $s\in\Delta$, $\sigma>\sigma_A^\varphi$.

Soit $\Delta_\varphi^{\sigma_1}$ le plus grand domaine qui contient chaque domaine $\Delta$ ayant les propriétés mentionnées, et qui possède la propriété de type (B), c'est-à-dire que $\varphi(s)$ est holomorphe dans $\Delta_\varphi^{\sigma_1}$ et est égale à la somme de la série $\Sigma b_p e^{-s\mu_p}$ pour $s\in\Delta_\varphi^{\sigma_1}$, $\sigma>\sigma_A^\varphi$. L'ensemble formé de tous les points du demi-plan $\sigma\geqq\sigma_1$ qui n'appartiennent pas à $\Delta_\varphi^{\sigma_1}$ est représenté par $S_\varphi^{\sigma_1}$ et appelé « l'ensemble singulier de $\varphi(s)$ par rapport au demi-plan $\sigma>\sigma_1$ » (²). Enfin, $\Delta_\varphi^{\sigma_1}$ possède l'importante propriété suivante : $\varphi(s)$ ne peut être prolongée analytiquement, à partir d'un point de son demi-plan de convergence, jusqu'à un point de $S_\varphi^{\sigma_1}$ le

(¹) *Un problème de composition des singularités des séries de Dirichlet générales* (*Acta Mathematica*, t. 89, 1953, p. 217-242); *Quelques théorèmes fabériens relatifs au problème Hadamard-Mandelbrojt* (*Rend. Cir. Mat. Palermo*, 2ᵉ série, t. 3, 1954, p. 214-243); *C. R. Acad. Sc.*, t. 226, 1948, p. 1666; t. 228, 1949, p. 1915; t. 230, 1950, p. 1565 et t. 234, 1952, p. 179.

(²) S. Mandelbrojt, *Dirichlet series* (*The rice Institute Pamphlet*, vol. 31, 1944).

long d'un arc de Jordan sans point commun avec la droite $\sigma = \sigma_1$. L'ensemble $S_\varphi^{\sigma_1}$ est fermé.

Les points de la droite $\sigma = \sigma_1$ appartiennent à $S_\varphi^{\sigma_1}$. Si $\sigma'_1 < \sigma_1$, on a évidemment $\Delta_\varphi^{\sigma_1} \subset \Delta_\varphi^{\sigma'_1}$.

S'il existe $\sigma_1$ tel que $S_\varphi^{\sigma_1}$ ne se réduit pas à la droite $\sigma = \sigma_1$, c'est-à-dire si l'on a pour $\sigma_1$ suffisamment petit algébriquement $\sigma_1 < \overline{\text{borne}}\,\sigma$ pour $s \in S_\varphi^{\sigma_1}$, alors la fonction $\varphi(s)$ n'est pas entière; le nombre $\sigma_{\mathcal{H}}^\varphi = \overline{\text{borne}}\,\sigma$, $s \in S_\varphi^{\sigma_1}$ est l'abscisse d'holomorphie de $\varphi(s)$.

Notons $P_\varphi$ le demi-plan $\sigma \geqq \sigma_1$. La branche principale de $\varphi(s)$ est holomorphe dans $\complement_{P_\varphi} S_\varphi^{\sigma_1}$ et admet $S_\varphi^{\sigma_1}$ pour ensemble singulier par rapport à $P_\varphi(\sigma > \sigma_1)$.

Le point $\beta \in S_\varphi^{\sigma_1}$ est dit « accessible » (3) pour $\varphi(s)$ s'il existe un cercle ouvert de centre $\beta$ et de rayon $\rho > 0$ tel que l'on peut choisir, dans ce cercle, un diamètre (partageant ce cercle en deux demi-cercles ouverts) partagé par le point $\beta$ en deux rayons « ouverts », de sorte que la fonction $\varphi(s)$ soit régulière dans au moins un des demi-cercles et sur au moins un des rayons.

Soit $\psi(s) = \sum_r (-1)^r \frac{\gamma_r \varphi^{(r)}(s)}{\Gamma(r+1)}$; la fonction $\theta(z) = \sum \frac{\gamma_r z^r}{\Gamma(r+1)}$ est dite la « génératrice » de cet opérateur.

G. Pólya a énoncé (4) :

*Si la « génératrice » ($\not\equiv 0$) est de type exponentiel et à diagramme indicateur se réduisant au point origine, alors :*

1° *tout point régulier pour $\varphi(s)$ est régulier pour $\psi(s)$;*

2° *tout point singulier « accessible » pour $\varphi(s)$ est aussi singulier pour $\psi(s)$.*

Les notions, fonction entière de type exponentiel et diagramme indicateur d'une fonction, sont suffisamment connues pour ne pas avoir à les rappeler.

Je me propose, dans ce travail, de retrouver cette propriété pour une certaine classe de fonctions $\varphi(s)$ et une certaine classe de génératrices $\theta(z)$, et de compléter par quelques propriétés des points singuliers « non accessibles ».

Je dis qu'un point $\beta \in S_\varphi^{\sigma_1}$, avec $\mathcal{R}\beta = \sigma_{\mathcal{H}}^\varphi$, est « semi-isolé sur l'axe d'holomorphie » (5) de $\varphi(s)$, s'il est point frontière d'un intervalle ouvert de mesure positive, situé sur cet axe, et régulier pour $\varphi(s)$. Il est évident que si $\beta \in S_\varphi^{\sigma_1}$, $\mathcal{R}\beta = \sigma_{\mathcal{H}}^\varphi$, est « accessible », il est aussi « semi-isolé ... » et réciproquement. Me limitant à des fonctions $\varphi(s)$ définies dans un demi-plan par une série de

(3) G. Pólya, *Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen* (*Ann. Math.*, 1933).
(4) *Loc. cit.* et *Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 1927, p. 187-195.
(5) G. Pólya a introduit la notion de point « semi-isolé sur le cercle de convergence » d'un développement taylorien. Consulter à ce sujet *Untersuchungen über Lücken* ... (*Ann. Math.*, 1933).

Dirichlet générale à exposants réels et aux points singuliers situés sur l'axe d'holomorphie, j'ai préféré, dans les énoncés que je donne, substituer l'expression « semi-isolé sur l'axe d'holomorphie » au terme « accessible » ([6]).

Je dis que le point $\beta \in S_{\varphi}^{\sigma_1}$, avec $\mathcal{R}\beta = \sigma_{\mathcal{H}}^{\varphi}$, est singulier du type « coupure » pour la fonction $\varphi(s)$ s'il existe un cercle $c(\beta, \rho)$, $\rho > 0$, tel que pour tout $s \in c(\beta, \rho)$, avec $\mathcal{R}s > \sigma_{\mathcal{H}}^{\varphi}$, la fonction $\varphi(s)$ admet la représentation $\varphi(s) = \mathcal{R}(s) + \mathcal{L}(s)$, où $\mathcal{R}(s)$ est une fonction holomorphe dans le domaine union du demi-plan $\mathcal{R}s > \sigma_{\mathcal{H}}^{\varphi}$ et du cercle $c(\beta, \rho)$, et où $\mathcal{L}(s)$ holomorphe dans $\mathcal{R}s > \sigma_{\mathcal{H}}^{\varphi}$ admet l'axe $\sigma = \sigma_{\mathcal{H}}^{\varphi}$ pour frontière naturelle.

Enfin, si $\mathcal{L}(s)$ est, dans son demi-plan d'existence, définie par la somme (ou son prolongement analytique) d'une série de Dirichlet dont la suite des exposants réels est mesurable et à densité nulle, je dirais que $\beta$ est singulier du type « coupure » et de classe zéro.

Soit $\{\mu_p\}$, $0 < \mu_p \uparrow \infty$, une suite mesurable ou, plus généralement, à densité maximum finie D. V. Bernstein ([7]) a considéré certains ensembles de segments qui contiennent tous les $\mu_p$ comme points intérieurs. Ils les a appelés « ensembles de voisinage de la suite $\{\mu_p\}$ ».

Un tel ensemble, que l'on désigne par $E(q, \{\mu_p\})$, est construit de la manière suivante :

A chaque point $\mu_p$ faisons correspondre sur l'axe portant la suite $\{\mu_p\}$ un intervalle $h_p$ de longueur $q \leqq \frac{1}{10 D'}$, $D' \geqq D$, de façon que le point frontière gauche de cet intervalle coïncide avec le point $\mu_p$ ou avec le point frontière droit de l'intervalle $h_{p-1}$, et précisément avec celui des deux points qui est situé le plus à droite. Faisons aussi correspondre à chaque point $\mu_p$ un second intervalle $h'_p$ de longueur $q$ de sorte que, cette fois-ci, le point frontière droit de cet intervalle coïncide avec le point $\mu_p$ ou avec le point frontière gauche de l'intervalle $h'_{p+1}$, et précisément avec celui de ces deux points qui est situé le plus à gauche (on démontre, qu'en fait, un intervalle $h'_p$ peut être construit à l'aide d'un nombre « fini » d'opérations).

$E(q, \{\mu_p\})$ désigne précisément la fermeture de l'ensemble des points qui appartiennent à tous les intervalles $h_p$, $h'_p$, $p = 1, 2, 3, \ldots$. Cet ensemble est constitué par une suite de segments disjoints, chacun d'eux étant la fermeture de l'union d'un certain nombre d'intervalles $h_p$ et $h'_p$. Il possède, entre autres

---

([6]) Récemment R. Wilson a publié, au sujet de la propriété de G. Pólya, un essai apparenté à ce Mémoire, mais relatif aux développements tayloriens. Les méthodes sont totalement différentes. *Voir* à ce sujet le Mémoire de cet auteur : *A note on a theorem of Pólya's* [*Quart. J. Math.*, Oxford, (A), t. 3, 1952, p. 145-150].

([7]) *Sur les points singuliers des séries de Dirichlet* (*Rend. R. Ist. Lomb. Sc. Lett.*, t. 63, 1930); *Sopra alcuni teoremi relativi ai punti singolari delle serie di Dirichlet* (*Rend. R. Acc. Lincei*, t. 16, 1932); *Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet générales* (Paris, 1933, Note I).

propriétés, les suivantes :

(1) chaque segment de l'ensemble contient au moins un point $\mu_p$, et chaque $\mu_p$ appartient à un segment;

(2) si $l$ désigne la longueur d'un segment de l'ensemble et si $\nu$ désigne le nombre des points $\mu_p$ intérieurs à ce segment, on a $(\nu+1)q \leqq l \leqq 2\nu q$;

(3) si $z$ (réel fixe situé sur l'axe portant $\{\mu_p\}) \notin E(q, \{\mu_p\})$, on a $\underline{\text{borne}}\,|z-\mu_p| > q$.

Ce choix, $D' \geqq D$, permet de ne pas exclure la considération des suites $\{\mu_p\}$ à densité nulle. Nous n'entrerons pas dans le détail des propriétés de l'ensemble $E(q, \{\mu_p\})$, renvoyant le lecteur aux Mémoires originaux.

Une autre notion, due également à V. Bernstein, nous est utile : « l'indice de condensation de la suite $\{\mu_p\}$ ». Soient $\mu_{p_\nu}, \mu_{p_\nu+1}, \ldots, \mu_{p_\nu+n_\nu}$ les $n_\nu+1$ points de $\{\mu_p\}$ qui appartiennent au $\nu^{\text{ième}}$ segment de l'ensemble $E(q, \{\mu_p\})$.

Posons

$$\varepsilon_{\nu,r} = \frac{1}{\Gamma(n_\nu+1)} \prod_{\substack{t=0 \\ (t\neq r)}}^{t=n_\nu} (\mu_{p_\nu+t} - \mu_{p_\nu+r}) \qquad (r=0, 1, 2, \ldots, n_\nu)$$

(ceci suppose $n_\nu \geqq 1$)

$$\eta_\nu = \overline{\text{borne}}\, \frac{1}{\mu_{p_\nu+r}} L \frac{1}{|\varepsilon_{\nu,r}|} \qquad (r=0, 1, 2, 3, \ldots, n_\nu)$$

[si $n_\nu = 0$, c'est-à-dire si le $\nu^{\text{ième}}$ segment de l'ensemble $E(q, \{\mu_p\})$ ne contient que le point $\mu_{p_\nu}$, on posera par définition $\eta_\nu = 0$].

Posons $\overline{\lim}\, \eta_\nu = \Delta$. C'est ce nombre qui est « l'indice de condensation de la suite $\{\mu_p\}$ ». On sait que, si $\{\mu_p\}$ est mesurable à densité finie, on a

$$\Delta = \overline{\lim}\, \frac{1}{\mu_p} L \frac{1}{|C'(\mu_p)|},$$

où $C'(z)$ est la dérivée de

$$C(z) = \prod_{p=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\mu_p^2}\right).$$

Certains auteurs appellent suite « régulière », une suite $\mu_p \uparrow \infty$ satisfaisant à la condition $\underline{\lim}(\mu_{p+1} - \mu_p) = h > 0$; on sait, qu'alors, elle est à densité maximum au plus égale à $\frac{1}{h}$. Dans ce Mémoire, je conviens d'appeler suite « presque régulière » une suite réelle positive strictement croissante, $\{\mu_p\}$, possédant les propriétés suivantes :

(1) elle est à densité maximum finie D (elle peut, évidemment, être mesurable);

(2) posant $D' \geqq D$ ($D' > D$ si $D = 0$, $D' = D$ si $D > 0$), il existe $q_0 \left(0 < q_0 \leqq \frac{1}{10 D'}\right)$

suffisamment petit de sorte que les segments disjoints qui constituent l'ensemble de voisinage, $E(q_0, \{\mu_p\})$, soient de longueur uniformément bornée;

(3) on peut toujours extraire, de cette suite $\{\mu_p\}$, une suite partielle $\{\mu_{p_j}\}$ mesurable à densité nulle de sorte que la suite complémentaire à $\{\mu_{p_j}\}$ par rapport à $\{\mu_p\}$ soit à indice de condensation fini.

Il est évident que (2) entraîne que le nombre des points $\mu_p$ intérieurs à un même segment de $E(q_0, \{\mu_p\})$ est lui-même borné. Il est non moins évident qu'une suite « régulière » est un cas particulier d'une suite « presque régulière » : la suite $\{\mu_{p_j}\}$ de (3) est alors vide et l'indice de condensation de $\{\mu_p\}$ est nul.

## CHAPITRE II.

Avant d'aborder la démonstration des théorèmes I et II notons que :

Le théorème I suppose connu le théorème de G. Pólya relatif aux points singuliers «accessibles», et a pour objet, dans un certain champ d'hypothèses, d'étendre ce théorème à tous les points singuliers de $\varphi(s)$ situés sur l'axe d'holomorphie de cette fonction. Le théorème II a pour objet de retrouver par voie analytique, toujours dans un certain champ d'hypothèses, la propriété de G. Pólya en la limitant aux points singuliers de l'axe d'holomorphie de $\varphi(s)$. La technique utilisée pour chaque théorème est dans son principe, comme je l'ai annoncé dans l'introduction, l'usage d'un théorème fondamental de V. Bernstein; toutefois la méthode comporte des modifications sensibles d'un théorème à l'autre. *On peut donner au théorème* I *une démonstration calquée sur celle du théorème* II, *démonstration qui établit l'assertion sans faire intervenir le théorème de G. Pólya.* Il n'y a pas là un grand avantage; j'ai préféré, au contraire, éviter la monotonie qui résulterait de la systématisation d'une méthode. En conclusion à ces remarques préliminaires disons que, avec les restrictions imposées par la technique utilisée, on retrouve, pour une classe intéressante de fonctions $\varphi(s)$, le théorème de G. Pólya, et que cette même technique permet d'obtenir des résultats complémentaires non formulés par cet auteur.

Théorème I. — *Dans les hypothèses :*

(1) *la suite des exposants* $\{\mu_p\}$ *de la série* $\varphi(s) = \Sigma b_p e^{-s\mu_p}$, *avec* $\sigma_c^\varphi < \infty$, *est mesurable à densité finie* $D > 0$; $\varphi(s)$ *n'admet pas son axe d'holomorphie,* $\sigma = \sigma_{\mathcal{H}}^\varphi > -\infty$, *pour frontière naturelle,*

(2) $\theta(z)$ *est une fonction entière du genre zéro dont tous les zéros (sauf un nombre fini au plus) sont réels négatifs.*

*Si* $\beta \in S_\varphi^{\sigma_1}$, *avec* $\mathcal{R}\beta = \sigma_{\mathcal{H}}^\varphi$, *ce point est aussi singulier pour* $\psi(s) = \Sigma b_p \theta(\mu_p) e^{-s\mu_p}$

(*la démonstration ci-dessous se limite au cas où l'ordre de multiplicité des zéros de* $\theta(z)$ *est uniformément borné*) [8].

Notons $\{\rho_p\}$ la suite des zéros réels négatifs « distincts » de $\theta(z)$ ordonnée selon la suite strictement croissante de leurs modules. Soit $m_p$ l'ordre de multiplicité du zéro $\rho_p$. La fonction $\theta(z)$ peut s'écrire

$$\theta(z) = \mathrm{P}(z) \prod_p \left(1 - \frac{z}{\rho_p}\right)^{m_p} = \mathrm{P}(z)\, \Theta(z),$$

où $\mathrm{P}(z)$ est un polynome à zéros non négatifs.

On sait que $\lim \frac{p}{\rho_p} = 0$ et que $\theta(z)$, $\Theta(z)$ sont du type exponentiel minimum (c'est-à-dire d'ordre « apparent » inférieur à 1 ou au plus du type minimum de l'ordre « apparent » 1). Remarquons que si l'on avait supposé $\theta(z)$ du type minimum de l'ordre 1, alors $\theta(z)$ aurait eu la représentation

$$\theta(z) = \mathrm{P}(z)\, e^{az} \prod_p \left(1 - \frac{z}{\rho_p}\right) e^{\frac{z}{\rho_p}}$$

(ici, les zéros réels négatifs figurent un nombre de fois égal à leur ordre de multiplicité et sont ordonnés selon la suite « non décroissante » de leurs modules).

On sait (théorème de Lindelöf) [9] qu'alors

$$\lim \left\{ a + \sum_{p=1}^{m} \frac{1}{\rho_p} \right\} = 0, \qquad \lim \frac{m}{\rho_m} = 0, \qquad m \to \infty;$$

par conséquent

$$\theta(z) = \mathrm{P}(z) \lim \prod_{p=1}^{m} \left(1 - \frac{z}{\rho_p}\right),$$

expression identique à celle ci-dessus si l'on met en évidence les ordres de multiplicité des zéros distincts. En outre, les zéros $\rho_p$ étant tous de même signe, (—), $\theta(z)$ et $\Theta(z)$ sont donc de genre zéro.

---

[8] Il est bien évident (et il est à peine besoin de l'indiquer) que sous cette assertion à forme condensée il faut entendre que $\beta$ est singulier pour la fonction $\psi(s)$ définie comme il a été précisé dans l'introduction à partir de la somme de la série $\Sigma b_p \theta(\mu_p) e^{-s\mu_p}$ lorsque $s$ finie est intérieure au demi-plan $\sigma > \sigma_{\mathcal{C}}^{\psi}$; on a $\beta \in \mathrm{S}_{\psi}^{\sigma_1}$ ($\sigma_1$ arbitrairement petit algébriquement). Remarquons aussi que les notations $\beta \in \mathrm{S}_{\varphi}^{\sigma_1}$, $\mathcal{R}\beta = \sigma_{\mathcal{H}}^{\varphi}$, jointes à la condition que $\sigma = \sigma_{\mathcal{H}}^{\varphi}$ n'est pas frontière naturelle pour $\varphi(s)$ supposent implicitement que $\sigma_1$ est choisi algébriquement suffisamment petit de sorte que $\mathrm{S}_{\varphi}^{\sigma_1}$ ne se réduit pas à l'axe $\sigma = \sigma_{\mathcal{H}}^{\varphi}$. En général $\sigma_1$ sera pris aussi petit algébriquement qu'il est nécessaire pour les besoins de la technique utilisée.

[9] *Ann. Éc. Norm. Sup.*, 3e série, t. 22, 1905, p. 369-395.

Il existe un entier $p_0$ tel que

$$\theta(\mu_p) \neq 0, \qquad p \geqq p_0, \qquad \mu_p > 0.$$

Posons

$$\psi_0(s) = \sum_{p \geqq p_0} b_p \theta(\mu_p) e^{-s\mu_p}, \qquad \psi(s) = \psi_0(s) + \mathcal{D}(s),$$

$\mathcal{D}(s)$ est un polynome de Dirichlet pouvant se réduire à la constante zéro. La fonction $\psi(s)$ est régulière dans tout domaine intérieur à $\complement_{\overline{P}_\varphi} S_\varphi^{\sigma_1}$. On le voit très facilement en posant

$$\theta(z) = \sum \frac{(-1)^r \gamma_r z^r}{\Gamma(r+1)}, \qquad \text{où} \quad \lim \gamma_r^{\frac{1}{r}} = 0;$$

$\psi_0(s)$ s'écrit, en posant $\varphi_0(s) = \sum\limits_{p \geqq p_0} b_p e^{-s\mu_p}$,

$$\psi_0(s) = \sum \frac{\gamma_r \varphi_0^{(r)}(s)}{\Gamma(r+1)}.$$

Cette série converge en tout point intérieur à $\complement_{\overline{P}_\varphi} S_\varphi^{\sigma_1}$.

Posons

$$s = \mathfrak{Z} + \beta, \qquad \Psi_0(\mathfrak{Z}) = \psi_0(\mathfrak{Z} + \beta) = \sum_{p \geqq p_0} b'_p \theta(\mu_p) e^{-\mathfrak{Z}\mu_p},$$

$$b'_p = b_p e^{-\beta\mu_p}, \qquad \mathcal{R}\mathfrak{Z} = x, \qquad \Phi(\mathfrak{Z}) = \varphi(\mathfrak{Z} + \beta).$$

Notons $\{\mu_p\}_0$ la suite des exposants de la série $\varphi_0(s)$.

Supposons fausse l'assertion du théorème. Le point $\beta$, singulier pour $\varphi(s)$, est alors centre d'un intervalle (ouvert), de longueur $2l$, $l > 0$, situé sur l'axe $\sigma = \sigma_{\mathcal{H}}^\varphi$, et dont tous les points sont réguliers pour $\psi_0(s)$. Dans le plan de la variable $\mathfrak{Z}$, la même propriété a lieu pour $\Psi_0(\mathfrak{Z})$ dans un intervalle de même longueur, de centre $\mathfrak{Z} = 0$, situé sur l'axe $\mathcal{R}\mathfrak{Z} = 0$.

Eu égard à la classe des fonctions $\varphi(s)$ considérées, il existe des points réguliers sur $\sigma = \sigma_{\mathcal{H}}^\varphi$ pour $\varphi(s)$, donc aussi pour $\varphi_0(s)$ et $\psi_0(s)$. Par conséquent, il existe des points « semi-isolés sur l'axe d'holomorphie » pour $\varphi(s)$ [donc « accessibles » pour $\varphi(s)$] et singuliers pour $\psi_0(s)$ et $\psi(s)$ ([10]). Ainsi, on a nécessairement $x_{\mathcal{H}}^{\Psi_0} = 0$.

D'après un résultat classique, on a $l \leqq \pi D$.

On ne considère pas ici le plus grand intervalle ouvert de centre $\mathfrak{Z} = 0$, situé sur l'axe $\mathcal{R}\mathfrak{Z} = 0$, et dont tous les points sont réguliers pour $\Psi_0(\mathfrak{Z})$, mais de

---

([10]) C'est pour légitimer cette assertion qu'on utilise le théorème de G. Pólya rappelé au chapitre I.

préférence un intervalle de longueur positive centré au point $\mathfrak{Z}=0$ et dont la fermeture appartient à celui-ci (ses points frontières sont alors à distance positive des points frontières du précédent).

Eu égard à cette remarque, il n'y a aucun inconvénient à représenter encore par $2l$ la longueur d'un tel intervalle, mais l'inégalité $l<\pi D$ est évidemment seule légitime.

Alors, eu égard à (1), aux remarques précédentes et à la condition nécessaire d'un théorème de V. Bernstein [11], on peut trouver, dans le plan de la variable $z$, une fonction $\Omega(z)$ holomorphe dans un secteur $S\left(|\arg z|\leqq\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$, d'ouverture $2\alpha>0$, telle que

$$(a)\qquad |\Omega(z)|<e^{[(\pi D-l)|\sin\omega|+\varepsilon]|z|},\qquad z\in S,\qquad z=|z|e^{i\omega},$$

$\varepsilon<0$ arbitraire, $|z|$ suffisamment grand;

$$(b)\qquad \Omega(\mu_p)=b'_p\theta(\mu_p)C'(\mu_p),\qquad p\geqq p_0,$$

où $C'(z)$ est la dérivée de

$$C(z)=\prod_{p\geqq p_0}\left(1-\frac{z^2}{\mu_p^2}\right).$$

On sait que $\Psi_0(\mathfrak{Z})$ est holomorphe, non seulement dans le demi-plan $\mathcal{R}\mathfrak{Z}>x_{\mathcal{H}}^{\Psi_0}=0$ (que l'on note $\mathfrak{T}_0$), mais aussi dans le domaine $T\cup\mathfrak{T}_0$, où $T$ est l'ensemble des points intérieurs au triangle isoscèle de base $|\mathcal{I}\mathfrak{Z}|<l$, $\mathcal{R}\mathfrak{Z}=0$, et de sommet au point d'affixe réel $-l\,\mathrm{tg}\,\alpha$, auquel on ajoute les points de l'intervalle (ouvert) de base.

Notons $\{\mu'_p\}$ l'ensemble $\{-\rho_p\}\cap\{\mu_p\}_0$ ordonné en une suite strictement croissante. Il est évident que cet ensemble peut être vide.

Posons $M(z)=\Pi\left(1+\frac{z}{\mu'_p}\right)^{\nu_p}$, $\nu_p$ étant l'ordre de multiplicité du zéro $-\mu'_p$ de $\theta(z)$; cette fonction est évidemment de type exponentiel minimum et de genre zéro, et peut se réduire à un polynome (ou à la constante 1, par définition, si $\{\mu'_p\}$ est vide).

Notons $\{-\rho'_p\}$ la suite complémentaire à la suite $\{\mu'_p\}$ par rapport à la suite $\{-\rho_p\}$; $-\rho'_p\uparrow\infty$ (cette suite peut se réduire à un ensemble fini ou vide).

On a

$$\Theta(z)=M(z)\,\Theta_1(z),\qquad \text{avec}\quad \Theta_1(z)=\Pi\left(1-\frac{z}{\rho'_p}\right)^{m'_p};$$

$m'_p$ étant l'ordre de multiplicité du zéro $\rho'_p$ de $\Theta(z)$.

Posons $\theta_1(z)=\Pi\left(1-\frac{z}{\rho'_p}\right)$, chacun des $\rho'_p$ étant zéro de $\theta_1(z)$ à l'ordre 1;

---

(11) *Sur les points singuliers des séries de Dirichlet* (*Rend. R. Ist. Lomb. Sc. Lett.*, t. 63, 1930) et *Leçons sur les progrès récents...*, chap. V, 1933, Paris.

évidemment $\theta_1(z)$ est de genre zéro et de type exponentiel minimum [on suppose que $\Theta_1(z)$ ne se réduit pas à un polynome ou à la constante 1].

Posons

$$\Theta_1^\star(z) = \Pi\left(1 - \frac{z}{\rho'_p}\right)^{m'_p - 1}.$$

On a

$$\Theta_1(z) = \theta_1(z)\,\Theta_1^\star(z),$$

$$\theta_1(z)\,\theta_1(-z) = \Pi\left(1 - \frac{z^2}{\rho'^2_p}\right).$$

Notons $\{\mu_p^\star\}$ l'ensemble $\{-\rho'_p\} \cup \{\mu_p\}_0$ ordonné en une suite strictement croissante. La suite $\{\mu_p^\star\}$ est mesurable et de même densité D que la suite $\{\mu_p\}_0$.

Posons

$$\mathcal{C}_1(z) = \theta_1(z)\,\theta_1(-z)\,C(z);$$

on a

$$\mathcal{C}'_1(\mu_p^\star) \neq 0.$$

Considérons la fonction

$$\Omega_1(z) = \Omega(z)\,\theta_1(-z), \qquad z \in S.$$

Il est évident que

$$(a') \qquad |\Omega_1(z)| < e^{[(\pi D - l)|\sin\omega| + \varepsilon]|z|}, \qquad z \in S,$$

$\varepsilon > 0$ arbitraire, $|z|$ suffisamment grand, les nombres D et $l$ étant les mêmes que dans $(a)$,

$$(b') \qquad \Omega_1(\mu_p) = b'_p P(\mu_p)\,M(\mu_p)\,\Theta_1^\star(\mu_p)\,\mathcal{C}'_1(\mu_p), \qquad p \geqq p_0.$$

Considérons la série

$$\Psi_{01}(\mathfrak{Z}) = \sum \frac{\Omega_1(\mu_p^\star)}{\mathcal{C}'_1(\mu_p^\star)} e^{-\mathfrak{Z}\mu_p^\star}.$$

Fixons $p$ et considérons $\mu_p^\star$.

Si $\mu_p^\star \in \{-\rho'_n\}$, alors $\Omega_1(\mu_p^\star) = \Omega(\mu_p^\star)\,\theta_1(-\mu_p^\star) = 0$; par conséquent,

$$\Psi_{01}(\mathfrak{Z}) = \Sigma\, b'_p P(\mu_p)\,M(\mu_p)\,\Theta_1^\star(\mu_p)\,e^{-\mathfrak{Z}\mu_p}.$$

On a donc

$$x_{\mathcal{C}}^{\Psi_{01}} = \overline{\lim} \frac{L|b'_p|}{\mu_p} = \sigma_{\mathcal{C}}^{\varphi} - \mathcal{R}\beta < \infty.$$

On a, en outre, $x_{\mathcal{H}}^{\Psi_{01}} \leqq 0$; en effet,

$$\Psi_{01}(\mathfrak{Z}) = \sum \frac{\gamma'_r \varphi^{(r)}(\mathfrak{Z} + \beta)}{\Gamma(r+1)},$$

où l'on pose, comme plus haut,

$$P(z)\,M(z)\,\Theta_1^\star(z) = \sum \frac{(-1)^r \gamma'_r z^r}{\Gamma(r+1)}, \qquad \text{avec} \quad \lim \gamma'^{\frac{1}{r}}_r = 0 \quad (^{12}),$$

(12) Si toutefois $P(z)\,M(z)\,\Theta_1^\star(z)$ ne se réduit pas à un polynome, auquel cas il est immédiat que $x_{\mathcal{H}}^{\Psi_{01}} = 0$.

et, par conséquent,

$$x_{\mathcal{H}}^{\Psi_{01}} \leqq \sigma_{\mathcal{H}}^{\varphi} - \mathcal{R}\beta = \sigma_{\mathcal{H}}^{\psi} - \mathcal{R}\beta = x_{\mathcal{H}}^{\Psi_0} = 0.$$

Or, si l'on écrit $\Psi_{01}(\mathfrak{Z}) = \Sigma b''_p e^{-\mathfrak{Z}\mu_p}$, on voit que

$$\Psi_0(\mathfrak{Z}) = \Sigma b''_p \theta_1(\mu_p) e^{-\mathfrak{Z}\mu_p}$$

et que tout point singulier pour $\Psi_0(\mathfrak{Z})$ situé sur $\mathcal{R}\mathfrak{Z} = x_{\mathcal{H}}^{\Psi_0}$ est évidemment singulier pour $\Psi_{01}(\mathfrak{Z})$; d'où résulte, nécessairement, $x_{\mathcal{H}}^{\Psi_{01}} \geqq x_{\mathcal{H}}^{\Psi_0} = 0$; par conséquent, en rapprochant l'inégalité ci-dessus, on a $x_{\mathcal{H}}^{\Psi_{01}} = 0$.

La mesurabilité de $\{\mu_p^\star\}$, $x_{\mathcal{H}}^{\Psi_{01}} = 0$, $x_{\mathcal{C}}^{\Psi_{01}} < \infty$, $(a')$ et $(b')$ entraînent, eu égard à la condition suffisante du théorème déjà utilisé de V. Bernstein, que $\Psi_{01}(\mathfrak{Z})$ est holomorphe dans $T \cup \mathfrak{T}_0$.

Mais alors, eu égard à (1), $x_{\mathcal{H}}^{\Psi_{01}} = 0$, $\Omega_1(\mu_p^\star) = 0$ si $\mu_p^\star \in \{-\rho'_n\}$, $x_{\mathcal{C}}^{\Psi_{01}} < \infty$, et à la condition nécessaire du théorème de V. Bernstein, il existe une fonction $\Omega_{11}(z)$ holomorphe dans $S(|\arg z| \leqq \alpha)$, d'ouverture $2\alpha > 0$, telle que

$$(a'') \qquad |\Omega_{11}(z)| < e^{[(\pi D - l)|\sin\omega| + \varepsilon]|z|}, \qquad z \in S,$$

$\varepsilon > 0$ arbitraire, $|z|$ suffisamment grand; les nombres D, $l$ et $\alpha$ étant les mêmes que dans $(a')$ et $(a)$;

$$(b'') \qquad \Omega_{11}(\mu_p) = b'_p P(\mu_p) M(\mu_p) \Theta_1^\star(\mu_p) C'(\mu_p), \qquad p \geqq p_0.$$

Posons $\theta_2(z) = \Pi\left(1 - \frac{z}{\rho''_p}\right)$, où $\{\rho''_p\}$ est l'ensemble des zéros distincts de $\Theta_1^\star(z)$, d'ordre de multiplicité au moins égal à 2 pour $\Theta_1(z)$, ordonné en une suite strictement décroissante vers $-\infty$. Bien entendu, $\{\rho''_p\}$ peut se réduire à un ensemble fini ou même vide.

Posons $\Theta_2(z) = \Pi\left(1 - \frac{z}{\rho'_p}\right)^{m'_p - 2}$; bien entendu, tout $\rho'_p$ d'ordre 1 ou 2 pour $\theta(z)$ et $\Theta_1(z)$ ne figure plus dans $\Theta_2(z)$.

On a

$$\Theta_1^\star(z) = \theta_2(z)\,\Theta_2(z).$$

Considérons la fonction $\Omega_2(z) = \Omega_{11}(z)\,\theta_2(-z)$. Elle possède la propriété de type $(a)$, $(a')$ et $(a'')$ dans S, et la propriété de type $(b)$, $(b')$ et $(b'')$ qui s'écrit

$$(b''') \qquad \Omega_2(\mu_p) = b'_p P(\mu_p) M(\mu_p) \Theta_2(\mu_p) \mathcal{C}'_2(\mu_p), \qquad p \geqq p_0,$$

en posant $\mathcal{C}_2(z) = \Pi\left(1 - \frac{z^2}{\mu_p^{\star\star 2}}\right)$, où $\{\mu_p^{\star\star}\}$ est l'ensemble $\{-\rho''_p\} \cup \{\mu_p\}_0$ ordonné en une suite strictement croissante. Il est évident que $\{\mu_p^{\star\star}\} \subset \{\mu_p^\star\}$.

La série $\sum \frac{\Omega_2(\mu_p^{\star\star})\, e^{-\mathfrak{Z}\mu_p^{\star\star}}}{\mathcal{C}'_2(\mu_p^{\star\star})}$ se réduit, pour les mêmes raisons que précédemment, à

$$\Psi_{02}(\mathfrak{Z}) = \Sigma b'_p P(\mu_p) M(\mu_p) \Theta_2(\mu_p) e^{-\mathfrak{Z}\mu_p};$$

en raisonnant comme ci-dessus au sujet de $\Psi_{01}(\mathfrak{Z})$ on constaterait que $x_{\mathcal{H}}^{\Psi_{02}} = 0$.

Alors, puisque $\{\mu_p^{**}\}$ est mesurable de densité D, et eu égard aux propriétés de type ($a$) et ($b$) de $\Omega_2(z)$ et au théorème de V. Bernstein, la fonction $\Psi_{02}(\mathfrak{Z})$ est holomorphe dans $T \cup \mathfrak{T}_0$.

On définirait de la même façon, à partir de $\Psi_{02}(\mathfrak{Z})$, une fonction

$$\Psi_{03}(\mathfrak{Z}) = \Sigma b'_p P(\mu_p) M(\mu_p) \Theta_3(\mu_p) e^{-\mathfrak{Z}\mu_p}, \qquad p \geqq p_0,$$

holomorphe dans $T \cup \mathfrak{T}_0$, où $\Theta_3(z) = \Pi\left(1 - \frac{z}{\rho'_p}\right)^{m'_p - 3}$ ne renferme que les zéros, d'ordre au moins égal à 4 pour $\Theta_1(z)$, extraits de la suite $\{\rho'_p\}$. Plus généralement, on définira ainsi une suite de fonctions $\{\Psi_{0n}(\mathfrak{Z})\}$ telle que

$$\Psi_{0n}(\mathfrak{Z}) = \sum_{p \geqq p_0} b'_p P(\mu_p) M(\mu_p) \Theta_n(\mu_p) e^{-\mathfrak{Z}\mu_p},$$

holomorphe dans $T \cup \mathfrak{T}_0$, où $\Theta_n(z) = \Pi\left(1 - \frac{z}{\rho'_p}\right)^{m'_p - n}$ ne renferme que les zéros, d'ordre au moins égal à $n+1$ pour $\Theta_1(z)$, extraits de la suite $\{\rho'_p\}$. Bien entendu, cette suite $\{\Psi_{0n}(\mathfrak{Z})\}$ peut se réduire à un ensemble fini, ce qui se produit si $\overline{\text{borne}}\, m_p = N < \infty$ (cas auquel on se limite).

S'il existe une infinité de zéros d'ordre N, on aura $\Theta_N(z) \equiv 1$. On est certain, en répétant un nombre fini de fois le raisonnement ci-dessus, d'aboutir à une certaine fonction holomorphe dans $T \cup \mathfrak{T}_0$,

$$\Psi_{0N_1}(\mathfrak{Z}) = \Sigma b'_p P_1(\mu_p) M(\mu_p) e^{-\mathfrak{Z}\mu_p}, \qquad \text{avec} \quad N_1 \leqq N,$$

où $P_1(z)$ est un certain polynome pouvant se réduire au polynome $P(z)$. Si l'ensemble $\{\mu'_p\}$ est fini ou vide, alors $M(z)$ se réduit à un polynome ou à la constante 1, et puisque $P_1(z) M(z)$ est encore un polynome la fonction $\Phi_0(\mathfrak{Z})$ définie par la série $\sum_{p \geqq p_0} b'_p e^{-\mathfrak{Z}\mu_p}$ est régulière au point $\mathfrak{Z} = 0$. Alors $\Phi_0(\mathfrak{Z}) = \varphi_0(s)$ qui n'est autre que $\varphi(s)$, à un polynome de Dirichlet près, est régulière au point $s = \beta$ ainsi que $\varphi(s)$. La contradiction, dans ce cas, établit le théorème.

Soit, maintenant, le cas général où $\{\mu'_p\}$ est une suite infinie. J'utilise un mode de raisonnement dû, dans son principe, à H. Bohr [13] et généralisé par V. Bernstein [14].

On peut choisir une suite réelle positive strictement croissante vers l'infini, $\{\lambda_p\}$, ayant les propriétés suivantes :

($a$) $\{\lambda_p\} \cap \{\mu_p\} = \emptyset$;

($b$) posant $\mu_p = \lambda_p + \varepsilon_p$, la série $\varepsilon(\mathfrak{Z}) = \Sigma \varepsilon_p e^{-\mathfrak{Z}\mu_p}$ admet $x_\Lambda^\varepsilon = -\infty$.

---

([13]) *Einige Bemerkungen über das Konvergenz Problem Dirichletschen Reihen* (*Rend. Circ. Mat.*, t. 37, 1913).

([14]) *Leçons sur les progrès récents ...*, chap. II.

Posant $P_1(\mu_p)M(\mu_p) = P_1(\lambda_p)M(\lambda_p) + \eta_p$, $(b)$ entraine, comme on le constate facilement, que la série $B(\mathfrak{z}) = \Sigma b'_p \eta_p e^{-\mathfrak{z}\mu_p}$ admet $x_{\mathcal{C}}^{B} = -\infty$. Le choix d'une telle suite est évidemment possible et d'une infinité de manières.

Posons

$$\Phi^\star(\mathfrak{z}) = \Sigma b'_p P_1(\lambda_p) M(\lambda_p) e^{-\mathfrak{z}\lambda_p},$$
$$\Phi_\star(\mathfrak{z}) = \Sigma b'_p P_1(\lambda_p) M(\lambda_p) e^{-\mathfrak{z}\mu_p},$$
$$\mathcal{E}(\mathfrak{z}) = \Phi_\star(\mathfrak{z}) - \Phi^\star(\mathfrak{z}).$$

Les séries sont convergentes dans le demi-plan $\mathcal{R}\mathfrak{z} > \sigma_{\mathcal{C}}^{\varphi} - \mathcal{R}\beta = x_{\mathcal{C}}^{\Phi}$; les fonctions $\Phi^\star(\mathfrak{z})$, $\Phi_\star(\mathfrak{z})$ sont holomorphes dans le demi-plan $\mathcal{R}\mathfrak{z} > x_{\mathcal{H}}^{\Phi} = 0$. Il est facile d'établir que la fonction $\mathcal{E}(\mathfrak{z})$ est entière; en effet, soit $\mathfrak{z}$ tel que $\mathcal{R}\mathfrak{z} > x_{\mathcal{C}}^{\Phi^\star} = x_{\mathcal{C}}^{\Phi_\star}$; on a évidemment,

$$x_{A}^{\Phi^\star} = x_{\mathcal{C}}^{\Phi^\star} = x_{\mathcal{C}}^{\Phi_\star} = x_{A}^{\Phi_\star}.$$

Il est légitime d'écrire :

$$\Phi_\star(\mathfrak{z}) - \Phi^\star(\mathfrak{z}) = \Sigma b'_p P_1(\lambda_p) M(\lambda_p)(e^{-\mathfrak{z}\mu_p} - e^{-\mathfrak{z}\lambda_p}).$$

Soit $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit fixe; il existe un entier $P_1 = P_1(\varepsilon)$ tel que

$$\sum_{p \geqq p_1} |b'_p P_1(\lambda_p) M(\lambda_p)(e^{-\mathfrak{z}\mu_p} - e^{-\mathfrak{z}\lambda_p})| < \frac{e^{|\mathfrak{z}|\varepsilon}}{\varepsilon} \sum_{p \geqq p_1} |b'_p P_1(\lambda_p) M(\lambda_p) \varepsilon_p| e^{-x\lambda_p}.$$

Or, la série $\mathcal{E}^\star(\mathfrak{z}) = \Sigma b'_p P_1(\lambda_p) M(\lambda_p) \varepsilon_p e^{-\mathfrak{z}\lambda_p}$ est convergente en tout point du plan à distance finie puisque, compte tenu de $(b)$, on a

$$x_{A}^{\mathcal{E}^\star} = \lim \frac{L|b'_p P_1(\lambda_p) M(\lambda_p) \varepsilon_p|}{\lambda_p} = -\infty$$

(la suite $\{\lambda_p\}$ est mesurable et de même densité D que $\{\mu_p\}$).

La fonction $\mathcal{E}(\mathfrak{z})$ est donc entière.

Ainsi

$$\Psi_{0N_1}(\mathfrak{z}) = \Sigma b'_p P_1(\mu_p) M(\mu_p) e^{-\mathfrak{z}\mu_p} = \Phi_\star(\mathfrak{z}) + B(\mathfrak{z}) = \Phi^\star(\mathfrak{z}) + B(\mathfrak{z}) + \mathcal{E}(\mathfrak{z}),$$

et par conséquent les singularités à distance finie par rapport à un demi-plan quelconque $\mathcal{R}\mathfrak{z} > x_1$, $x_1 < x_{\mathcal{H}}^{\Psi_{0N_1}}$, de $\Psi_{0N_1}(\mathfrak{z})$ ont même répartition que les singularités à distance finie de $\Phi^\star(\mathfrak{z})$ par rapport à ce même demi-plan. En effet :

Il est évident que $x_{\mathcal{H}}^{\Psi_{0N_1}} = 0$ puisque $\Phi_0(\mathfrak{z})$ possède des points singuliers semi-isolés sur l'axe $x_{\mathcal{H}}^{\Phi_0} = 0$ qui sont aussi points singuliers semi-isolés pour $\Psi_{0N_1}(\mathfrak{z})$ holomorphe dans $\mathcal{R}\mathfrak{z} = x > 0$. On a $x_{\mathcal{H}}^{\Phi^\star} = 0$ [15].

---

[15] Ce résultat s'établit très simplement en comparant $\Phi(\mathfrak{z})$ et la fonction $A(\mathfrak{z})$ définie par $\Sigma b'_p e^{-\mathfrak{z}\lambda_p}$; on montre, comme pour $\mathcal{E}(z)$, que la fonction $\Phi(\mathfrak{z})$-$A(\mathfrak{z})$ est entière. Il suffit ensuite de tenir compte de l'existence de points singuliers semi-isolés sur l'axe d'holomorphie de $\Phi(\mathfrak{z})$ et de la nature de la suite des coefficients de $\Phi^\star(\mathfrak{z})$.

Soit $x_1$ tel que $-\infty < x_1 < 0$. Dans le plan de la variable $\mathfrak{Z}$, les ensembles singuliers $S^{x_1}_{\Psi_{0N_1}}$ et $S^{x_1}_{\Phi^\star}$ ne se réduisent pas à l'axe $x = x_1$. L'ensemble $\{\mu_p\} \cup \{\lambda_p\}$ peut être ordonné en une suite strictement croissante, $\{\lambda^\star_n\}$. La fonction $\mathcal{E}(\mathfrak{Z})$ admet alors, dans le demi-plan $\mathcal{R}\mathfrak{Z} > x^{\Phi^\star}_\Lambda = x^{\Phi_\star}_\Lambda$, la représentation $\sum_1^\infty b^\star_n e^{-\mathfrak{Z}\lambda_n}$ où la suite $\{b^\star_n\}$ est définie de la manière suivante : fixons $n$, s'il existe $p_0$ tel que $\lambda^\star_n = \lambda_{p_0}$, alors

$$b^\star_n = -b'_{p_0} P_1(\lambda_{p_0}) M(\lambda_{p_0}),$$

sinon il existe $p_1$ tel que $\lambda^\star_n = \mu_{p_1}$ et alors

$$b^\star_n = b'_{p_1} P_1(\lambda_{p_1}) M(\lambda_{p_1}).$$

On a, évidemment, $x^{\mathcal{E}}_\Lambda = x^{\Phi^\star}_\Lambda = x^{\Phi_\star}_\Lambda$. On peut donc définir pour la fonction $B(\mathfrak{Z}) + \mathcal{E}(\mathfrak{Z})$ son ensemble singulier par rapport au demi-plan $x > x_1$. Cet ensemble se réduit à l'axe $x = x_1$ quel que soit $x_1$ réel fini.

Soit $\mathfrak{Z}_0 \in \complement_{\bar{P}} S^{x_1}_{\Psi_{0N_1}}$, où P est le demi-plan $x \geqq x_1$. Écrire cette relation d'appartenance, c'est affirmer qu'il existe un domaine $\Delta$ tel que

$$\Delta \subset \complement_{\bar{P}} S^{x_1}_{\Psi_{0N_1}}, \qquad \mathfrak{Z}_0 \in \Delta, \qquad \Delta \cap P^{\Psi_{0N_1}}_{\mathcal{C}} \neq \emptyset,$$

où $P^{\Psi_{0N_1}}_{\mathcal{C}}$ est le demi-plan $x > x^{\Psi_{0N_1}}_{\mathcal{C}}$, et que la fonction $\Psi_{0N_1}(\mathfrak{Z})$ est holomorphe dans $\Delta \cup P^{\Psi_{0N_1}}_{\mathcal{C}}$ et est égale à la somme de la série $\Sigma b'_p P_1(\mu_p) M(\mu_p) e^{-\mathfrak{Z}\mu_p}$ pour $\mathfrak{Z} \in (\Delta \cap P^{\Psi_{0N_1}}_{\mathcal{C}})$. Il existera donc alors un domaine $\Delta'$ tel que

$$\Delta \subset \Delta', \qquad \Delta' \subset \complement_{\bar{P}} S^{x_1}_{\Psi_{0N_1}}, \qquad \Delta' \cap P^{\Phi}_{\mathcal{C}} \neq \emptyset.$$

Puisque $S^{x_1}_{B+\mathcal{E}}$ se réduit à l'axe $x = x_1$, le domaine $\Delta'$ est tel que

$$\Delta' \subset \complement_{\bar{P}} S^{x_1}_{\Phi^\star}, \qquad \Delta' \cap P^{\Phi^\star}_{\mathcal{C}} \neq \emptyset, \qquad \text{avec} \quad x^{\Phi^\star}_{\mathcal{C}} = x^{\Phi}_{\mathcal{C}}.$$

Par conséquent $S^{x_1}_{\Psi_{0N_1}} \supset S^{x_1}_{\Phi^\star}$. On montrerait de la même façon que $S^{x_1}_{\Psi_{0N_1}} \subset S^{x_1}_{\Phi^\star}$; d'où résulte $S^{x_1}_{\Psi_{0N_1}} = S^{x_1}_{\Phi^\star}$.

Les fonctions $\Psi_{0N_1}(\mathfrak{Z})$ et $\Phi^\star(\mathfrak{Z})$ ont par rapport à tout demi-plan $x > x_1$, avec $-\infty < x_1 < 0$, les mêmes points singuliers.

La fonction $\Phi^\star(\mathfrak{Z})$ est donc régulière à l'origine puisque $\Psi_{0N_1}(\mathfrak{Z})$ l'est. Or, la suite $\{\lambda_p\}$ étant mesurable et de densité $D > 0$, la fonction $M(\mathfrak{Z})$ étant telle que $\{\mu'_p\} \cap \{\lambda_p\} = \emptyset$, nous sommes ramenés au cas résolu ci-dessus.

Il en résulte, en itérant si besoin est [cas de l'existence d'une infinité de zéros multiples pour $M(z)$] la méthode utilisée, qu'on aboutit à une série de la forme

$$\sum_{p \geqq p_0} b'_p P_2(\lambda_p) e^{-\mathfrak{Z}\lambda_p} = \sum_r \delta_r \Lambda_0^{(r)}(\mathfrak{Z}),$$

où le polynome $P_2(z) = \Sigma(-1)^r \delta_r z^r$, et où la fonction $\Lambda_0(\mathfrak{Z}) = \sum_{p \geqq p_0} b'_p e^{-\mathfrak{Z}\lambda_p}$ est régulière à l'origine.

($b$) entraine que la fonction

$$\mathcal{E}_1(\mathfrak{Z}) = \sum_r \delta_r \Lambda_0^{(r)}(\mathfrak{Z}) - \sum \delta_r \Phi_0^{(r)}(\mathfrak{Z})$$

est entière. Donc,

$$\Phi_0(\mathfrak{Z}) = \Phi_0(s - \beta) = \varphi_0(s) = \sum_{p \geqq p_0} b_p e^{-s\mu_p}$$

est régulière au point $\mathfrak{Z} = 0$, ou $s = \beta$, et $\varphi(s)$ est régulière au point $\beta$.

La contradiction, dans ce cas général, achève d'établir le théorème.

Théorème II. — *Dans les hypothèses :*

(1) *la suite des exposants* $\{\mu_p\}$ *de la fonction* $\varphi(s) = \Sigma b_p e^{-s\mu_p}$, $\sigma_{\mathcal{C}}^{\varphi} < \infty$, *est « presque régulière », mesurable à densité finie* $D > 0$; $\varphi(s)$ *n'admet pas son axe d'holomorphie pour frontière naturelle* $(\sigma_{\mathcal{H}}^{\varphi} > -\infty)$;

(2) $\theta(z)$ *est une fonction entière du genre zéro dont les zéros sont réels positifs (sauf un nombre fini au plus) et à ordre de multiplicité uniformément borné (on se limitera au cas où la suite des zéros réels distincts est « presque régulière »)* [16].

*Alors si* $\beta \in S_{\varphi}^{\sigma_1}$ *est « semi-isolé sur l'axe d'holomorphie » de* $\varphi(s)$, *ce point est aussi singulier pour* $\psi(s) = \Sigma b_p \theta(\mu_p) e^{-s\mu_p}$.

Soit $\{\rho_p\}$ la suite strictement croissante des zéros positifs distincts, soit $m_p$ l'ordre de multiplicité de $\rho_p$. On a $\overline{\text{borne}}\, m_p = M < \infty$.

La fonction $\theta(z)$ admet la représentation

$$\theta(z) = P(z) \prod_p \left(1 - \frac{z}{\rho_p}\right)^{m_p},$$

où le polynome $P(z)$ est à zéros non positifs.

Comme au théorème I, on peut supposer que $\theta(z)$ est du type minimum de l'ordre 1 puisqu'on sait qu'alors, dans l'hypothèse où ses zéros sont tous du même signe (à un nombre fini près), cette fonction est nécessairement du genre zéro. On sait que $\sum \frac{1}{\rho_p} < \infty$ et que $\lim \frac{p}{\rho_p} = 0$.

---

[16] Il est évident que les trois conditions de « presque régularité » se réduisent à la condition (2).

Plus généralement, si la fonction $\theta(z)$ est du genre zéro à zéros tous réels (sauf un nombre fini au plus), elle est encore du type exponentiel minimum. Cette dernière remarque sera utilisée ultérieurement quand on combinera les résultats des théorèmes I et II.

Supposons que $\{\rho_p\} \cap \{\mu_p\} = \emptyset$ (l'intersection de ces deux suites est vide).

Posons

$$\Theta(z) = \Pi\left(1 - \frac{z}{\rho_p}\right)^{m_p}, \qquad \Theta_1(z) = \Pi\left(1 - \frac{z}{\rho_p}\right)^{m_p - 1}, \qquad \theta_1(z) = \Pi\left(1 - \frac{z}{\rho_p}\right);$$

on a

$$\theta(z) = \mathrm{P}(z)\,\Theta(z) = \mathrm{P}(z)\,\Theta_1(z)\,\theta_1(z).$$

Il est évident que les zéros de la fonction $\Theta_1(z)$ sont ceux de $\Theta(z)$ dont l'ordre de multiplicité est au moins égal à 2. La fonction $\Theta_1(z)$ peut se réduire à un polynome ou à la constante 1.

Supposons fausse l'assertion du théorème; soit donc $\beta$ régulier [17] pour $\psi(s)$.

*Premier cas :* $\sigma^{\psi}_{\mathcal{H}} = \sigma^{\varphi}_{\mathcal{H}}$. — Posons $s = \mathfrak{Z} + \beta$. On a

$$\psi(s) = \Psi(\mathfrak{Z}) = \Sigma b'_p\,\theta(\mu_p)\,e^{-\mathfrak{Z}\mu_p}, \qquad b'_p = b_p\,e^{-\beta\mu_p},$$

$\mathfrak{Z} = 0$ est point régulier pour $\Psi(\mathfrak{Z})$ qui admet $x^{\Psi}_{\mathcal{H}} = 0$, $\mathcal{R}\mathfrak{Z} = x$. L'origine dans le plan de la variable $\mathfrak{Z}$ est centre d'un intervalle (ouvert) de longueur $2l$, $l > 0$, situé sur l'axe d'holomorphie $\mathcal{R}\mathfrak{Z} = x^{\Psi}_{\mathcal{H}} = 0$, dont tous les points sont réguliers pour $\Psi(\mathfrak{Z})$. On sait, en vertu d'une propriété classique, que $l \leqq \pi\mathrm{D}$. Comme au théorème I, convenons de représenter par $2l$, $l > 0$, la longueur d'un intervalle de centre $\mathfrak{Z} = 0$, situé sur l'axe $\mathcal{R}\mathfrak{Z} = 0$, dont tous les points de la fermeture sont réguliers pour la fonction $\Psi(\mathfrak{Z})$. Cette fermeture est donc à distance positive de l'ensemble des points singuliers de $\Psi(\mathfrak{Z})$. Il est évident que, maintenant avec cette convention, l'inégalité stricte, $l < \pi\mathrm{D}$, est seule valide.

En vertu de la condition nécessaire du théorème de V. Bernstein, il existe, dans le plan de la variable $z$, un secteur $\mathrm{S}\left(|\arg z| \leqq \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$, d'ouverture $2\alpha > 0$, et une fonction $\Omega(z)$ holomorphe dans S et satisfaisant aux conditions

$$(a) \qquad |\Omega(z)| < e^{[(\pi\mathrm{D} - l)|\sin\omega| + \varepsilon]|z|}, \qquad z \in \mathrm{S},$$

$\varepsilon > 0$ arbitraire, $z = |z|\,e^{i\omega}$, $|z|$ suffisamment grand;

---

(17) Rappelons que : dire que $\beta$ est régulier pour $\psi(s)$ c'est affirmer l'existence d'un domaine $\Delta$ tel que

$$\beta \in \Delta, \qquad \Delta \cap \mathrm{P}^{\psi}_{\mathcal{C}} \neq \emptyset, \qquad \Delta \subset \bigcup_{\overline{\mathrm{P}}} \mathrm{S}^{\sigma_1}_{\psi},$$

où $\overline{\mathrm{P}}$ est le demi-plan $\sigma \geqq \sigma_1$ et où $\mathrm{P}^{\psi}_{\mathcal{C}}$ est le demi-plan $\sigma > \sigma^{\psi}_{\mathcal{C}}$, $\sigma_1$ suffisamment petit algébriquement.

$$(b) \qquad \Omega(\mu_p) = b'_p \mathrm{P}(\mu_p)\, \Theta_1(\mu_p)\, \theta_1(\mu_p)\, \mathrm{C}'(\mu_p) \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots),$$

où $\mathrm{C}'(z)$ est la dérivée de $\mathrm{C}(z) = \Pi\left(1 - \frac{z^2}{\mu_p^2}\right)$.

Posons $\Omega_1(z) = \Omega(z)\,\theta_1(-z)$. La fonction $\theta_1(-z) = \Pi\left(1 + \frac{z}{\rho_p}\right)$ est de genre zéro et donc de type exponentiel minimum.

On a

$$\Omega_1(\mu_p) = b'_p \mathrm{P}(\mu_p)\, \Theta_1(\mu_p)\, \mathcal{C}'(\mu_p) \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots),$$

en posant

$$\mathcal{C}(z) = \theta_1(z)\, \theta_1(-z)\, \mathrm{C}(z).$$

Remarquons que $\mathcal{C}(z)$ n'est autre que $\Pi\left(1 - \frac{z^2}{\mu_p^{\star 2}}\right)$, où $\{\mu_p^\star\}$ est l'ensemble $\{\rho_p\} \cup \{\mu_p\}$ ordonné en une suite strictement croissante. La suite $\{\mu_p^\star\}$ est d'ailleurs mesurable et de même densité D que la suite $\{\mu_p\}$. Supposons son indice de condensation $\Delta$ fini.

La fonction $\Omega_1(z)$ satisfait ainsi aux propriétés

$$(a') \qquad |\Omega_1(z)| < e^{[(\pi \mathrm{D} - l)|\sin\omega| + \varepsilon]|z|}, \qquad z \in \mathrm{S},$$

$\varepsilon > 0$ arbitraire, $|z|$ suffisamment grand;

$$(b') \qquad \Omega_1(\mu_p) = b'_p \mathrm{P}(\mu_p)\, \Theta_1(\mu_p)\, \mathcal{C}'(\mu_p) \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots).$$

Posons

$$\Phi(\mathfrak{Z}) = \sum \frac{\Omega_1(\mu_p)}{\mathcal{C}'(\mu_p)} e^{-\mathfrak{Z}\mu_p} = \sum b'_p \mathrm{P}(\mu_p)\, \Theta_1(\mu_p)\, e^{-\mathfrak{Z}\mu_p},$$

$$\Phi^\star(\mathfrak{Z}) = \sum \frac{\Omega_1(\mu_p^\star)}{\mathcal{C}'(\mu_p^\star)} e^{-\mathfrak{Z}\mu_p^\star}, \qquad \mathcal{L}(\mathfrak{Z}) = \sum \frac{\Omega_1(\rho_p)}{\mathcal{C}'(\rho_p)} e^{-\mathfrak{Z}\rho_p}.$$

On sait que $\mathcal{C}'(\mu_p^\star) \neq 0$.

On a

$$x_{\mathcal{C}}^{\Phi} \leq x_{\mathcal{C}}^{\Phi^\star} = \overline{\lim}\, \frac{1}{\mu_p^\star} \mathrm{L} \left| \frac{\Omega_1(\mu_p^\star)}{\mathcal{C}'(\mu_p^\star)} \right| \leq \overline{\lim}\, \frac{1}{\mu_p^\star} \mathrm{L} \frac{1}{|\mathcal{C}'(\mu_p^\star)|} = \Delta.$$

Pour $\mathcal{R}\mathfrak{Z} > x_{\mathcal{C}}^{\Phi^\star}$, on peut écrire

$$\Phi^\star(\mathfrak{Z}) = \Phi(\mathfrak{Z}) + \mathcal{L}(\mathfrak{Z}),$$

puisque, eu égard à des résultats classiques, on a

$$x_{\mathrm{A}}^{\Phi^\star} = x_{\mathcal{C}}^{\Phi^\star}, \qquad x_{\mathrm{A}}^{\Phi} = x_{\mathcal{C}}^{\Phi}, \qquad x_{\mathrm{A}}^{\mathcal{L}} = x_{\mathcal{C}}^{\mathcal{L}}; \qquad x_{\mathrm{A}}^{\Phi} \leq x_{\mathrm{A}}^{\Phi^\star}, \qquad x_{\mathrm{A}}^{\mathcal{L}} \leq x_{\mathrm{A}}^{\Phi^\star}.$$

Je dis que $x_{\mathcal{K}}^{\Phi} = x_{\mathcal{K}}^{\Psi}$. En effet, posant

$$b''_p = b'_p \mathrm{P}(\mu_p)\, \Theta_1(\mu_p) \quad (p = 1, 2, 3, \ldots) \qquad \text{et} \qquad \theta_1(z) = \Sigma(-1)^r \delta_r z^r,$$

la série définissant $\Psi(\mathfrak{Z})$, pour $\mathfrak{Z}$ avec $\mathcal{R}\mathfrak{Z} > x_{\mathcal{C}}^{\Phi}$, s'écrit

$$\Sigma b''_p \theta_1(\mu_p)\, e^{-\mathfrak{Z}\mu_p} = \Sigma \delta_r \Phi^{(r)}(\mathfrak{Z});$$

cette dernière série converge en chaque point régulier pour $\Phi(\mathfrak{Z})$, puisque $\theta_1(z)$ est de type exponentiel minimum. On constate que $x_{\mathcal{H}}^{\Psi} \leqq x_{\mathcal{H}}^{\Phi}$. Or, posant

$$P(z)\,\Theta_1(z) = \Sigma(-1)^r \gamma_r z^r,$$

on aurait

$$\Phi(\mathfrak{Z}) = \Sigma \gamma_r \varphi^{(r)}(\mathfrak{Z} + \beta);$$

d'où l'on conclut pour la même raison

$$x_{\mathcal{H}}^{\Phi} \leqq \sigma_{\mathcal{H}}^{\varphi} - \mathcal{R}\beta = \sigma_{\mathcal{H}}^{\psi} - \mathcal{R}\beta = x_{\mathcal{H}}^{\Psi}.$$

Des deux inégalités résulte donc $x_{\mathcal{H}}^{\Phi} = x_{\mathcal{H}}^{\Psi} = 0$. On ne peut avoir $x_{\mathcal{H}}^{\mathcal{E}} > x_{\mathcal{H}}^{\Phi}$ sinon le point $\mathfrak{Z} = 0$ serait singulier pour $\Phi^\star(\mathfrak{Z})$ puisque l'axe $\mathcal{R}\mathfrak{Z} = x_{\mathcal{H}}^{\mathcal{E}} = x_{\mathcal{H}}^{\Phi^\star}$ serait frontière naturelle pour cette fonction [18]. Deux cas restent possibles [19] :

A. $x_{\mathcal{H}}^{\mathcal{E}} < x_{\mathcal{H}}^{\Phi}$; alors, puisque l'axe $\mathcal{R}\mathfrak{Z} = x_{\mathcal{H}}^{\Phi}$ n'est pas frontière naturelle pour $\Phi(\mathfrak{Z})$ [en effet, il existe sur $\sigma = \sigma_{\mathcal{H}}^{\varphi}$ des points qui sont réguliers pour $\varphi(s)$; il existe dans le plan de la variable $\mathfrak{Z}$, sur l'axe $\mathcal{R}\mathfrak{Z} = 0$, des points réguliers pour la fonction de $\mathfrak{Z}$, $\varphi(\mathfrak{Z} + \beta)$; ces points sont aussi réguliers pour $\Phi(\mathfrak{Z}) = \Sigma \gamma_r \varphi^{(r)}(\mathfrak{Z} + \beta)$; la série converge en chaque point $\mathfrak{Z}$ régulier pour $\varphi(\mathfrak{Z} + \beta)$], la fonction $\Phi^\star(\mathfrak{Z})$ admet, par rapport au demi-plan $\mathcal{R}\mathfrak{Z} > x_{\mathcal{H}}^{\mathcal{E}}$, les mêmes points singuliers (même distribution) que la fonction $\Phi(\mathfrak{Z})$. On a, nécessairement, $x_{\mathcal{H}}^{\Phi^\star} = x_{\mathcal{H}}^{\Phi} = 0$. Alors en vertu de la condition suffisante du théorème de V. Bernstein [eu égard aux propriétés ($a'$) et ($b'$)], la fonction $\Phi^\star(\mathfrak{Z})$ admet le point $\mathfrak{Z} = 0$ pour point régulier; ce point est aussi régulier pour $\Phi(\mathfrak{Z})$.

B. $x_{\mathcal{H}}^{\mathcal{E}} = x_{\mathcal{H}}^{\Phi}$; alors puisque l'axe $\mathcal{R}\mathfrak{Z} = x_{\mathcal{H}}^{\Phi}$ n'est pas frontière naturelle pour $\Phi(\mathfrak{Z})$, on a nécessairement

$$x_{\mathcal{H}}^{\Phi^\star} = x_{\mathcal{H}}^{\Phi} = x_{\mathcal{H}}^{\mathcal{E}}.$$

Puisque la fonction $\Phi^\star(\mathfrak{Z})$ admet $\mathfrak{Z} = 0$ pour point régulier, ce point est donc singulier du type « coupure » pour $\Phi(\mathfrak{Z})$. Ce cas est à rejeter car $\mathfrak{Z} = 0$ ne serait pas « semi-isolé ... » pour $\varphi(\mathfrak{Z} + \beta)$, c'est-à-dire que $\beta$ ne serait pas « semi-isolé ... » pour $\varphi(s)$.

En résumé, dans le cas $\sigma_{\mathcal{H}}^{\psi} = \sigma_{\mathcal{H}}^{\varphi}$, si le point $\beta$ « semi-isolé sur l'axe d'holo-

---

[18] *Leçons sur les progrès récents ...*, chap. V, théorèmes III et IV. Pour montrer l'impossibilité de $x_{\mathcal{H}}^{\mathcal{E}} > x_{\mathcal{H}}^{\Phi}$, le théorème IV suffit; la régularité du point $\mathfrak{Z} = 0$ pour la fonction $\Phi^\star(\mathfrak{Z})$ résulte de l'application de la condition suffisante rappelée.

[19] Dans l'étude des cas (A) et (B), les remarques élémentaires qui conduisent à l'égalité $x_{\mathcal{H}}^{\Phi^\star} = 0$ permettent d'éviter l'usage du théorème IV. Remarquons d'ailleurs qu'il n'est pas nécessaire de prouver cette égalité pour appliquer la condition suffisante qui entraîne la régularité du point $\mathfrak{Z} = 0$ pour $\Phi^\star(\mathfrak{Z})$. Les raisonnements ci-dessus ont pour objet de mettre en relief le caractère élémentaire de ce point de la démonstration.

morphie » de $\varphi(s)$ est régulier pour $\psi(s)$, ce point est nécessairement régulier pour

$$\psi_1(s) = \Sigma b_p \mathrm{P}(\mu_p)\Theta_1(\mu_p)e^{-s\mu_p},$$

ou les zéros de $\Theta_1(z)$ sont d'un ordre de multiplicité inférieur d'une unité aux mêmes zéros de $\Theta(z)$ [évidemment, dans $\Theta_1(z)$ ne figurent plus les zéros d'ordre 1 de $\Theta(z)$]. Le problème est donc ramené à un problème analogue avec la fonction $\Theta_1(z)$ au lieu de $\Theta(z)$.

*Deuxième cas :* $\sigma_{\mathcal{H}}^{\psi} < \sigma_{\mathcal{H}}^{\varphi}$ [20]. — Soit encore le point singulier $\beta$, « semi-isolé sur l'axe d'holomorphie », de $\varphi(s)$; il est régulier pour $\psi(s)$. La fonction $\Psi(\mathfrak{Z})$ étant holomorphe dans $\mathcal{R}\mathfrak{Z} > \sigma_{\mathcal{H}}^{\psi} - \sigma_{\mathcal{H}}^{\varphi}$ (et donc dans $\mathcal{R}\mathfrak{Z} > 0$) et par conséquent régulière au point $\mathfrak{Z} = 0$, il existe un nombre $l (0 < l)$, un secteur

$$\mathrm{S}\left(|\arg z| \leq \alpha < \frac{\pi}{2},\ \alpha > 0\right)$$

dans le plan de la variable $z$, une fonction $\Omega(z)$ holomorphe dans S, tels que

$$(a)\qquad |\Omega(z)| < e^{(\pi \mathrm{D} - l)|\sin\omega| + \varepsilon|z|},\qquad z \in \mathrm{S},$$

$\varepsilon > 0$ arbitraire petit, $|z|$ suffisamment grand;

$$\Omega(\mu_p) = b'_p \theta(\mu_p)\mathrm{C}'(\mu_p),\qquad b'_p = b_p e^{\beta\mu_p}\qquad (p = 1, 2, 3, \ldots).$$

Comme au premier cas, on constate que la fonction $\Omega_1(z) = \Omega(z)\theta_1(-z)$ possède les propriétés de types $(a')$ et $(b')$, et l'on introduit, avec les mêmes remarques et la même écriture, les fonctions $\Phi^\star(\mathfrak{Z})$, $\Phi(\mathfrak{Z})$, $\mathcal{L}(\mathfrak{Z})$; il est légitime d'écrire $\Phi^\star(\mathfrak{Z}) = \Phi(\mathfrak{Z}) + \mathcal{L}(\mathfrak{Z})$. Il est évident qu'on ne peut pas avoir $x_{\mathcal{H}}^{\Phi} > 0$ (car l'inégalité stricte $\sigma_{\mathcal{H}}^{\psi_1} > \sigma_{\mathcal{H}}^{\varphi}$ est manifestement impossible).

Supposons $\sigma_{\mathcal{H}}^{\psi_1} = \sigma_{\mathcal{H}}^{\varphi}$, c'est-à-dire

$$(b)\qquad x_{\mathcal{H}}^{\Phi} = \sigma_{\mathcal{H}}^{\varphi} - \mathcal{R}\beta = 0.$$

(1) S'il était possible que $x_{\mathcal{H}}^{\mathcal{L}} > x_{\mathcal{H}}^{\Phi}$, alors, puisque $\Phi^\star(\mathfrak{Z}) = \Phi(\mathfrak{Z}) + \mathcal{L}(\mathfrak{Z})$, l'axe $\mathcal{R}\mathfrak{Z} = x_{\mathcal{H}}^{\mathcal{L}}$ serait frontière naturelle pour la fonction $\Phi^\star(\mathfrak{Z})$ holomorphe dans $\mathcal{R}(\mathfrak{Z}) > x_{\mathcal{H}}^{\Phi^\star} = x_{\mathcal{H}}^{\mathcal{L}}$; $\mathfrak{Z} = 0$ ne pourrait être point régulier pour $\Phi^\star(\mathfrak{Z})$. Or, eu égard à la condition suffisante du théorème de V. Bernstein, la fonction $\Phi^\star(\mathfrak{Z})$ est holomorphe dans $\mathcal{R}\mathfrak{Z} > 0$ et régulière au point $\mathfrak{Z} = 0$. La supposition $x_{\mathcal{H}}^{\mathcal{L}} > x_{\mathcal{H}}^{\Phi}$ est à rejeter.

(2) Est-il possible que $x_{\mathcal{H}}^{\mathcal{L}} = x_{\mathcal{H}}^{\Phi}$? Il existe sur l'axe $\sigma = \sigma_{\mathcal{H}}^{\varphi}$ des points réguliers pour $\varphi(s)$. Ces points sont aussi réguliers pour $\psi_1(s)$. Donc l'axe $\mathcal{R}\mathfrak{Z} = 0$ n'est pas frontière naturelle pour $\Phi(\mathfrak{Z})$; par conséquent il existe sur cet axe

---

[20] S'il est possible que $\sigma_{\mathcal{H}}^{\psi} < \sigma_{\mathcal{H}}^{\varphi}$; l'impossibilité du cas $\sigma_{\mathcal{H}}^{\psi} > \sigma_{\mathcal{H}}^{\varphi}$ est évidente.

des points qui sont singuliers pour $\mathcal{L}(\mathfrak{Z})$ et réguliers pour $\Phi(\mathfrak{Z})$. Il en résulte $x_{\mathcal{H}}^{\Phi^\star} = 0$. Or $\mathfrak{Z} = 0$ est régulier pour $\Phi^\star(\mathfrak{Z})$; il est donc singulier du type coupure pour $\Phi(\mathfrak{Z})$. Le point $\beta$ serait, dans l'éventualité $x_{\mathcal{H}}^{\mathcal{L}} = x_{\mathcal{H}}^{\Phi}$, singulier du type coupure pour $\psi_1(s)$. Cette éventualité est à rejeter.

(3) La seule possibilité dans le cas $\sigma_{\mathcal{H}}^{\psi_1} = \sigma_{\mathcal{H}}^{\varphi}$ est donc $x_{\mathcal{H}}^{\mathcal{L}} < x_{\mathcal{H}}^{\Phi}$. Les fonctions $\Phi^\star(\mathfrak{Z})$ et $\Phi(\mathfrak{Z})$ ont même ensemble singulier par rapport au demi-plan $\mathcal{R}\mathfrak{Z} > x_{\mathcal{H}}^{\mathcal{L}}$. Le point $\mathfrak{Z} = 0$ est régulier pour $\Phi(\mathfrak{Z})$; le point $\beta$ est régulier pour $\psi_1(s)$.

Supposons enfin $\sigma_{\mathcal{H}}^{\psi_1} < \sigma_{\mathcal{H}}^{\varphi}$. On a évidemment $\sigma_{\mathcal{H}}^{\psi} \leqq \sigma_{\mathcal{H}}^{\psi_1}$. Le point $\beta$ est nécessairement régulier pour $\psi_1(s)$.

En résumé, dans les deux cas, si $\beta$, « semi-isolé » pour $\varphi(s)$ est régulier pour $\psi(s)$, il est nécessairement régulier pour $\psi_1(s)$. Le problème est donc ramené à un problème analogue avec la fonction $\Theta_1(z)$ au lieu de $\Theta(z)$.

En raisonnant sur $\psi_1(s) = \Sigma b_p \mathrm{P}(\mu_p)\Theta_1(\mu_p)e^{-s\mu_p}$ comme on a raisonné sur $\psi(s)$, on ramène le problème à un problème analogue pour

$$\psi_2(s) = \Sigma b_p \mathrm{P}(\mu_p)\Theta_2(\mu_p)\, e^{-s\mu_p},$$

avec la fonction de genre zéro,

$$\Theta_2(z) = \Pi\left(1 - \frac{z}{\rho_p}\right)^{m_p - 2}$$

[dont les zéros sont ceux de $\Theta(z)$ qui ont un ordre de multiplicité supérieur à 2]; et ainsi de proche en proche. En répétant $j$ fois cette méthode, avec $j \leqq \mathrm{M} - 1$, on est certain d'obtenir une fonction

$$\psi_j(s) = \Sigma b_p \mathrm{P}(\mu_p)\Theta_j(\mu_p)\, e^{-s\mu_p},$$

où $\Theta_j(z)$ est de genre zéro à zéros positifs simples sauf peut-être un nombre fini au plus.

Une dernière application de la méthode conduirait [avec quelques simplifications dues au fait que

$$\psi_{j+1}(s) = \Sigma b_p \mathrm{P}(\mu_p)\,\Theta_{j+1}(\mu_p)\, e^{-s\mu_p} = \Sigma \delta_r \varphi^{(r)}(s),$$

où $\mathrm{P}(z)\Theta_{j+1}(z) = \sum_r (-1)^r \delta_r z^r$ est un polynome], à la contradiction que $\beta$ est régulier pour $\varphi(s)$.

Le théorème est établi dans le cas où :

(1) $\{\mu_p\} \cup \{\rho_p\} = \emptyset$,

(2) $\{\mu_p^\star\} = \{\mu_p\} \cup \{\rho_p\}$ est à indice de condensation fini.

Si les deux conditions ci-dessus [ou seulement l'une d'elles ([21])] ne sont pas satisfaites, on peut ramener la démonstration à la précédente. Cette assertion est triviale lorsque les deux suites $\{\rho_p\}$ et $\{\mu_p\}$ n'ont en commun qu'un nombre fini de termes; la condition (2) étant supposée satisfaite au sens de la remarque adjointe au renvoi ([21]). Il existe, en effet, un entier $P_0$ tel que $\theta(\mu_p) \neq 0$, pour $p \geqq p_0$; on a

$$\psi(s) = \sum_{p \geqq p_0} b_p \theta(\mu_p) e^{-s\mu_p} + \mathcal{D}(s),$$

où $\mathcal{D}(s)$ est un polynome de Dirichlet pouvant être identiquement nul. Le raisonnement ci-dessus est applicable mot pour mot à la fonction

$$\psi_0(s) = \sum_{p \geqq p_0} b_p \theta(\mu_p) e^{-s\mu_p}$$

ne différant de $\psi(s)$ que par la fonction entière $\mathcal{D}(s)$ qui peut se réduire à la constante zéro.

Lorsque les suites $\{\mu_p\}$ et $\{\rho_p\}$ ont en commun une infinité de termes, le problème est plus délicat. On peut le constater à l'aide de la remarque suivante :

Soit $\{\rho'_p\}$ l'ensemble, ordonné selon une suite strictement croissante, commun à $\{\mu_p\}$ et $\{\rho_p\}$. Soit $\{\mu'_p\}$ la suite, strictement croissante, complémentaire à la suite $\{\rho'_p\}$ par rapport à la suite $\{\mu_p\}$. Notons $b'_p$ le coefficient associé à l'exposant $\mu'_p$ dans la série $\varphi(s) = \Sigma b_p e^{-s\mu_p}$. La série $\sum_{p=1}^{\infty} b_p \theta(\mu_p) e^{-s\mu_p}$ définissant $\psi(s)$ se réduit, en fait, à la série $\sum_{p=1}^{\infty} b'_p \theta(\mu'_p) e^{-s\mu'_p}$, avec $\theta(\mu'_p) \neq 0$ pour $p = 1, 2, 3, \ldots$.

On a, en réalité,

$$\psi(s) = \Sigma \gamma_r \varphi^{\star(r)}(s),$$

où

$$\theta(z) = \Sigma(-1)^r \gamma_r z^r, \qquad \varphi^\star(s) = \Sigma b'_p e^{-s\mu'_p}, \qquad \varphi^\star(s) \not\equiv \varphi(s).$$

Le cas à élucider est donc celui où les deux suites $\{\mu_p\}$ et $\{\rho_p\}$ ont en commun une suite infinie, et où les trois suites $\{\rho_p\}$, $\{\mu_p\}$, $\{\mu_p\} \cup \{\rho_p\}$ sont à indices de condensation quelconques.

Établissons quelques lemmes.

**Lemme I.** — *Une suite $\{\mu_p\}$ « presque régulière » est décomposable en une somme finie de suites partielles « régulières ».*

---

([21]) Il est évident que la condition (1) peut être satisfaite sans que (2) le soit; si (1) n'est pas satisfaite, la condition (2) est sans objet (malgré que si $\{\mu_p\}$ et $\{\rho_p\}$ ont en commun une suite infinie, l'ensemble $\{\mu_p\} \cup \{\rho_p\}$ peut cependant être ordonné en une suite strictement croissante qui peut être à indice fini).

L'assertion est évidente. En effet, d'après la propriété (2) de l'ensemble $E(q_0, \{\mu_p\})$ où l'on suppose $q_0$ fixé une fois pour toutes suffisamment petit, le nombre des $\mu_p$ intérieurs à un même segment de cet ensemble est uniformément borné. On suppose, bien entendu, la suite des segments constituant l'ensemble $E(q_0, \{\mu_p\})$ numérotée 1, 2, 3, ..., $\nu$, ..., dans le sens de croissance des $\mu_p$. La suite $\{\mu_p\}$ peut être notée de la manière suivante :

Considérons le $\nu^{\text{ième}}$ segment et notons $\mu_{p_\nu}$ le plus petit des $\mu_p$ intérieurs à ce segment. Notons $\mu_{p_\nu+t}$, $1 \leqq t \leqq n_\nu$, les $n_\nu$ autres $\mu_p$ de sorte que

$$\mu_{p_\nu} < \mu_{p_\nu+1} < \mu_{p_\nu+2} < \ldots < \mu_{p_\nu+n_\nu};$$

$\mu_{p_\nu}$ et $\mu_{p_\nu+n_\nu}$ étant respectivement le plus petit et le plus grand des $\mu_p$ du $\nu^{\text{ième}}$ segment. Pour achever de préciser la nouvelle notation de la suite $\{\mu_p\}$, on posera en outre

$$p_{\nu-1} + n_{\nu-1} + 1 = p_\nu, \qquad p_\nu + n_\nu + 1 = p_{\nu+1}, \qquad p_1 = 1.$$

Désignons par $\{\mu_{p,0}\}$ la suite partielle

$$\{\mu_{p_\nu}\} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots; \mu_{1,0} < \mu_{2,0} < \ldots < \mu_{p,0} < \ldots).$$

Désignons aussi par $\{\mu_{p,1}\}$ la suite partielle $\{\mu_{p_\nu+1}\}$, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ [il est évident que les segments de $E(q_0, \{\mu_p\})$ ne contenant qu'un seul point ne fournissent aucune contribution à la construction de la suite $\{\mu_{p_\nu+1}\}$]. Plus généralement, désignons par $\{\mu_{p,t}\}$ la suite partielle $\{\mu_{p_\nu+t}\}$ (avec la même remarque que ci-dessus). On se servira suivant le cas d'une des notations de préférence à l'autre. Il existe un entier $N_0 \geqq 0$ fini tel que $N_0 = \overline{\text{borne}}\, n_\nu$. Il existe un nombre N, au plus égal à $N_0 + 1$, de telles suites infinies strictement croissantes $\{\mu_{p,t}\}$, $t = 0, 1, 2, \ldots, N-1$. La suite $\{\mu_p\}$ est identique à $\bigcup_t \{\mu_{p,t}\}$, à un ensemble fini près de termes $\mu_p$; ce que l'on notera

$$\{\mu_p\} \triangleq \bigcup_t \{\mu_{p,t}\}.$$

Chaque suite $\{\mu_{p,t}\}$, $t = 0, 1, 2, \ldots, N-1$ est régulière, puisque

$$\underline{\text{borne}}\, (\mu_{p+1,t} - \mu_{p,t}) \geqq 2q_0.$$

Le lemme est établi (l'ensemble fini pouvant être adjoint à l'une ou à l'autre des suites $\{\mu_{p,t}\}$, ou réparti entre celles-ci; il ne jouera pratiquement aucun rôle dans les démonstrations. On le passera fréquemment sous silence). Notons $\{\mu_{p,tr}\}$ l'ensemble $\{\mu_{p,t}\} \cup \{\mu_{p,r}\}$, $0 \leqq (t \neq r) \leqq N-1$, ordonné en une suite infinie strictement croissante : $\mu_{1,tr} < \mu_{2,tr} < \ldots < \mu_{p,tr} < \mu_{p+1,tr} < \ldots$.

**Lemme II.** — *Si les $C_N^2$ suites $\{\mu_{p,tr}\}$ correspondant aux $C_N^2$ couples distincts* [22]

[22] Les deux couples $(t, r)$ et $(r, t)$ ne sont pas distincts.

*de* N *nombres pris deux à deux distincts*, $t \neq r$, *sont chacune à indice de condensation fini, alors la suite* $\{\mu_p\}$ *est à indice de condensation* $\Delta$ *fini* (*on suppose, bien entendu*, $N \geqq 2$ ; *si* $N = 1$, *la suite* $\{\mu_p\}$ *est régulière et* $\Delta = 0$) ([23]).

En effet, on sait que, posant

$$\varepsilon_{\nu, r} = \frac{1}{\Gamma(n_\nu + 1)} \prod_{\substack{t=0 \\ (t \neq r)}}^{t=n_\nu} (\mu_{p_\nu + t} - \mu_{p_\nu + r}) \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots, n_\nu)$$

et

$$\eta_\nu = \overline{\text{borne}} \frac{1}{\mu_{p_\nu + r}} \mathrm{L} \frac{1}{|\varepsilon_{\nu, r}|} \qquad (r = 0, 1, 2, n_\nu)$$

(si $n_\nu = 0$, on convient de poser $\eta_\nu = 0$), l'indice de condensation de $\{\mu_p\}$ est $\Delta = \overline{\lim}\, \eta_\nu$.

Désignant par $\Delta_{t, r}$ l'indice de condensation de la suite $\{\mu_{p, tr}\}$, on voit que

$$0 \leqq \Delta_{t, r} = \overline{\lim}\, \eta_\nu^{t, r},$$

où l'on pose ([24])

$$\eta_\nu^{t, r} = \frac{1}{\mu_{p_\nu}} \mathrm{L} \frac{1}{|\mu_{p_\nu + t} - \mu_{p_\nu + r}|}.$$

En effet, puisque $\{\mu_{p, tr}\} \subset \{\mu_p\}$, avec $\{\mu_p\}$ mesurable à densité D, il existe une suite $\{\mu_p^\star\}$ mesurable à densité $D^\star$ telle que $\{\mu_{p, tr}\} \subset \{\mu_p^\star\}$ et qu'on ne puisse pas trouver une suite $\{\mu_p^{\star\star}\} \supset \{\mu_{p, tr}\}$, $\{\mu_p^{\star\star}\}$ étant mesurable à densité $D^{\star\star} < D^\star$ ([25]). La densité $D^\star$ est la densité maximum de la suite $\{\mu_{p, tr}\}$.

Il est évident que $D^\star \leqq D$. Par conséquent, comme ensemble de voisinage de $\{\mu_{p, tr}\}$, on peut toujours choisir $E(q_0, \{\mu_{p, tr}\})$, avec $q_0 \leqq \frac{1}{10 D}$, puisque $D \geqq D^\star$ et que $D > 0$. Mais alors on peut choisir $q_1$ suffisamment petit, avec $q_1 \leqq q_0$, de sorte que

$$E(q_1, \{\mu_{p, tr}\}) \subset E(q_0, \{\mu_p\}),$$

quel que soit le couple considéré $0 \leqq (t \neq r) \leqq N - 1$ puisque chaque segment de l'ensemble $E(q_0, \{\mu_p\})$ est au moins de longueur $2q_0$.

L'assertion est maintenant évidente si l'on tient compte que les segments

---

([23]) Il est évident que dans les lemmes I, II, III et IV, le cas envisagé est celui où la suite $\{\mu_p\}$ ne se réduit pas à une suite « régulière ».

([24]) Il est évident que $\eta_\nu^{t, r}$ et $\overline{\lim}\, \eta_\nu^{t, r}$, ne sont définies que pour la suite des indices des segments contenant à la fois un point de $\{\mu_{p, t}\}$ et un point de $\{\mu_{p, r}\}$. Si $t > r$ et si pour l'indice $\nu$ le terme $\mu_{p_\nu + t}$ existe, le terme $\mu_{p_\nu + r}$ existe aussi ; $\mu_{p_\nu + r}$ peut exister sans que $\mu_{p_\nu + t}$ existe, on posera alors comme convenu $\eta_\nu^{t, r} = 0$.

([25]) Le lemme II est légitime sans restreindre la suite $\{\mu_p\}$ à être mesurable (comme dans les théorèmes I et II); il suffit qu'elle soit « presque régulière » (et donc à densité maximum finie). La propriété établie est valide avec une légère modification, d'ailleurs évidente, de ce raisonnement.

constituant l'ensemble $E(q_0, \{\mu_p\})$ sont de longueur uniformément bornée au plus égale à $2(N_0+1)q_0$ ([26]).

A $\varepsilon$ positif arbitraire petit, on peut faire correspondre $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$ de sorte que pour $\nu > \nu_0$, on a

$$\eta_\nu < \overline{\underset{0 \leqq r \leqq n_\nu}{\text{borne}}} \frac{1}{\mu_{p_\nu+r}} \sum_{\substack{t=0 \\ (t \neq r)}}^{t=n_\nu} \mathrm{L} \frac{1}{|\mu_{p_\nu+t} - \mu_{p_\nu+r}|} + \varepsilon;$$

donc *a fortiori*

$$\eta_\nu < \sum_{t \neq r} |\eta_\nu^{t,r}| + \varepsilon.$$

la sommation étant étendue aux $C_N^2$ couples distincts $(t \neq r)$.

Par conséquent,

$$\Delta = \overline{\lim}\, \eta_\nu \leqq \overline{\lim} \sum_{t,r} |\eta_\nu^{t,r}| = \overline{\lim} \sum_{t,r} \eta_\nu^{t,r},$$

$$\Delta \leqq \sum_{t,r} \Delta_{t,r},$$

puisque $\Delta_{t,r}$ ne peut être que non négatif $\left(\underline{\lim}\, \eta_\nu^{t,r} \geqq 0\right)$.

Cette inégalité établit le lemme.

Posons $\varphi_t(s) = \Sigma b_{p,t} e^{-s\mu_{p,t}}$, où l'on désigne par la nouvelle notation $b_{p,t}$ le coefficient associé à l'exposant $\mu_{p,t}$ qui figure dans la série $\varphi(s) = \Sigma b_p e^{-s\mu_p}$. Il n'y a pas d'ambiguïté à représenter aussi cette série par la notation

$$\varphi_t(s) = \Sigma b_{p_\nu+t} e^{-s\mu_{p_\nu+t}} \quad ([27]).$$

Lemme III. — *Le nombre $\eta$ étant arbitraire positif fini fixé à l'avance et $t > r$, si la suite $\{\mu_{p,tr}\}$ est à indice de condensation égal à $+\infty$, alors on peut toujours extraire de la suite $\{\mu_{p,t}\}$ une suite partielle $\{\mu_{p_{\nu_j}+t}\}$ à densité nulle, de sorte que :*

(1) *Si l'on représente par $\{\mu'_{p,t}\}$ la suite complémentaire à $\{\mu_{p_{\nu_j}+t}\}$ par rapport à $\{\mu_{p,t}\}$, l'ensemble $\{\mu'_{p,t}\} \cup \{\mu_{p,r}\}$ est à indice de condensation fini;*

(2) $\underline{\lim}\, \eta_{\nu_j}^{t,r} \geqq \eta$ (*il est intéressant de choisir, pour les applications qui suivent,* $\eta > \sigma_{\mathcal{C}}^{\varphi} - \sigma_{\mathcal{H}}^{\varphi}$).

$\{\mu_{p,tr}\}$ est une suite « presque régulière » comme suite partielle d'une suite « presque régulière ».

Cette assertion est facile à établir. On a, en effet, montré au lemme II que $\{\mu_{p,tr}\}$ satisfait aux conditions (1) et (2) d'une suite « presque régulière ». La condition (3) peut être établie de la manière suivante :

---

([26]) Il n'existe aucun segment de longueur $> 2(N_0+1)q_0$ puisque $N_0 = \overline{\text{borne}}\, n_\nu$.

([27]) Les deux notations $\{b_{p,t}\}$ et $\{b_{p_\nu+t}\}$ qui désignent la suite des coefficients de $\varphi_t(s)$ trouvent leur justification dans les deux notations $\{\mu_{p,t}\}$ et $\{\mu_{p_\nu+t}\}$ de la suite des exposants de cette série.

Constatons que $\{\mu_p\}$ étant à indice de condensation fini, la suite $\{\mu_{p,tr}\}$ est nécessairement aussi à indice de condensation fini.

Si $\{\mu_{p,tr}\}$ est à indice de condensation infini, la suite $\{\mu_p\}$ est aussi à indice de condensation infini. On peut, eu égard à la condition (3), extraire de $\{\mu_p\}$ une suite $\{\mu'_p\}$ à densité nulle, à *indice de condensation infini*, et telle que sa suite complémentaire $\{\mu''_p\}$ soit à indice de condensation fini.

Établissons cette dernière assertion :

Eu égard à la condition (3), on peut extraire de $\{\mu_p\}$ une suite partielle $\{\mu_{p_j}\}$ à densité nulle, telle que sa suite complémentaire est à indice de condensation fini. Considérons la suite des segments (à l'exclusion des autres segments) de $E(q_0, \{\mu_p^*\})$ qui contiennent au moins un élément de $\{\mu_{p_j}\}$. A chaque terme $\mu_{p_j}$, associons, s'il existe, l'élément le plus voisin (sous la condition qui suit) et appartenant au même segment que $\mu_{p_j}$. S'il existe deux points équidistants de $\mu_{p_j}$ et appartenant au même segment que $\mu_{p_j}$, convenons de choisir l'un d'eux, par exemple le plus à gauche. En outre, on répétera ce choix pour chaque indice $p_j$ dans l'ordre de croissance des indices en commençant par $p_1$ et de telle sorte que le terme associé à $\mu_{p_{j_0+1}}$, $j_0$ entier quelconque considéré, soit pris dans la suite complémentaire à $\{\mu_{p_j}\}$ *dont on a enlevé les termes associés aux* $\mu_{p_j}$ *avec* $j \leqq j_0$.

Notons $\mu^*_{j,0}$ le terme associé à $\mu_{p_j}$. Eu égard aux précautions spécifiées dans le choix ci-dessus, ce terme est unique s'il existe; en outre, à deux termes distints $\mu_{p_j}$ et $\mu_{p_{j'}}$, $j \neq j'$, correspondent deux termes distincts $\mu^*_{j,0}$ et $\mu^*_{j',0}$ s'ils existent. On convient de dire que $\mu^*_{j,0}$, s'il existe, est le terme « précisé » de $\complement_{\{\mu_p\}} \{\mu_{p_j}\}$ associé au terme $\mu_{p_j}$.

L'ensemble $\{\mu^*_{j,0}\} \cup \{\mu_{p_j}\}$ ordonné en une suite strictement croissante $\{\mu^*_{j,1}\}$ est à densité nulle. L'indice de condensation de sa suite complémentaire par rapport à $\{\mu_p\}$ est évidemment fini.

Si l'indice de condensation de $\{\mu^*_{j,1}\}$ est infini, l'assertion est établie. Sinon, on associe à nouveau, à chaque terme $\mu^*_{j,1}$, son élément « précisé » de $\complement_{\{\mu_n\}} \{\mu^*_{j,1}\}$. Soit $\mu^{**}_j$ ce terme. L'ensemble $\{\mu^*_{j,1}\} \cup \{\mu^{**}_j\}$ ordonné en une suite strictement croissante $\{\mu^*_{j,2}\}$ est à densité nulle. Sa suite complémentaire par rapport à $\{\mu_p\}$ est à indice de condensation fini. Si $\{\mu^*_{j,2}\}$ est à indice de condensation infini, l'assertion est établie, sinon on recommence la même opération. Il est évident, eu égard à la propriété (2) d'une suite « presque régulière », qu'on ne peut réaliser qu'un nombre fini d'opérations de cette espèce. On est certain qu'après un nombre fini d'opérations, $N_1$ par exemple, la suite partielle considérée des segments de $E(q_0, \{\mu_p\})$ ne contiendra plus aucun point de $\{\mu_p\}$ ou seulement un ensemble fini.

Si la suite ainsi obtenue après $N_1$ opérations au plus n'était pas à indice de condensation infini (elle est évidemment à densité nulle), on aurait par ce procédé décomposé la suite $\{\mu_p\}$ en deux suites complémentaires à écart positif, chacune à indice de condensation fini; la suite $\{\mu_p\}$ serait nécessairement alors à indice de condensation fini contrairement à l'hypothèse. L'assertion est établie.

Considérons alors la suite infinie strictement croissante

$$\{\mu'_{p,tr}\} = \{\mu_{p,tr}\} \cap \{\mu'_p\}$$

(cette intersection ne peut évidemment être vide ou se réduire à un ensemble fini car alors, à un ensemble fini près dans ce dernier cas, $\{\mu_{p,tr}\}$ appartiendrait à $\{\mu''_p\}$ et son indice de condensation serait fini).

Il est évident que $\{\mu'_{p,tr}\}$ est à densité nulle. La suite $\{\mu''_{p,tr}\}$ complémentaire à $\{\mu'_{p,tr}\}$ par rapport à $\{\mu_{p,tr}\}$ est une suite partielle de $\{\mu''_p\}$. Elle est donc, comme $\{\mu''_p\}$, à indice de condensation fini.

En définitive, $\{\mu_{p,tr}\}$ est donc bien une suite « presque régulière ». Revenons maintenant à la démonstration du lemme :

Eu égard à la propriété (3) d'une telle suite, on peut extraire de $\{\mu_{p,tr}\}$ une suite partielle, $\{\mu_{p_n,tr}\}$ à densité nulle, à indice de condensation infini, de sorte que la suite complémentaire soit à indice de condensation fini. Notons $\{\mu_{p_{\nu'_j}+t}\}$ la suite partielle extraite de $\{\mu_{p,t}\}$ et telle que

$$\{\mu_{p_{\nu'_j}+t}\} = \{\mu_{p,t}\} \cap \{\mu_{p_n,tr}\}.$$

et notons $\{\mu_{p_{\nu''_j}+r}\}$ la suite partielle extraite de $\{\mu_{p,r}\}$ et de telle sorte que

$$\{\mu_{p_{\nu''_j}+r}\} = \{\mu_{p,r}\} \cap \{\mu_{p_n,tr}\}.$$

On a, bien entendu,

$$\{\mu_{p_{\nu'_j}+t}\} \cup \{\mu_{p_{\nu''_j}+r}\} = \{\mu_{p_n,tr}\}.$$

De la suite $\{\nu''_j\}$ supprimons, s'ils existent, tous les entiers $\nu''_j$ tels qu'il n'existe pas dans les segments de mêmes indices de $E(q_0, \{\mu_p\})$, un point de $\{\mu_{p,t}\}$; soit $\{\nu''_{j_k}\}$ la suite restante. Désignons par $\{\nu_j\}$ l'ensemble des entiers $\{\nu'_j\} \cup \{\nu''_{j_k}\}$, ordonné en une suite strictement croissante, et considérons la suite des couples $\{\mu_{p_{\nu_j}+t}, \mu_{p_{\nu_j}+r}\}$.

Cette suite, de la façon dont elle a été construite, ordonnée en une suite strictement croissante est à densité nulle et son indice de condensation est égal à $+\infty$. Sa suite complémentaire par rapport à $\{\mu_{p,tr}\}$ est à indice de condensation fini.

Considérons la suite $\{\eta^{t,r}_{\nu_j}\}$. Si $\underline{\lim}\, \eta^{t,r}_{\nu_j} < \eta$, alors on peut toujours extraire, de la suite des entiers $\{\nu_j\}$, une suite partielle $\{\nu_{j_k}\}$ telle qu'on ait $\underline{\lim}\, \eta^{t,r}_{\nu_{j_k}} \geq \eta$ et que l'ensemble complémentaire à la suite des couples $\{\mu_{p_{\nu_{j_k}}+t}, \mu_{p_{\nu_{j_k}}+r}\}$ soit à indice de condensation fini. Les propriétés (1) et (2) sont établies (le rôle de la suite $\{\nu_j\}$ de l'énoncé du lemme III est ici joué par la suite $\{\nu_{j_k}\}$).

Lemme IV. — *$\eta$ étant un nombre positif arbitraire fixé à l'avance et si $\{\mu_p\}$ est une suite « presque régulière », on peut toujours extraire de cette suite une suite partielle « presque régulière », que l'on note $\{\mu'_p\}$, de telle sorte que :*
(1) *la suite $\{\mu'_p\}$ est à indice de condensation fini et à même densité maximum que $\{\mu_p\}$ (elle est mesurable à densité D si $\{\mu_p\}$ est elle-même mesurable à densité D);*

$$(2)\qquad \varphi(s)=\chi(s)+\mathcal{E}(s),\qquad \text{où}\quad \chi(s)=\Sigma b'_p\, e^{-s\mu'_p}$$

*admet $\sigma^\chi_\Lambda \leqq \sigma^\varphi_\Lambda$, $\sigma^\chi_{\mathcal{H}}=\sigma^\varphi_{\mathcal{H}}$, et où $\mathcal{E}(s)$ est une fonction holomorphe dans un demi-plan $\sigma>\sigma^\varphi_{\mathcal{H}}-\eta$ [les coefficients $b'_p$ de la série définissant $\chi(s)$ s'exprimant linéairement à l'aide des coefficients $b_p$]* ([28]).

Je donne un mode de construction de la série $\chi(s)$ qui constitue, en même temps, une démonstration du lemme. Rappelons qu'il est évident, de la façon dont les $\mu_{p_\nu+t}$, $0\leqq t\leqq n_\nu$, ont été définis, que si dans le $\nu^{\text{ième}}$ segment de l'ensemble $E(q_0, \{\mu_p\})$ figure le terme $\mu_{p_\nu+t}$ alors les termes $\mu_{p_\nu+r}$, $0\leqq r<t$, figurent nécessairement dans ce segment. Considérons l'ensemble $\{\mu_{p,N-2}\}\cup\{\mu_{p,N-1}\}$ ordonné en une suite strictement croissante $\{\mu_{p,N-1,N-2}\}$. Si cette suite a un indice de condensation fini (qui ne peut être d'ailleurs que non négatif), on posera

$$\Sigma b_{p,N-1}\, e^{-s\mu_{p,N-1}}+\Sigma b_{p,N-2}\, e^{-s\mu_{p,N-2}}=\Sigma b_{p,N-1,N-2}\, e^{-s\mu_{p,N-1,N-2}},$$

où $b_{p,N-1,N-2}$ est la nouvelle notation du coefficient qui est associé à l'exposant $\mu_{p,N-1,N-2}$ dans l'une des séries du membre de gauche où cet exposant figure avec son ancienne notation. Il est évident que l'égalité a un sens pour tout $s$ fini avec $\sigma>\sigma^\varphi_\Lambda$ (et le conserve dans un prolongement analytique convenable des séries composantes). Si, par contre, l'indice de condensation de la suite $\{\mu_{p,N-1,N-2}\}$ n'est pas fini, on procèdera comme suit : de la suite $\{\mu_{p_\nu+N-1}\}$, qu'on désigne aussi par $\{\mu_{p,N-1}\}$, on peut, en vertu du lemme III, toujours extraire une suite partielle à densité nulle, $\{\mu_{p_{\nu_j}+N-1}\}$, de sorte que :
(1) désignant par $\{\mu'_{p,N-1}\}$ la suite complémentaire à la suite $\{\mu_{p_{\nu_j}+N-1}\}$ par rapport à $\{\mu_{p,N-1}\}$, alors l'ensemble $\{\mu_{p,N-2}\}\cup\{\mu'_{p,N-1}\}$ ordonné en une suite strictement croissante a un indice de condensation fini.

$$(2)\qquad \underline{\lim}\ \eta^{N-1,N-2}_{\nu_j}\geqq\sigma^\varphi_{\mathcal{C}}-\sigma^\varphi_{\mathcal{H}}+\eta.$$

Désignant par $\{\mu'_{p,N-2}\}$ la suite complémentaire à $\{\mu_{p_{\nu_j}+N-2}\}$ par rapport à

([28]) Si $\{\mu_p\}$ est à indice de condensation fini, on choisit

$$\{\mu'_p\}=\{\mu_p\},\qquad \varphi(s)=\chi(s),\qquad \mathcal{E}(s)=0.$$

$\{\mu_{p,\mathrm{N}-2}\}$, on pose

$$\Sigma b_{p,\mathrm{N}-1}\, e^{-s\mu_{p,\mathrm{N}-1}} + \Sigma b_{p,\mathrm{N}-2}\, e^{-s\mu_{p,\mathrm{N}-2}}$$
$$= \Sigma b'_{p,\mathrm{N}-1}\, e^{-s\mu'_{p,\mathrm{N}-1}} + \Sigma b_{p_{\nu_j}+\mathrm{N}-1}\, e^{-s\mu_{p_{\nu_j}+\mathrm{N}-1}} + \Sigma b'_{p,\mathrm{N}-2}\, e^{-s\mu'_{p,\mathrm{N}-2}} + \Sigma b_{p_{\nu_j}+\mathrm{N}-2}\, e^{-s\mu_{p_{\nu_j}+\mathrm{N}-2}}$$

($b'_{p,\mathrm{N}-1}$ est la nouvelle notation du coefficient associé à l'exposant $\mu'_{p,\mathrm{N}-1}$ qui figure dans la première série du premier membre; remarque analogue pour $b'_{p,\mathrm{N}-2}$).

Posons

$$\varphi^{\star}_{\mathrm{N}-1}(s) = \Sigma b_{p_{\nu_j}+\mathrm{N}-1}\, e^{-s\mu_{p_{\nu_j}+\mathrm{N}-1}}, \qquad \varphi^{\star}_{\mathrm{N}-1,\mathrm{N}-2}(s) = \Sigma b_{p_{\nu_j}+\mathrm{N}-1}\, e^{-s\mu_{p_{\nu_j}+\mathrm{N}-2}},$$

on a, pour $\sigma > \sigma^{\varphi}_{\mathrm{A}}$,

$$\varphi^{\star}_{\mathrm{N}-1}(s) - \varphi^{\star}_{\mathrm{N}-1,\mathrm{N}-2}(s) = \Sigma b_{p_{\nu_j}+\mathrm{N}-1}\left(e^{-s\mu_{p_{\nu_j}+\mathrm{N}-1}} - e^{-s\mu_{p_{\nu_j}+\mathrm{N}-2}}\right).$$

On constate, comme au théorème I, que la série converge absolument en tout point à distance finie du demi-plan $\sigma > \sigma^{\varphi}_{\mathcal{H}} - \eta$.

On a

$$\varphi^{\star}_{\mathrm{N}-1}(s) = \varphi^{\star}_{\mathrm{N}-1,\mathrm{N}-2}(s) + \mathcal{E}_{\mathrm{N}-1,\mathrm{N}-2}(s),$$

où $\mathcal{E}_{\mathrm{N}-1,\mathrm{N}-2}(s)$ est une fonction holomorphe dans le demi-plan $\sigma > \sigma^{\varphi}_{\mathcal{H}} - \eta$; les deux fonctions, $\varphi^{\star}_{\mathrm{N}-1}(s)$ et $\varphi^{\star}_{\mathrm{N}-1,\mathrm{N}-2}(s)$, ont le même ensemble singulier par rapport au demi-plan $\sigma > \sigma^{\varphi}_{\mathcal{H}} - \eta$.

On a

$$\begin{aligned}\Sigma b_{p,\mathrm{N}-1,\mathrm{N}-2}\, e^{-s\mu_{p,\mathrm{N}-1,\mathrm{N}-2}} &= \Sigma b'_{p,\mathrm{N}-1}\, e^{-s\mu'_{p,\mathrm{N}-1}} + \Sigma b'_{p,\mathrm{N}-2}\, e^{-s\mu'_{p,\mathrm{N}-2}} \\ &\quad + \Sigma\left(b_{p_{\nu_j}+\mathrm{N}-1} + b_{p_{\nu_j}+\mathrm{N}-2}\right) e^{-s\mu_{p_{\nu_j}+\mathrm{N}-2}} + \mathcal{E}_{\mathrm{N}-1,\mathrm{N}-2}(s) \\ &= \Sigma b'_{p,\mathrm{N}-1}\, e^{-s\mu'_{p,\mathrm{N}-1}} + \Sigma \mathrm{B}_{p,\mathrm{N}-2}\, e^{-s\mu_{p,\mathrm{N}-2}} + \mathcal{E}_{\mathrm{N}-1,\mathrm{N}-2}(s)\end{aligned}$$

(on écrira aussi la série $\Sigma \mathrm{B}_{p,\mathrm{N}-2}\, e^{-s\mu_{p,\mathrm{N}-2}}$ sous la forme $\Sigma \mathrm{B}_{p_\nu+\mathrm{N}-2}\, e^{-s\mu_{p_\nu+\mathrm{N}-2}}$) [29] avec $\mathrm{B}_{p_0,\mathrm{N}-2} = b_{p_0,\mathrm{N}-2}$ si pour l'indice $p_0$ considéré, $\mu_{p_0,\mathrm{N}-2} \in \{\mu'_{p,\mathrm{N}-2}\}$, et

$$\mathrm{B}_{p_{\nu_j}+\mathrm{N}-2} = b_{p_{\nu_j}+\mathrm{N}-1} + b_{p_{\nu_j}+\mathrm{N}-2}.$$

Désignons par $\{\mu'_{p,\mathrm{N}-1,\mathrm{N}-2}\}$ l'ensemble $\{\mu_{p,\mathrm{N}-2}\} \cup \{\mu'_{p,\mathrm{N}-1}\}$ ordonné en une suite strictement croissante, et posons

$$\Sigma b'_{p,\mathrm{N}-1}\, e^{-s\mu'_{p,\mathrm{N}-1}} + \Sigma \mathrm{B}_{p,\mathrm{N}-2}\, e^{-s\mu_{p,\mathrm{N}-2}} = \Sigma b'_{p,\mathrm{N}-1,\mathrm{N}-2}\, e^{-s\mu'_{p,\mathrm{N}-1,\mathrm{N}-2}}$$

($b'_{p,\mathrm{N}-1,\mathrm{N}-2}$ est la nouvelle notation du coefficient associé à la nouvelle notation de l'exposant $\mu'_{p,\mathrm{N}-1,\mathrm{N}-2}$ qui figure dans l'une ou l'autre des deux séries du premier membre). L'égalité a un sens pour $\sigma > \sigma^{\varphi}_{\mathrm{A}}$ (et le conserve dans un prolongement analytique convenable des séries composantes).

---

(29) La sommation étant, bien entendu, restreinte à la suite des indices des segments de $\mathrm{E}(q_0, \{\mu_p\})$ contenant un point de $\{\mu_{p,\mathrm{N}-2}\}$.

On a

$$\Sigma b_{p,\,N-1,\,N-2}\, e^{-s\mu_{p,\,N-1,\,N-2}} = \Sigma b'_{p,\,N-1,\,N-2}\, e^{-s\mu'_{p,\,N-1,\,N-2}} + \mathcal{E}_{N-1,\,N-2}(s).$$

L'assertion du lemme IV est établie si $\{\mu_p\} \simeq \{\mu_{p,\,N-1,\,N-2}\}$ avec $N = 2$. Si $N \geqq 3$, considérons maintenant

$$\sum b_{p,\,N-1,\,N-2,\,N-3}\, e^{-s\mu_{p,\,N-1,\,N-2,\,N-3}} = \sum_{t=1}^{3} \sum b_{p,\,N-t}\, e^{-s\mu_{p,\,N-t}}.$$

(les notations qui suivent parlent d'elles-mêmes; pour ne pas introduire d'inutiles longueurs dans le texte, nous ne rappellerons pas leurs significations très analogues à celles ci-dessus; ce qui a été dit est traduisible sans ambiguïté, comme le lecteur s'en rendra compte, pour celles ci-dessous).

On a, pour $\sigma > \sigma^{\varphi}_{A}$,

$$\begin{aligned}&\Sigma b_{p,\,N-1,\,N-2,\,N-3}\, e^{-s\mu_{p,\,N-1,\,N-2,\,N-3}}\\ &\quad = \Sigma b_{p,N-3}\, e^{-s\mu_{p,\,N-3}} + \Sigma B_{p,\,N-2}\, e^{-s\mu_{p,\,N-2}} + \Sigma b'_{p,N-1}\, e^{-s\mu'_{p,\,N-1}} + \mathcal{E}_{N-1,\,N-2}(s);\end{aligned}$$

si $\{\mu_{p,\,N-3}\} \cup \{\mu'_{p,\,N-1}\}$ ordonné en une suite strictement croissante est à indice de condensation égal à $+\infty$, alors en procédant pour

$$\Sigma b_{p,N-3}\, e^{-s\mu_{p,\,N-3}} + \Sigma b'_{p,\,N-1}\, e^{-s\mu'_{p,\,N-1}}$$

comme pour

$$\Sigma b_{p,N-2}\, e^{-s\mu_{p,\,N-2}} + \Sigma b_{p,N-1}\, e^{-s\mu_{p,\,N-1}},$$

on aura

$$\Sigma b_{p,N-3}\, e^{-s\mu_{p,\,N-3}} + \Sigma b'_{p,\,N-1}\, e^{-s\mu'_{p,\,N-1}} = \Sigma B_{p,\,N-3}\, e^{-s\mu_{p,N-3}} + \Sigma b''_{p,\,N-1}\, e^{-s\mu''_{p,\,N-1}} + \mathcal{E}_{N-1,\,N-3}(s),$$

où $\mathcal{E}_{N-1,\,N-3}(s)$ est une fonction holomorphe dans le demi-plan $\sigma > \sigma^{\varphi}_{\mathcal{K}} - \eta$, et où $\{\mu_{p,\,N-3}\} \cup \{\mu''_{p,\,N-1}\}$ est ordonné en une suite à indice de condensation fini.

De même, si $\{\mu_{p,\,N-3}\} \cup \{\mu_{p,\,N-2}\}$ ordonné en une suite strictement croissante est à indice de condensation égal à $+\infty$, alors, en procédant encore une fois comme ci-dessus, pour la somme

$$\Sigma B_{p,\,N-3}\, e^{-s\mu_{p,\,N-3}} + \Sigma B_{p,N-2}\, e^{-s\mu_{p,\,N-2}},$$

on aura

$$\Sigma B_{p,\,N-3}\, e^{-s\mu_{p,\,N-3}} + \Sigma B_{p,N-2}\, e^{-s\mu_{p,\,N-2}} = \Sigma \mathcal{B}_{p,N-3}\, e^{-s\mu_{p,\,N-3}} + \Sigma B'_{p,\,N-2}\, e^{-s\mu'_{p,\,N-2}} + \mathcal{E}_{N-2,\,N-3}(s),$$

où $\mathcal{E}_{N-2,\,N-3}(s)$ est une fonction holomorphe dans $\sigma > \sigma^{\varphi}_{\mathcal{K}} - \eta$, et où

$$\{\mu_{p,\,N-3}\} \cup \{\mu'_{p,\,N-2}\}$$

est ordonné en une suite à indice de condensation fini. En résumé, on a

$$\begin{aligned}&\Sigma b_{p,\,N-1,\,N-2,\,N-3}\, e^{-s\mu_{p,\,N-1,\,N-2,\,N-3}}\\ &\quad = \Sigma \mathcal{B}_{p,\,N-3}\, e^{-s\mu_{p,\,N-3}} + \Sigma B'_{p,N-2}\, e^{-s\mu'_{p,\,N-2}} + \Sigma b''_{p,\,N-1}\, e^{-s\mu''_{p,\,N-1}} + \mathcal{E}_{N-1,\,N-2,\,N-3}(s),\end{aligned}$$

où

$$\mathcal{E}_{N-1,N-2,N-8}(s) = \mathcal{E}_{N-1,N-2}(s) + \mathcal{E}_{N-1,N-3}(s) + \mathcal{E}_{N-2,N-3}(s),$$

c'est-à-dire que

$$\Sigma b_{p,N-1,N-2,N-3}\, e^{-s\mu_{p,N-1,N-2,N-3}} = \Sigma b'_{p,N-1,N-2,N-3}\, e^{-s\mu'_{p,N-1,N-2,N-3}} + \mathcal{E}_{N-1,N-2,N-3}(s),$$

où $\{\mu'_{p,N-1,N-2,N-3}\}$, eu égard au lemme II, est à indice de condensation fini, et résulte de $\{\mu_{p,N-1,N-2,N-3}\}$ par extraction de cette dernière suite d'une suite à densité nulle. Le théorème est établi si $\{\mu_p\} \bumpeq \bigcup_l \{\mu_{p,l}\}$, avec $N = 3$, sinon on poursuivra par l'étude du cas $\sum_{l=1}^{l=4} \sum b_{p,N-l}\, e^{-s\mu_{p,N-l}}$. De toute manière, l'assertion du théorème est légitime après un nombre fini d'opérations de cette espèce.

Les lemmes antérieurs permettent de ramener l'étude des singularités de la fonction $\psi(s) = \Sigma b_p \theta(\mu_p) e^{-s\mu_p}$ au seul cas où les deux conditions, $\{\mu_p\} \cap \{\rho_p\} = 0$ et $\{\mu_p\} \cup \{\rho_p\}$ à indice de condensation fini, sont simultanément vérifiées.

Si $\{\mu_p\} \cap \{\rho_p\} \neq 0$, on peut cependant toujours choisir (et d'une infinité de manières) une suite infinie positive strictement croissante $\{\lambda_p\}$ telle que

$$\{\lambda_p\} \cap \{\rho_p\} = 0, \tag{1}$$

chaque $\lambda_p$ étant suffisamment voisin mais distinct du terme $\mu_p$ de même indice pour que

$$\lim_{p \to \infty} (\lambda_p - \mu_p) = 0 \tag{2}$$

et qu'on ne puisse extraire de la suite des couples $\{\lambda_p, \mu_p\}$ une sous-suite de couples $\{\lambda_{p_j}, \mu_{p_j}\}$ qui, ordonnée en une suite strictement croissante, soit à indice de condensation fini ([30]).

(2) entraîne que $\{\lambda_p\}$ est une suite « presque régulière » et que

$$\{\lambda_p\} \bumpeq \bigcup_l \{\lambda_{p,l}\} \qquad (0 \leqq l \leqq N-1).$$

Puisque $\{\mu_p\}$ est mesurable à densité D, la suite $\{\lambda_p\}$ est aussi mesurable à densité D. Ces assertions sont très faciles à établir (la dernière est triviale).

Le cas trivial où l'intersection $\{\mu_p\} \cap \{\rho_p\}$ se réduit à un ensemble fini (soit $\mu_{p_1} < \mu_{p_2} < \ldots < \mu_{p_T}$ cet ensemble) s'étudie de la même façon que celui où l'intersection est vide; en effet, la suppression d'un nombre fini de termes

---

([30]) Si $\{\mu'_n\}$ est la suite partielle intersection de $\{\mu_p\}$ et $\{\rho_p\}$, on peut se proposer de choisir $\lambda_p = \mu_p$ pour chaque valeur de l'indice $p$ telle que $\mu_p \notin \{\mu'_n\}$. Un tel choix exige une modification légère, d'ailleurs évidente, de la condition (2); bien que plus naturel que celui fait ci-dessus, il ne simplifie pas la démonstration qui suit.

dans la série définissant $\psi(s)$ est sans influence sur le problème traité. Il se présente évidemment comme cas particulier du cas général ci-dessus et, à ce titre, on peut d'ailleurs choisir la suite strictement croissante $\{\lambda_p\}$, $p \geqq 1$, telle que

$$\lambda_p = \mu_p \quad \text{pour} \quad p \neq p_j \quad (1 \leqq j \leqq T), \quad \text{avec} \quad \lambda_{p_j} \notin \{\rho_p\}.$$

Considérons $\{\mu_p\} \cup \{\rho_p\}$ si $\{\mu_p\} \cap \{\rho_p\} = 0$, sinon considérons $\{\lambda_p\} \cup \{\rho_p\}$, à l'exclusion de l'autre ensemble. Convenons, pour éviter deux notations, de représenter par $\{\nu_p\}$, soit la suite $\{\mu_p\}$, soit la suite $\{\lambda_p\}$; précisons que, préliminairement à toute démonstration qui suit, la suite $\{\nu_p\}$ désignera la suite $\{\mu_p\}$ si $\{\mu_p\} \cap \{\rho_p\} = 0$, sinon $\{\nu_p\}$ désignera une certaine suite $\{\lambda_p\}$ choisie comme ci-dessus une fois pour toutes et qui interviendra dans les démonstrations à la place de la suite $\{\mu_p\}$.

Du choix de la suite $\{\lambda_p\}$ et de cette convention d'écriture, il résulte que $\varphi(s) = \varphi^\star(s) + \mathcal{E}(s)$, où $\varphi^\star(s) = \Sigma b_p e^{-s\nu_p}$ admet $\sigma_{\mathcal{C}}^{\varphi^\star} = \sigma_{\mathcal{C}}^{\varphi}$, $\sigma_{\mathcal{H}}^{\varphi^\star} = \sigma_{\mathcal{H}}^{\varphi}$, et où $\mathcal{E}(s)$ est une fonction entière [propriété que l'on démontre comme au théorème I et qui résulte de la propriété (2) de $\{\lambda_p\}$] pouvant se réduire à la constante zéro (dans le cas où $\{\lambda_p\} \equiv \{\mu_p\}$, c'est-à-dire où $\{\mu_p\} \cap \{\rho_p\} = 0$) ou à un polynome de Dirichlet (cas où $\{\mu_p\}$ et $\{\rho_p\}$ n'ont en commun qu'un nombre fini de termes).

En vertu du lemme IV, on peut extraire de la suite $\{\nu_p\}$, si celle-ci est à indice de condensation égal à $+\infty$, une suite partielle $\{\nu'_p\}$ « presque régulière » (de même densité D que $\{\nu_p\}$ et que $\{\mu_p\}$ puisque $\{\mu_p\}$ est mesurable) de sorte qu'on ait

$$\varphi^\star(s) = \chi(s) + \mathcal{E}_1(s),$$

où $\chi(s) = \Sigma b'_p e^{-s\nu'_p}$ admet $\sigma_{\mathcal{C}}^{\chi} \leqq \sigma_{\mathcal{C}}^{\varphi^\star}$, $\sigma_{\mathcal{H}}^{\chi} = \sigma_{\mathcal{H}}^{\varphi^\star}$, et où $\mathcal{E}_1(s)$ est une fonction holomorphe dans le demi-plan $\sigma > \sigma_{\mathcal{H}}^{\varphi^\star} - \eta$, $\eta > 0$ arbitraire fini (la suite $\{\nu'_p\}$ dépendant du choix de $\eta$).

[Si $\{\nu_p\}$ est à indice de condensation fini, alors $\{\nu'_p\} \equiv \{\nu_p\}$, et par conséquent $\chi(s) \equiv \varphi^\star(s)$, $\mathcal{E}_1(s) \equiv 0$.]

Pour $\sigma > \sigma_{\Lambda}^{\varphi}$, on a

$$\psi(s) = \sum_p b_p \theta(\mu_p) e^{-s\mu_p} = \sum_r \gamma_r \varphi^{(r)}(s) = \sum \gamma_r \{\chi(s) + \mathcal{E}(s) + \mathcal{E}_1(s)\}^{(r)}$$

$$= \sum \gamma_r \chi^{(r)}(s) + \sum \gamma_r \{\mathcal{E}(s) + \mathcal{E}_1(s)\}^{(r)} = \psi^\star(s) + \mathcal{E}^\star(s),$$

où $\mathcal{E}^\star(s)$ est holomorphe dans $\sigma > \sigma_{\mathcal{H}}^{\varphi} - \eta$ et $\psi^\star(s) = \Sigma b'_p \theta(\nu'_p) e^{-s\nu'_p}$ admet $\sigma_{\mathcal{C}}^{\psi^\star} \leqq \sigma_{\mathcal{C}}^{\varphi}$.

La suite $\{\nu'_p\}$ satisfait à $\{\nu'_p\} \cap \{\rho_p\} = 0$; si, en outre, l'ensemble $\{\nu'_p\} \cup \{\rho_p\}$, ordonné en une suite strictement croissante, est à indice de condensation fini, on est ramené aux conditions dans lesquelles la propriété de G. Pólya a été établie. Si donc on suppose fausse l'assertion du théorème II, alors le point $\beta$ régulier pour $\psi(s)$ est aussi régulier pour $\psi^*(s)$ et, eu égard à la démonstration faite au début, le point $\beta$ est aussi régulier pour la fonction $\chi(s)$; il est donc régulier pour la fonction $\varphi^*(s)$. Le point $\beta$ serait en définitive régulier pour $\varphi(s)$. La contradiction achève d'établir le théorème sous la condition que $\{\nu'_p\}\cup\{\rho_p\}$ est à indice de condensation fini.

Notons $\delta_\mu$, $\delta_\rho$, $\delta_{\mu\rho}$, $\delta_{\nu'}$ respectivement les indices de condensation des suites $\{\mu_p\}$, $\{\rho_p\}$, $\{\mu_p\}\cup\{\rho_p\}$, $\{\nu'_p\}$.

Le théorème a été prouvé directement dans le cas

$$\{\mu_p\}\cap\{\rho_p\}=\emptyset, \qquad \delta_\mu<\infty, \qquad \delta_\rho<\infty, \qquad \delta_{\mu\rho}<\infty.$$

On a ramené le cas

$$\{\mu_p\}\cap\{\rho_p\}\neq\emptyset, \qquad \delta_\mu=\infty, \qquad \delta_\rho<\infty$$

(avec évidemment $\delta_{\mu\rho}=\infty$) au cas

$$\{\nu'_p\}\cap\{\rho_p\}=\emptyset, \qquad \delta_{\nu'}<\infty, \qquad \delta_\rho<\infty, \qquad \delta_{\nu'\rho}\leqq\infty.$$

Rappelons une fois pour toutes que le cas $\{\mu_p\}\cap\{\rho_p\}\neq\emptyset$ se ramène au cas $\{\nu_p\}\cap\{\rho_p\}=\emptyset$,

Il reste à analyser les différents cas :

(*a*) $\delta_\nu<\infty, \quad \delta_\rho<\infty, \quad \delta_{\nu\rho}=\infty,$

(*b*) $\delta_\nu=\infty, \quad \delta_\rho<\infty, \quad \delta_{\nu\rho}=\infty,$

(*c*) $\delta_\nu<\infty, \quad \delta_\rho=\infty, \quad \delta_{\nu\rho}=\infty,$

(*d*) $\delta_\nu=\infty, \quad \delta_\rho=\infty, \quad \delta_{\nu\rho}=\infty.$

Or, la méthode ci-dessus ramène les cas (*b*) et (*d*) aux cas

(*b'*) $\delta_{\nu'}<\infty, \quad \delta_\rho<\infty, \quad \delta_{\nu'\rho}\leqq\infty,$

(*d'*) $\delta_{\nu'}<\infty, \quad \delta_\rho=\infty, \quad \delta_{\nu'\rho}=\infty.$

L'analyse de (*b'*) et (*d'*) se ramène à celle de (*a*) et (*c*).

Analysons maintenant le cas (*a*).

La propriété suivante s'établit facilement :

$\eta>\delta_\rho$ *étant une constante arbitraire finie fixée à l'avance, on peut extraire de la suite* $\{\nu_p\}$ *une suite partielle croissante* $\{\nu_{p_j}\}$ *à densité nulle et extraire de* $\{\rho_p\}$ *une suite partielle croissante* $\{\rho'_j\}$ *de sorte que :*

(1) *la suite des couples* $\{\nu_{p_j}, \rho'_j\}$ *ordonnée en une suite strictement croissante soit à indice de condensation infini;*

(2) *on ne peut extraire de la suite des couples* $\{\nu_{p_j}, \rho'_j\}$ *une sous-suite de couples formant une suite croissante à indice de condensation inférieur à* $\sigma^\varphi_{\mathcal{C}}-\sigma^\varphi_{\mathcal{H}}+\eta$;

(3) *la suite complémentaire à* $\{\nu_{p_j}\}$ *par rapport à* $\{\nu_p\}\cup\{\rho_p\}$ *est à indice de condensation fini.*

Notons $\{\nu'_p\}$ la suite strictement croissante complémentaire à $\{\nu_{p_j}\}$ par rapport à $\{\nu_p\}$. L'ensemble $\{\nu'_p\}\cup\{\rho_p\}$ ordonné en une suite croissante est à indice de condensation fini.

Posons

$$\Theta(z)=\varpi(z)\,\Theta^\star(z),\qquad\text{avec}\quad \varpi(z)=\Pi\left(1-\frac{z}{\rho'_j}\right)^{m'_j},$$

$m'_j$ étant l'ordre de multiplicité du zéro $\rho'_j$ de $\Theta(z)$.

On a, pour $\sigma>\sigma_{\mathcal{C}}^{\varphi}$ :

$$\psi_\star(s)=\psi_{\star1}(s)+\psi_{\star2}(s),\qquad \varphi^\star(s)=\varphi_1^\star(s)+\varphi_2^\star(s),$$

avec

$$\psi_\star(s)=\Sigma\, b_p\,\mathrm{P}(\nu_p)\,\varpi(\nu_p)\,\Theta^\star(\nu_p)\,e^{-s\nu_p},$$
$$\psi_{\star1}(s)=\Sigma\, b'_p\,\mathrm{P}(\nu'_p)\,\varpi(\nu'_p)\,\Theta^\star(\nu'_p)\,e^{-s\nu'_p},$$
$$\psi_{\star2}(s)=\Sigma\, b_{p_j}\mathrm{P}(\nu_{p_j})\varpi(\nu_{p_j})\Theta^\star(\nu_{p_j})\,e^{-s\nu_{p_j}},$$
$$\varphi^\star(s)=\Sigma\, b_p\,e^{-s\nu_p},\qquad \varphi_1^\star(s)=\Sigma\, b'_p\,e^{-s\nu'_p},\qquad \varphi_2^\star(s)=\Sigma\, b_{p_j}\,e^{-s\nu_{p_j}}.$$

[$b'_p$ est la nouvelle notation du coefficient associé à l'exposant $\nu'_p$ dans la série définissant $\varphi^\star(s)$].

Posons

$$\varphi^{\star\star}(s)=\varphi_1^{\star\star}(s)+\varphi_2^{\star\star}(s),$$

avec

$$\varphi_1^{\star\star}(s)=\Sigma\, b'_p\mathrm{P}(\nu'_p)\varpi(\nu'_p)\,e^{-s\nu'_p},$$
$$\varphi_2^{\star\star}(s)=\Sigma\, b_{p_j}\mathrm{P}(\nu_{p_j})\varpi(\nu_{p_j})\,e^{-s\nu_{p_j}}.$$

Eu égard à la propriété (2) du lemme ci-dessus, on a [comme on le constate facilement puisque $\varpi(z)$ est réel pour $z$ réel] :

$$\sigma_{\mathcal{H}}^{\varphi_2^{\star\star}}\leqq\sigma_{\mathcal{C}}^{\varphi_2^{\star\star}}\leqq\sigma_{\mathcal{H}}^{\varphi}-\eta,\qquad \sigma_{\mathcal{H}}^{\psi_{\star2}}\leqq\sigma_{\mathcal{C}}^{\psi_{\star2}}\leqq\sigma_{\mathcal{H}}^{\varphi}-\eta.$$

Les deux fontions, $\varphi^{\star\star}(s)$ et $\varphi_1^{\star\star}(s)$ ont, par rapport au demi-plan $\sigma>\sigma_{\mathcal{H}}^{\varphi}-\eta$, le même ensemble singulier. De même, les deux fonctions $\psi_\star(s)$ et $\psi_{\star1}(s)$ ont, par rapport au demi-plan $\sigma>\sigma_{\mathcal{H}}^{\varphi}-\eta$, le même ensemble singulier.

Supposons le point $\beta$ régulier pour $\psi(s)$; ce point est aussi régulier pour $\psi_\star(s)$ et $\psi_{\star1}(s)$ comme on le constate facilement.

Si $\beta$ est singulier pour $\varphi^{\star\star}(s)$, il est nécessairement « semi-isolé ». Mais comme $\{\nu'_p\}\cup\{\rho''_p\}$ (où $\{\rho''_p\}$ est la suite complémentaire à $\{\rho'_j\}$ par rapport à $\{\rho_p\}$) est à indice de condensation fini, et, eu égard à la démonstration ci-dessus, le point $\beta$ est aussi régulier pour $\varphi_1^{\star\star}(s)$ et donc pour $\varphi^{\star\star}(s)$. La contradiction entraîne que $\beta$ est singulier pour $\psi_{\star1}(s)$, $\psi_\star(s)$ et donc $\psi(s)$.

[Remarquons que le cas $\Theta^\star(z)\equiv1$, et donc $\varphi_1^{\star\star}(s)\equiv\psi_{\star1}(s)$, peut avoir lieu.]

Si $\beta$ est régulier pour $\varphi^{\star\star}(s)$, ce point est aussi régulier pour $\varphi_1^{\star\star}(s)$. On a

$$\sigma_{\mathcal{H}}^{\varphi_1^{\star\star}}\leqq\sigma_{\mathcal{H}}^{\varphi_1^{\star}}.$$

Si $\sigma_{\mathcal{H}}^{\varphi_2^*} < \sigma_{\mathcal{H}}^{\varphi_1^*}$ le point $\beta$ est « semi-isolé » pour $\varphi_1^*(s)$ et eu égard à la démonstration antérieure, ce cas « $\beta$ régulier pour $\varphi^{**}(s)$ » ne peut avoir lieu. Si $\sigma_{\mathcal{H}}^{\varphi_2^*} = \sigma_{\mathcal{H}}^{\varphi_1^*}$, on peut raisonner comme suit :

Posant

$$\Phi_1^{**}(\mathfrak{Z}) = \Sigma b''_p \mathrm{P}(\nu'_p)\varpi(\nu'_p)\, e^{-\mathfrak{Z}\nu'_p}, \qquad b''_p = b'_p\, e^{-\beta\nu'_p}, \qquad s = \mathfrak{Z} + \beta;$$

on a $x_{\mathcal{H}}^{\Phi_1^{**}} \leq 0$. Le point $\mathfrak{Z} = 0$ est régulier pour $\Phi_1^{**}(\mathfrak{Z})$; il existe alors un nombre $l$, $0 < l \leq \pi\mathrm{D}$, et une fonction $\Omega(z)$ holomorphe dans un secteur $\mathrm{S}(|\arg z| \leq \alpha,\ \alpha > 0)$ du plan de la variable complexe $z$ tels que

$$(a) \qquad |\Omega(z)| < e^{[(\pi\mathrm{D}-l)|\sin\omega| + \varepsilon]|z|}, \qquad z \in \mathrm{S},$$

$\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, $|z|$ suffisamment grand;

$$(b) \qquad \Omega(\nu'_p) = b''_p \mathrm{P}(\nu'_p)\varpi(\nu'_p)\mathrm{C}'_1(\nu'_p),$$

avec

$$\mathrm{C}_1(z) = \Pi\left(1 - \frac{z^2}{\nu'^2_p}\right).$$

on en déduit que $\Omega_1(z) = \Omega(z)\varpi_1(-z)$, avec $\varpi_1(z) = \Pi\left(1 - \frac{z}{\rho'_j}\right)$, satisfait à une condition du type $(a)$ et à la condition

$$(b') \qquad \Omega_1(\nu'_p) = b''_p \mathrm{P}(\nu'_p)\varpi^*(\nu'_p)\mathcal{C}'_1(\nu'_p),$$

où

$$\mathcal{C}_1(z) = \mathrm{C}_1(z)\varpi_1(z)\varpi_1(-z) \qquad \text{et} \qquad \varpi^*(z) = \Pi\left(1 - \frac{z}{\rho'_j}\right)^{m'_j - 1}.$$

[$\varpi^*(z)$ peut se réduire à la constante 1; les zéros $\rho'_j$ d'ordre 1 de $\varpi(z)$ n'y figurent plus].

Le point $\mathfrak{Z} = 0$ est donc régulier pour la fonction

$$\Phi_*(\mathfrak{Z}) = \sum \frac{\Omega_1(\nu_p^*)}{\mathcal{C}'_1(\nu_p^*)}\, e^{-\mathfrak{Z}\nu_p^*},$$

où l'on note $\{\nu_p^*\}$ l'ensemble $\{\nu'_p\} \cup \{\rho'_j\}$ ordonné en une suite strictement croissante.

Notant $\delta_{\nu^*}$ l'indice de condensation de $\{\nu_p^*\}$, on a pour $\mathfrak{Z}$ fini avec $\mathcal{R}\mathfrak{Z} > \delta_{\nu^*}$ :

$$\Phi_*(\mathfrak{Z}) = \Phi_{*1}(\mathfrak{Z}) + \mathcal{L}(\mathfrak{Z}),$$

avec

$$\mathcal{L}(\mathfrak{Z}) = \sum \frac{\Omega_1(\rho'_j)}{\mathcal{C}'_1(\rho'_j)}\, e^{-\mathfrak{Z}\rho'_j} \qquad \text{et} \qquad \Phi_{*1}(\mathfrak{Z}) = \sum b''_p \mathrm{P}(\nu'_p)\varpi^*(\nu'_p)\, e^{-\mathfrak{Z}\nu'_p}.$$

S'il est possible que $x_{\mathcal{H}}^{\mathcal{L}} < x_{\mathcal{H}}^{\Phi_{*1}}$, le point $\mathfrak{Z} = 0$ est régulier pour $\Phi_{*1}(\mathfrak{Z})$ et donc $\beta$ serait régulier pour la fonction $\varphi_{*1}(s) = \Sigma b'_p \mathrm{P}(\nu'_p)\varpi^*(\nu'_p)e^{-s\nu'_p}$. Si, par contre $x_{\mathfrak{X}}^{\mathcal{L}} = x_{\mathfrak{X}}^{\Phi_{*1}}$, alors $\mathfrak{Z} = 0$ est singulier du type « coupure » pour $\Phi_{*1}(\mathfrak{Z})$ et donc $\beta$ est singulier du type « coupure » pour $\varphi_{*1}(s)$.

Posons

$$\Phi_{**}(\mathfrak{Z}) = \Sigma(b_p e^{-\beta\nu_p}) \mathrm{P}(\nu_p) \varpi^*(\nu_p) e^{-\mathfrak{Z}\nu_p},$$
$$\Phi_{*2}(\mathfrak{Z}) = \Sigma\left(b_{p_j} e^{-\beta\nu_{p_j}}\right) \mathrm{P}(\nu_{p_j}) \varpi^*(\nu_{p_j}) e^{-\mathfrak{Z}\nu_{p_j}}.$$

On a

$$\Phi_{*1}(\mathfrak{Z}) = \Phi_{**}(\mathfrak{Z}) - \Phi_{*2}(\mathfrak{Z}) = \Phi_{*}(\mathfrak{Z}) - \mathcal{L}(\mathfrak{Z}),$$

et donc

$$\Phi_{*}(\mathfrak{Z}) = \Phi_{**}(\mathfrak{Z}) + \mathcal{L}(\mathfrak{Z}) - \Phi_{*2}(\mathfrak{Z}).$$

La fonction $\mathcal{L}(\mathfrak{Z}) - \Phi_{*2}(\mathfrak{Z})$ admet l'axe $x = x_{\mathfrak{X}}^{\mathcal{L}-\Phi_{*2}}$ pour frontière naturelle. Le seul cas possible est que le point $\mathfrak{Z} = 0$ soit régulier pour $\Phi_{**}(\mathfrak{Z})$, c'est-à-dire que $\beta$ soit régulier pour

$$\varphi_{**}(s) = \Phi_{**}(s - \beta).$$

En itérant, on est conduit à la contradiction que : $\beta$ régulier pour $\varphi^{**}(s)$ et $\sigma_{\mathfrak{X}}^{\varphi_2^*} = \sigma_{\mathfrak{X}}^{\varphi_1^*}$ entraînent que $\beta$ est régulier pour

$$\varphi_0^*(s) = \Sigma b_p \mathrm{P}_1(\nu_p) e^{-s\nu_p},$$

où $\mathrm{P}_1(z)$ est un certain polynome; ce qui est impossible.

Ainsi dans le cas $\delta_\nu < \infty$, $\delta_\rho < \infty$, $\delta_{\nu\rho} = \infty$, le point $\beta$ est encore singulier pour $\psi(s)$.

Il reste maintenant à analyser le cas

$$(c) \qquad \delta_\nu < \infty, \qquad \delta_\rho = \infty, \qquad \delta_{\nu\rho} = \infty.$$

Soit $q > 0$ fini quelconque fixé et soit $\mathrm{E}(q, \{\rho_p\})$ l'ensemble de voisinage de la suite $\{\rho_p\}$. On suppose la suite des segments disjoints constituant l'ensemble $\mathrm{E}(q, \{\rho_p\})$ numérotée 1, 2, 3, ..., $\nu$, ..., dans le sens de croissance des $\rho_p$. On considère le $\nu^{\text{ième}}$ segment; notons $\rho_{p_\nu}$ le plus petit des $\rho_p$ intérieurs à ce segment. Notons $\rho_{p_\nu+t}$, avec $1 \leqq t \leqq m_\nu$, les $m_\nu$ autres $\rho_p$ s'ils existent, de sorte que $\rho_{p_\nu} < \rho_{p_\nu+1} < \ldots < \rho_{p_\nu+m_\nu}$; $\rho_{p_\nu}$ et $\rho_{p_\nu+m_\nu}$ étant respectivement le plus petit et le plus grand des $\rho_p$ de ce $\nu^{\text{ième}}$ segment. On posera, pour achever de préciser,

$$p_\nu + m_\nu + 1 = p_{\nu+1}, \qquad p_1 = 1.$$

On a

$$\theta(z) = \mathrm{P}(z)\,\Theta(z).$$

Posons

$$\tau_t(z) = \prod_\nu \left(1 - \frac{z}{\rho_{p_\nu+t}}\right)^{n_{p_\nu+t}}, \qquad 0 \leqq t \leqq \overline{\text{borne}}\, m_\nu,$$

où $n_{p_\nu+t}$ est l'ordre de multiplicité du zéro $\rho_{p_\nu+t}$ de $\Theta(z)$,

$$\Theta(z) = \tau_0(z)\mathrm{T}_0(z), \qquad \mathrm{T}_{t-1}(z) = \tau_t(z)\mathrm{T}_t(z),$$
$$\psi_*^t(s) = \Sigma b_p \mathrm{P}(\nu_p) \mathrm{T}_t(\nu_p) e^{-s\nu_p}, \qquad \sigma > \sigma_{\mathfrak{C}}^{\varphi}.$$

Supposant fausse l'assertion du théorème II, $\beta$ est régulier pour $\psi(s)$. La suite $\{\rho_{p_\nu}\}$ étant « régulière », on est ramené au cas $\delta_\nu < \infty$, $\delta_\rho < \infty$. Eu égard aux résultats antérieurs, le point $\beta$ est alors régulier pour la fonction $\psi_\star^0(s)$. De la même manière, puisque $\{\rho_{p_\nu+1}\}$ est « régulière », le point $\beta$ est aussi régulier pour $\psi_\star^1(s)$. Le point $\beta$ est régulier pour $\psi_\star^l(s)$.

Puisqu'on se limite au cas borné $m_\nu = M_0 < \infty$, la suite $\{\psi_\star^l(s)\}$ se réduit à un ensemble fini; Il existe un nombre fini de suites infinies $\{\rho_{p_\nu+l}\}$. Il existe donc un entier $t_0$ tel que la fonction $\psi_\star^{t_0}(s) = \Sigma b_p P_1(\nu_p) e^{-s\nu_p}$, où $P_1(z)$ est un certain polynome, admet le point $\beta$ pour point régulier qui serait aussi régulier pour $\varphi^\star(s)$ et donc $\varphi(s)$. La contradiction établit le théorème.

Remarquons que la démonstration antérieure permet d'énoncer sous forme « dubitative » un théorème plus général contenant le précédent comme cas particulier.

THÉORÈME III. — *Dans les hypothèses* (1) *et* (2) *du théorème antérieur, s'il est possible que* $\beta \in S_\varphi^{\sigma_1}$, *avec* $\mathcal{R}\beta = \sigma_{\mathcal{H}}^\varphi$, *soit régulier pour* $\psi(s) = \Sigma b_p\, \theta(\mu_p) e^{-s\mu_p}$, *alors ce point* $\beta$ *est singulier du type « coupure » de « classe zéro » pour* $\varphi(s)$.

Les théorèmes I et II permettent d'énoncer :

THÉORÈME IV. — *Dans les hypothèses :*

(1) *la suite des exposants* $\{\mu_p\}$ *de la fonction* $\varphi(s) = \Sigma b_p e^{-s\mu_p}$, *avec* $\sigma_c^\varphi < \infty$, *est « presque régulière » mesurable à densité finie* D [$\varphi(s)$ *n'admettant pas son axe d'holomorphie*, $\sigma = \sigma_{\mathcal{H}}^\varphi > -\infty$, *pour frontière naturelle*];

(2) *la fonction* $\theta(z)$ *est entière de genre zéro* (*et donc du type exponentiel minimum*) *à zéros tous réels* (*sauf un nombre fini au plus*) *et à ordre de multiplicité uniformément borné* (la suite des zéros positifs étant « presque régulière »).

*Alors si* $\beta \in S_\varphi^{\sigma_1}$ *est « semi-isolé sur l'axe d'holomorphie » de* $\varphi(s)$, *ce point est aussi singulier pour* $\psi(s)$.

THÉORÈME V. — *Dans les hypothèses* (1) *et* (2) *du théorème* IV, *s'il est possible que* $\beta \in S_\varphi^{\sigma_1}$, *avec* $\mathcal{R}\beta = \sigma_{\mathcal{H}}^\varphi$, *soit régulier pour* $\psi(s)$, *alors ce point* $\beta$ *est singulier du type « coupure » de « classe zéro » pour* $\varphi(s)$.

La méthode utilisée au théorème II, avec quelques modifications convenables permet d'établir les propriétés suivantes :

THÉORÈME (VI.1) [31]. — *Dans les hypothèses :*

(1) *La suite* $\{\mu_p\}$ *des exposants de la série* $\varphi(s) = \Sigma b_p e^{-s\mu_p}$, *avec* $\sigma_c^\varphi < \infty$, *est mesurable à densité finie* D > 0;

[31] Ce théorème est une forme intéressante (mais moins générale) d'un théorème classique de Cramer-Pólya-Bernstein. La méthode proposée est non seulement intéressante par elle-même, mais elle a l'avantage de conserver à tout ce travail son unité.

(2) *Posons* $C(z) = \Pi\left(1 - \frac{z^2}{\mu_{p_n}^2}\right)$, *où la suite strictement croissante* $\{\mu_{p_n}\}$ *est une suite partielle mesurable à densité* $\Delta \geqq 0$, *extraite de* $\{\mu_p\}$ *et « presque régulière »;*

(3) *Notant* $\{\mu'_p\}$ *la suite strictement croissante complémentaire à* $\{\mu_{p_n}\}$ *par rapport à* $\{\mu_p\}$, *l'écart des deux suites* $\{\mu_{p_n}\}$ *et* $\{\mu'_p\}$ *est positif et la suite* $\{\mu'_p\}$ *est à indice de condensation nul. Alors tout point* $\beta$ *de l'axe* $\sigma = \sigma_{\mathcal{H}}^{\varphi}$, *centre d'un intervalle situé sur cet axe de longueur* $2l(l > 0)$ *régulier pour* $\varphi(s)$, *est aussi centre d'un intervalle de longueur* $2(l - \Pi\Delta)$ *régulier pour* $\psi(s)$ *si* $l > \Pi\Delta$.

Il est à peine besoin de mentionner que seule l'inégalité stricte (à l'exclusion de l'inégalité large), $\Delta < D$, est légitime puisque $l \leqq \Pi D$.

Théorème (VI.2). — *Dans les hypothèses* (1), (2) *et* (3) *du théorème ci-dessus, et si* $\Delta = 0$, *la fonction* $\psi(s) = \Sigma b_p C(\mu_p) e^{-s\mu_p}$ *est régulière en tout point de l'axe* $\sigma = \sigma_{\mathcal{H}}^{\varphi}$ *où la fonction* $\varphi(s)$ *est régulière.*

Rompant avec la méthode du théorème II, on peut, dans le cas où l'indice de condensation de la suite $\{\mu_p\}$ est fini, obtenir par voie plus rapide le :

Théorème (VI.3). — *Dans les hypothèses* (1), (2) *et* (3) *du théorème* (VI.1) *et si* $\Delta = 0$, *alors tout point singulier « semi-isolé sur l'axe d'holomorphie » pour* $\varphi(s)$ *est aussi singulier pour la fonction* $\psi(s)$.

Les théorèmes (VI.1) et (VI.2) permettent d'énoncer des compléments à certains théorèmes classiques relatifs à l'influence de la nature de la suite des coefficients $\{b_p\}$ sur les singularités de la fonction. Ces théorèmes et d'autres feront l'objet d'une publication ultérieure.